5

Números Cardinais e Aritmética Cardinal

O conceito de número cardinal é introduzido. Semelhanças e diferenças entre propriedades de números cardinais finitos e transfinitos são exibidas no curso da exploração da aritmética cardinal — adição, multiplicação e exponenciação. O capítulo termina com uma nota histórica sobre a hipótese do contínuo (generalizada).

5.1 O conceito de números cardinais

De modo bem natural, o conceito de número entrou em nossas vidas bem cedo. Fomos capazes de notar, por exemplo, a similaridade entre três maçãs e três laranjas, e a distinção entre dois dedos e quatro dedos. Embora tivéssemos um conceito de número, a maioria de nós não tinha uma definição precisa de número. Soubemos, por exemplo, que $2+3=5$, $3<4$, $6\times 7=42$, etc. Isto nos leva a acreditar que não precisamos saber o que um número realmente é; o que devemos saber são a igualdade e a ordem entre números, e como calcular com eles — exatamente do modo como jogadores de xadrez não se preocupam com o que um cavalo é, mas sim como ele desempenha. Portanto, não definiremos aqui o que um *número cardinal* é,[1] mas apenas introduzi-lo-emos como um conceito primitivo relativo ao "tamanho" de conjuntos. As regras importantes guiando este novo conceito são

C-1. Cada conjunto A está associado a um número cardinal, denotado por $\operatorname{card} A$, e para cada número cardinal a, existe um conjunto A com $\operatorname{card} A = a$.

C-2. $\operatorname{card} A = 0$ se e somente se $A = \emptyset$.

C-3. Se A é um conjunto finito não vazio, i.e., $A \sim \{1, 2, \ldots, k\}$ para algum $k \in \mathbb{N}$, então $\operatorname{card} A = k$.

[1] Talvez o leitor deva ser informado que é possível definir os números cardinais como os "ordinais iniciais" (Veja página 138 de S-Y.T. Lin & Y-F. Lin, *Set Theory: An Intuitive Approach*. Houghton Mifflin Co., Boston, 1974).

C-4. Para quaisquer dois conjuntos A e B, $\operatorname{card} A = \operatorname{card} B \Leftrightarrow A \sim B$.

As regras C-1 e C-3 definem os números cardinais de conjuntos finitos — *o número cardinal de um conjunto finito é o número de elementos naquele conjunto*. Em tratamentos axiomáticos da teoria dos conjuntos, C-1 e C-4 são habitualmente postulados como um axioma, chamado *axioma da cardinalidade*. O iniciante pode achar C-1 e C-4 difíceis de serem aceitos, pois estas regras não dizem muito acerca de $\operatorname{card} A$ quando A é um conjunto infinito. Esta dificuldade será superada gradualmente enquanto avançarmos — tal como quando o leitor não sabia o que éra cálculo, até que chegasse à metade de seu curso. Neste momento, podemos dizer, *grosso modo*, que o número cardinal de um conjunto é a propriedade que o conjunto tem em comum com os conjuntos que são equipotentes a ele.

5.1.1 Exercícios

1. Mostre que o os números naturais são números cardinais.
2. Dê exemplos de três números cardinais que não são números naturais.

5.2 Ordenação dos números cardinais — O Teorema de Schröder-Bernstein

Chamaremos o número cardinal de um conjunto finito de número cardinal *finito*, e o número cardinal de um conjunto infinito de um número cardinal *transfinito*. As regras C-2 e C-3 da seção anterior mostram que os números cardinais finitos são precisamente os inteiros não negativos. Assim, os números cardinais finitos tem uma ordem natural herdada: $0 < 1 < 2 < \cdots < k < k+1 < \cdots$. Para dois números cardinais transfinitos quaisquer, a regra C-4 nos diz quando eles são iguais e quando não são. Mas não estaremos satisfeitos com apenas isto; quando eles foram diferentes, gostaríamos de saber qual deles é "menor" que o outro.

Definição 5.1 *Sejam A e B conjuntos. Então dizemos que* $\operatorname{card} A$ *é* menor que $\operatorname{card} B$*, e denotamos isto por* $\operatorname{card} A < \operatorname{card} B$*, quando A é equipotente a um subconjunto de B, mas o conjunto B não é equipotente a nenhum subconjunto de A.*

Embora esta definição seja projetada para ordenar números cardinais, ela se aplica a números cardinais finitos também, e quando aplicada a números cardinais finitos o resultado é o mesmo que a ordem natural tradicional mencionada acima.

Exemplo 5.1 $\operatorname{card} \mathbb{N} < \operatorname{card} \mathbb{R}$.

Demonstração. *Como o conjunto $\mathbb{N}$ é um subconjunto de $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}$ é equipotente a um subconjunto de $\mathbb{R}$, $\mathbb{N} \sim \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, mas pela Seção 4.4, Capítulo 4, sabemos que o conjunto*

infinito $\mathbb{R}$ é não enumerável. Portanto, $\mathbb{R}$ não é equipotente a nenhum subconjunto de $\mathbb{N}$. Pela Definição 5.1, temos $\operatorname{card}\mathbb{N} < \operatorname{card}\mathbb{R}$.

Até agora, não nos é claro como dois números cardinais se comparam quando o conjunto A é equipotente a um subconjunto de B e o conjunto B é equipotente a um subconjunto de A. Georg Cantor conjeturou que, neste caso, $\operatorname{card} A$ deveria ser igual a $\operatorname{card} B$. Mais tarde, nos anos 1890's, esta conjetura foi demonstrada, independentemente, por ambos F. Bernstein no seminário de Cantor, e por E. Schröder, baseado em um cálculo lógico. Este resultado celebrado é agora conhecido geralmente por Teorema de Schröder-Bernstein.

Teorema 5.1 (Teorema de Schröder-Bernstein) *Se A e B são conjuntos, tais que A é equipotente a um subconjunto de B e B é equipotente a um subconjunto de A, então A e B são equipotentes.*

Demonstraremos primeiramente o seguinte caso especial do Teorema 5.1, do qual o Teorema 5.1 segue facilmente.

