2

O Conceito de Conjunto

Neste capítulo, apresentamos os conceitos de conjuntos, subconjuntos, e operações entre conjuntos (união, interseção, e complementação), juntamente com as regras fundamentais dessas operações. Estas são desenvolvidas em paralelo com o Capítulo 1 sobre lógica. Famílias indexadas de conjuntos são discutidas. O Capítulo termina com o Paradoxo de Russel e uma nota histórica.

2.1 Conjuntos e subconjuntos

"O que é um conjunto" é uma questão muito difícil de se responder.[1] Neste tratado elementar, não entraremos em nenhuma abordagem axiomática complicada da Teoria dos Conjuntos, e conter-nos-emos em aceitar o seguinte: um *conjunto* é qualquer coleção, dentro de um todo de objetos definidos e distingüíveis, chamados *elementos*, de nossa intuição ou pensamento. Esta definição intuitiva de um conjunto foi dada primeiramente por Georg Cantor (1845–1918), que criou a teoria dos conjuntos em 1895. Exemplos:

(a) O conjunto de todas as cadeiras na sala de aula de Teoria dos Conjuntos.
(b) O conjunto de todos os estudantes desta universidade.
(c) O conjunto das letras *a, b, c* e *d*.
(d) O conjunto das regras de uso do laboratório de informática.
(e) O conjunto de todos os números racionais cujo quadrado é 2.
(f) O conjunto de todos os números naturais.
(g) O conjunto de todos os números reais entre 0 e 1.

Um conjunto que contém apenas um número finito de elementos é chamado um *conjunto finito*; um *conjunto infinito* é um conjunto que não é finito. Exemplos de (a) a (e) acima são todos de conjuntos finitos, e Exemplos (f) e (g) são de conjuntos infinitos.

Conjuntos são freqüentemente designados fechando-se entre chaves os símbolos que representam seus elementos, quando for possível fazê-lo. Assim, o conjunto no Exemplo (c) é $\{a, b, c, d\}$ e o conjunto no Exemplo (f) pode ser denotado por $\{1, 2, 3, \dots\}$.

[1] O estudante tomará ciência da dificuldade quando chegarmos às seções 2.7 e 2.8.

O conjunto do Exemplo (e) não tem elementos; um tal conjunto é chamado o *conjunto vazio*, sendo denotado pelo símbolo $\emptyset$.

Usaremos letras maiúsculas para denotar conjuntos, e letras minúsculas para denotar elementos. Se a é um elemento de um conjunto A, escrevemos $a \in A$ (leia-se: "a é um elemento de A" ou "a pertence a A"), enquanto que $a \notin A$ significa que a não é elemento de A.

Definição 2.1 *Dois conjuntos A e B são* iguais *ou idênticos quando contém os mesmos elementos. Isto é, $A = B$ significa $(\forall x)[(x \in A) \leftrightarrow (x \in B)]$.*

A ordem em que aparecem os elementos num conjunto não tem importância. Assim, o conjunto $\{a, b, c\}$ é o mesmo que $\{b, c, a\}$, etc. Além disso, como os elementos de um conjuntos são distintos, $\{a, a, b\}$, por exemplo, não é uma notação apropriada de um conjunto, e deveria ser substituída por $\{a, b\}$. Se a é um elemento de um conjunto, a e $\{a\}$ são considerados diferentes, isto é, $a \neq \{a\}$. Pois $\{a\}$ denota o *conjunto* consistindo do elemento a somente, enquanto que a é apenas o *elemento* do conjunto $\{a\}$.

Definição 2.2 *Sejam A e B conjuntos. Se todo elemento de A é elemento de B, então A é chamado um* subconjunto *de B, em símbolos: $A \subset B$ ou $B \supset A$. Se A é subconjunto de B, então B é chamado um* superconjunto *de A.*

Assim, escrevendo logicamente,

$$A \subset B \equiv (\forall x)[(x \in A) \rightarrow (x \in B)]$$

Obviamente, todo conjunto é um subconjunto (e um superconjunto) de si mesmo. Quando $A \subset B$ e $A \neq B$, escrevemos $A \subsetneq B$, ou $B \supsetneq A$, e dizemos que A é um subconjunto *próprio* de B, ou que B é um superconjunto *próprio* de A. Em outras palavras, A é um subconjunto próprio de B quando todo elemento de A é um elemento de B, mas existe um elemento de B que não é elemento de A. Se A não é subconjunto de B, escrevemos $A \not\subset B$.

Teorema 2.1 *O conjunto $\emptyset$ é um subconjunto de qualquer conjunto.*

Demonstração. Seja A um conjunto qualquer. Provaremos que a proposição condicional

$$(x \in \emptyset) \rightarrow (x \in A)$$

é verdadeira para todo x. Como o conjunto $\emptyset$ não tem nenhum elemento, a afirmação "$x \in \emptyset$" é falsa, enquanto que "$x \in A$" pode ser verdadeira ou falsa. Em qualquer dos casos, a afirmação condicional "$(x \in \emptyset) \rightarrow (x \in A)$" é verdadeira, conforme a tabela verdade para a condicional (casos 3 e 4 da Tabela 1.5, Capítulo 1).

Assim, $\emptyset \subset A$, para qualquer conjunto A.

Teorema 2.2 *Se $A \subset B$ e $B \subset C$ então $A \subset C$.*

Demonstração. Demonstraremos que $(x \in A) \Rightarrow (x \in C)$:

$$\begin{array}{rcll} (x \in A) & \Rightarrow & (x \in B), & \text{porque } A \subset B \\ & \Rightarrow & (x \in C), & \text{porque } B \subset C \end{array}$$

Portanto, pela Lei Transitiva (Teorema 1.4(c) do Capítulo 1), temos

$$(x \in A) \Rightarrow (x \in C)$$

Conseqüentemente, demonstramos que $A \subset C$.

2.1.1 Exercícios

1. Demonstre que o conjunto de letras da palavra "catarata" e o conjunto de letras da palavra "catraca" são iguais.
2. Decida, dentre os seguintes conjuntos, quais são subconjuntos de quais:
   (a) $A = \{\text{todos os números reais satisfazendo } x^2 - 8x + 12 = 0\}$
   (b) $B = \{2, 4, 6\}$
   (c) $C = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$
   (d) $D = \{6\}$
3. Liste todos os subconjuntos do conjunto $\{-1, 0, 1\}$.
4. Demonstre que $[(A \subset B) \wedge (B \subset A)] \Leftrightarrow (A = B)$ [*Nota:* Freqüentemente, em matemática, o melhor meio de demonstrar que $A = B$ é mostrar que $A \subset B$ e $B \subset A$.]
5. Demonstre que $(A \subset \emptyset) \Rightarrow (A = \emptyset)$.
6. Demonstre que
   (a) $[(A \subsetneq B) \wedge (B \subset C)] \Rightarrow (A \subsetneq C)$
   (b) $[(A \subset B) \wedge (B \subsetneq C)] \Rightarrow (A \subsetneq C)$
7. Dê um exemplo de um conjunto cujos elementos são também conjuntos.
8. Em cada um dos seguintes itens, determine se a afirmação é verdadeira ou falsa. Se for verdadeira, demonstre-a. Se for falsa, mostre-o através de um exemplo (um tal exemplo, mostrando que uma proposição é falsa, é chamado um contra-exemplo).
   (a) Se $x \in A$ e $A \in B$ então $x \in B$.
   (b) Se $A \subset B$ e $B \in C$ então $A \in C$.
   (c) Se $A \not\subset B$ e $B \subset C$ então $A \not\subset C$.
   (d) Se $A \not\subset B$ e $B \not\subset C$ então $A \not\subset C$.
   (e) Se $x \in A$ e $A \not\subset B$ então $x \notin B$.
   (f) Se $A \subset B$ e $x \notin B$ então $x \notin A$.
9. Dado um conjunto com n elementos, demonstre que existem exatemente $C(n, r)$ subconjuntos com r elementos.

