Geometria Elementar
gênese e desenvolvimento

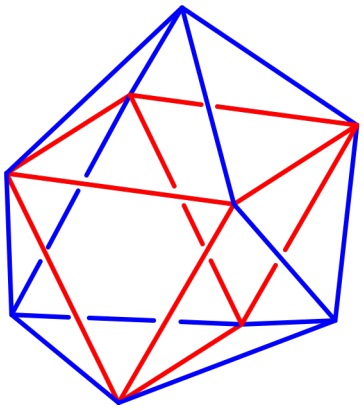
Tomo III: Geometria Euclidiana Espacial

2ª. edição

Em fase de revisão

Sugestões:

paterlini@ufscar.br



Roberto Ribeiro Paterlini

UFSCar

Roberto Ribeiro Paterlini

Geometria Elementar
gênese e desenvolvimento

Tomo III: Geometria Euclidiana Espacial

um curso superior
para formação e atualização de
professores de Matemática



Data da primeira versão: 01 de março de 2010

2ª edição, versão alpha do Tomo III em fase de revisão: 31 de outubro de 2026

Departamento de Matemática

UFSCar

Copyright © março de 2010 by Roberto Ribeiro Paterlini
Departamento de Matemática, UFSCar.

A presente versão está disponível em um arquivo em formato .pdf que pode ser acessado a partir da minha página pessoal.

Trata-se da construção de uma proposta para o ensino da Geometria Elementar em escolas superiores. Imaginamos o uso deste livro como texto principal ou de apoio em cursos de formação de professores de Matemática para o ensino básico. Para sugestões ou perguntas favor se comunicar com o autor no endereço paterlini@ufscar.br

As figuras aqui utilizadas e que não foram construídas pelo autor são de domínio público ou livres para uso não comercial. As referências às figuras estão no Apêndice B. Caso tenha havido algum engano solicitamos que sejamos alertados. Favor usar o endereço paterlini@ufscar.br

O *Copyright* © deste texto pertence ao autor, na forma da lei. É permitido o *download* dos arquivos para uso pessoal, com transferência para ledores eletrônicos ou para impressão, na forma da lei, sem qualquer ônus. É proibido o uso comercial em todo ou em parte de qualquer material aqui disponibilizado, por qualquer meio. É vedada a modificação desse texto, sob qualquer forma. Solicitamos que se forem feitas impressões em escala por agente educacional, público ou privado, que o material seja distribuído gratuitamente, e não sejam cobradas taxas, nem mesmo a título de "preço de custo". É vedada a disponibilidade deste texto em outros endereços da internet, particularmente sítios que comercializam o acesso.

Gratos.

Figura da capa: Desenho do poliedro prisma triangular tri-aumentado. Construído pelo autor com o Geogebra.

Este texto foi editado em LaTeX 2ε pelo autor, que agradece à comunidade TeX pelos meios disponibilizados.

Sumário

Sumário i

Apresentação iii

15 Perpendicularismo e paralelismo no espaço 3
15.1 Introdução . . . 3
15.2 Bases da Geometria Euclidiana no espaço . . . 3
15.3 Perpendicularismo entre retas e planos . . . 4
15.4 Paralelismo de retas e planos . . . 11
15.5 Diedros, n-edros e planos perpendiculares . . . 16
15.6 Projeções e pontos simétricos . . . 20
15.7 Problemas . . . 22
15.8 Temas para investigação . . . 29

16 Prismas e pirâmides 31
16.1 Introdução . . . 31
16.2 O cubo . . . 31
16.3 Problemas . . . 36
16.4 O tetraedro . . . 41
16.5 Problemas . . . 44
16.6 Pirâmides . . . 49
16.7 Problemas . . . 52
16.8 Prismas . . . 54
16.9 Problemas . . . 57
16.10 Temas para investigação . . . 58

17 Cones, cilindros e a esfera 61
17.1 Introdução . . . 61
17.2 Cones . . . 61
17.3 Problemas . . . 65
17.4 Cilindros . . . 68
17.5 Problemas . . . 70
17.6 A esfera . . . 72
17.7 Problemas . . . 74
17.8 Inscrição e circunscrição de um sólido em outro . . . 78
17.9 Problemas . . . 79
17.10 Temas para investigação . . . 83

18 Volume de sólidos e área de superfície **85**
18.1 Introdução: o conceito de volume . . . 85
18.2 Problemas . . . 88
18.3 Volume de prismas . . . 88
18.4 Volume de pirâmides . . . 90
18.5 Volume de cilindros e cones . . . 91
18.6 Volume da esfera . . . 92
18.7 Área de superfícies de sólidos . . . 95
18.8 Problemas . . . 96
18.9 Temas para investigação . . . 105

19 Poliedros **107**
19.1 Exemplos iniciais de poliedros . . . 107
19.2 Problemas . . . 108
19.3 Construção de poliedros . . . 109
19.4 Problemas . . . 112
19.5 Definições e propriedades gerais . . . 115
19.6 Problemas . . . 116
19.7 Propriedades combinatórias dos poliedros . . . 117
19.8 Problemas . . . 118
19.9 Classificação dos poliedros . . . 121
19.10 Problemas . . . 124
19.11 Temas para investigação . . . 129

A Respostas e sugestões **131**

B Créditos das figuras **133**

Referências Bibliográficas **137**

Índice de autores **141**

Índice de assuntos **143**

Apresentação

Há um caminho fácil para a Geometria ? [1]

Sobre este texto



Este texto foi inicialmente escrito como uma tentativa de orientação para os estudos de Geometria a serem realizados na disciplina *Geometria - Teoria e Experimentação* do Programa de pós-graduação em Ciências Exatas (PPGECE) da UFSCar. Foi aplicado para as turmas de 2010, 2011 e 2012. Estamos agora fazendo ampliações e incluindo mais detalhes com o objetivo de preparar um texto para ser usado também em cursos de formação e atualização de professores do ensino básico.

