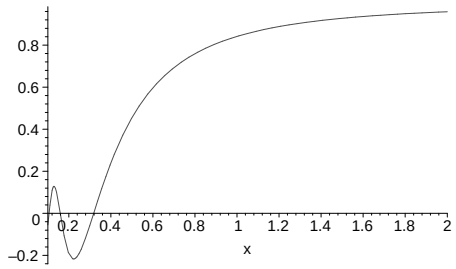
Curvas e superfícies

Yolanda K. S. Furuya

21 de agosto de 2007

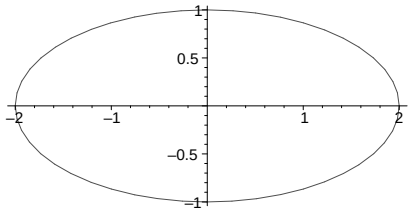
Antes de introduzirmos as curvas e superfícies, lembremos que funções trabalhadas em Cálculo 1, definidas num subconjunto de $\mathbb{R}$ e com valores em $\mathbb{R}$ são denominadas funções reais a 1 (uma) variável real: $f : D \to \mathbb{R}$, com $f(x) = y \in \mathbb{R}$ definida para todo $x \in D$.



O gráfico de f, dado por
$Graf(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in D\}$
é o primeiro exemplo de curva no plano.

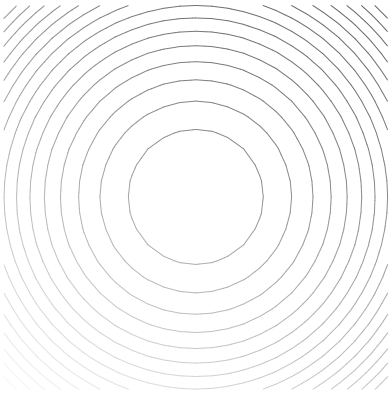
Ao lado, $f(x) = x\,\mathrm{sen}(1/x)$, em $D = [0.1,\ 2]$.

Utilizando várias dessas funções definidas num mesmo em $D \subset \mathbb{R}$, podemos obter as chamadas *funções vetoriais*: $r : D \to \mathbb{R}^n$, com $r(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(s)) \in \mathbb{R}^n$ para cada $x \in D$, onde $f_1 : D \to \mathbb{R}$, $\ldots$, $f_n : D \to \mathbb{R}$ são funções reais a 1 variável.



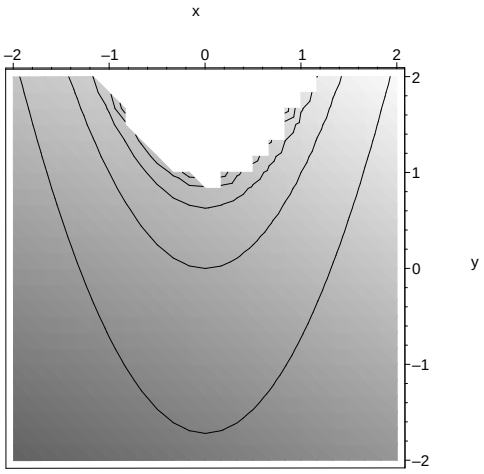
Por exemplo, $r(t) = (2\cos(t), \mathrm{sen}(t))$, $t \in [0, 2\pi]$ define uma função vetorial que descreve no plano Oxy uma elipse de semi-eixos 2 e 1, centrado na origem (um exemplo de curva, parametrizada).

Agora, se $D \subset \mathbb{R}^2$ e para cada $(x, y) \in D$ associamos um único $z = f(x, y) \in \mathbb{R}$, temos uma *função real a 2 variáveis reais*, definida no domíno D. Muitas vezes definimos a expressão $f(x, y)$ e deixamos implicito que o domínio D é onde a expressão faz sentido. Vimos exemplos em Geometria Analítica, como $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ definida para $D = \mathbb{R}^2$, uma função polinomial de grau 2 nas variáveis x e y. O conjunto $C_0 = \{(x, y) \in D \mid f(x, y) = 0\}$ descreve a circunferência de centro (0,0) e raio 1 em $D = \mathbb{R}^2$. A equação $f(x, y) = 0$, ou seja, $x^2 + y^2 - 1 = 0$ é chamada equação da circunferência. Neste caso, dizemos que a circunferência é a *curva de nível 0* de f e também que ela está sendo *definida implicitamente* pela equação.



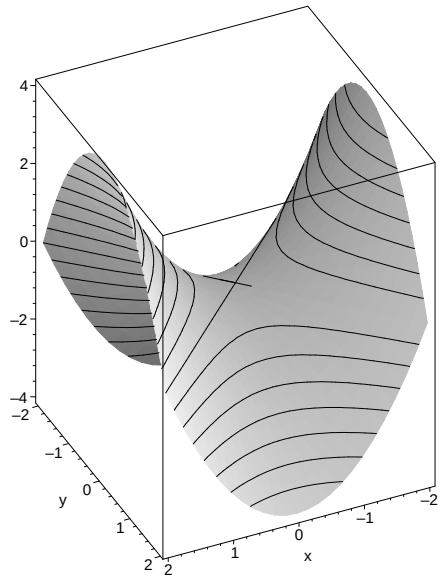
Curvas de nível
$C_k = \{(x, y) \in D \mid f(x, y) = k\}$
da função $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$
restrita ao domínio $D = [-2, 2]] \times [-2, 2]$.

Já a função dada pela expressão $f(x, y) = \ln(x^2 - y + 1)$ tem seu domínio restrito pela condição $x^2 - y + 1 > 0$ imposta pela função ln. A curva de nível 0 é dada pela condição $f(x, y) = 0$ e portanto $\ln(x^2 - y + 1) = 0$, donde $x^2 - y + 1 = e^0 = 1$, o que dá a parábola $y = x^2$. Para cada $k \in \mathbb{R}$, o conjunto dos pontos do plano definido pela equação $f(x, y) = 0$ é chamada de curva de nível k de f (em geral é uma boa curva, mas nem sempre)



Domínio de $f(x, y) = \ln(x^2 - y + 1)$ esboçado pela vista pelo topo do seu gráfico.
A fronteira do domínio está sendo aproximada pelas curvas de nível $k \to -\infty$.

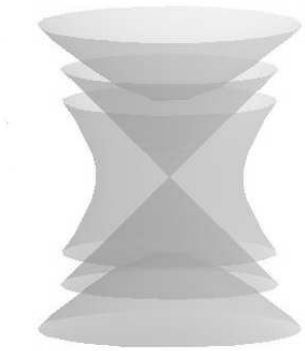
O gráfico de uma função real a duas variáveis reais $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é o conjunto de pontos do espaço da forma $(x, y, f(x, y))$, onde $(x, y) \in D$. Em geral é uma superfície no espaço.



Por exemplo, se $f(x, y) = x^2 - y^2$, o gráfico é o parabolóide hiperbólico $z = x^2 - y^2$, também conhecido como sela.
A equação $z = x^2 - y^2$ é a equação do parabolóide hiperbólico e dizemos que esta equação define implicitamente a superfície.

Observe que o conjunto formado pelos pontos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ que satisfazem a equação $z = f(x, y)$ pode ser interpretada também como o conjunto dos pontos onde $f(x, y) - z = F(x, y, z) = 0$. Neste caso, $F(x, y, z)$ define um exemplo de *função real a 3 variáveis reais*. O domínio desta F é o conjunto dos pontos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ onde (x, y) está no domínio D de f. e $z \in \mathbb{R}$.

Em geral, uma função real f a 3 variáveis reais é definido num domínio $D \subset \mathbb{R}^3$ e tem valores em $\mathbb{R}$. O conjunto do pontos $(x, y, z) \in D$ que satisfazem a equação $f(x, y, z) = k$ (onde k é uma constante) é chamada de *superfície de nível* k de f e, em geral, é uma superfície, definida implicitamente pela equação $f(x, y, z) = k$. Como não é viável esboçar o gráfico de uma função de 3 variáveis, funções de 3 variáveis são estudadas através das superfícies de nível (e mais outros elementos).

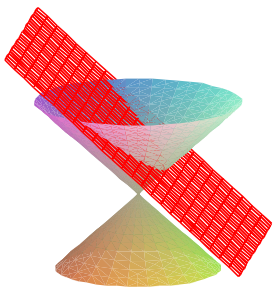


Superfícies de nível da função $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$

- $k = -1$: hiperbolóide de 2 folhas
- $k = 0$: cone
- $k = 1$: hiperbolóide de 1 folha

Outra forma de descrever uma superfície, além de superfície de nível de função real de 3 variáveis reais ou gráfico de função real a duas variáveis reais, é a parametrização com 2 parâmetros. Neste caso, obtemos a superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ como um conjunto de pontos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ onde as coordenadas $x = x(t, s)$, $y = y(t, s)$ e $z = z(t, s)$ são dadas por funções a 2 variáveis reais t e s, chamados parâmetros. Por exemplo, a esfera de raio R e centro na origem, pode ser dada parametricamente por $x = R\,\mathrm{sen}(t)\cos(s)$, $y = R\,\mathrm{sen}(t)\,\mathrm{sen}(s)$ e $z = R\cos(t)$, com $t \in [0, \pi]$ e $s \in [-\pi, pi]$.

Construímos acima uma função definida num subconjunto do plano e com imagem no espaço: $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Um caso particular de uma função $F : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Quando $m = 3$ e $n = 2$, uma equação do tipo $F(x, y, z) = (f(x, y, z), g(x, y, z)) = (k, l)$ define 2 equações, $f(x, y, z) = k$ e $g(x, y, z) = l$, cada uma delas em geral definindo uma superfície, e portanto, o conjunto dos pontos que satisfazem as duas equações de superfícies, será a curva de intersecção das superfícies (outra maneira de definir uma curva no espaço!).