2.2 Especificação de conjuntos

Um modo de construir um novo conjunto, a partir de um conjunto dado, é especificar aqueles elementos, do conjunto dado, que satisfazem uma propriedade particular. Por exemplo, seja A o conjunto de todos os estudantes desta universidade. A proposição "x é paulista" é verdadeira para alguns elementos x de A e falsa para outros. Empregaremos a notação

$$\{x \in A \,|\, x \text{ é paulista}\}$$

para especificar o conjunto de todas os estudantes paulistas desta universidade. Similarmente,

$$\{x \in A \,|\, x \text{ não é paulista}\}$$

especifica o conjunto de estudantes não paulistas desta universidade.

Como regra, a todo conjunto A e a toda proposição $p(x)$ sobre $x \in A$, existe um conjunto $\{x \in A \,|\, p(x)\}$, cujos elementos são precisamente aqueles elementos $x \in A$ para os quais a afirmação $p(x)$ é verdadeira. Numa abordagem axiomática da teoria dos conjuntos, esta regra é habitualmente postulada como um axioma, chamado o *Axioma da Especificação*. O símbolo $\{x \in A \,|\, p(x)\}$ é lido: o conjunto de todos os x em A tais que $p(x)$ é verdadeira. A notação da forma $\{x \in A \,|\, p(x)\}$, que descreve um conjunto é chamada a *notação de construção do conjunto*.

Exemplo 2.1 *Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais. Então*

(a) $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x = x + 1\}$ é o conjunto vazio.
(b) $\{x \in \mathbb{R} \,|\, 2x^2 - 5x - 3 = 0\}$ é o conjunto $\{-1/2, 3\}$.
(c) $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 + 1 = 0\}$ é o conjunto vazio.

Por causa de freqüente aparecimento, através do restante deste e dos demais capítulos, e em outros tópicos de matemática, os seguintes símbolos especiais serão reservados para os conjuntos descritos:

$$\begin{aligned}
\mathbb{R} &= \{x \,|\, x \text{ é um número real}\} \\
\mathbb{Q} &= \{x \,|\, x \text{ é um número racional}\} \\
\mathbb{Z} &= \{x \,|\, x \text{ é um número inteiro}\} \\
\mathbb{N} &= \{x \,|\, x \text{ é um número natural}\} \\
\mathbb{I} &= \{x \in \mathbb{R} \,|\, 0 \leq x \leq 1\} \\
\mathbb{R}_+ &= \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 0\}
\end{aligned}$$

Note que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ e $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$.

É bem possível que elementos de um conjunto possam ser também conjuntos. Por exemplo, o conjunto de todos os subconjuntos de um conjunto dado A tem conjuntos como seus elementos. Este conjunto é chamado *conjunto das partes*[2] de A, e é denotado

[2]Na teoria dos conjuntos, a existência do conjunto das partes não é tida como óbvia. Como a existência de um conjunto das partes não é conseqüência do axioma da especificação, um novo axioma é necessário; este axioma é habitualmente chamado o *Axioma do Conjunto das Partes* e pode ser assim enunciado: *Para cada conjunto, existe um conjunto de conjuntos que consiste de todos os subconjuntos do conjunto dado.*

por $\wp(A)$.

Exemplo 2.2 $\wp(\{a\}) = \{\emptyset, \{a\}\}$, $\wp(\emptyset) = \{\emptyset\}$, e $\wp(\{a, b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.

Teorema 2.3 *Se A consiste de n elementos, então seu conjunto das partes $\wp(A)$ contém exatamente 2^n elementos.*

Demonstração. O teorema é claramente verdadeiro para $A = \emptyset$. Para um conjunto não vazio A, seja $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$. Dado um elemento a_k de A, para cada subconjunto de A temos duas possibilidades: ou ele contém a_k ou não o contém. Portanto, o problema de encontrar o número de subconjuntos de A pode ser considerado como o problema de preencher uma lista de n espaços em branco $\square\ \square\ \square \cdots \square$, aleatoriamente, com os números 0 e 1, um número em cada espaço. Cada preenchimento dos n espaços determina um subconjunto X de A da seguinte maneira: $a_k \in X$ se e somente se 1 aparece no k-ésimo espaço (para cada $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$). Como existem exatamente 2^n preenchimentos distintos, existem 2^n subconjuntos de A.

É também interessante a seguinte demonstração alternativa do Teorema 2.3:

Demonstração alternativa. Primeiramente, o conjunto vazio $\emptyset$ pertence a $\wp(A)$. Em seguida, cada elemento $x \in A$ forma um subconjunto $\{x\}$ pertencente a $\wp(A)$. Observe que o número desse conjuntos unitários é $C(n, 1)$. Continuando, existem exatamente $C(n, 2)$ subconjuntos de A contendo exatemente 2 elementos de A.[3] Finalmente, existe exatamente $C(n, n) = 1$ subconjunto de A contendo n elementos de A, que é o próprio A. Contando o conjunto vazio, o número total de subconjuntos de A é igual a $C(n, 0) + C(n, 1) + \cdots + C(n, n)$. Então, usando a expansão binomial para $(1 + 1)^n$, temos

$$(1 + 1)^n = C(n, 0) + C(n, 1) + \cdots + C(n, n)$$

Assim, o número de elementos de $\wp(A)$ é $(1 + 1)^n = 2^n$.

2.2.1 Exercícios

1. Exiba entre chaves os elementos de cada um dos seguintes conjuntos.
   $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 5\}$
   $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 \leq 25\}$
   $C = \{x \in \mathbb{Q} \mid 10x^2 + 3x - 1 = 0\}$
   $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 + 1 = 0\}$
   $E = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid 4x^2 - 4x - 1 = 0\}$
2. Denote cada um dos seguintes conjuntos pela notação de construção do conjunto.
   $A = \{1, 2, 3\}$
   $B = \{-1, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0\}$

[3] Veja problema 9, Exercícios 2.1.1

$C = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$
$D = \{1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}\}$

3. Quais são os elementos do conjunto das partes do conjunto $\{x, \{y, z\}\}$? Quantos elementos tem esse conjunto das partes?