Lema 5.1 *Se B é subconjunto de A e existe uma injeção $f\colon A \to B$, então A e B são equipotentes.*

Demonstração. Se B é A, então a função identidade em A é uma tal h. Suponhamos que B é um subconjunto próprio de A, e seja C o conjunto $\bigcup_{n\geq 0} f^n(A-B)$, sendo f^0 a função identidade em A e, para cada inteiro positivo k e para cada $x \in A$, $f^k(x) = f(f^{k-1}(x))$. Para cada z em A, defina $h(z)$ como segue:

$$h(z) = \begin{cases} f(z) & \text{se } z \in C \\ z & \text{se } z \in A - C \end{cases}$$

Observe que $A-B$ é um subconjunto de C, $f(C) \subset C$, e que se m e n são dois inteiros não negativos distintos, digamos $m < n$, então $f^m(A-B)$ e $f^n(A-B)$ são disjuntos. Pois, caso contrário, existem x e x' em $A-B$ tais que $f^m(x) = f^n(x')$, o que acarreta $f^{n-m}(x) = x \in B \cap (A-B)$, uma contradição. Finalmente, pela definição de h e pela última observação, temos

$$\begin{aligned} h(A) &= (A-C) \cup f(C) \\ &= \left[A - \bigcup_{n\geq 0} f^n(A-B)\right] \cup f\left(\bigcup_{n\geq 0} f^n(A-B)\right) \\ &= \left[A - \bigcup_{n\geq 0} f^n(A-B)\right] \cup \left(\bigcup_{n\geq 1} f^n(A-B)\right) \\ &= A - (A-B) \\ &= B \end{aligned}$$

Destas observações e do fato de que f é injetora, segue que $h\colon A \to B$ é uma bijeção. Isto completa a demonstração do lema.

A principal idéia por detrás da demonstração acima pode ser visualizada no seguinte diagrama ilustrativo, em que o retângulo inteiro representa o conjunto A:

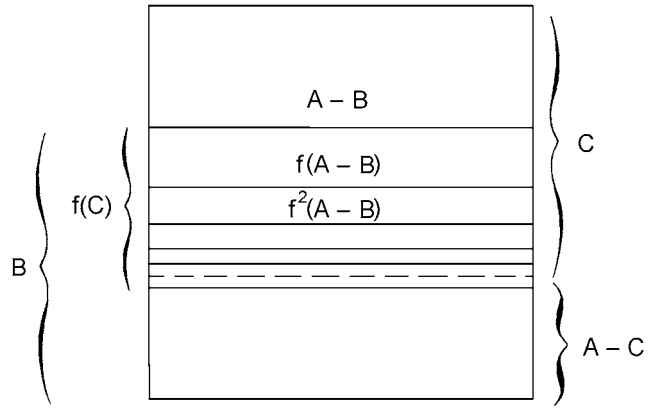


Figura 17.

Demonstração do Teorema 5.1. Sejam A_0 e B_0 subconjuntos de A e B, respectivamente, tais que $A \sim B_0$ e $B \sim A_0$, e sejam $f_0\colon A \sim B_0$ e $g_0\colon B \sim A_0$ duas bijeções. Seja $f\colon A \to A_0$ dada por $f(x) = g_0(f_0(x))$, que é uma injeção. Portanto, pelo lema acima, existe uma bijeção $h\colon A \sim A_0$. Conseqüentemente, a composição $g_0^{-1} \circ h\colon A \sim B$, das duas bijeções $h\colon A \sim A_0$ e $g_0^{-1}\colon A_0 \sim B$, é uma bijeção.[2]

É conveniente escrever $\operatorname{card} A \leq \operatorname{card} B$ como significando $\operatorname{card} A < \operatorname{card} B$ ou $\operatorname{card} A = \operatorname{card} B$. O seguinte corolário é uma conseqüência imediata do Teorema de Schröder-Bernstein.

Corolário 5.1 *Se A e B são conjuntos tais que* $\operatorname{card} A \leq \operatorname{card} B$ *e* $\operatorname{card} B \leq \operatorname{card} A$ *então* $\operatorname{card} A = \operatorname{card} B$.

Até o momento, conhecemos muito pouco sobre números cardinais transfinitos, porque vimos apenas dois tais números cardinais, $\operatorname{card} \mathbb{N}$ e $\operatorname{card} \mathbb{R}$. Naturalmente, gostaríamos de saber se há outros números cardinais transfinitos. A resposta a esta questão é dada na próxima seção — existe na verdade um suprimento ilimitado de números cardinais transfinitos distintos.

Uma outra questão importante é esta: Se m e n são dois números cardinais finitos distintos, então ou $m < n$ ou $n < m$; é isto também verdadeiro para números cardinais transfinitos? A resposta é afirmativa, mas a demonstração depende de um resultado do próximo capítulo, e é portanto adiada até o Teorema 6.1 do Capítulo 6.

[2]Esta demonstração e o lema precedente foram adotados de R.H. Cox, "A Proof of the Schroeder-Bernstein Theorem", American Mathematical Monthly, 75, No. 5 (1968), 508.

5.2.1 Exercícios

1. Seja n um número cardinal finito qualquer. Demonstre que $n < \operatorname{card}\mathbb{N}$.
2. Seja a um número cardinal transfinito qualquer. Demonstre que $\operatorname{card}\mathbb{N} \leq a$. Assim, $\operatorname{card}\mathbb{N}$ é o menor número cardinal transfinito.
3. Sejam A e B dois conjuntos. Demonstre que $\operatorname{card} A \leq \operatorname{card} B$ se e somente se existe uma injecão $f\colon A \to B$.
4. Sejam A, B e C conjuntos. Demonstre que
   (a) Se $\operatorname{card} A \leq \operatorname{card} B$ e $\operatorname{card} B \leq \operatorname{card} C$ então $\operatorname{card} A \leq \operatorname{card} C$.
   (b) Se $\operatorname{card} A < \operatorname{card} B$ e $\operatorname{card} B < \operatorname{card} C$ então $\operatorname{card} A < \operatorname{card} C$.
5. Demonstre que se A e B são conjuntos tais que $A \subset B$ então $\operatorname{card} A \leq \operatorname{card} B$.
6. Demonstre que se A, B e C são conjuntos tais que $A \subset B \subset C$ e $A \sim C$, então $A \sim B$.