No exemplo, a intersecção do cone $x^2+y^2-z^2 = 0$ com o plano $z = 1 - y$ é uma parábola, e é o conjunto dos pontos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^2$ com $F(x, y, z) = (0, 0)$, onde
$F(x, y, z) = (x^2 + y^2 - z^2, y + z - 1)$.

Acima tratamos basicamente do plano e do espaço com coordenadas cartesianas. Outros sistemas de coordenadas podem ser mais interessantes para simplificarmos as equações e parametrizações a serem trabalhadas, como coordenadas polares no plano, e as coordenadas esféricas e cilíndricas no espaço, casos clássicos.

Retas tangentes às curvas e planos tangentes às superfícies também poderão ser obtidos, com utilização de diferenciação. O que for possível obter como aplicação de Cálculo 1, vamos fazer a seguir.

0.1 Curvas no Plano

Considere uma partícula que se move no plano num intervalo de tempo I. Para cada instante $t \in I$, sejam $x = f(t)$ e $y = g(t)$ as coordenadas da posição da partícula. Então o conjunto de pontos $C = \{(x, y) = (f(t), g(t)) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in I\}$ define uma curva no plano, parametrizada pelas funções coordenadas $x = f(t)$ e $y = g(t)$ definidas em I e com valores reais, conhecida como trajetória da partícula.

Este é um exemplo de curva parametrizada, isto é, cujas coordenadas em relação a algum sistema depende de um *parâmetro*, no caso, t (tempo). A posição da partícula no instante t, dada pelo vetor $r(t) = (f(t), g(t))$, define uma *função vetorial* $r : I \to \mathbb{R}^2$ definida no intervalo I, também chamada de parametrização da curva. Em textos de Geometria Diferencial, a função r é chamada de curva e o conjunto dos pontos $C = \{r(t) = (f(t), g(t)) \mid t \in I\}$ é o traço da curva.

Por exemplo, $r(t) = (5+2\cos(t), 7+3\,\mathrm{sen}(t))$, onde parametriza a elipse de centro $(5, 7)$ e semi-eixos 2 e 3 nas direções dos eixos Ox e Oy, respectivamente. Verifiquemos que os pontos satisfazem a equação da elipse, $\dfrac{(x-5)^2}{4} + \dfrac{(y-7)^2}{9} = 1$: de fato, $\dfrac{((5+2\cos(t))-5)^2}{4} + \dfrac{((7+3\,\mathrm{sen}(t))-7)^2}{9} = \dfrac{4\cos^2(t)}{4} + \dfrac{9\,\mathrm{sen}^2(t)}{9} = 1$, para todo t. Isto mostra que os pontos $r(t)$ estão sobre a elipse. Um exercício mais difícil é mostrar que todos os pontos da elipse podem ser obtidos dessa maneira. Mas um exercício mais fácil é obter todos os pontos da elipse, pelo menos visualmente, no programa `Maple`.

Podemos falar em limites, continuidade e diferenciabilidade de função vetorial por $r(t) = (f(t), g(t))$, $t \in I$, através das funções coordenadas $f(t)$, $g(t)$:

- $\lim\limits_{t\to a} r(t) = \lim\limits_{t\to a}(f(t), g(t)) = (\lim\limits_{t\to a} f(t), \lim\limits_{t\to a} g(t))$.
- $r(t) = (f(t), g(t))$ é contínua em $a \in I$ se $\lim\limits_{t\to a} r(t) = r(a)$.
  $r(t) = (f(t), g(t))$ é contínua em I se $f(t)$ e $g(t)$ forem contínuas em I.
- $\dfrac{d}{dt}r(t) = \lim\limits_{\Delta t\to 0} \dfrac{r(t+\Delta t) - r(t)}{\Delta t} = (\dfrac{d}{dt}f(t), \dfrac{d}{dt}g(t))$.

No caso de trajetória de partículas dada por $r(t)$, a derivada $\dfrac{d}{dt}r(t)$ representa o vetor velocidade $v(t)$ no instante t (portanto aponta na direção tangente à trajetória) e esses vetores, considerados com origem em $(0, 0)$, descrevem uma nova curva parametrizada por t, tal que a derivada $\dfrac{d}{dt}v(t) = \dfrac{d^2}{dt^2}r(t)$ representa o vetor aceleração da partícula $a(t)$ no instante t.

No caso apenas de curva parametrizada $r(t)$, a derivada $\dfrac{d}{dt}r(t)$ representa um vetor na direção tangente à curva, no ponto $r(t)$. No exemplo da elipse acima, num ponto $r(t_0) = (5 + 2\cos(t_0), 7 +$

$3\,\mathrm{sen}(t_0))$, o vetor $v(t_0) = (-2\,\mathrm{sen}(t_0), 3\cos(t_0)$ define a direção da reta tangente à elipse. Ou seja, a reta tangente à elipse em $r(t_0)$ é dada parametricamente por $(x, y) = r(t_0) + s \cdot v(t_0) = (5 + 2\cos(t_0) - 3s\,\mathrm{sen}(t_0), 7 + 3\,\mathrm{sen}(t_0) + 3s\cos(t_0))$, $s \in \mathbb{R}$. Exercício: mostre as propriedades refletivas da elipse, envolvendo os focos.

Uma curva parametrizada por $r(t)$, $t \in I$ é uma curva lisa, ou suave, se $\dfrac{d}{dt}r(t)$ existir e for não nulo ($\neq (0,0)$) para todo $t \in I$. Pontos onde $\dfrac{d}{dt}r(t) = (0,0)$ ou não existe, podem representar "bicos". Veja nos exercícios abaixo o exemplo da cúspide.

Uma curva parametrizada por uma função vetorial contínua definida num intervalo I da reta deve ser conexa, isto é, seu traço é constituído de uma única parte sem interrupções. Não é o caso de uma hipérbole, que é constituída de dois ramos distintos.

Dizemos que uma curva parametrizada por $r : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ é fechada se $r(a) = r(b)$. E uma curva parametrizada $r : I \to \mathbb{R}^2$ tem *auto-intersecções* se existem $t_1 \neq t_2 \in I$ tal que $r(t_1) = r(t_2)$, formando uma espécie de "figura Xis"em torno do ponto.

As curvas suaves e sem auto-intersecções se encaixam na visão intuitiva de que, para cada ponto da curva, considerando somente pontos da mesma suficientemente próximos, o traço se assemelha a uma linha reta.

Do Cálculo 1, os gráficos de funções reais de uma variável real $f(x)$ são curvas, com parametrização $r(t) = (t, f(t))$ e direção tangente $\dfrac{d}{dt}r(t) = (1, f'(t))$; nos casos em que a função é derivável nos intervalos do domínio, o gráfico é uma curva suave (por quê?) e sem auto-intersecções (por quê?).

Exemplos conhecidos de curvas suaves e sem auto-intersecção estudados em Geometria Analítica no Plano são as retas (no plano e no espaço), circunferências e alguns tipos de cônicas, como parábolas, elipses, duas retas paralelas e hipérboles. Algumas dessas curvas, podem ser estudadas como gráficos ou com parametrizações, mas elas foram introduzidas na sua maioria como conjuntos de pontos que satisfazem uma *equação* a duas variáveis reais. Dizemos que a curva foi *definida implicitamente* pela equação. No caso dos gráficos do Cálculo 1, a equação correspondente é $y = f(x)$, ou $F(x, y) = f(x) - y = 0$.

Vimos portanto, maneiras distintas de se descrever curvas no plano:

- Como gráfico de uma função diferenciável definida num intervalo $I \subset \mathbb{R}$ ou numa reunião disjunta de intervalos. Por exemplo, o gráfico de $f(x) = \dfrac{1}{x}$.
- Como conjunto de pontos que satisfazem uma certa equação em duas variáveis. O exemplo anterior pode ser descrito pela equação $y = \dfrac{1}{x}$ ou ainda, $xy = 1$. Esta descrição é conhecida como forma implícita. Como a equação em duas variáveis está ligada a função de 2 variáveis, estas curvas também serão conhecidas como curvas de nível de função de 2 variáveis.
- De forma paramétrica, isto é, descrevendo-se as coordenadas dos pontos através de uma variável, chamada parâmetro. No mesmo exemplo acima, a curva pode ser dada na forma $r(t) = (t, \dfrac{1}{t})$, com $t \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

Pode ser que a curva inteira não possa ser descrita de uma só vez com uma das formas acima. Mas por partes devem ser.

A utilização de um software como o Maple para desenhar uma curva no computador exige que o usuário conheça exatamente com qual formato está lidando: gráfico de função, parametrização ou equação (implícita). Veja aplicação no exemplo acima:

```
with(plots):
      # para carregar alguns comandos gráficos especiais
plot(1/x, x=.0001 ..10);
      # para desenhar o gráfico de f(x) =1/x, no intervalo [.0001,10]
plot([t,1/t, t=.0001 ..10]);
      # para desenhar a curva parametrizada nesse intervalo
implicitplot(x*y=1, x=.0001 .. 10, y=0..10);
      # para desenhar a curva no retângulo mencionado
```

Exemplos e exercícios

1. A semicircunferência $x^2 + y^2 = 1$, $y \geq 0$, pode ser parametrizada por $(x, y) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $0 \leq t \leq \pi$ e pode ser obtido como gráfico de $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, com $-1 \leq x \leq 1$. Mostre que $\begin{cases} x = \dfrac{-2t}{1+t^2} \\ y = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$, $1 \leq t \leq 1$, é outra parametrização da semicircunferência. Em que intervalo varia o parâmetro t na forma paramétrica $(x, y) = (\cos(2\pi t), \operatorname{sen}(2\pi t)$ para descrever a mesma semicircunferência?

2. A catenária dada como gráfico da função $f(x) = a\cosh(b\,x)$, onde $\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ é muito importante e muito presente em nosso ambiente: por exemplo, os fios elétricos pendentes entre dois postes formam uma catenária, dentro do plano vertical (perpendicular ao plano do chão) contendo os dois pontos de fixação nos postes. Obtenha o traço da curva para $a = 1$ e $b = 1$.