4. Seja B um subconjunto de A, e seja $\wp(A\colon B) = \{X \in \wp(A) \,|\, X \supset B\}$.

(a) Seja $B = \{a, b\}$ e $A = \{a, b, c, d, e\}$. Liste os membros do conjunto $\wp(A\colon B)$; quantos são eles?

(b) Demonstre que $\wp(A\colon \emptyset) = \wp(A)$.

5. Sejam A um conjunto com n elementos e B um subconjunto com m elementos, $n \geq m$.

(a) Encontre o número de elementos do conjunto $\wp(A\colon B)$.

(b) Deduza o Teorema 2.3 a partir de (a), fazendo $B = \emptyset$.

2.3 Uniões e interseções

Na aritmética, podemos somar, multiplicar, ou subtrair dois números quaisquer. Na teoria dos conjuntos, há três operações — união, interseção, e complementação — respectivamente análogas às operações adição, multiplicação, e subtração de números.

Definição 2.3 *A* união *de dois conjuntos quaisquer A e B, denotada por $A \cup B$, é o conjunto dos elementos x tais que x pertence a pelo menos um dos dois conjuntos A e B. Ou seja, $x \in A \cup B$ se e somente se $x \in A \vee x \in B$.*

Definição 2.4 *A* interseção *de dois conjuntos quaisquer A e B, denotada por $A \cap B$, é o conjunto dos elementos x tais que x pertence a ambos os conjuntos A e B. Em símbolos, $A \cap B = \{x \,|\, (x \in A) \wedge (x \in B)\}$, ou $\{x \in A \,|\, x \in B\}$. Se $A \cap B = \emptyset$, dizemos que A e B são conjuntos* disjuntos.

Por exemplo, se $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{3, 4, 5\}$, então $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $A \cap B = \{3, 4\}$; se $\mathbf{Im}$ denota o conjunto de números imaginários, então os conjuntos $\mathbf{Im}$ e $\mathbb{R}$ são disjuntos.

Exemplo 2.3 *No que segue, os conjuntos $\mathbb{I}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \dots$ são definidos como na última seção.*

(a) $\mathbb{I} \cap \mathbb{Z} = \{0, 1\}$ *e* $\mathbb{N} \cap \mathbb{I} = \{1\}$.
(b) $\mathbb{Z} \cup \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$ *e* $\mathbb{Z} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$.
(c) $\mathbb{I} \cup \mathbb{I} = \mathbb{I}$ *e* $\mathbb{I} \cap \mathbb{I} = \mathbb{I}$.

Teorema 2.4 *Sejam X um conjunto e A, B e C subconjuntos de X. Então temos:*

(a) Os elementos neutros:

$$A \cup \emptyset = A$$
$$A \cap X = A$$

(b) As leis de idempotência:

$$A \cup A = A$$
$$A \cap A = A$$

(c) As leis comutativas:

$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$

(d) As leis associativas:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

(e) As leis distributivas:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Demonstração. Deixaremos as demonstrações das partes (a), (b) e (c) para o leitor, como exercícios.

(d) De acordo com a Definição 2.3,

$$x \in A \cup (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \cup C)$$

e

$$x \in B \cup C \Leftrightarrow x \in B \vee x \in C$$

Assim,

$$x \in A \cup (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \vee x \in C)$$

Pela Lei Associativa (para a disjunção), $(x \in A) \vee (x \in B \vee x \in C)$ é equivalente a $(x \in A \vee x \in B) \vee (x \in C)$. A última afirmação, pela Definição 2.3, é equivalente a $(x \in A \cup B) \vee (x \in C)$, e portanto $x \in (A \cup B) \cup C$.

Assim, temos

$$x \in A \cup (B \cup C) \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cup C$$

Pela definição 2.1, $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

A demonstração acima pode ser condensada em uma exposição limpa de passos lógicos essenciais, com a justificativa de cada passo escrita à direita para fácil referência:

$$
\begin{array}{lll}
x \in A \cup (B \cup C) \Leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in B \cup C) & & \text{Def. de } \cup \\
\Leftrightarrow (x \in A) \vee [(x \in B) \vee (x \in C)] & & \text{Def. de } \cup \\
\Leftrightarrow [(x \in A) \vee (x \in B)] \vee (x \in C) & & \text{Assoc. para } \vee \\
\Leftrightarrow (x \in A \cup B) \vee (x \in C) & & \text{Def. de } \cup \\
\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cup C & & \text{Def. de } \cup
\end{array}
$$

Portanto, pela Definição 2.1, acabamos de provar que $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

O estudante deveria tentar apreciar este tipo de demonstração, ordenada precisamente pela lógica.

Deixaremos a demonstração de $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ ao leitor, como exercício.

(e) Novamente, apenas a primeira parte do item (e) será demonstrada, sendo a segunda parte deixada como exercício.

$$
\begin{array}{lll}
x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B \cup C) & & \text{Def. de } \cap \\
\Leftrightarrow (x \in A) \wedge [(x \in B) \vee (x \in C)] & & \text{Def. de } \cup \\
\Leftrightarrow [(x \in A) \wedge (x \in B)] \vee [(x \in A) \wedge (x \in C)] & & \\
& & \text{Lei Dist. da lógica (Cap. 1)} \\
\Leftrightarrow (x \in A \cap B) \vee (x \in A \cap C) & & \text{Def. de } \cap \\
\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) & & \text{Def. de } \cup
\end{array}
$$

Portanto, pela Definição 2.1, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

2.3.1 Exercícios

1. Demonstre que $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$.
2. Demonstre que $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$.
3. Demonstre as partes (a), (b), e (c) do Teorema 2.4.
4. Demonstre a segunda metade do Teorema 2.4(d).
5. Demonstre a segunda metade do Teorema 2.4(e).
6. Demonstre que
   (a) $A \subset C$ e $B \subset C$ implica $A \cup B \subset C$.
   (b) $A \subset B$ e $A \subset C$ implica $A \subset B \cap C$.
   [Sugestão: Use o Teorema 1.5, do Capítulo 1, se desejar.]
7. Demonstre que $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow C \subset A$.
8. Demonstre que se $A \subset B$ então $\wp(A) \subset \wp(B)$.
9. Demonstre que $A \cup B = A \cap B \Leftrightarrow A = B$.
10. Demonstre que se $A \subset B$, então $A \cup C \subset B \cup C$ e $A \cap C \subset B \cap C$, para qualquer conjunto C.
11. Demonstre que se $A \subset C$ e $B \subset D$ então $A \cup B \subset C \cup D$.

2.4 Complementos

Existe, na teoria dos conjuntos, uma operação conhecida como complementação, que é similar à operação de subtração na aritmética.

Definição 2.5 *Se A e B são conjuntos, o* complemento relativo *de B em A é o conjunto $A - B$, definido por*

$$A - B = \{x \in A \,|\, x \notin B\}$$

Nesta definição, não é *assumido que $B \subset A$.*

Exemplo 2.4 *Sejam*

$$A = \{a, b, c, d\} \text{ e } B = \{c, d, e, f\}$$

Encontre $A - B$ e $A - (A \cap B)$.