5.3 Número cardinal de um conjunto das partes — Teorema de Cantor

Seja X um conjunto. Recordemos que o conjunto das partes $\wp(X)$, de X, é o conjunto de todos os subconjuntos de X (Seção 2.2, Capítulo 2). O próprio Georg Cantor demonstrou que $\operatorname{card} X < \operatorname{card}\wp(X)$. A significância deste teorema é que ele provê um modo de contruir uma longa seqüência de novos números cardinais transfinitos. Por exemplo, temos

$$\operatorname{card}\mathbb{R} < \operatorname{card}\wp(\mathbb{R}) < \operatorname{card}\wp(\wp(\mathbb{R})) < \cdots .$$

Teorema 5.2 (Teorema de Cantor) *Se X é um conjunto,* $\operatorname{card} X < \operatorname{card}\wp(X)$.

Demonstração. Se $X = \emptyset$, então $\operatorname{card}\emptyset = 0 < 1 = \operatorname{card}\wp(\emptyset)$. Portanto, resta provar o caso em que $X \neq \emptyset$. Neste caso, a função $g\colon X \to \wp(X)$, dada por $g(x) = \{x\} \in \wp(X)$, para todo $x \in X$, é injetora. Logo, o conjunto X é equipotente ao subconjunto $\{\{x\} \mid x \in X\}$ de $\wp(X)$ ou, equivalentemente, $\operatorname{card} X \leq \operatorname{card}\wp(X)$. A partir disto, para mostrar que $\operatorname{card} X < \operatorname{card}\wp(X)$, é suficiente mostrar que X não é equipotente a $\wp(X)$.

Assuma, em contrário, que exista uma bijeção $f\colon X \sim \wp(X)$; nosso propósito é mostrar que esta suposição leva a uma contradição. Considere o conjunto $S = \{x \in X \mid x \notin f(x)\}$, que consiste daqueles elementos de X que não estão em suas imagens sob f. Como $S \in \wp(X)$ e $f\colon X \sim \wp(X)$, existe um elemento $e \in X$ tal que $f(e) = S$. Ou $e \in S$ ou $e \notin S$.

Caso 1. $e \in S$.

Segue, pela definição de S, que $e \notin f(e)$; isto é impossível, pois $f(e) = S$ e $e \notin S$.

Caso 2. $e \notin S$.

Como $f(e) = S$, temos $e \notin f(e)$. Conseqüentemente, pela definição de S, $e \in S$ e portanto $e \in f(e)$. Isto novamente é impossível.

Uma contradição foi obtida e a demonstração do Teorema de Cantor está completa.

Em vista do Teorema de Cantor, uma questão bem natural a surgir foi,

Existe um número cardinal x tal que

$$\operatorname{card} \mathbb{N} < x < \operatorname{card} \wp(\mathbb{N})?$$

Esta questão, chamada o *problema do contínuo*, capturou a atenção de Cantor e outros matemáticos por muito tempo. Veremos mais sobre este problema na Seção 5.8.

5.3.1 Exercícios

1. Demonstre que não existe um número cardinal maior de todos.
2. Sejam A e B conjuntos. Demonstre que se $A \sim B$ então $\operatorname{card} \wp(A) = \operatorname{card} \wp(B)$.
3. Seja A um conjunto enumerável. Demonstre que o conjunto das partes de A, $\wp(A)$, é não enumerável.

5.4 Adição de números cardinais

Já existe uma aritmética para números cardinais finitos. Por exemplo, se k e l são dois números cardinais finitos, a soma $k + l$ e o produto kl tem seus significados tradicionais. Tentaremos agora generalizar estes conceitos de modo a cobrir os números cardinais transfinitos também; ou seja, desenvolver uma aritmética que se aplica a todos os números cardinais, finitos ou transfinitos, que preserve os significados e propriedades tradicionais da aritmética dos números cardinais finitos.

Definição 5.2 *Sejam a e b números cardinais. A* soma cardinal *de a e b, denotada por $a + b$, é o número cardinal* $\operatorname{card}(A \cup B)$*, em que A e B são conjuntos* disjuntos *tais que* $\operatorname{card} A = a$ *e* $\operatorname{card} B = b$.

Para mostrar que a Definição 5.2 está *bem-definida*, o leitor deveria primeiro observar que para quaisquer dois números cardinais a e b (não necessariamente distintos), pela regra C-1 da seção 5.1, existem conjuntos X e Y tais que $a = \operatorname{card} X$ e $b = \operatorname{card} Y$, sendo os conjuntos X e Y não necessariamente disjuntos. Mas isto não nos causa nenhum problema, pois podemos selecionar $A = X \times \{0\}$ e $B = Y \times \{1\}$; então $A \sim X$, $B \sim Y$ e $A \cap B = \emptyset$. Logo $a + b = \operatorname{card}(A \cup B)$ e isto é definido de maneira única; pois se existem outros conjuntos disjuntos A' e B' tais que $A' \sim A$ e $B' \sim B$ então, pelo Teorema 4.6 do Capítulo 4, temos $(A' \cup B') \sim (A \cup B)$ ou, equivalentemente, $\operatorname{card}(A' \cup B') = \operatorname{card}(A \cup B)$.

Desta forma, acabamos de demonstrar o seguinte teorema:

Teorema 5.3 *Sejam a e b números cardinais. Então*

(a) Existem conjuntos disjuntos A e B tais que $\operatorname{card} A = a$ *e* $\operatorname{card} B = b$.

(b) Se A, B, A' e B' são conjuntos tais que $\operatorname{card} A' = \operatorname{card} A$, $\operatorname{card} B' = \operatorname{card} B$, $A \cap B = \emptyset$, *e* $A' \cap B' = \emptyset$, *então* $\operatorname{card}(A' \cup B') = \operatorname{card}(A \cup B)$.