3. Verifique as propriedades refletivas conhecidas da parábola, elipse e hipérbole envolvendo os seus focos, utilizando parametrizações convenientes e vetores tangentes.

4. Verifique que $\begin{cases} x = \cosh(t) = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2} \\ y = \operatorname{senh}(t) = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2} \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, descreve um dos ramos da hipérbole dada por $x^2 - y^2 = 1$. Qual dos ramos? Dê uma outra parametrização mais simples do mesmo ramo.

5. A curva parametrizada por $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, é chamada cúspide e tem um vértice em $(0, 0)$, chamado ponto de cúspide. Desenhe a cúspide na vizinhança do ponto de cúspide. Verifique que o vetor tangente em $t = 0$ é nulo, o que permite esse tipo de comportamento.

6. A curva "Limaçon de Pascal"dada pela parametrização
   $\begin{cases} x = (1 + 2\cos t)\cos t \\ y = (1 + 2\cos t)\operatorname{sen} t \end{cases}$, $-\pi \leq t \leq \pi$,
   é uma curva com auto-intersecção. Verifique isto mostrando que a curva passa por $(0, 0)$ duas vezes. Faça um esboço da curva usando o programa Maple.

7. A curva de nível $z = k$ de uma função real de duas variáveis reais $z = f(x, y)$ é o conjunto dos pontos $C_k = \{(x, y) \in D \mid f(x, y) = k\}$ contida no domínio. (A função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tem domínio num subconjunto D do plano e tem valores em $\mathbb{R}$, isto é, $(x, y) \in D \mapsto z = f(x, y) \in \mathbb{R}$). Claro que nem sempre é uma curva suave e sem auto-intersecções como visto acima, mas para boas condições de f e de k são. Obtenha as curvas de nível para $k = 0$, $k = -1$ e $k = 1$, para cada uma das seguintes funções:
(a) $f(x, y) = x^2+y^2$, (b) $f(x, y) = x^2-y^2$, (c) $f(x, y) = x^2+y-5$, (d) $f(x, y) = \ln(x^2+y-5)$, (e) $f(x, y) = x^2$, (f) $f(x, y) = \ln(2x^2 + y^2 - 1)$, $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$
Voltaremos às curvas de nível novamente no estudo das funções de 2 variáveis.

8. Dado um ponto $P = (a, b)$ no plano,
(a) obtenha parametricamente uma circunferência centrada em P e de raio 1.
Depois, para cada ponto Q desta circunferência, obtenha a equação paramétrica da reta que passa por Q e é tangente à circunferência.
(b) para cada m, obtenha a equação da reta que passa por P e tem coeficiente angular m.

   Para as questões seguintes considere um sistemas de coordenadas polares no plano $S = \{O, r, \theta\}$, onde O é a mesma origem do sistema cartesiano usual $\{O, x, y\}$, r é a distância do ponto $P(x, y)$ à origem, e θ é o ângulo do semieixo positivo de Ox à semi-reta com origem O contendo P.

9. Obtenha a equação da circunferência de centro na origem e raio R em coordenadas polares.

10. Que tipo de curva é descrito pela equação polar $r = \theta$?

11. Que região é descrita pelas desigualdades polares $0 \leq r \leq 3$ e $\pi/3 \leq \pi/2$?

12. Obtenha na forma polar de uma planificação do cone circular com base de diâmetro 5cm e altura $h = 4cm$.

0.2 Curvas no espaço

Uma curva no espaço pode ser, pelo menos por partes, descritas na forma paramétrica, através de funções vetoriais com valores no espaço, generalizando a situação de curvas no plano: $r : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ $(t \in I \mapsto r(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3$. As definições e propriedades das funções vetoriais acerca de limite, continuidade, diferenciabilidade vistas no caso plano continuam valendo no espaço.

Uma curva no espaço pode ser uma *curva plana* (cujo traço está contido num plano do espaço, como no caso de retas, circunferências ou cônicas que podem ser obtidas como secções planas do cone ou do cilindro) ou não (pode não existir nenhum plano contendo o traço da curva, como uma espiral de caderno, chamada de *hélice*). Veja a diferença entre "curva no plano"e "curva plana"no espaço!

Não podemos descrever curvas no espaço como gráfico de função (em geral, o gráfico de uma função de 2 variávies é uma superfície), como no caso anterior. E para descrever implicitamente, precisamos, em geral, de duas equações em 3 variáveis (uma equação em 3 variáveis em geral representa uma superfície e a curva seria a intersecção das duas superfícies).

Então outra forma de obter curvas no espaço é como intersecção de superfícies. Nesta secção só trataremos das superfícies clássicas.

No software Maple, podemos obter uma curva no espaço dada em forma paramétrica $(x, y, z) = (f(t), g(t), h(t))$, $t \in [tmin, tmax]$, através do comando **spacecurve**, contido no pacote *plots*:

```
with(plots): #carregando o pacote plots
spacecurve([f(t), g(t), h(t)], t= tmin .. tmax, options);
          # desenhando a curva
```

Se a curva é dada por duas equações, pode-se tentar uma visualização da mesma desenhando os objetos das duas equações, isto é, as duas superfícies, cuja intersecção representa a curva. Para melhor visualização, recomenda-se variar as opções de apresentação das superfícies, como por exemplo, deixar uma das superfícies transparente ou simplesmente aramado e a outra cheia. Considere a curva abaixo, intersecção da superfície cilíndrica dada por $x^2 + y^2 = 1$ e o plano $z = -x - y$. A intersecção é uma elipse.

```
with(plots):
Cilindro := implicitplot3d( x^2 + y^2 =1, x= -1 .. 1, y= -1 .. 1,
          z= -1 .. 1, style=patchnogrid);
Plano := plot3d( -x -y, x = -1 .. 1, y = -1 .. 1, style= wireframe,
          color = red);
display({ Cilindro, Plano}, scaling = constrained);
```

Exemplos e exercícios

1. Uma reta no espaço é uma curva, que pode ser dada tanto parametricamente, quanto como intersecção de dois planos, como foi visto em Geometria Analítica. Obtenha uma parametrização da reta $r : \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$. Uma reta no espaço é um exemplo de curva plana no espaço.

2. Se C é uma curva contida num dos planos coordenados, Oxy, Oxz ou Oyz, ou em planos paralelos a estes, basta considerar a curva no plano (em duas variáveis) em questão e acrescentar a equação do plano. Exemplos:

   - A circunferência de centro $(0, 0, 0)$ e raio 5 no plano Oxy é dada parametricamente por $\begin{cases} x = 5\cos t \\ y = 5\,\mathrm{sen}\, t \\ z = 0 \end{cases}$, $t \in [0, 2\pi]$, ou implicitamente, como solução de duas equações: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 & \text{(representando um cilindro circular)} \\ z = 0 & \text{(representando um plano)} \end{cases}$.
   - A circunferência de centro $(0, 0, 0)$ e raio 5 no plano $z = 10$ (paralelo ao plano Oxy), pode ser dada parametricamente por $\begin{cases} x = 5\cos t \\ y = 5\,\mathrm{sen}\, t \\ z = 10 \end{cases}$, $t \in [0, 2\pi]$, e implicitamente, por $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ z = 10 \end{cases}$.
   - Exercício: (1) Obtenha uma forma paramétrica da curva de intersecção do parabolóide no espaço dado pela equação $z = x^2 + y^2$ pelo plano $z = 9$. Que curva é essa?

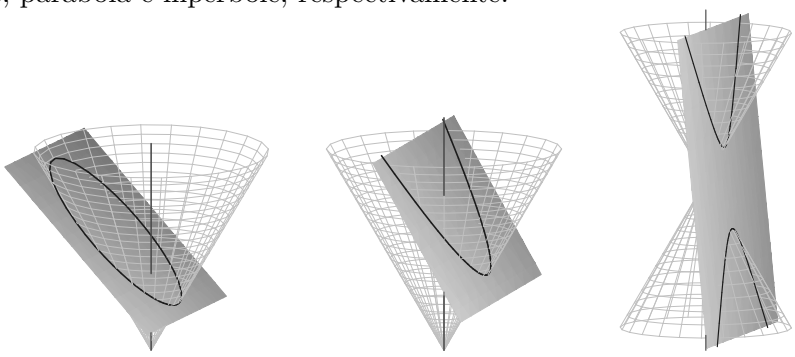
Generalize: obtenha as intersecções pelos planos $z = k$, $k > 0$. (2) Intercepte o mesmo paraboloide pelo plano $x = 4$, verifique que curva é essa, desenhe no plano Oyz e ache uma parametrização da curva.

3. Se uma curva C no espaço está contida num plano α, podemos obter uma parametrização para ela se for conhecida a forma paramétrica de uma cópia no plano Oxy, $C_{xy} = \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$, $t \in I$: Basta encontrar um ponto $A = (x_0, y_0, z_0) \in \alpha$ que seria correspondente ao $O = (0, 0)$ do plano Oxy, e um par de vetores ortonormais do plano, $\vec{\imath}$ e $\vec{\jmath}$, e utilizar a parametrização $\{(x, y, z) = A + f(t)\vec{\imath} + g(t)\vec{\jmath},\ t \in I\}$.
Por exemplo, vamos obter a parametrização da circunferência de raio 5 com centro $A = (1, 3, 4)$ contida no plano α passando por A e perpendicular a $\vec{N} = (1, 1, 1)$.
Primeiro, encontramos uma base ortonormal de vetores do plano α. Podemos ver que $\vec{u} = (1, -1, 0)$ e $\vec{v} = (1, 1, -2)$ são dois vetores ortogonais do plano. Assim, podemos tomar $\vec{\imath} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1, -1, 0)$ e $\vec{\jmath} = \frac{\sqrt{6}}{6}(1, 1, -2)$.
Assim, a parametrização da circunferência fica, para $t \in [0, 2\pi]$:
$(x, y, z) = A + \cos t\vec{\imath} + \operatorname{sen} t\vec{\jmath}$

$$= (1, 3, 4) + (\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t + \frac{\sqrt{6}}{6}\operatorname{sen} t, -\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t + \frac{\sqrt{6}}{6}\operatorname{sen} t, 2\frac{\sqrt{6}}{6}\operatorname{sen} t) \quad .$$

4. Uma hélice é uma curva que se enrola em torno de um cilindro circular como uma trepadeira no seu tutor. A hélice que se enrola no cilindro circular $x^2 + y^2 = a^2$, que a cada volta avança linearmente na altura z, pode ser dada parametricamente por $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\operatorname{sen} t \\ z = bt \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, a e b fixos, não nulos. Esta hélice é uma curva que não é curva plana, isto é, não existe um plano que contém todos os seus pontos.