Solução.

$$A - B = \{a, b, c, d\} - \{c, d, e, f\} = \{a, b\}$$

e

$$A - (A \cap B) = \{a, b, c, d\} - \{c, d\} = \{a, b\}$$

Embora o conjunto universal no sentido absoluto, o conjunto de todos os conjuntos, não exista (veja o Paradoxo de Russel na seção 2.7), não há problema em assumirmos temporariamente que *todos os conjuntos mencionados, no restante deste e dos demais capítulos, são subconjuntos de um conjunto fixado U*, que pode ser considerado (temporariamente) como um conjunto universal no sentido restrito. De modo a enunciar as regras básicas a respeito de complementações, do modo mais simples possível, assumiremos, a menos que seja dito em contrário, que todos os complementos são formados relativamente a este conjunto U. Escreveremos então A' como sendo $U - A$.

Exemplo 2.5 *Demonstre que $A - B = A \cap B'$.*

Solução.

$$\begin{array}{lll}
x \in A \cap B' \equiv (x \in A) \wedge (x \in U - B) & & \textit{Def. de } \cap, \textit{ Def. de } ' \\
\equiv (x \in A) \wedge [(x \in U) \wedge (x \notin B)] & & \textit{Def. 2.5} \\
\equiv (x \in A \cap U) \wedge (x \notin B)] & & \textit{Assoc. de } \wedge, \textit{ Def. de } \cap \\
\equiv (x \in A) \wedge (x \notin B) & & A \cap U = A \\
\Leftrightarrow x \in (A - B) & & \textit{Def. 2.5}
\end{array}$$

Portanto, pela Definição 2.1, $A \cap B' = A - B$.

Teorema 2.5 *Sejam A e B conjuntos. Então*

(a) $(A')' = A$.
(b) $\emptyset' = U$ *e* $U' = \emptyset$.
(c) $A \cap A' = \emptyset$ *e* $A \cup A' = U$.
(d) $A \subset B$ *se e somente se* $B' \subset A'$

Demonstração. As demonstrações das partes (a), (b), e (c) usam apenas definições e são deixadas ao leitor, como exercício. Daremos uma demonstração da parte (d):

$$\begin{array}{lll} A \subset B \equiv [(x \in A) \rightarrow (x \in B)] & & \text{Def. de } \subset \\ \equiv [(x \notin B) \rightarrow (x \notin A)]^{\,4} & & \text{Contrap.} \\ \equiv [(x \in B') \rightarrow (x \in A')] & & \text{Def. de } ' \\ \equiv B' \subset A' & & \text{Def. de } \subset \end{array}$$

Portanto, acabamos de demonstrar que $(A \subset B) \equiv (B' \subset A')$.

Na demonstração acima, novamente símbolos e leis da lógica (do Capítulo 1) são usados, o que nos permite exibir cada passo da demonstração de maneira simples e elegante, com justificativas ao lado direito. O leitor é encorajado a fazer uso total do Capítulo 1, nas demonstrações, sempre que possível.

A propriedade mais útil de complementos é o seguinte Teorema de De Morgan. Compare-o com as Leis de De Morgan no Capítulo 1.

Teorema 2.6 (Teorema de De Morgan) *Para quaisquer dois conjuntos A e B,*

(a) $(A \cup B)' = A' \cap B'$
(b) $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

Demonstraçã de (a):

$$\begin{array}{lll} x \in (A \cup B)' \equiv \sim [x \in A \cup B] & & \text{Def. de } ' \\ \equiv \sim [(x \in A) \vee (x \in B)] & & \text{Def. de } \cup \\ \equiv \sim (x \in A) \wedge \sim (x \in B) & & \text{De M. da lógica} \\ \equiv (x \in A') \wedge (x \in B') & & \text{Def. de } ' \\ \equiv x \in (A' \cap B') & & \text{Def. de } \cap \end{array}$$

Portanto, pela Definição 2.1, $(A \cup B)' = A' \cap B'$.

A demonstração de (b) é deixada ao leitor.

---

[4] Lembremo-nos que a negação de $x \in B$, $\sim (x \in B)$, é denotada por $x \notin B$.

Exemplo 2.6 *Sejam A, B, e C três conjuntos quaisquer. Decida se o conjunto $A \cap (B - C)$ é o mesmo que $(A \cap B) - (A \cap C)$.*

Solução.

$$\begin{aligned}
(A \cap B) - (A \cap C) &= (A \cap B) \cap (A \cap C)' && \textit{Exemplo 2.5} \\
&= (A \cap B) \cap (A' \cup C') && \textit{Teor. de De M. (Teor. 2.6)} \\
&= (A \cap B \cap A') \cup (A \cap B \cap C') && \textit{Dist.} \\
&= (A \cap A' \cap B) \cup (A \cap B \cap C') && \textit{Com.} \\
&= \emptyset \cup [A \cap (B \cap C')] && \textit{Teor. 2.5(c): } A \cap A' = \emptyset \\
&= A \cap (B - C) && \textit{Teor. 2.4(a), Exemplo 2.5}
\end{aligned}$$

Portanto, demonstramos que $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$.

2.4.1 Exercícios

1. Sejam A e B conjuntos. Demonstre que $A - B = A - (A \cap B)$.
2. Demonstre as partes (a), (b), e (c) do Teorema 2.5.
3. Sejam A e B conjuntos. Demonstre que $B \subset A'$ se e somente se $A \cap B = \emptyset$.
4. Sejam A e B conjuntos. Demonstre que $(A - B) \cup B = A$ se e somente se $B \subset A$.
5. Demonstre o Teorema 2.6(b).
6. Sejam A, B, e C três conjuntos quaisquer. Demonstre que
   (a) $(A - C) \cup (B - C) = (A \cup B) - C$,
   (b) $(A - C) \cap (B - C) = (A \cap B) - C$.
7. Sejam A e B dois conjuntos quaisquer. Demonstre que A e $B - A$ são disjuntos, e que $A \cup B = A \cup (B - A)$. (Isto mostra como representar a união $A \cup B$ como uma união disjunta.)
8. Sejam A, B, e C três conjuntos quaisquer. Demonstre que
   (a) $(A \cap B \cap C)' = A' \cup B' \cup C'$
   (b) $(A \cup B \cup C)' = A' \cap B' \cap C'$.