O seguinte exemplo mostra que a Definição 5.2 concorda com a soma ordinária de dois números naturais, quando aplicada a dois números cardinais finitos.

Exemplo 5.2 *Encontre a soma cardinal $4 + 3$ dos dois números cardinais finitos 4 e 3.*

Solução. *Como* $\mathbb{N}_7 = \mathbb{N}_4 \cup \{5, 6, 7\}$, $\operatorname{card} \mathbb{N}_4 = 4$, $\operatorname{card}\{5, 6, 7\} = 3$, *e os conjuntos* $\mathbb{N}_4$ *e* $\{5, 6, 7\}$ *são disjuntos, temos*

$$\begin{aligned} 4 + 3 &= \operatorname{card}(\mathbb{N}_4 \cup \{5, 6, 7\}) \\ &= \operatorname{card} \mathbb{N}_7 = 7 \end{aligned}$$

o que coincide com a soma ordinária de dois inteiros.

Como a união de conjuntos é comutativa e associativa, temos as seguintes propriedades correspondentes acerca da soma cardinal.

Teorema 5.4 *Sejam x, y, e z números cardinais quaisquer. Então*

(a) $x + y = y + x$ (Comutatividade).

(b) $(x + y) + z = x + (y + z)$. (Associatividade).

Seguindo Georg Cantor, os símbolos $\aleph_0$ (leia-se *aleph*[3] *zero*; $\aleph$ é a primeira letra do alfabeto hebraico) e c tem sido usados para denotar, respectivamente, o número cardinal de um conjunto enumerável e o número cardinal do *continuum*[4], continuum significando o conjunto dos números reais. Em outras palavras, $\aleph_0 = \operatorname{card} \mathbb{N}$ e $c = \operatorname{card} \mathbb{R}$.

Exemplo 5.3 *Encontre a soma cardinal $\aleph_0 + \aleph_0$.*

Solução. *Sejam $\mathbb{N}_p$ e $\mathbb{N}_i$, respectivamente, os conjuntos de números naturais pares e números naturais ímpares. Então, $\mathbb{N}_p$ e $\mathbb{N}_i$ são subconjuntos de $\mathbb{N}$ enumeráveis e disjuntos, e a união deles é $\mathbb{N}$. Conseqüentemente, pela Definição 5.2,*

$$\begin{aligned} \aleph_0 + \aleph_0 &= \operatorname{card} \mathbb{N}_p + \operatorname{card} \mathbb{N}_i \\ &= \operatorname{card}(\mathbb{N}_p \cup \mathbb{N}_i) \\ &= \operatorname{card} \mathbb{N} \\ &= \aleph_0 \end{aligned}$$

[3]Pronuncia-se como "álef". (N. do T.)

[4]Também chamado cardinal do contínuo. (N. do T.)

O resultado do Exemplo 5.3 é uma propriedade distintiva dos números cardinais transfinitos; para números cardinais finitos, $n + m = n$ é verdadeiro apenas se $m = 0$. O leitor poderia demonstrar, como exercício, que $c + c = c$.

Exemplo 5.4 *Encontre a soma cardinal* $\aleph_0 + c$.

Solução. *Já aprendemos, do Exemplo 4.3, Seção 4.2, do Capítulo 4, que o intervalo aberto* $]0, 1[$ *e o conjunto* $\mathbb{R}$*, dos números reais, são equipotentes. Portanto,* $\operatorname{card}]0, 1[= \operatorname{card}\mathbb{R} = c$. *Seja* $\mathbf{S} = \mathbb{N} \cup]0, 1[$. *Então, como* $\mathbb{N}$ *e* $]0, 1[$ *são disjuntos,* $\operatorname{card}\mathbf{S} = \aleph_0 + c$. *Por outro lado, como* $\mathbb{R} \sim]0, 1[\subset \mathbf{S}$ *e* $\mathbf{S} \sim \mathbf{S} \subset \mathbb{R}$*, pelo Teorema de Schröder-Bernstein (Teorema 5.1), temos* $\mathbf{S} \sim \mathbb{R}$. *Portanto,* $\aleph_0 + c = c$.

5.4.1 Exercícios

1. Demonstre que $x + 0 = x$ para todo número cardinal x.
2. Sejam x e y dois números cardinais. Demonstre que $x + y = y + x$.
3. Sejam x, y, e z números cardinais. Demonstre que $(x + y) + z = x + (y + z)$.
4. Seja n um número cardinal finito qualquer. Demonstre que
   (a) $n + \aleph_0 = \aleph_0$
   (b) $n + c = c$.
5. Demonstre que $c + c = c$.
6. Sejam x, y e z números cardinais.
   (a) Demonstre que se $x \leq y$ então $x + z \leq y + z$.
   (b) Mostre, através de um exemplo, que a parte (a) acima não é verdadeira se "$\leq$" for substituído por "$<$".

5.5 Multiplicação de números cardinais

Definiremos agora a multiplicação de números cardinais de modo que, para números cardinais finitos, o resultado coincida com a multiplicação ordinária de inteiros não negativos.

Definição 5.3 *Para quaisquer dois números cardinais* a *e* b*, o* produto cardinal ab *é definido como sendo o número cardinal do produto cartesiano* $A \times B$*, sendo* $\operatorname{card} A = a$ *e* $\operatorname{card} B = b$.

Para ver que a Definição 5.3 é independente da escolha dos representantes A e B, sejam X e Y conjuntos tais que $A \sim X$ e $B \sim Y$. Então, pelo Teorema 4.7 do Capítulo 4, $A \times B \sim X \times Y$ e portanto $\operatorname{card}(A \times B) = \operatorname{card}(X \times Y)$. É também claro que esta definição dá a resposta certa quando a e b são números cardinais finitos. Como a multiplicação de inteiros não negativos nos é familiar, nosso interesse principal aqui é o produto de números cardinais transfinitos, e o produto de um número cardinal finito

por um número cardinal transfinito. Primeiramente, listemos uma conseqüência fácil da Definição 5.3

Teorema 5.5 *Sejam x, y e z números cardinais quaisquer. Então*

(a) $xy = yx$ *(Comutatividade).*

(b) $(xy)z = x(yz)$ *(Associatividade).*

(c) $x(y + z) = xy + xz$ *(Distributividade).*

Demonstração. Exercício.