5. As cônicas são assim chamadas pois podem ser obtidas como secções do cone por planos (exceto os casos degenerados de retas paralelas ou vazio, que aparecem como secções do cilindro que pode ser considerado um cone com vértice "no infinito", na geometria projetiva). Considere o cone $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ e obtenha planos α_1, α_2 e α_3 cujas secções com o cone sejam elipse, parábola e hipérbole, respectivamente.



1 Superfícies

Na mesma linha intuitiva de curvas no plano, uma superfície no espaço é um conjunto de pontos no espaço $\mathbb{R}^3$ tal que, olhando numa vizinhança pequena de qualquer um de seus pontos, enxerga-se um pedaço de plano possívelmente com alguma deformação não muito grave (rasgos, por exemplo, não seriam permitidos). Cada plano estudado em Geometria Analítica é uma superfície (apareceu nas formas de equação (a 3 variáveis reais, tipo $ax + by + cz + d = 0$) e de parametrização (em 2 parâmetros: $x(t, s) = x_0 + a_1t + b_1s$, $y(t, s) = y_0 + a_2t + b_2s$ e, $z(t, s) = z_0 + a_3t + b_3s$ em GA, e também poderá ser estudado como gráfico de função de 2 variáveis $f(x, y) = ax + by + c$). Outras superfícies provavelmente já do seu conhecimento são a esfera, o parabolóide (ex: antena parabólica), a sela (sela de cavalo), o cilindro, etc, que estudaremos aqui com o nome de quádricas e também como superfícies especiais.

Em primeiro momento trabalharemos somente em coordenadas cartesianas ortogonais (direções dos eixos definidos por uma base de vetores ortonormal).

Generalizando, as maneiras de descrever as superfícies que veremos aqui e que devemos saber diferenciar exatamente para o uso em programas de computador, são:

- Forma paramétrica: descrevendo-se as coordenadas (x, y, z) de cada ponto através de 2 parâmetros, $x = f(t, s)$, $y = g(t, s)$, $z = h(t, s)$, com os parâmetros t e s variando em intervalos da reta.
- Forma implícita, ou seja, como conjunto de pontos (x, y, z) que satisfaz uma equação nessas 3 variáveis, ou ainda, como superfície de nível de uma função de 3 variáveis (com as devidas condições de continuidade e diferenciabilidade, que veremos mais tarde).
- Gráfico de função real de duas variáveis (com as devidas condições de continuidade e diferenciabilidade).

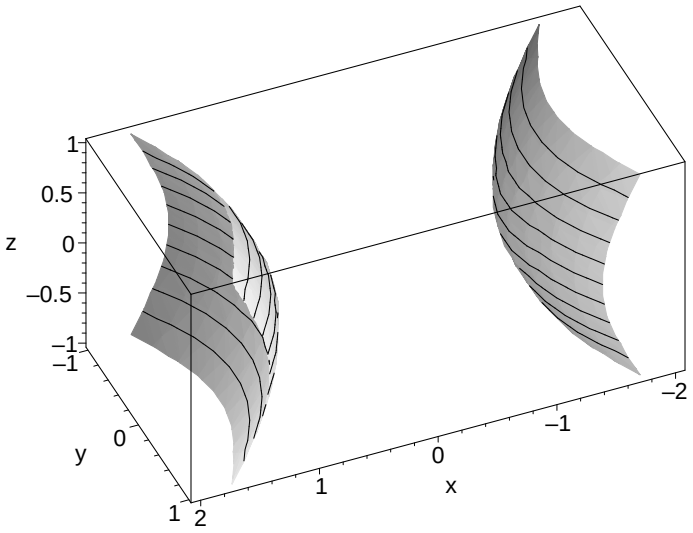
No software Maple, temos as 3 maneiras de plotar as superfícies:

```
with(plots):
plot3d( [ f(t,s), g(t,s), h(t,s)], t= tmin .. tmax, s= smin .. smax );
implicitplot3d(equação(x,y,z), x=xmin ..xmax,y=ymin..ymax,z=zmin .. zmax);
plot3d( f(x,y), x=xmin .. xmax, y=ymin .. ymax);
```

Exercício: Obtenha o desenho das quádricas utilizando o software Maple. Uma opção interessante para visualizar as curvas de intersecção com planos $z = k$ sobre o desenho da superfície é `style=patchcontour`. Por exemplo,

```
with(plots):
implicitplot3d(x^2-y^2-z^2=1, x=-2 ..2,y=-1..1,z=-1 .. 1, style=patchcontour);
```

para desenhar o hiperbolóide de 2 folhas, dentro do espaço delimitado.

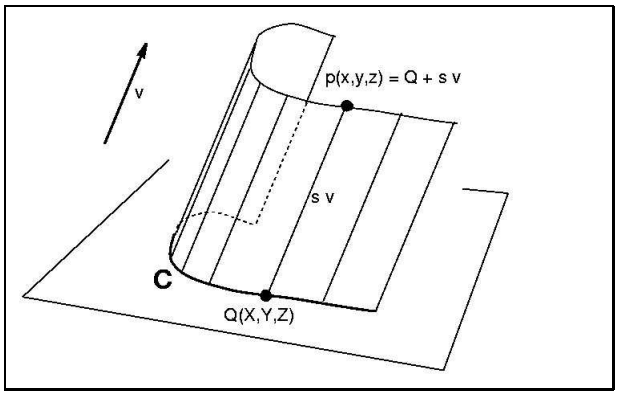


Outro exercício inicial é desenhar à mão as mesmas quádricas, dadas as equações na forma reduzida, obtendo as secções pelos planos coordenados e por planos paralelos aos coordenados, em número suficiente para obter uma boa idéia da superfície, como deve ter sido feito em Geometria Analítica.

A seguir, vamos gerar algumas superfícies especiais a partir de curvas no espaço, utilizando os conhecimentos de Geometria Analítica.

1.1 Superfícies cilíndricas

Considere uma curva plana C no espaço, e $\vec{v}$ um vetor transversal (não paralelo) ao plano da curva. O *cilindro de diretriz C e geratrizes paralelas a $\vec{v}$* é a reunião das retas que passam por um ponto de C e são paralelas a $\vec{v}$. Isto é, é o conjunto dos pontos P que podem ser escritos na forma $P = Q + s\,\vec{v}$ onde $Q \in C$.



Se C é dado parametricamente por $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$, com o parâmetro $t \in I$, e $\vec{v} = (a, b, c)$,

obtemos a parametrização $\begin{cases} x = x(t) + s * a \\ y = y(t) + s * b \\ z = z(t) + s * c \end{cases}$, com os parâmetros $t \in I$ e $s \in \mathbb{R}$. Fazendo, na parametrização dada, $s \in [0, 1]$, estamos descrevendo um tronco de cilindro cujas geratrizes são segmentos de mesmo comprimento e direção que $\vec{v}$.

Por exemplo, o cilindro sobre a circunferência de raio 3 e centro $(0, 0, 0)$ no plano $z = 0$ e geratrizes paralelas a $\vec{v} = (2, 3, 5)$ é parametrizada por $\begin{cases} x = 3\cos t + 2s \\ y = 3\,\mathrm{sen}\, t + 3s \\ z = 5s \end{cases}$, com $t \in [0, 2\pi]$, $s \in \mathbb{R}$.

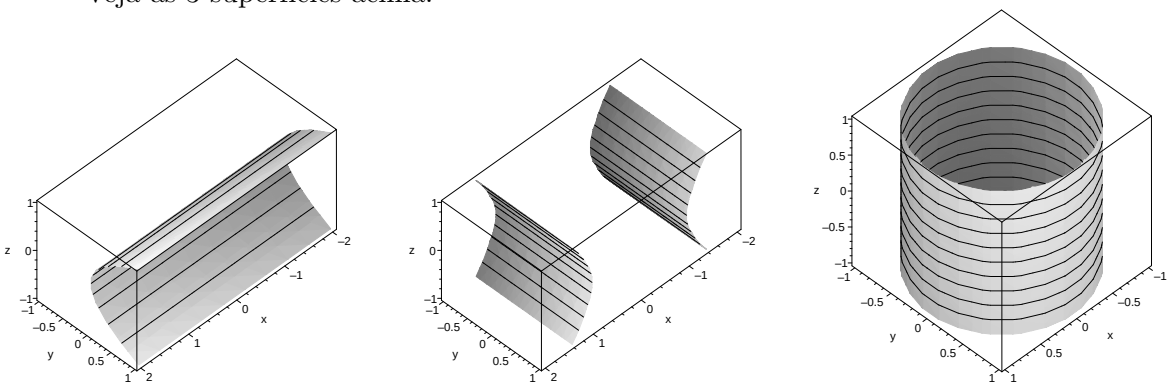
As superfícies cilíndricas com retas geratrizes paralelas a um dos eixos coordenados são fáceis de reconhecer, dadas as equações na forma $F(x, y, z) = k$. Além disso, pode ser parametrizada de forma simples. Veja os 3 casos e os exemplos:

- se a variável x não aparece explicitamente na equação, é que ela é livre e portanto a superfície é um cilindro com geratrizes paralelas ao eixo Ox. Por exemplo, $y - z^2 = 0$ no espaço $Oxyz$ representa um cilindro parabólico de geratrizes paralelas a Ox e diretriz dada pela parábola $\{y = z^2,\, x = 0\}$ do plano Oyz. Em termos paramétricos, podemos ter $\{x = x(s),\, y = y(t),\, z = z(t)\}$, sendo t o parâmetro da curva diretriz e s o parâmetro das retas geratrizes. No exemplo, $x = s$, $y = t^2$, $z = t$.