Generalize estes resultados a proposições envolvendo n conjuntos

$$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n.$$

9. Para conjuntos quaisquer A e B demonstre ou refute que
   (a) $\wp(A) \cap \wp(B) = \wp(A \cap B)$
   (b) $\wp(A) \cup \wp(B) = \wp(A \cup B)$.
10. Demonstre que se $A \subset C$, $B \subset C$, $A \cup B = C$, e $A \cap B = \emptyset$, então $A = C - B$.
11. Sejam A e B dois conjuntos quaisquer. Demonstre que

$$(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B).$$

2.5 Diagramas de Venn

Como auxílio na vizualização de operações de conjuntos, introduziremos diagramas, chamados diagramas de Venn, que representam conjuntos geometricamente. Representaremos o conjunto universal relativo U por um retângulo, e os subconjuntos de U por círculos desenhados dentro do retângulo. Por exemplo, na Figura 1, representamos dois conjuntos A e B como dois círculos sombreados; a parte duplamente hachurada é a interseção $A \cap B$, e a área sombreada total é a união $A \cup B$.

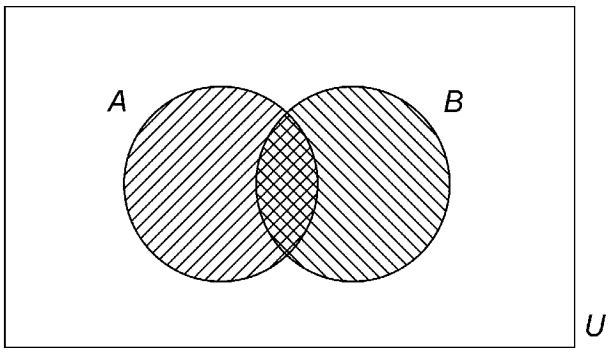


Figura 1.

A Figura 2 mostra dois conjuntos A e B que são disjuntos. A área sombreada na Figura 3 representa o complemento A' do conjunto A. O conjunto $A-B$, o complemento relativo de B em A, é representado pela parte sombreada na Figura 4.

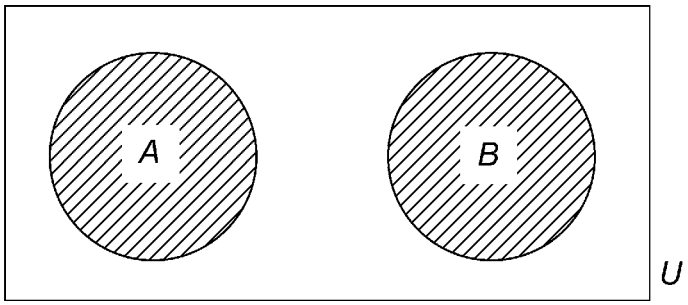


Figura 2.

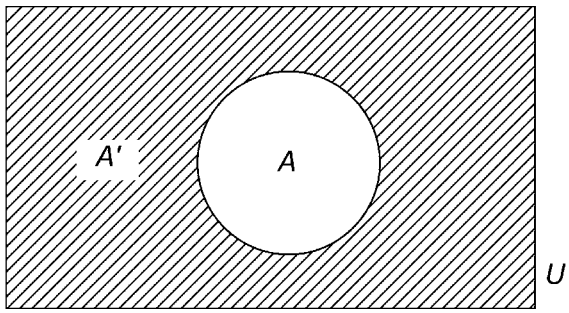


Figura 3.

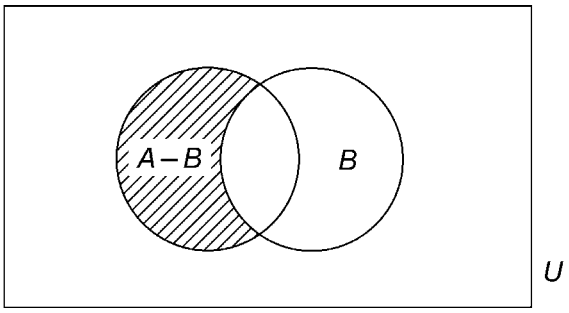


Figura 4.

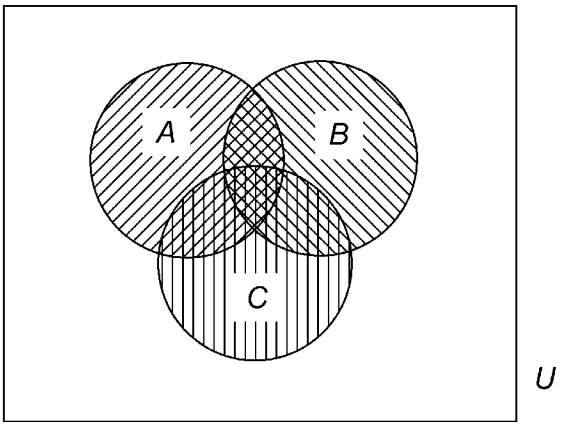


Figura 5.

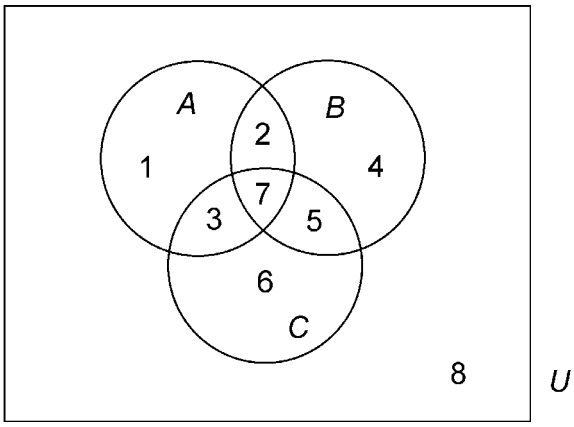


Figura 6.

Um diagrama de Venn típico de três conjuntos A, B, e C pode ser desenhado como na Figura 5. Esses três conjuntos dividem o conjunto universal U em 8 partes, tal como indicado na figura 6.

Usando os diagramas acima, podemos dar argumentos heurísticos simples para a validade de, por exemplo, a lei distributiva $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, como segue: Da Figura 6, $A \cap (B \cup C)$ consiste das áreas 2, 3 e 7. Por outro lado, $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ é representada pela união das áreas 2 e 7, e áreas 3 e 7. Portanto, a igualdade $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ parece plausível. Entretanto, em matemática, um argumento heurístico não pode ser aceito como uma demonstração.

2.5.1 Exercícios

1. Desenhe um diagrama de Venn para $A \subset B$.
2. Desenhe diagramas de Venn para $A \cap B'$, $A' \cap B$ e $A' \cap B'$.
3. Desenhe diagramas de Venn para $A \cup B'$, $A' \cup B$ e $A' \cup B'$.

Nos problemas de 4 a 10, desenhe diagramas de Venn e dê argumentos heurísticos de que cada uma das afirmações é plausível.

4. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.
5. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.
6. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
7. $(A \cup B)' = A' \cap B'$.
8. $(A \cap B)' = A' \cup B'$.
9. $A \cap (B - A) = \emptyset$ e $A \cup (B - A) = A \cup B$.
10. $(A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$.

2.6 Famílias indexadas de conjuntos

Recordemos que um conjunto é uma coleção de elementos que são todos distintos. Grosseiramente falando, uma *família* é uma coleção de objetos, não necessariamente distintos, chamados *membros*. Por exemplo, $\{a, a, a\}$ é uma família com três membros, a, a e a. Mas a mesma família $\{a, a, a\}$, considerada como um conjunto é apenas o conjunto unitário $\{a\}$ com um único elemento, a.

