UFSCar – Cálculo 2. Segunda lista de exercícios.
Prof. João C.V. Sampaio e Yolanda K. S. Furuya

Curvas de nível, de funções de duas variáveis

Para cada uma das funções dadas, determine seu domínio e esboce algumas (ao menos quatro) de suas curvas de nível. Determine também o conjunto-imagem da função (*Sugestão.* O valor real k está no conjunto imagem da função f somente quando a curva de nível de f, correspondente a $z = k$, é não vazia.) Tem algum ponto onde visivelmente a função não terá limite? (procure por pontos de acumulação do domínio onde convergem curvas de níveis distintos).

1. $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$.
2. $f(x, y) = x + 3y$.
3. $f(x, y) = 1 - x^2$.
4. $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - 4y^2}$.
5. $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$.
6. $f(x, y) = xy$.
7. $\varphi(x, y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}$.
8. $h(x, y) = x^2 + y^2 - 4x$.
9. $g(x, y) = \sqrt{y}$.

Limites de funções de duas variáveis

Verifique que cada um dos seguintes limites é igual a *zero*. *Sugestão.* Mostre que o limite $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} |f(x, y)|$ é zero, fazendo primeiramente uma majoração do tipo $|f(x, y)| \leq |g(x, y)|$, com $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} |g(x, y)|$ claramente igual a zero. Ou então utilizando coordenadas polares no plano Oxy.

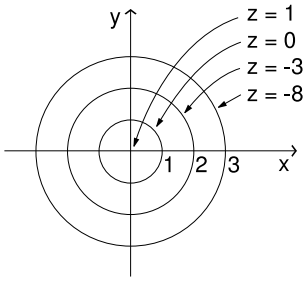
1. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$.
2. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} x^3 \operatorname{sen} \frac{1}{x+y-1}$.
3. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{1-\cos xy}{xy^2}$.
4. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^4\sqrt{y}}{x^4+y^4}$.
5. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{|x|+|y|}$.
6. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 4}} \frac{x^2y^2-8x^3\sqrt{y}}{x^2+y^2-1}$.

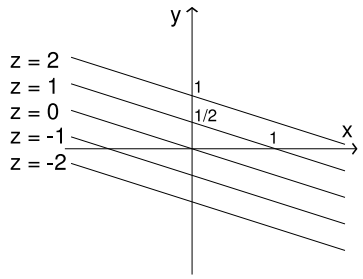
Respostas

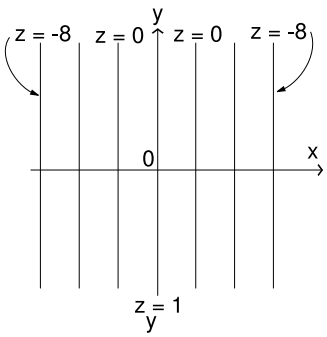
Domínios e conjuntos-imagens.

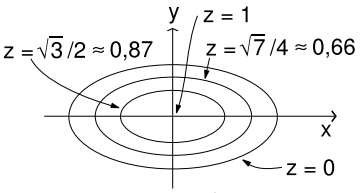
1. $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}^2$, $\mathrm{Im}(f) =]-\infty, 1]$.
2. $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}^2$, $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$
3. $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}^2$, $\mathrm{Im}(f) =]-\infty, 1[$.
4. $\mathrm{Dom}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x^2 + 4y^2 \leq 1\}$, $\mathrm{Im}(f) = [0, 1]$.
5. $\mathrm{Dom}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq -x\}$, $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$.
6. $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}^2$, $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$
7. $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, $\mathrm{Im}(f) = [0, 1]$.
8. $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}^2$, $\mathrm{Im}(f) = [-4, +\infty[$.
9. $\mathrm{Dom}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$, $\mathrm{Im}(f) = [0, +\infty[$.

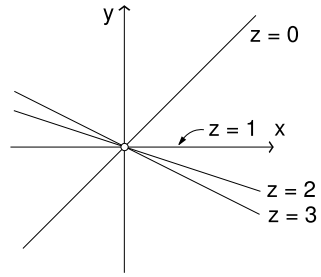
Esboços de curvas de nível.

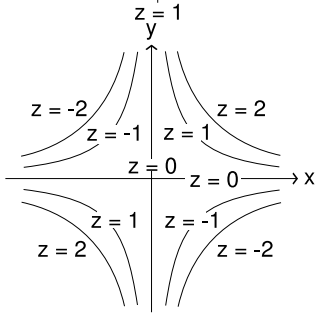
1.


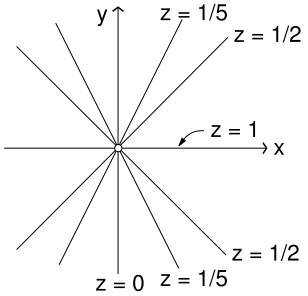
2.


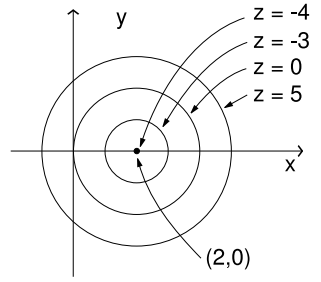
3.


4.


5.


6.


7.


8.


9.