- se a variável y não aparece explicitamente na equação, é que ela é livre e portanto a superfície é um cilindro com geratrizes paralelas ao eixo Oy. Por exemplo, $x^2 - z^2 = 1$ no espaço $Oxyz$ representa um cilindro hiperbólico de geratrizes paralelas a Oy e diretriz dada pela hipérbole $\{x^2 - z^2 = 1,\, y = 0\}$ do plano Oxz. Em termos paramétricos, podemos ter $\{x = x(t),\, y = y(s),\, z = z(t)\}$, sendo t o parâmetro da curva diretriz e s o parâmetro das retas geratrizes. No exemplo, $x = \pm\sqrt{1 + t^2}$, $y = s$, $z = t$.

- se a variável z não aparece explicitamente na equação, é que ela é livre e portanto a superfície é um cilindro com geratrizes paralelas ao eixo Oz. Por exemplo, $x^2 + y^2 = 1$ no espaço $Oxyz$ representa um cilindro circular de geratrizes paralelas a Oz e diretriz dada pela circunferência $\{x^2 + y^2 = 1,\, z = 0\}$ do plano Oxy. Em termos paramétricos, podemos ter $\{x = x(t),\, y = y(t),\, z = z(s)\}$, sendo t o parâmetro da curva diretriz e s o parâmetro das retas geratrizes. No exemplo, $x = \cos t$, $y = \mathrm{sen}\, t$, $z = s$.

Veja as 3 superfícies acima:



Além disso, dada a forma paramétrica nesses casos, para obter a forma implícita, basta obter a forma implícita da curva (infelizmente, nem sempre é fácil). Por exemplo, se $x = \text{tg}(t) - \sec(t)$, $y = \text{tg}(t) + \sec(t)\, z = s$, vemos que temos um cilindro com geratrizes paralelas ao eixo Oz. Como $xy = \text{tg}^2(t) - \sec^2(t) = -1$, da identidade trigonométrica, temos que a equação da curva diretriz no plano Oxy é $xy = -1$, que é uma hipérbole. Logo a equação do cilindro hiperbólico dado parametricamente é $xy = -1$.

Mais geralmente, C é dada implicitamente por 2 equações a 3 variáveis, $f(x, y, z) = 0$ e $g(x, y, z) = 0$ (toda equação nas variáveis x, y e z pode ser colocada na forma $F(x, y, z) = 0$), e $vecv = (a, b, c)$ é a direção das geratrizes, podemos obter a *equação* do cilindro, da seguinte forma:

- Para cada $P = (x, y, z)$ do cilindro, seja $Q = (X, Y, Z) \in C$ tal que $Q = P + \lambda\vec{v}$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. Ou seja, $\begin{cases} X = x + \lambda a \\ Y = y + \lambda b \\ Z = z + \lambda c \end{cases}$.
- Como $Q = (X, Y, Z) \in C$, devemos ter $f(X, Y, Z) = 0$ e $g(X, Y, Z) = 0$.
- Substituindo X, Y e Z pelas equações envolvendo x, y, z e λ, se tiver sorte, pode-se obter λ em função de x, y e z por uma das equações e, substituindo λ na outra equação, obter uma equação $F(x, y, z) = 0$ para descrever os pontos (x, y, z) do cilindro.

Veja o mesmo exemplo do cilindro parametrizado acima: C é dada pelas equações $x^2+y^2 = 9$ e $z = 0$. Ou seja, $C : \begin{cases} f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 9 = 0 \\ g(x, y, z) = z = 0 \end{cases}$. Se $\vec{v} = (2, 3, 5)$, para cada $x, y, z)$ no cilindro, temos $\begin{cases} X = x + 2\lambda \\ Y = y + 3\lambda \\ Z = z + 5\lambda \end{cases}$ para algum (X, Y, Z) na circunferência e $\lambda \in \mathbb{R}$. Substituindo nas equações de C tem-se: $\begin{cases} f(X, Y, Z) = (x + 2\lambda)^2 + (y + 3\lambda)^2 - 9 = 0 \\ g(X, Y, Z) = z + 5\lambda = 0 \end{cases}$. Donde $\lambda = \dfrac{-z}{5}$ e, portanto, $(x - 2\dfrac{z}{5})^2 + (y - 3\dfrac{z}{5})^2 - 9 = 0$ é a equação do cilindro.

Como a equação é dada por um polinômio de grau 2 nas variáveis x, y e z, este cilindro é um exemplo de *quádrica*.

Exercícios:

1. Esboce e obtenha as formas paramétrica e implícita do cilindro com diretriz C e geratrizes paralelas a $\vec{v}$, nos seguintes casos:

   (a) C é a elipse no plano Oyz dada pela equação $\dfrac{(y-1)^2}{4} + \dfrac{(z+1)^2}{9} = 1$ e $z = 0$; $\vec{v} = (5, 1, 1)$. Depois faça com $\vec{v} = (1, 0, 0)$.

   (b) C é um ramo de hipérbole dado por $x = \cosh t$, $y = 0$, $z = \text{senh}\, t$, com $t \in \mathbb{R}$ (verifique que satisfaz a equação $x^2 - z^2 = 1$); $\vec{v} = (0, 1, 0)$; faça também com $\vec{v} = (1, 2, 3)$.

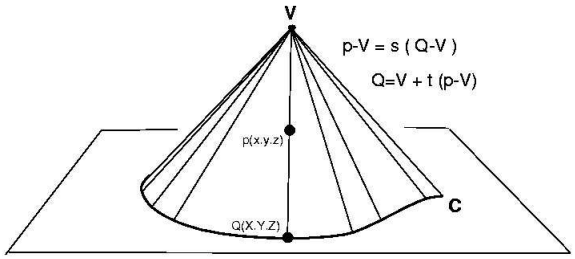
2. Interprete $x = 0$ como um cilindro no espaço. Que superfície é essa?

3. Para cada cônica num dos planos coordenados, dê a equação do cilindro sobre a cônica com geratrizes perpendiculares ao plano da cônica. Tente fazer o esboço, quando possível. Por exemplo, $x^2 - y^2 = 0$, $z = 0$ define duas retas concorrentes no plano Oxy. O que é o cilindro sobre essa cônica, com geratrizes paralelas ao eixo Oz?

4. Esboce a superfície $z = \cos(x)$ no espaço.

1.2 Cones sobre curvas

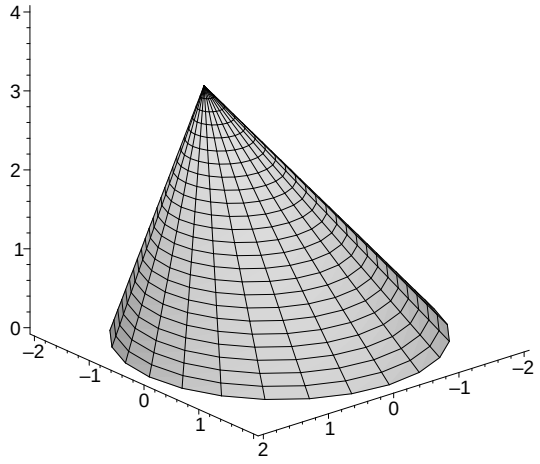
Seja C uma curva plana no espaço e V um ponto, não pertencente ao plano da curva. O *cone de diretriz C e vértice V* é a reunião das retas pssando por V e por um ponto da curva. Como superfície, ela apresenta problema exatamente no vértice.



Se $P \in cone$, existe $Q \in C$ tal que $P = V + s(Q - V)$ para algum $s \in \mathbb{R}$. Ou, $Q = V + t(P - V)$, para algum $t \in \mathbb{R}$.

Se quisermos obter o cone na forma paramétrica, usamos a primeira forma: $P = V + s(Q - V)$, e substituimos Q pela forma paramétrica da curva. Se quisermos a equação do cone, usamos a segunda forma: $Q = V + \lambda(P - V)$ e fazemos $f(Q) = 0$ e $g(Q) = 0$, onde $f = 0$ e $g = 0$ seriam as equações da curva C.

Por exemplo, o cone cuja diretriz é a circunferência $C : \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = 0 \end{cases}$ e vértice $V = (2, 1, 4)$ tem as equações paramétricas dadas por: $\begin{cases} x = 2\cos t + s(2\cos t - 2) \\ y = 2\,\mathrm{sen}\, t + s(2\,\mathrm{sen}\, t - 1) \\ z = -4s \end{cases}$, com $t \in [0, 2\pi]$ e $s \in \mathbb{R}$.



Para obter a equação do cone, escrevemos $\begin{cases} X = 2 + \lambda(x - 2) \\ Y = 1 + \lambda(y - 1) \\ Z = 4 + \lambda(z - 4) \end{cases}$, substituímos nas equações $\begin{cases} X^2 + Y^2 = 4 \\ Z = 0 \end{cases}$, e eliminamos λ. De $Z = 4 + \lambda(z - 4) = 0$ tem-se que $\lambda = \dfrac{-1}{z - 4}$, e substituindo na

outra equação, temos $\left(2-\frac{(x-2)}{(z-4)}\right)^2+\left(1-\frac{(y-1)}{(z-4)}\right)^2=4$. Este cone também pode ser reescrito como uma quádrica (Exercício: obtenha o polinômio de grau 2 que define esta quádrica.)

Exercícios: Esboce e obtenha as formas paramétrica e implícita do cone com diretriz C e vértice V, nos seguintes casos:

1. C é a elipse no plano Oyz dada pela equação $\frac{(y-1)^2}{4}+\frac{(z+1)^2}{9}=1$ e $x=0$; $V=(5,1,1)$.
2. C é a parábola dado por $x=t$, $y=0$, $z=t^2-5t$, com $t\in\mathbb{R}$; $V=(0,1,0)$; faça também com $V=(1,2,3)$.