Exemplo 5.5 *Seja x um número cardinal arbitrário. Calcule*

(a) $1x$.

(b) $0x$.

(c) $\aleph_0\aleph_0$.

Solução. *Seja A um conjunto tal que* $\operatorname{card} A = x$.

(a) Como o produto cartesiano $\{1\} \times A$ é equipotente a A, temos $1x = x$.

(b) Como $\emptyset \times A = \emptyset$, temos $0x = 0$.

(c) Como $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$ (Teorema 4.10, Capítulo 4), temos $\aleph_0\aleph_0 = \aleph_0$.

Exemplo 5.6 *Demonstre que $cc = c$, sendo* $c = \operatorname{card} \mathbb{R}$.

Solução. *Como o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais e o intervalo aberto unitário $]0, 1[$, de números reais, tem o mesmo número cardinal c, para mostrar que $cc = c$, é suficiente mostrar que existe uma injeção do produto cartesiano $]0, 1[\times]0, 1[$ no intervalo $]0, 1[$. Para este propósito, usaremos o fato de que cada $x \in]0, 1[$ é representado por sua expansão decimal* infinita, *de forma que, por exemplo, o número $\frac{1}{2}$ será $0,4999\ldots$ mas não $0,5$. Deste modo, teremos uma única expressão para cada número em $]0, 1[$. Agora, deixaremos ao leitor verificar que a função $f\colon\ ]0, 1[\times]0, 1[\to]0, 1[$, definida por*

$$f(0, x_1x_2x_3\cdots,\ 0, y_1y_2y_3\cdots) = 0, x_1y_1x_2y_2\cdots$$

é injetora. Isto completa a demonstração de que $cc \leq c$. A demonstração de que $cc \geq c$ é deixada ao leitor.

5.5.1 Exercícios

1. Demonstre o Teorema 5.5.
2. Sejam x, y, e z números cardinais tais que $x \leq y$. Demonstre que $xz \leq yz$.
3. Demonstre ou refute a seguinte proposição: Se x, y, e z são números cardinais tais que $x < y$ e $z \neq 0$, então $xz < yz$.
4. Seja n um número cardinal finito, $n \neq 0$. Demonstre que $n\aleph_0 = \aleph_0$.
5. Sejam x e y números cardinais. Demonstre que
   (a) Se $xy = 0$ então $x = 0$ ou $y = 0$.
   (b) Se $xy = 1$ então $x = 1$ e $y = 1$.
6. Mostre que a função $f\colon\ ]0,1[\times]0,1[\to]0,1[$, definida por

$$f(0, x_1x_2x_3\cdots,\ 0, y_1y_2y_3\cdots) = 0, x_1y_1x_2y_2\cdots$$

da demonstração no Exemplo 5.6, é bijetora.

5.6 Exponenciação de números cardinais

Sejam a e b dois números cardinais, finitos ou transfinitos. De modo a dar um significado satisfatório a b^a (*leia-se*: a-ésima potência de b), examinaremos primeiramente o caso finito: $2^3 = 2{\cdot}2{\cdot}2$ e, de modo geral, $n^m = n{\cdot}n{\cdot}\cdots{\cdot}n$ (m fatores). Poderíamos generalizar este conceito ao caso transfinito, introduzindo "produtos cartesianos generalizados", mas existe uma abordagem que funciona sem referência a produtos cartesianos generalizados. Sejam A um conjunto com m elementos e B um conjunto com n elementos. Quantas funções existem de A em B (veja Problema 9, Exercícios 3.4.1)? Como cada elemento de A tem n escolhas para sua imagem, e esta seleção da imagem pode ser feita independentemente m vezes (uma vez para cada elemento de A), a resposta é $n \cdot n \cdot \cdots \cdot n = n^m$. Este conceito é generalizado como segue:

Definição 5.4 *Sejam a e b números cardinais com $a \neq 0$. Sejam a e b conjuntos tais que $\operatorname{card} A = a$ e $\operatorname{card} B = b$. Denote o conjunto de todas as funções de A em B por B^A. Definimos $b^a = \operatorname{card} B^A$.*

Antes de aceitar a definição 5.4, precisamos verificar que esta definição é independente da escolha dos representantes A e B. O seguinte teorema é o que precisamos.

Teorema 5.6 *Sejam A, B, X e Y conjuntos tais que $A \sim X$, $B \sim Y$. Então $B^A \sim Y^X$.*

Demonstração. Sejam $g\colon A \sim X$ e $h\colon B \sim Y$ duas bijeções. Então definimos a função

$$\psi\colon B^A \to Y^X$$

por $\psi(f)\colon X \to Y$, sendo $\psi(f)(x) = h \circ f \circ g^{-1}(x)$, para toda $f \in B^A$.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\ f\ } & B \\ {\scriptstyle g}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle h} \\ X & \xrightarrow[\psi(f)]{} & Y \end{array}$$

Deixamos ao leitor demonstrar que a função $\psi\colon B^A \to Y^X$ é bijetora.