Seja Γ um conjunto e suponhamos que para cada elemento γ de Γ, existe um conjunto associado A_γ. A família de todos esses conjuntos A_γ é chamada uma *família indexada de conjuntos*, indexada pelo conjunto Γ, e é denotada por

$$\{A_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$$

Por exemplo, a família de conjuntos, $\{1, 2\}, \{2, 4\}, \{3, 6\}, \ldots, \{n, 2n\}, \ldots$, pode ser considerada como uma família indexada de conjuntos, indexada pelo conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais, sendo $A_n = \{n, 2n\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Esta família de conjuntos pode ser denotada por $\{\{n, 2n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Uma família arbitrária de conjuntos pode parecer não ser indexada, mas na maioria dos casos podemos facilmente encontrar um conjunto Γ que pode ser usado para indexar a família de conjuntos dada.

Exemplo 2.7 *Indexe a família $\mathcal{F}$ de conjuntos $\emptyset, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{R}$.*

Solução. *Como esta família contém exatamente seis membros (embora dois deles sejam o mesmo), escolhemos $\Gamma = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e fazemos $A_1 = \emptyset$, $A_2 = \mathbb{N}$, $A_3 = \mathbb{Z}$, $A_4 = \mathbb{Q}$, $A_5 = \mathbb{R}$ e $A_6 = \mathbb{R}$. A família de conjuntos está então indexada.*

Virtualmente todos os símbolos e notações usados para conjuntos aplicam-se a famílias também. Por exemplo, $\emptyset \in \mathcal{F}$ e $\mathbb{R}_+ \notin \mathcal{F}$ indicam, respectivamente, que $\emptyset$

é um membro da família $\mathcal{F}$ e $\mathbb{R}_+$ não é membro de $\mathcal{F}$. Podemos também escrever $\mathcal{F} = \{\emptyset, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{R}\}$.

Estendamos agora os conceitos de união $\cup$ e interseção $\cap$, das Definições 1.3 e 1.4, a uma família arbitrária de conjuntos.

Definição 2.6 *Seja $\mathcal{F}$ uma família arbitrária de conjuntos. A* união *dos conjuntos em $\mathcal{F}$, denotada por $\bigcup_{A\in\mathcal{F}} A$ ou $\bigcup \mathcal{F}$, é o conjunto de todos os elementos que estão em A para algum $A \in \mathcal{F}$. Ou seja,*

$$\bigcup_{A\in\mathcal{F}} A = \{x \in U \mid x \in A \text{ para algum } A \in \mathcal{F}\}$$

Se a família $\mathcal{F}$ é indexada pelo conjunto Γ, a seguinte notação alternativa pode ser usada:

$$\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma = \{x \in U \mid x \in A_\gamma \text{ para algum } \gamma \in \Gamma\}$$

Se o conjunto Γ de índices é finito, $\Gamma = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ para algum número natural n, notações mais intuitivas, tais como

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \text{ ou } A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$$

são usadas freqüentemente para $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$.

Exemplo 2.8 *Encontre a união da família de conjuntos*

$$\{1\}, \{2, 3\}, \{3, 4, 5\}, \ldots, \{n, n+1, \ldots, 2n-1\}.$$

Solução. *Esta família de conjuntos pode ser considerada como indexada por $\Gamma = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, sendo $A_i = \{i, i+1, \ldots, 2i-1\}$, para cada $i \in \Gamma$. O problema se reduz a encontrar $\bigcup_{i=1}^{n}\{i, i+1, \ldots, 2i-1\}$. Observe que cada inteiro entre 1 e $2n-1$ pertence a algum A_i na família, e nenhum outro elemento pertence a qualquer desses A_i. Portanto,*

$$\bigcup_{i=1}^{n}\{i, i+1, \ldots, 2i-1\} = \{1, 2, 3, \ldots, 2n-1\}$$

Definição 2.7 *Seja $\mathcal{F}$ uma família arbitrária de conjuntos. A* interseção *de conjuntos em $\mathcal{F}$, denotada por $\bigcap_{A\in\mathcal{F}}$ ou $\bigcap \mathcal{F}$, é o conjunto de todos os elementos que estão em A para todo $A \in \mathcal{F}$. Ou seja,*

$$\bigcap_{A\in\mathcal{F}} = \{x \in U \mid x \in A \text{ para todo } A \in \mathcal{F}\}$$

Aqui, a afirmação "$x \in A$ para todo $A \in \mathcal{F}$" pode ser expressada alternativamente como "$A \in \mathcal{F} \to x \in A$. Esta última expressão é melhor na demonstração de teoremas, como veremos no Teorema 2.7 adiante.

Se a família $\mathcal{F}$ é indexada pelo conjunto Γ, a seguinte notação alternativa pode ser usada:

$$\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma = \{x \in U \,|\, x \in A_\gamma \text{ para todo } \gamma \in \Gamma\}$$

Se o conjunto de índices Γ for finito, $\Gamma = \{1, 2, \ldots, n\}$ para algum inteiro positivo n, então como no caso da união, escrevemos habitualmente

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i \text{ ou } A_1 \cap A_2 \cap \cdots A_n$$

em vez de $\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$.

Sejam a e b dois números reais quaisquer. Por *intervalo aberto* $]a, b[$ entendemos o subconjunto $\{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x < b\}$ de $\mathbb{R}$. Segue que se $a \geq b$ então $]a, b[= \emptyset$.

Exemplo 2.9 *Encontre a interseção da família de intervalos abertos*

$$]0, 1[\,,]0, \tfrac{1}{2}[\,,]0, \tfrac{1}{3}[\,, \ldots$$

Solução. *Devemos encontrar o conjunto* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}]0, \frac{1}{n}[$. *Falando intuitivamente, a família dada é uma seqüência de intervalos "decrescentes"* $]0, 1/n[$, *em que o intervalo* $]0, 1/n[$ *se "aproxima" do conjunto vazio* $\emptyset$ *quando* n *torna-se grande. Portanto, podemos conjeturar que a interseção* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}]0, 1/n[$ *deve ser o conjunto vazio. Demonstraremos que nossa conjetura é verdadeira. Suponha em contrário, que existe algum número real* $a \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}}]0, 1/n[$. *Então teríamos* $0 < a < 1/n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Isto contradiz o fato de que para um número real fixado* $a > 0$, *sempre existe um* $n \in \mathbb{N}$, *suficientemente grande, tal que* $1/n < a$. *A contradição mostra que* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}]0, 1/n[= \emptyset$.

Teorema 2.7 *Seja* $\{A_\gamma \,|\, \gamma \in \Gamma\}$ *uma família vazia de conjuntos; isto é,* $\Gamma = \emptyset$. *Então*

(a) $\bigcup_{\gamma\in\emptyset} A_\gamma = \emptyset$.
(b) $\bigcap_{\gamma\in\emptyset} A_\gamma = U$.