Obs: Obter um desenho de cone através da equação pelo software Maple não dá muito certo perto do vértice, por questões relacionados com o método numérico aplicado e pelo problema matemático apresentado no vértice (ponto singular da função $F(x,y,z)$ fornecida pela equação $F(x,y,z)=0$). Experimente com a equação $x^2+y^2-z^2=0$. Que cone é esse?

1.3 Superfícies de revolução

Seja C uma curva plana, e r uma reta contida no plano da curva. Sob certas condições sobre esses elementos, rotacionado a curva em torno da reta r, obtemos uma *superfície de revolução* de C em torno de r. Observe que a superfície é a reunião das circunferências que passam por pontos de C e centro em r, em planos perpendiculares a r.

Suponha a curva C dada parametricamente: $C:\begin{cases}x=f(t)\\y=g(t)\\z=h(t)\end{cases}$, $t\in I$. Para cada $t\in I$, seja $r(t)$ o ponto de r tal que o vetor $(f(t),g(t),h(t))-r(t)$ seja perpendicular a r e tenha norma $\rho(t)$. O ponto $r(t)$ corresponde ao centro da circunferência e $\rho(t)$ é o raio. Seja $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ um par de vetores unitários e ortogonais a r (paralelos aos planos das circunferências). Então temos a seguinte parametrização da superfície de revolução:

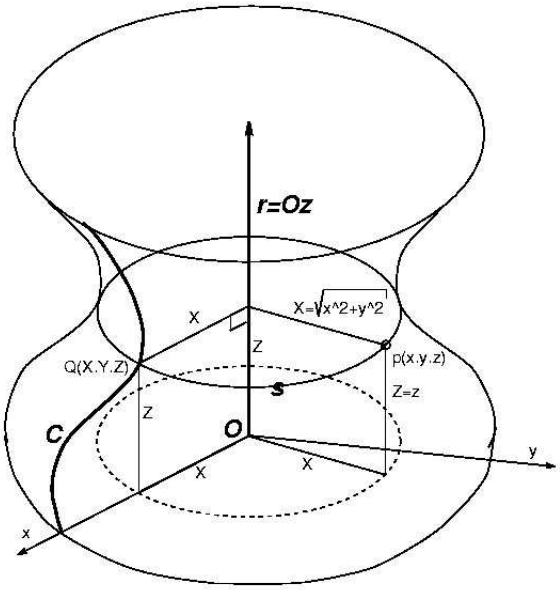
$$(x,y,z)=r(t)+\rho(t)\cos s*\vec{e_1}+\rho(t)\operatorname{sen} s*\vec{e_2},\ t\in I,\ s\in[0,2\pi].$$

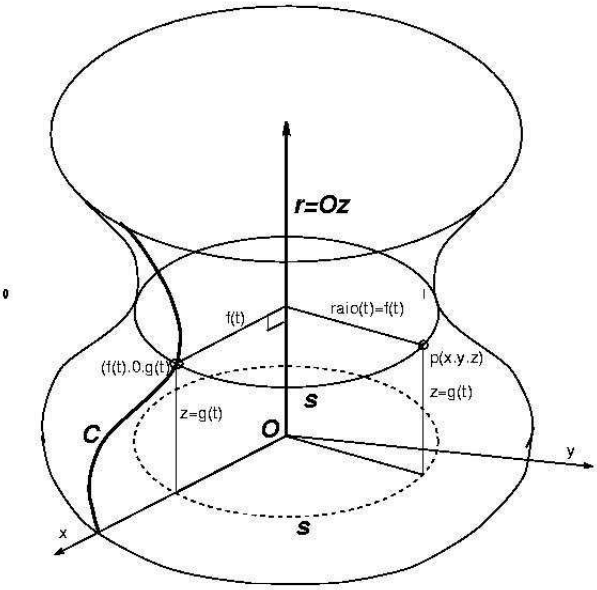
Isto fica bem mais simples quando $r=Oz$ e C é uma curva no plano Oxz dada como gráfico de uma função $x=f(z)$, com $z\in I$. Teremos a parametrização $C:\begin{cases}x=f(t)\\y=0\\z=t\end{cases}$ com $t\in I$, da curva, e podemos tomar $\vec{e_1}=(1,0,0)$, $\vec{e_2}=(0,1,0)$, $r(t)=(0,0,t)$, $\rho(t)=f(t)$. Assim,

$$(x,y,z)=(0,0,t)+f(t)(\cos s,\operatorname{sen} s,0),\ t\in I,\ s\in[0,2\pi],$$

ou seja, $\begin{cases}x=f(t)\cos s\\y=f(t)\operatorname{sen} s\\z=t\end{cases}$, $t\in I$, $s\in[0,2\pi]$.

A mesma parametrização, se $r=Oz$ e C é uma curva no plano Oyz como gráfico da função $y=f(z)$.





Se $r = Oz$ e a curva é dada por $C : \begin{cases} x = f(t) \\ y = 0 \\ z = g(t) \end{cases}$, $t \in I$, no plano Oxz, temos os raios $raio(t) = f(t)$ e os centros $r(t) = (0, 0, g(t))$. Assim,

$$(x, y, z) = (0, 0, g(t)) + f(t)(\cos s, \operatorname{sen} s, 0),\ t \in I,\ s \in [0, 2\pi],$$

ou seja, $\begin{cases} x = f(t)\cos s \\ y = f(t)\operatorname{sen} s \\ z = g(t) \end{cases}$, $t \in I,\ s \in [0, 2\pi]$.

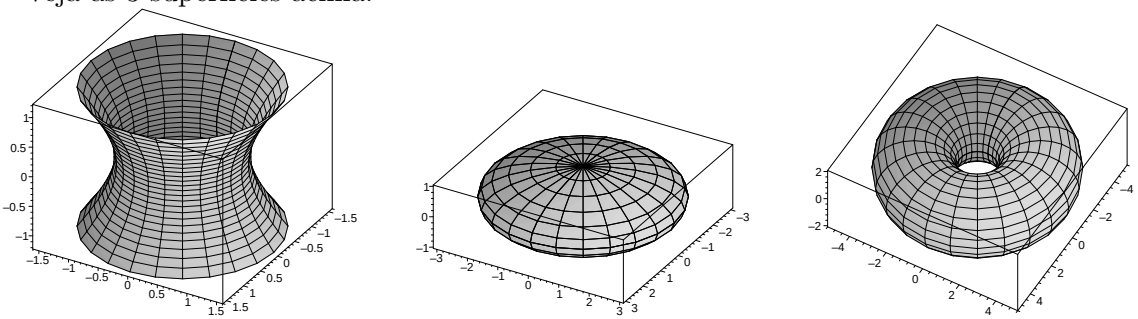
Obtém-se resultados análogos, mantendo os eixos de rotação como um dos eixos coordenados e a curva num dos planos coordenados.

Por exemplo, o catenóide obtido rotacionando a catenária $x = \cosh(z)$ do plano Oxz em torno do eixo Oz, obtemos a parametrização $(x, y, z) = (0, 0, t) + \cosh(t)(\cos s, \operatorname{sen} s, 0)$, $t \in \mathbb{R}$, $s \in [0, 2\pi]$, ou seja, $\begin{cases} x = \cosh(t)\cos s \\ y = \cosh t \operatorname{sen} s \\ z = t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R},\ s \in [0, 2\pi]$.

O elipsóide obtido rotacionando a elipse $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 0 \\ z = 2\operatorname{sen} t \end{cases}$ em torno do eixo Oz pode ser dada parametricamente por $(x, y, z) = (0, 0, 2\operatorname{sen} t) + 3\cos t(\cos s, \operatorname{sen} s, 0)$, $t \in [0, \pi]$, $s \in [0, 2\pi]$, ou seja, $\begin{cases} x = 3\cos t\cos s \\ y = 3\cos t \operatorname{sen} s \\ z = 2\operatorname{sen} t \end{cases}$, $t \in [0, \pi],\ s \in [0, 2\pi]$.

O toro (pneu, rosquinha, bóia, etc) obtido rotacionando a circunferência $\begin{cases} x = 3 + 2\cos t \\ y = 0 \\ z = 2\,\mathrm{sen}\, t \end{cases}$, $t \in [0, 2\pi]$, em torno do eixo $r = Oz$ tem parametrização dada por $\begin{cases} x = (3 + 2\cos t)\cos s \\ y = (3 + 2\cos t)\,\mathrm{sen}\, s \\ z = 2\,\mathrm{sen}\, t \end{cases}$, $t \in [0, 2\pi]$, $s \in [0, 2\pi]$.

Veja as 3 superfícies acima:



Variando t (e fixando s) temos os meridianos; variando s (e fixando t) temos os paralelos.

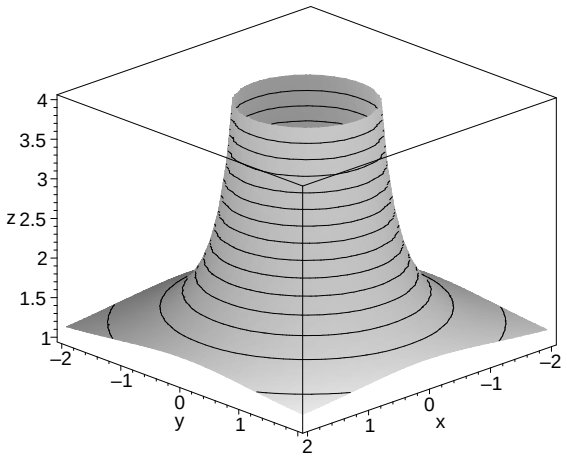
Considere agora o caso de $r = Oz$, e C no plano Oxz dada por equações $f(x, y, z) = 0$ e $g(x, y, z) = y = 0$. Se $(X, Y, Z) \in C$, então os pontos (x, y, z) da circunferência de centro $(0, 0, Z)$ e raio $\rho(Z) = \sqrt{X^2 + Y^2}$ pertencem à superfície de revolução. Ou seja, $\begin{cases} z = Z \\ x^2 + y^2 = \rho^2(Z) = X^2 + Y^2 \end{cases}$.