Exemplo 5.7 *Seja A um conjunto. Compare os números cardinais $\operatorname{card} \wp(A)$ e $2^{\operatorname{card} A}$.*

Solução. *Seja $B = \{0, 1\}$. Associamos a cada subconjunto D de A a função característica $\chi_D\colon A \to B$, definida no Exemplo 3.8, Capítulo 3. A função de $\wp(A)$ em B^A, que leva D em χ_D, é bijetora (demonstre isto!). Assim, os conjuntos $\wp(A)$ e B^A tem o mesmo número cardinal; ou seja $\operatorname{card} \wp(A) = 2^{\operatorname{card} A}$.*

Teorema 5.7 *Sejam a, x e y números cardinais. Então $a^x a^y = a^{x+y}$.*

Demonstração. Sejam A, X e Y conjuntos tais que $\operatorname{card} A = a$, $\operatorname{card} X = x$, $\operatorname{card} Y = y$, e $X \cap Y = \emptyset$. Então, pela Definição 5.2, $\operatorname{card}(X \cup Y) = x + y$. É suficiente mostrar que os conjuntos $A^X \times A^Y$ e $A^{X \cup Y}$ são equipotentes. Com este propósito, associamos a cada par (f, g) de funções, $f \in A^X$, $g \in A^Y$, a função $f \cup g \in A^{X \cup Y}$ [Veja Teorema 3.8, Capítulo 3]. Deixamos ao leitor verificar que esta associação estabelece uma equipotência entre os conjuntos $A^X \times A^Y$ e $A^{X \cup Y}$. Portanto, $a^x a^y = a^{x+y}$.

Teorema 5.8 *Sejam x, y e z números cardinais. Então $(z^y)^x = z^{yx}$.*

Demonstração. Sejam X, Y, e Z conjuntos com números cardinais x, y e z respectivamente. Conforme a Definição 5.4, o teorema está provado se estabelercemos que $Z^{Y \times Z} \sim (Z^Y)^X$. Antes de mostrar esta equipotência, necessitamos primeiro de uma convenção notacional: Para uma função dada $f\colon Y \times X \to Z$ e um elemento dado $a \in X$, existe uma função $f^a\colon Y \to Z$ definida por $f^a(b) = f(b, a)$ para todo $b \in Y$. Deixamos ao leitor demonstrar que a função $\psi\colon Z^{Y \times X} \to (Z^Y)^X$, que associa a cada $f \in Z^{Y \times X}$ a função $e_f \in (Z^Y)^X$, dada por $e_f(a) = f^a$ para todo $a \in X$, é uma bijeção.

Recordemo-nos que a A-projeção $p_A\colon A \times B \to A$ é uma função que associa a cada par ordenado $(a, b) \in A \times B$ o elemento a; a B-projeçào $p_B\colon A \times B \to B$ é analogamente definida [veja Problema 8, Exercícios 3.5.1].

Teorema 5.9 *Sejam a, b e x números cardinais. Então $(ab)^x = a^x b^x$.*

Demonstração. Sejam A, B e X conjuntos com números cardinais a, b e x, respectivamente. A função $\psi\colon (A\times B)^X \to A^X \times B^X$, que emparelha cada função $f\colon X \to A\times B$ com a função $(p_A \circ f, p_B \circ f)$ em $A^X \times B^X$, é bijetora (Demonstre-o!). Portanto, pela Definição 5.4, $(ab)^x = a^x b^x$.

Recordemo-nos que os símbolos $\aleph_0$ e c denotam os números cardinais dos conjuntos $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$, respectivamente, e que $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$ (veja Exemplo 4.5, Capítulo 4), e $]0,1[\sim \mathbb{R}$ (veja Exemplo 4.3, Capítulo 4). Assim, $\aleph_0$ é o número cardinal de $\mathbb{Q}$ e c é o número cardinal do intervalo $]0,1[$.

Teorema 5.10 $2^{\aleph_0} = c$.

Demonstração. Demonstraremos isto em duas etapas, mostrando primeiro que $c \leq 2^{\aleph_0}$ e então que $2^{\aleph_0} \leq c$.

Considere a função $f\colon \mathbb{R} \to \wp(\mathbb{Q})$, definida por

$$f(a) = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < a\}, \qquad \text{para cada } a \in \mathbb{R}$$

Esta função é injetora: Se $a < b$ são dois números reais distintos, então existe um número racional r tal que $a < r < b$.[5] Então $r \in f(b)$ mas $r \notin f(a)$, e portanto f é injetora. Isto demonstra, usando-se os resultados do Problema 3, Exercícios 5.2.1, e o Exemplo 5.7, que

$$c \leq \operatorname{card} \wp(\mathbb{Q}) = 2^{\aleph_0}$$

Para provar a desigualdade reversa, seja $\psi\colon \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$\psi(f) = 0, f(1)f(2)f(3)\cdots$$

em que $f \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Note que $\psi(f)$ é um número decimal (consistindo de 0's e 1's). Se $f, g \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ e $f \neq g$, então $\psi(f) \neq \psi(g)$ porque as decimais que definem $\psi(f)$ e $\psi(g)$ são diferentes. Portanto, $\psi\colon \{0,1\} \to \mathbb{R}$ é injetora, e portanto $2^{\aleph_0} \leq c$.

Corolário 5.2 $\aleph_0 < c$.

Demonstração. Pelo Teorema de Cantor (Teorema 5.2) e pelo resultado do Exemplo 5.7, temos

$$\aleph_0 < \operatorname{card} \wp(\mathbb{N}) = 2^{\operatorname{card} \mathbb{N}} = 2^{\aleph_0} = c$$

---

[5] Porque os números racionais são um subconjunto denso dos números reais.

5.6.1 Exercícios

1. Demonstre que a função $\psi\colon B^A \to Y^X$, da demonstração do Teorema 5.6, é bijetora.
2. Seja a um número cardinal arbitrário. Demonstre que $a^0 = 1$, $a^1 = a$, e $0^a = 0$ se $a \neq 0$.
3. Demonstre que $2^a > a$ para todo número cardinal a.
4. Sejam a, b, x, e y números cardinais tais que $a \leq b$ e $x \leq y$. Demonstre que $a^x \leq b^y$.
5. Demonstre que $n^{\aleph_0} = c = \aleph_0^{\aleph_0}$ para todo $n \geq 2$ finito.
6. Demonstre que $c^{\aleph_0} = c = c^n$ para qualquer $n \geq 1$ finito.
7. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto de todos os números complexos. Demonstre que $\operatorname{card} \mathbb{C} = c$.
8. Demonstre que $\aleph_0 c = c$.
9. Demonstre que a função de $\wp(A)$ em $\{0,1\}^A$, que associa cada D em $\wp(A)$ a χ_D, é bijetora.
10. Sejam A, X, e Y conjuntos tais que X e Y são disjuntos. Demonstre que a função de $A^X \times A^Y$ em $A^{X \cup Y}$, que associa cada (f, g) em $A^X \times A^Y$ a $f \cup g$ em $A^{X \cup Y}$, é bijetora.
11. Demonstre que a função $\psi\colon Z^{Y \times X} \to (Z^Y)^X$, na demonstração do Teorema 5.8, é bijetora.
12. Demonstre que a função $\psi\colon (A \times B)^X \to A^X \times B^X$, na demonstração do Teorema 5.9, é bijetora.