Demonstração. (a) Para mostrar $\bigcup_{\gamma\in\emptyset} A_\gamma = \emptyset$, mostramos equivalentemente que $x \notin \bigcup_{\gamma\in\emptyset} A_\gamma$ para todo x (em U):

$$\begin{aligned}
x \notin \bigcup_{\gamma\in\emptyset} A_\gamma &\equiv \sim \left(x \in \bigcup_{\gamma\in\emptyset} A_\gamma \right) && \text{Notação} \\
&\equiv \sim (x \in A_\gamma \text{ para algum } \gamma \in \emptyset) && \text{Def. 2.6} \\
&\equiv (x \notin A_\gamma \text{ para todo } \gamma \in \emptyset) && \text{N.Q. (Cap. 1)} \\
&\equiv (\gamma \in \emptyset \to x \notin A_\gamma)
\end{aligned}$$

A última afirmação é, pelo Teorema 1.7 do Capítulo 1, verdadeira para todo $x \in U$, pois $\gamma \in \emptyset$ é uma contradição. Isto completa a demonstração da parte (a).

(b) Demonstraremos que $x \in \bigcap_{\gamma\in\emptyset} A_\gamma$, para todo x em U. Observe que

$$\begin{aligned} x \in \bigcap_{\gamma\in\emptyset} A_\gamma &\equiv (x \in A_\gamma,\ \forall\gamma \in \emptyset) && \text{Def. 2.7} \\ &\equiv (\gamma \in \emptyset \to x \in A_\gamma) \end{aligned}$$

A última asserção é, como explicamos na demonstração da parte (a), uma afirmação verdadeira para todo $x \in U$. A demonstração está terminada.

Muitos teoremas, a respeito de operações de um número finito de conjuntos, podem ser generalizados a teoremas a respeito de operações de uma família arbitrária de conjuntos. Por exemplo, o seguinte teorema generaliza o Teorema de De Morgan. Compare este teorema com o Teorema 2.6.

Teorema 2.8 (Teorema de De Morgan Generalizado) *Seja $\{A_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ uma família arbitrária de conjuntos. Então*

(a) $\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right)' = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} A'_\gamma$.

(b) $\left(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right)' = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A'_\gamma$.

Demonstração. Demonstraremos apenas a parte (a), e deixaremos a parte (b) ao estudante.

$$\begin{aligned} x \in \left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right)' &\equiv \sim\left(x \in \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right) && \text{Def. de } ' \\ &\equiv \sim(\exists\gamma \in \Gamma)(x \in A_\gamma) && \text{Def. 2.6} \\ &\equiv (\forall\gamma \in \Gamma)(x \notin A_\gamma) && \text{N.Q. (Cap. 1)} \\ &\equiv (\forall\gamma \in \Gamma)(x \in A'_\gamma) && \text{Def. de } ' \\ &\equiv x \in \textstyle\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A'_\gamma && \text{Def. 2.7} \end{aligned}$$

Portanto, pela Definição 2.1, $\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right)' = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} A'_\gamma$.

O seguinte teorema é uma generalização do Teorema 2.4(e).

Teorema 2.9 (Leis Distributivas Generalizadas) *Seja A um conjunto e seja $\mathcal{F} = \{B_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ uma família arbitrária de conjuntos. Então*

(a) $A \cap \left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma\right) = \bigcup_{\gamma\in\Gamma}(A \cap B_\gamma)$.

(b) $A \cup \left(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma\right) = \bigcap_{\gamma\in\Gamma}(A \cup B_\gamma)$.

Demonstração. Um elemento x está no conjunto $A \cap \left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma\right)$ se e somente se $x \in A$ e $x \in \bigcup_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma$, o que, de acordo com a Definição 2.6, é equivalente a

$$x \in A \quad \text{e} \quad x \in B_\gamma \quad \text{para algum} \quad \gamma \in \Gamma$$

Esta última asserção pode ser expressa, pela Definição 2.4, como

$$x \in A \cap B_\gamma \quad \text{para algum} \quad \gamma \in \Gamma$$

o que, pela Definição 2.6, é precisamente $x \in \bigcup_{\gamma\in\Gamma}(A \cap B_\gamma)$. Assim, pela Definição 2.1, $A \cap \left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma\right) = \bigcup_{\gamma\in\Gamma}(A \cap B_\gamma)$.

A demonstração da parte (b) é um exercício.

2.6.1 Exercícios

1. Sejam $\Gamma = \{1, 2, 3, 4\}$, e $A_1 = \{a, b, c, d\}$, $A_2 = \{b, c, d\}$, $A_3 = \{a, b, c\}$, $A_4 = \{a, b\}$. Encontre o seguinte.
   (a) $\bigcup_{i=1}^{4} A_i$.
   (b) $\bigcap_{i=1}^{4} A_i$.
2. Para dois números reais quaisquer a e b, por *intervalo fechado* $[a, b]$ entendemos o conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$. Se $a > b$, $[a, b] = \emptyset$. Encontre os seguintes conjuntos.
   (a) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[0, 1/n]$
   (b) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[0, 1/n]$
   (c) $\bigcap_{n=1}^{99}[0, 1/n]$
3. Demonstre o Teorema 2.8(b): $\left(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right)' = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A'_\gamma$.
4. Demonstre o Teorema 2.9(b): $A \cup \left(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma\right) = \bigcap_{\gamma\in\Gamma}(A \cup B_\gamma)$.
5. Expanda
   (a) $(A_1 \cup A_2) \cap (B_1 \cup B_2 \cup B_3)$ em uma união de interseções, e
   (b) $(A_1 \cap A_2) \cup (B_1 \cap B_2 \cap B_3)$ em uma interseção de uniões. [Sugestão: Use o Teorema 2.9 várias vezes.]
6. Expanda
   (a) $(\bigcup_{i=1}^{m} A_i) \cap (\bigcup_{j=1}^{n} B_j)$ em uma união de interseções, e
   (b) $(\bigcap_{i=1}^{m} A_i) \cup (\bigcap_{j=1}^{n} B_j)$ em uma interseção de uniões. [Veja Problema 5.]
7. Sejam $\{A_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ e $\{B_\delta \mid \delta \in \Delta\}$ duas famílias de conjuntos. Expanda
   (a) $(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma) \cap (\bigcup_{\delta\in\Delta} B_\delta)$ em uma união de interseções, e
   (b) $(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma) \cup (\bigcap_{\delta\in\Delta} B_\delta)$ em uma interseção de uniões. [Veja Problemas 5 e 6.]