Juntamente com $\begin{cases} f(X, Y, Z) = 0 \\ Y = 0 \end{cases}$ deve-se obter uma equação em x, y e z, da forma $F(x^2+y^2, z) = 0$. O interessante é que toda superfície dada por uma equação desse tipo é uma superfície de revolução em torno do eixo Oz: a curva diretriz pode ser dada por $\{F(x^2, z) = 0,\ y = 0\}$

Por exemplo, rotacionando a elipse $C : \begin{cases} x^2 + 3z^2 = 5 \\ y = 0 \end{cases}$ em torno do eixo Oz, obtemos um elipsóide de revolução. Seja (X, Y, Z) um ponto na elipse. Os pontos (x, y, z) do elipsóide com $z = Z$, estão na circunferência de centro $(0, 0, Z)$ e raio $\rho(Z) = \sqrt{X^2 + Y^2}$. Ou seja, satisfazem as equações $\begin{cases} X^2 + Y^2 = x^2 + y^2 \\ Z = z \end{cases}$. Assim, das equações da elipse $\begin{cases} X^2 + 3Z^2 = 5 \\ Y = 0 \end{cases}$, segue que $x^2 + y^2 + 3z^2 = 5$ é a equação da superfície, conhecida como elipsóide. Ou seja, esse elipsóide é dado implicitamente pela equação $x^2 + y^2 + 3z^2 - 5 = 0$ e portanto, esse elipsóide é um caso de quádrica. A função F referida acima seria $F(u, z) = u + 3x^2 - 5$, que quando fazemos $u = x^2 + y^2$ e igualamos a 0, dá a equação $F(x^2 + y^2, z) = (x^2 + y^2) + 3z^2 = 5$

A equação $z = e^{1/(x^2+y^2)}$ determina um gráfico que é uma superfície de revolução em torno do eixo Oz.
Qual a curva que foi rotacionada?
Faça $y = 0$ e obtenha a curva, no plano Oxz, esboce a curva e esboce a superfície de revolução!

Veja um pedaço dessa superfície, obtida no software Maple




```
implicitplot3d(z=exp(1/(x^2+y^2)), x=-2..2, y=-2..2, z=1..4, style=patchcontour);
```

Analogamente, se o eixo de rotação for Ox, uma equação da superfície deve ser da forma $F(x, y^2+z^2) = 0$ e se o eixo de rotação for Oy, a superfície de revolução é da forma $F(x^2+z^2, y) = 0$. Vale a recíproca.

Exercícios:
I. Esboce a superfície, e obtenha as formas paramétrica e implícita da superfície de revolução da curva C em torno do eixo r, nos seguintes casos:

1. C é a elipse no plano Oyz dada pela equação $\dfrac{(y-3)^2}{4} + \dfrac{z^2}{9} = 1$ e $x = 0$; $r = Oy$.
2. C é a parábola dado por $x = t$, $y = 0$, $z = t^2$, com $t \in \mathbb{R}$; $r = Oz$; faça também com $r = Ox$, pelo menos a paramétrica. Qual dos casos a superfície é uma quádrica?
3. C é uma reta paralela ao eixo Oy, dada por $x = 0$, $z = 5$. Faça para $r = Oy$ e para $r = Oz$.
4. C é uma reta que cruza o eixo Oy, dada por $x = 0$, $z = 5y$. Faça rotação em torno de $r = Oy$ e $r = Oz$.

II. Obtenha a superfície dada como uma superfície de revolução, isto é, exiba a curva e o eixo de rotação, e mostre as equações (a que não tiver sido dada).

1. Cone circular com vértice $V = (0, 1, 0)$ cujas geratrizes formam ângulo $\pi/4$ com o eixo Oy.
2. Cilindro circular de raio 5 e eixo central Ox.
3. Esfera de centro $(0, 0, 5)$ e raio 3.
4. O hiperbolóide de uma folha dada pela equação $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.
5. O hiperbolóide de 2 folhas dada pela equação $x^2 - y^2 - z^2 = 1$.

1.4 Gráficos de funções de 2 variáveis

Uma função real de duas variáveis reais $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, associa a cada ponto (x, y) do seu domínio $D \subset \mathbb{R}^2$ um número real $z = f(x, y) \in \mathbb{R}$. O seu gráfico é o conjunto $Graf(f) = \{\, (x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in D \,\}$ no espaço $\mathbb{R}^3$.

Uma superfície dada como gráfico de $f(x, y)$, tem naturalmente a equação $z = f(x, y)$ e a forma paramétrica $(x, y, z) = (t, s, f(t, s))$, com $(t, s) \in D$.

Mas, dependendo da situação, podemos identificar o domínio D de uma função de 2 variáveis dentro do plano Oxz ou Oyz, em vez de Oxy, tendo como gráficos as superfícies de equação $y = g(x, z)$ ou $x = h(y, z)$ e parametrização $(x, y, z) = (t, g(t, s), s)$ ou $(x, y, z) = (h(t, s), t, s)$.

Observadas certas condições, como continuidade e diferenciabilidade, a serem esclarecidos mais tarde, o gráfico de uma função $z = f(x, y)$ é uma superfície suave (sem bicos e rasgos). Toda superfície suave no $\mathbb{R}^3$ deve ser uma reunião de superfícies dadas como gráfico de funções boas, do tipo $z = f(x, y)$ ou $y = g(x, z)$ ou $x = h(y, z)$, com as "emendas"suaves.

Aqui vamos apenas apresentar alguns exemplos de gráficos, sem nos preocuparmos em justificar se realmente os gráficos são superfícies suaves.

Exemplos e exercícios.

1. O gráfico da função $f(x, y) = a(x - x_0) + b(y - y_0) + c$, onde a, b, c, x_0 e y_0 são constantes reais, é um plano no espaço com vetor normal $\vec{N} = (a, b, -1)$ e passando pelo ponto (x_0, y_0, c).

2. O gráfico da função $f(x, y) = \sqrt{(}1 - x^2 - y^2)$ é uma calota esférica, pois devemos ter $\begin{cases} z^2 = f^2(x, y) = 1 - x^2 - y^2 \\ z \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ z \geq 0 \end{cases}$

3. O gráfico da função $f(x, y) = x^2 + y^2$ é um parabolóide de revolução, passando pelo vértice $(0, 0, 0)$. Você pode visualizar isto, obtendo os cortes do gráfico por planos paralelos aos planos coordenados:

   - Cortando com o plano $z = 0$, devemos resolver $f(x, y) = x^2 + y^2 = z = 0$. Daí, temos $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$, e vemos que temos somente o vértice $V = (0, 0, 0)$.
   - Cortando com um plano $z = k < 0$, não temos nada, pois $x^2 + y^2$ nunca é negativo.
   - Cortando com um plano $z = k > 0$, temos circunferências de raio $\sqrt{k}$ e centro $(0, 0, k)$, das equações $x^2 + y^2 = k$ e $z = k$. Trata-se portanto de uma superfície de revolução de uma curva em torno do eixo Oz.
   - Cortando com o plano $x = 0$, temos $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x = 0 \end{cases} = \begin{cases} z = y^2 \\ x = 0 \end{cases}$ que é uma parábola no plano Oyz. Logo, o gráfico é a superfície obtida pela rotação da parábola em torno do eixo Oz.

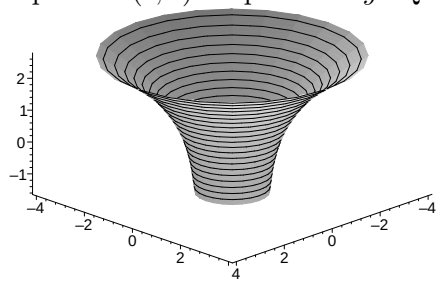
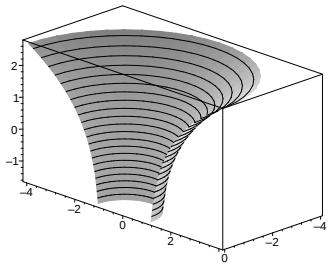
   Exercícios: Obtenha um esboço do gráfico de $f(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + 10$. Qual o nome da superfície? Ídem para $g(x, y) = 2(x - 3)^2 + 2(y - 4)^2 - 5$. Qual a diferença desta superfície para a anterior?

4. Exercício: Obtenha um esboço do parabolóide elítico, gráfico de $f(x, y) = \dfrac{(x-1)^2}{4} + \dfrac{(y-2)^2}{9} - 1$, analisando diversos cortes da superfície por planos paralelos aos planos coordenados.

5. O gráfico da função $f(x,y) = x^2 - y^2$ é uma superfície chamada sela ou parabolóide hiperbólico. Obtenha as curvas de nível de f (veja a definição no último exemplo de curvas no plano), para os níveis $k = 0$, $k = 1$ e $k = -1$. Obtenha os cortes pelos planos $x = 0$, $x = 2$, $x = -2$, $y = 0$, $y = -2$, $y = 2$. Esboce a superfície.