5.7 Outros exemplos de aritmética cardinal

Exemplo 5.8 *Demonstre que $cc = c$, usando o Teorema 5.10 [cf. Exemplo 5.6].*

Demonstração. *Dos Teoremas 5.7 e 5.10, e do Exemplo 5.3, $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$, segue que*

$$cc = 2^{\aleph_0} 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = c$$

Exemplo 5.9 *Compare o número cardinal do conjunto $\{f \mid f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$, de todas as funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, com o número cardinal de $\mathbb{R}$.*

Solução. *Temos*

$$\begin{aligned}
\operatorname{card}\{f \mid f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\} &= c^c && \textit{Definição 5.4} \\
&= (2^{\aleph_0})^c && \textit{Teorema 5.10} \\
&= 2^{\aleph_0 c} && \textit{Teorema 5.8} \\
&= 2^c && \textit{Problema 8, Exercícios 5.6.1} \\
&> c && \textit{Exemplo 5.7, Teorema 5.2}
\end{aligned}$$

Portanto, $\operatorname{card}\{f \mid f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\} > \operatorname{card} \mathbb{R}$.

Exemplo 5.10 *Sejam $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e $C(\mathbb{Q}, \mathbb{R})$ os conjuntos de funções reais contínuas, com domínio $\mathbb{R}$ e $\mathbb{Q}$, respectivamente. Seja $K(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ o conjunto de todas as funções reais constantes com domínio $\mathbb{R}$. Demonstre que*

$$\operatorname{card} C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \operatorname{card} C(\mathbb{Q}, \mathbb{R}) = \operatorname{card} K(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = c$$

Demonstração.[6] *A cada função* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *corresponde uma função* $f|\mathbb{Q}\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, *definida por* $(f|\mathbb{Q})(x) = f(x)$, *para todo* $x \in \mathbb{Q}$. *A função* $f|\mathbb{Q}$ *é chamada a* restrição *de* f *a* $\mathbb{Q}$. *Portanto, existe uma função natural*

$$\psi\colon C(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to C(\mathbb{Q},\mathbb{R})$$

que leva cada $f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *em sua restrição* $f|\mathbb{Q}$. *É claro que a restrição de uma função contínua é contínua. Portanto* ψ *é uma função bem-definida.*

Da propriedade de densidade dos números racionais dentro dos números reais, segue que para cada número real x *existe uma seqüência* $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, *de números racionais, tal que*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

Conseqüentemente, se duas funções contínuas $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tem a propriedade de que* $f(x') = g(x')$ *para todo* $x' \in \mathbb{Q}$, *então* $f(x) = g(x)$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$. *Em outras palavras, a função* $\psi\colon C(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to C(\mathbb{Q},\mathbb{R})$ *é injetora. Portanto temos*

$$\begin{aligned}
\operatorname{card} C(\mathbb{R},\mathbb{R}) &\leq \operatorname{card} C(\mathbb{Q},\mathbb{R}) \\
&\leq \operatorname{card} \mathbb{R}^{\mathbb{Q}} \\
&= c^{\aleph_0} \\
&= (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} \\
&= 2^{\aleph_0\aleph_0} \\
&= 2^{\aleph_0} = c
\end{aligned}$$

pelos Teoremas 5.8 e 5.10.

Agora, considere o conjunto $K(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *de todas as funções reais constantes, com domínio* $\mathbb{R}$. *Como para cada número real* a, *existe uma função constante* $f_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *definida por* $f_a(\mathbb{R}) = \{a\}$, *temos*

$$\operatorname{card} K(\mathbb{R},\mathbb{R}) = c$$

Como cada função constante $f_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é contínua, temos* $K(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset C(\mathbb{R},\mathbb{R})$. *Portanto,*

$$c = \operatorname{card} K(\mathbb{R},\mathbb{R}) \leq \operatorname{card} C(\mathbb{R},\mathbb{R})$$

o que, combinado com a desigualdade obtida no último parágrafo, nos dá

$$c = \operatorname{card} K(\mathbb{R},\mathbb{R}) \leq \operatorname{card} C(\mathbb{R},\mathbb{R}) \leq \operatorname{card} C(\mathbb{Q},\mathbb{R}) \leq c$$

Isto completa a demonstração de que $\operatorname{card} C(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\operatorname{card} C(\mathbb{Q},\mathbb{R})$ *e* $\operatorname{card} K(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *são todos iguais a* c.

O resultado do Exemplo 5.10 indica que as funções constantes são tão "numerosas" quanto as funções contínuas. Esta é outra ilustração das propriedades curiosas dos conjuntos infinitos.

[6] A demonstração pode ser omitida, a critério do professor.

Exemplo 5.11 *Encontre o número cardinal do conjunto $D(\mathbb{R},\mathbb{R})$ de todas as funções reais diferenciáveis de uma variável real.*

Solução. *Como cada função constante é diferenciável e cada função diferenciável é contínua, temos*

$$K(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset D(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset C(\mathbb{R},\mathbb{R})$$

Pelo exemplo 5.10, temos

$$c = \operatorname{card} K(\mathbb{R},\mathbb{R}) \leq \operatorname{card} D(\mathbb{R},\mathbb{R}) \leq \operatorname{card} C(\mathbb{R},\mathbb{R}) = c$$

Portanto, $\operatorname{card} D(\mathbb{R},\mathbb{R}) = c$.