2.7 O paradoxo de Russel

Neste momento muitos de nós achamos que entendemos o significado de conjunto — pelo menos intuitivamente. A maioria de nós, fazendo um curso de teoria dos conjuntos pela

primeira vez, não perceberia o que há de errado em considerar "o conjunto de todos os conjuntos" ou o assim chamado "conjunto universal" no sentido absoluto. Na verdade, por um período de tempo (pelo menos de 1895, quando Georg Cantor pioneiramente criou uma teoria dos conjuntos, até 1902, quando o Paradoxo de Russel apareceu), a existência de um tal conjunto universal era considerada como certa. Foi o famoso filósofo inglês Bertrand Russel (1872–1970)[5] que chocou a comunidade matemática em 1902, declarando que a admissão de um conjunto de todos os conjuntos levaria a uma contradição. Este é o famoso Paradoxo de Russel. Apresentaremos este paradoxo na forma de dois lemas aparentemente contraditórios, dos quais um teorema é conseqüência.

Lema 2.1 *Suponhamos que existe um conjunto $\mathcal{U}$ de todos os conjuntos. Seja $R = \{S \in \mathcal{U} \mid S \notin S\}$.*[6] *Então $R \notin R$.*

Demonstração. Suponhamos, ao contrário, que $R \in R$. Então, pela especificação do conjunto R, devemos ter $R \notin R$, o que contradiz a hipótese de que $R \in R$. A contradição prova que $R \notin R$.

Lema 2.2 *Suponhamos que existe um conjunto $\mathcal{U}$ de todos os conjuntos. Seja R o conjunto $\{S \in \mathcal{U} \mid S \notin S\}$. Então $R \in R$.*

Demonstração. Suponha o contrário, que $R \notin R$. Então, como $R \in \mathcal{U}$, temos $R \in R$ pela definição de R. Isto é uma contradição. Assim, $R \in R$.

Teorema 2.10 *Não existe um conjunto de todos os conjuntos.*

Demonstração. Em vista dos Lemas 2.1 e 2.2, o conjunto de todos os conjuntos não pode existir. Pois, se existisse, levaria à contradição "$R \notin R$ e $R \in R$".

Paul R. Halmos coloca-o do seguinte modo: "*Nada contém tudo.*"[7]

[5] Bertrand Russel nasceu em 18 de maio de 1872, em Trelleck, Wales, Inglaterra. Antes que completasse quatro anos, seus pais faleceram. Foi sempre um garoto quieto e tímido, até ingressar no Trinity College, na Universidade de Cambridge, em 1890. Após três anos de Matemática, concluiu que o que lhe estava sendo ensinado estava cheio de erros. Vendeu seus livros de matemática e mudou-se para a filosofia. No seu *Principia Mathematica* (1910–1913), um trabalho monumental em três volumes, em co-autoria com Alfred North Whitehead (1861–1947), tentou remodelar a teoria dos conjuntos, de modo a evitar paradoxos. Em 1918 escreveu "Quero posicionar-me à borda do mundo e perscrutar a escuridão além, e ver um pouco mais do que outros viram. ... Quero trazer de volta ao mundo dos homens um pouquinho de sabedoria". Ele seguramente o fez, mais do que "um pouquinho". No mesmo ano, foi preso por um comentário desfavorável sobre o exército americano. Em 1950 recebeu a Ordem do Mérito do rei da Inglaterra e o Prêmio Nobel de Literatura. Em seus últimos anos, liderou várias manifestações contra os armamentos nucleares.

[6] Conforme a regra da especificação, R é um conjunto freqüentemente chamado "o conjunto de Russel".

[7] Paul R. Halmos, *Naive Set Theory* (Teoria Ingênua dos Conjuntos), D. Van Nostrand Company, Inc., New York, 1960, p.6.

2.8 Um comentário histórico

A teoria moderna dos conjuntos é geralmente considerada ter sido criada em 1859 pelo matemático famoso Georg Cantor[8] (1845–1918), que notou a necessidade de uma tal teoria quando estudava séries trigonométricas. Cantor escreveu: "Por um 'conjunto' entenderemos qualquer coleção dentro de um todo de objetos distintos definidos, de nossa intuição ou pensamento". Esta definição não proibe ninguém de considerar o "conjunto" de todos os conjuntos, como o fez Bertrand Russel. A dificuldade real na definição de Cantor de um conjunto é a palavra "coleção". O que é uma coleção? É claro que podemos procurá-la em um dicionário e encontrar algo como estas definições:

"coleção: um grupo de objetos coletados."

"grupo: um agregado ou coleção."

"agregado: uma coleção."

Estas dificilmente nos ajudarão. Quando um matemático dá uma definição, não é para que seja um mero sinônimo, tal como o são "coleção" e "conjunto", ou uma definição circular como encontraríamos em um dicionário. Aparentemente, Cantor não estava consciente de que o termo "conjunto" era realmente indefinível.

Para evitar qualquer dificuldade, tal como o Paradoxo de Russel na teoria dos conjuntos, devemos aceitar os termos "conjunto" e "elemento" como termos indefinidos, ou primitivos, e guiar estes conceitos primitivos por um número de axiomas, incluindo o Axioma da Especificação e o Axioma do Conjunto das Partes, que foram apresentados na seção 2.2. Outros axiomas, tais como "$A = B$" se e somente se A e B contém os mesmos elementos" (Axioma da Extensão), "$\emptyset$ é um conjunto" (Axioma do Conjunto Vazio), "Se A e B são conjuntos, então também o é $\{A, B\}$" (Axioma do Emparelhamento), e "Se $\mathcal{F}$ é um conjunto de conjuntos então $\mathcal{F}$ é um conjunto" (Axioma das Uniões) são freqüentemente dados em tratamentos axiomáticos da teoria dos conjuntos.

O Paradoxo de Russel não foi o único a aparecer na teoria dos conjuntos. Logo depois do seu aparecimento, muitos paradoxos foram construídos por vários matemáticos e lógicos. Como uma conseqüência de todos esses paradoxos, muitos matemáticos e lógicos contribuíram a várias formulações da "teoria axiomática dos conjuntos", cada uma projetada de modo a evitar esses paradoxos e, ao mesmo tempo, a preservar o corpo principal da teoria dos conjuntos de Cantor. Entretanto, até o momento da escrita destas notas[9], ninguém apareceu com um sistema axiomático completamente satisfatório para a teoria dos conjuntos.

Apesar das dificuldades supracitadas, a teoria dos conjuntos de Cantor já penetrou em todos os ramos da matemática moderna, e provou ser de importância particular nos fundamentos da análise moderna e da topologia. Na verdade, mesmo os mais

[8] Georg Cantor nasceu em São Petersburgo, Rússia, em 1845, mudou-se para a Alemanha em 1856, estudou matemática na Universidade de Berlim (1863–1869), e ensinou na Universidade de Halle (1969–1905). Um dos interesses de Cantor eram as séries trigonométricas, que o levaram a investigar os fundamentos da análise. Como resultado, ele criou o trabalho revolucionário sobre a teoria dos conjuntos e uma aritmética dos números transfinitos.

[9] 1974

simples e bem construídos sistemas axiomáticos da teoria dos conjuntos são inteiramente adequados para a construção de virtualmente toda a matemática clássica (e.g., a teoria dos números reais e complexos, álgebra, topologia, etc.).



"Não pude fazer a tarefa, porque meu computador pegou um vírus, e esse vírus contaminou meus lápis e minhas canetas."