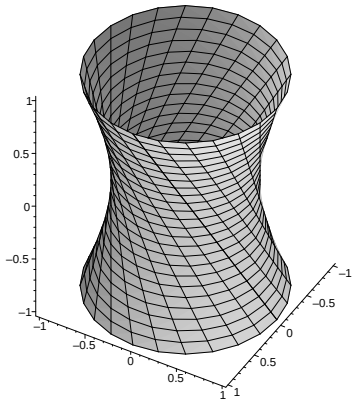
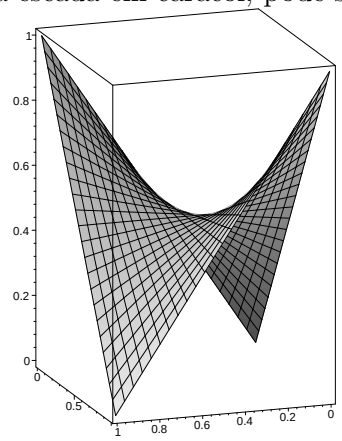
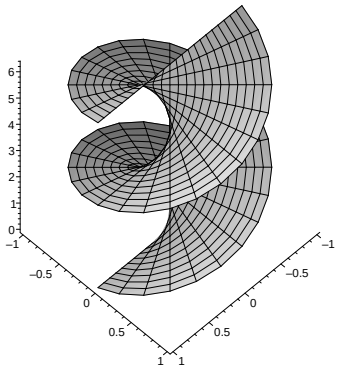
6. O gráfico da função $f(x,y) = x^2$ é um cilindro parabólico. Veja superfícies cilíndricas. Obtenha as secções do cilindro pelos planos $x = 0$, $y = 0$ e $z = k \geq 0$.

7. Obtenha o gráfico da função $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2 - 1)$. Antes, determine o domínio da função. Veja uma parte do gráfico, obtido via parametrização, utilizando como parâmetros r e θ das coordenadas polares (r,θ) no plano Oxy. Qual seria essa parametrização?

1.5 Superfícies Regradas

Superfícies regradas são reuniões de retas. Já vimos os cilindros e cones, mas temos outras superfícies com essa propriedade. Entre as quádricas, podemos citar o hiperbolóide de uma folha, de revolução, tipo um cesto de lixo. Temos também o parabolóide hiperbólico ou sela. O helicóide, grosseiramente aproximado por uma escada em caracol, pode ser obtido por uma hélice.

1. Para obter o hiperbolóide de uma folha regrado, considere duas circunferências de mesmo raio, em planos paralelos:

$$C_1 : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 1 \end{cases} = \begin{cases} x = \cos t \\ y = \operatorname{sen} t \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{e } C_2 : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = -1 \end{cases} = \begin{cases} x = \cos t \\ y = \operatorname{sen} t \\ z = -1 \end{cases}.$$

Ligue os pontos de uma circunferência com os da outra, de forma que haja uma defazagem no parâmetro, isto é, ligue $(\cos t, \operatorname{sen} t, 1)$ com $(\cos(t+\theta), \operatorname{sen}(t+\theta), -1)$, para algum θ fixo. Então $(x,y,z) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 1) + s(\cos(t+\theta) - \cos t, \operatorname{sen}(t+\theta) - \operatorname{sen} t, -2)$.

Essa é a construção da cesta de lixo, usando um fundo circular e varetas formando o contorno, todos colocados na borda da base formando o mesmo ângulo com o plano da base. Quando as varetas ficam perpendiculares à base ($\theta = 0$), temos o cilindro circular.

2. Uma sela (parabolóide hiperbólico) regrada pode ser obtida tomando-se inicialmente um quadrado com reticulado de retas como uma peneira com beirada quadrada. Suponha os lados do quadrado de material duro, mas articulável nas quinas, de forma que se possa suspender dois vértices opostos ao mesmo tempo, mantendo os outros dois no lugar. E suponha as linhas que formam o reticulado elásticas e sempre esticadas em linha reta. A superfície formada pelo reticulado é de uma sela. A parametrização pode ser vista no hipertexto sobre superfícies.

3. Vamos aqui construir a parametrização do helicóide, reunindo as retas que passam pela hélice $(x, y, z) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$ e pelo ponto $(0, 0, t) \in Oz$. A parametrização fica: $(x, y, z) = (0, 0, t) + s(\cos t, \operatorname{sen} t, 0)$, $t \in \mathbb{R}$ e $s \in \mathbb{R}$. Modelos aproximados do helicóide, além das escadas em caracol, podem ser vistas feitas com palitos de sorvete para girarem com o vento.

1.6 Coordenadas esféricas

Como no caso de coordenadas polares no plano, podemos descrever os pontos do espaço através das coordenadas esféricas ou das coordenadas cilíndricas.

O primeiro, como o nome diz, se presta mais a descrever os pontos através de sua posição em esferas. Considere um ponto fixo O, a origem do sistema. Considere um plano de referência passando por O e um eixo de referência, contida no plano e passando também por O. Na passagem entre coordenadas esféricas e coordenadas cartesianas $Oxyz$, consideramos O como a origem do sistema cartesiano, o plano de referência como o plano Oxz e o eixo, o Oz. Para cada ponto P no espaço ($P \neq O$), consideraremos r a distância do ponto a O, θ o ângulo do raio OP com o eixo Oz de referência, e ϕ o ângulo entre o plano Oxz de referência e o plano contendo o eixo Oz e o ponto P, que coimcide com o ângulo formado com a projeção ortogonal de OP sobre o plano Oxy e o eixo Ox. Assim, dada a terna r, θ, ϕ, com $r > 0$, $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq \phi < 2 * \pi$, pode-se determinar exatamente a posição do ponto e vice-versa. Na origem, apenas indicamos $r = 0$.

A relação entre as coordenadas cartesianas (x, y, z) e esféricas (r, θ, ϕ) fica portanto equacionado por

$$\begin{cases} x = r * \operatorname{sen}\theta * \cos\phi \\ y = r * \operatorname{sen}\theta * \operatorname{sen}\phi \\ z = r * \cos\theta \end{cases} .$$

Exemplos e exercícios

1. Uma esfera de centro na origem e raio R, tem a equação em coordenadas esféricas dada simplesmente por $r = R$. A partir disso, fica fácil obter a parametrização da esfera em coordenadas cartesianas: $\begin{cases} x = R * \operatorname{sen}\theta * \cos\phi \\ y = R * \operatorname{sen}\theta * \operatorname{sen}\phi \\ z = R * \cos\theta \end{cases}$, $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq \phi < 2 * \pi$.

   Exercícios: (1) Obtenha as equações paramétricas (em coordenadas cartesianas) de uma esfera com centro na origem e raio 5.
   (2)Depois da calota superior dessa esfera ($z \geq 0$) mudando a variação dos parâmetros.

(3) Supondo que a esfera representa o globo terrestre em escala menor, sendo o equador no plano $z = 0$, represente os paralelos e os meridianos.
(4) Obtenha a parametrização da esfera de centro (a, b, c) e raio R, em coordenadas cartesianas.

2. Um cone circular reto com vértice na origem e geratrizes formando ângulo θ_0 com o eixo Oz, tem equação $\theta = \theta_0$ em coordenadas esféricas. A partir disso, segue a parametrização do cone sem o vértice, em coordenadas cartesianas: $\begin{cases} x = r * \operatorname{sen}\theta_0 * \cos\phi \\ y = r * \operatorname{sen}\theta_0 * \operatorname{sen}\phi \\ z = r * \cos\theta \end{cases}$, com $r > 00$ e $0 \leq \phi < 2 * \pi$.
Exercício: Qual a parametrização do cone cujo com vértice na origem cujas geratrizes formam ângulos de 30 graus com o eixo Oz?

3. Obtenha os paralelos e os meridianos de uma esfera centrada na origem, em coordenadas esféricas.

4. No Maple, os comandos gráficos 3D aparecem com uma indicação de $[\theta, \phi]$ que corrensponde à descrição da posição do observador (ou da câmera) num sistema de coordenadas onde o centro do objeto è a origem do sistema. Você pode ler esses ângulos ao clicar sobre a figura (os números aparecem no canto superior esquerdo do video). Desenhe uma figura assimétrica e faça as visualizaçôes trocando esses valores, para concluir que θ eϕ estâo trocados em relação à notação que utilizamos em nossas coordenadas esféricas.

5. Estude a utilização do comando `plot3d` no Maple, com coordenadas esféricas, utilizando a opção `coords=spherical`.

1.7 Coordenadas cilíndricas

As coordenadas cilíndricas, como o nome diz, descreve os pontos do espaço através da descrição do ponto em cilindros. Considere um ponto do origem, O que compararemos com a origem de um sistema cartesiano. Considere um eixo de referência Oz e o plano de referència Oxz. Para cada ponto $P \neq O$, considere o cilindro circular reto de raio ρ e eixo Oz, a distância z de P ao plano Oxy (perpendicular a Oz por O) e ângulo ϕ do plano por Oz e P e o plano Oxz.

As coordenadas cilíndricas de P são dadas por ρ, ϕ e z, que se relacionam com o sistema cartesiano pelas equações $\begin{cases} x = \rho * \cos\phi \\ y = \rho * \operatorname{sen}\phi \\ z = z \end{cases}$, com $\rho > 0$, $0 \leq \phi < 2 * \pi$ e $z \in \mathbb{R}$.

Exemplos e exercícios

1. Um cilindro circular reto de raio R e eixo central Oz pode ser escrita pela equação $\rho = R$ em coordenadas cilíndricas.
Assim, uma parametrização do mesmo cilindro, em coordenadas cartesianas pode ser dada

por $\begin{cases} x = R * \cos\phi \\ y = R * \operatorname{sen}\phi \\ z = t \end{cases}$, com $0 \leq \phi < 2 * \pi$ e $t \in \mathbb{R}$.

2. Uma equação do tipo $F(\rho, z) = 0$ sem o comparecimento da variável ϕ determina pontos $P = (\rho, \phi, z)$ em coordenadas cilíndricas de uma superfície de revolução em torno do eixo Oz Verdadeiro ou falso?

3. Estude a parametrização, em coordenadas cartesianas, de superfícies de revolução em torno do eixo Oz que também são gráficos de funções $z = f(x, y)$, usando como parâmetros as variáveis de coordenadas cilíndricas. Isto é análogo a utilizar os parâmetros das coordenadas polares no plano Oxy Ou seja, $x = \rho\cos(\phi)$, $y = \rho\operatorname{sen}(\phi)$, $z = f(\rho\cos(\phi), \rho\operatorname{sen}(\phi))$.

4. Estude a utilização de coordenadas cilíndricas no comando `plot3d` no programa Maple, implementando vários exemplos, com a opção `coords=cylindrical`.