5.7.1 Exercícios

1. Mostre que o espaço n-dimensional $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}$ (n fatores) contém "exatamente tantos" pontos quanto o intervalo aberto unitário $]0,1[$.
2. O *espaço de Hilbert* clássico consiste de todas as seqüências infinitas $(x_1,x_2,x_3,\dots)$ de números reais, chamadas *pontos*, para as quais a série $x_1^2+x_2^2+x_3^2+\cdots$ converge. Mostre que o espaço de Hilbert clássico contém "exatamente tantos" pontos quanto a reta real $\mathbb{R}$.
3. Seja $\mathbb{R}^{\aleph_0}$ o conjunto de todas as seqüências infinitas $(x_1,x_2,x_3,\dots)$ de números reais, chamadas *pontos* no espaço $\mathbb{R}^{\aleph_0}$. Um *ponto reticulado* em $\mathbb{R}^{\aleph_0}$ é um ponto $(x_1,x_2,x_3,\dots)$ tal que todos os x_k's são inteiros. Mostre que o espaço $\mathbb{R}^{\aleph_0}$ contém "exatamente tantos" pontos quanto o conjunto de pontos reticulados em $\mathbb{R}^{\aleph_0}$.
4. Mostre que existem "exatamente tantas" funções de uma variável real que assumem apenas os valores 0 e 1 quantas funções reais de n variáveis, sendo n um número natural qualquer.
5. Seja $\mathfrak{f}$ o número cardinal do conjunto $\{f \mid f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\}$ de todas as funções reais de uma variável real. Mostre que

$$\mathfrak{f}^n = \mathfrak{f}^{\aleph_0} = \mathfrak{f}^c = \mathfrak{f}$$

para todo $n\in\mathbb{N}$.

5.8 A hipótese do contínuo e sua generalização

Como todo conjunto infinito contém um conjunto enumerável (Teorema 4.11, Capítulo 4), o número cardinal $\aleph_0$ é o menor número cardinal transfinito. Uma questão importante, conhecida como o *problema do contínuo*, foi levantada por Cantor, em torno de 1880: Existe um número cardinal que está estritamente entre $\aleph_0$ e $2^{\aleph_0}(=c)$? Em linguagem de conjuntos, existem subconjuntos não enumeráveis de $\mathbb{R}$ com número cardinal menor que o de $\mathbb{R}$? Cantor e muitos matemáticos de ponta tentaram em vão resolver este problema. Como nenhum tal conjunto foi encontrado em parte alguma na matemática clássica, e parecia não haver nenhum modo de encontrar algum, foi conjeturado por Cantor e outros que a resposta ao problema do contínuo deveria ser não. Esta conjetura é conhecida como *hipótese do contínuo*.

Hipótese do Contínuo. *Não há nenhum número cardinal x satisfazendo $\aleph_0 < x < c(= 2^{\aleph_0})$.*

Uma questão intimamente relacionada ao problema do contínuo, citado habitualmente como *problema do contínuo generalizado*, é o seguinte: Existe algum número cardinal que está estritamente entre um número cardinal transfinito a e 2^a? Esta questão também não foi respondida. A conjetura de que não existe um tal número cardinal é chamada *hipótese do contínuo generalizada*.

Hipótese do Contínuo Generalizada. *Para qualquer número cardinal transfinito a, não há nenhum número cardinal x tal que $a < x < 2^a$.*

Logo em 1900, no Congresso Internacional de Matemáticos, em Paris, o grande matemático alemão David Hilbert[7] (1862–1943) apresentou uma lista de 23 problemas matemáticos não resolvidos, sendo o primeiro deles o problema do contínuo. Nenhum progresso foi feito em solucionar este problema até 1938, quando Kurt Gödel[8] (1906–1978), o notável lógico do século, demonstrou que se a hipótese do contínuo é adicionada aos axiomas usuais das teoria dos conjuntos, então qualquer contradição que poderia ser implicada por este sistema de axiomas pode ser formulada como uma contradição implicada pelos axiomas iniciais (sem a hipótese do contínuo generalizada) sozinhos.[9] Em outras palavras, a hipótese do contínuo generalizada é relativamente consistente com os axiomas da teoria dos conjuntos.

Finalmente, em 1963, uma conquista significativa foi feita pelo jovem matemático Paul J. Cohen (1934–) da Stanford University, que declarou que a hipótese do contínuo generalizada é indemonstrável com base nos axiomas usuais da teoria dos conjuntos. Portanto, o status da hipótese do contínuo, na teoria dos conjuntos, é análogo ao do

[7]David Hilbert (1862–1943), um matemático notável de todos os tempos, foi professor de matemática na Universidade de Göttingen, Alemanha (1895–1943). Influenciou totalmente o mundo da matemática moderna, desde a álgebra do 19º século até a lógica moderna e a física matemática. O famoso espaço de Hilbert é uma de suas muitas contribuições. Hilbert acreditava que todas as idéias matemáticas encaixavam-se num todo harmoniosamente.

[8]Kurt Gödel (1906–1978) do Institudo de Estudos Avançados de Princeton, em Nova Jersey, nasceu na Tchecoslováquia. Conseguiu fama primeiramente aos 25. Estudiosos famosos, incluindo Bertrand Russel (1872–1970) e Alfred North Whitehead (1861–1947), haviam sugerido a existência de guias absolutos à veracidade ou falsidade de certas proposições matemáticas. Gödel chocou o mundo demonstrando que o que Russel e Whitehead buscavam não existia. Suas outras grandes contribuições incluem a demonstração da completude da lógica de quantificadores e a demonstração da consistência de ambos a hipótese do contínuo generalizada e o axioma da escolha.

[9]Veja K. Gödel, *The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypotesis with the Axioms of Set Theory*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1940, 66 pp. Rev. ed., 1951, 74 pp.

axioma das paralelas de Euclides (o Quinto Postulado) na geometria. Podemos postulá-los ou negá-los, em qualquer caso obtendo um teoria matemática consistente.