Nossa concepção fundamental

A interação entre o ensinar e o aprender no campo das formas, em todos os reinos da natureza, gera a Geometria como força criativa.

Agradecimentos

Agradeço aos colegas professores do PPGECE e demais colegas do Departamento de Matemática da UFSCar que têm contribuído com esse texto. Agradeço principalmente aos estudantes de mestrado do PPGECE das turmas de 2010, 2011 e 2012, e aos estudantes do curso de licenciatura em Matemática da UFSCar.

Tudo que está escrito aqui (bem, quase tudo) aprendi com meus professores ou em livros e outros textos, a todos minha gratidão. Esforcei-me em fazer as referências corretas na Bibliografia. Uma observação especial: inúmeras informações e imagens que aqui utilizei eu as obtive na Wikipedia, um belo projeto coletivo.

São Carlos, 23 de abril de 2015.

Prof. Roberto Ribeiro Paterlini.

Sobre a 2ª. edição

Para facilitar as atualizações assim como o uso docente e discente, repartimos o texto da 1ª. edição em Tomos. Realizamos correções e completamos partes faltantes.

São Carlos, 31 de outubro de 2026.

Prof. Roberto Ribeiro Paterlini.

[1] Pergunta que teria sido feita a Euclides pelo Rei do Egito Ptolomeu I.

Apresentação do Tomo III: Geometria Euclidiana Espacial

Neste Tomo III de nosso texto "Geometria Elementar gênese e desenvolvimento", nos propomos a estudar a Geometria Euclidiana Espacial, dando continuidade à nossa apresentação da Geometria Euclidiana Plana, feita no Tomo II desta coleção. Após inúmeros contatos com professores do ensino básico, sempre solicitando deles uma posição, vimos que é importante para o professor estudar a Geometria de um ponto de vista que lhe confira segurança no fazer didático cotidiano. Esperamos prover essa demanda com o material exposto nestes capítulos.

Capítulo 15: Perpendicularismo e paralelismo no espaço. Bases da Geometria Euclidiana no espaço; Perpendicularismo entre retas e planos; Paralelismo de retas e planos; Diedros, n-edros e planos perpendiculares; Projeções e pontos simétricos.

Capítulo 16: Prismas e pirâmides. O cubo; O tetraedro; Pirâmides; Prismas.

Capítulo 17: Cones, cilindros e a esfera. Cones; Cilindros; A esfera; Inscrição e circunscrição de um sólido em outro.

Capítulo 18: Volume de sólidos e área de superfície. Introdução: o conceito de volume; Volume de prismas; Volume de pirâmides; Volume de cilindros e cones; Volume da esfera; Área de superfícies de sólidos.

Capítulo 19: Poliedros. Exemplos iniciais de poliedros; Construção de poliedros; Definições e propriedades gerais; Propriedades combinatórias dos poliedros; Classificação dos poliedros.

Capítulo 15

Perpendicularismo e paralelismo no espaço

15.1 Introdução

Neste Capítulo continuamos nossa apresentação da Geometria Euclidiana sob a perspectiva de um sistema axiomático. Vemos agora as propriedades básicas de retas e planos no espaço. O principal foco é o estudo das relações de perpendicularismo e paralelismo entre esses elementos (retas com retas, retas com planos e planos com planos). Precisamos conhecer essas relações para definir com precisão sólidos geométricos, como cilindros, paralelepípedos, etc, e investigar suas propriedades.

15.2 Bases da Geometria Euclidiana no espaço

Vimos no Capítulo 9 do Tomo II, particularmente nas seções 9.4 a 9.8, os axiomas e resultados iniciais da Geometria Euclidiana no espaço. Para termos presentes essas propriedades fazemos a seguir uma pequena lista.

1) *O espaço contém pelo menos quatro pontos não coplanares.* (esse é o Axioma 1.)

2) *(a) Dados três pontos quaisquer, existe um plano que os contém. (b) Dados três pontos não colineares quaisquer, existe um único plano que os contém. (c) Todo plano contém pelo menos três pontos não colineares.* (esse é o Axioma 3.)

3) *Se uma reta intersecta um plano que não a contém, a interseção é um único ponto.* (esse é o Teorema 9.3 do Tomo II.)

4) *Dados uma reta e um ponto fora dela, existe um único plano que os contém.* (esse é o Teorema 9.4 do Tomo II.)

5) *Se dois planos diferentes se intersectam, a interseção é uma reta.* (esse é o Axioma 5.)

6) *Dado um plano, os pontos do espaço que não pertencem ao plano formam dois conjuntos não vazios tais que: (i) cada um dos conjuntos é convexo; e (ii) se A pertence a um dos conjuntos e B ao outro, então AB intersecta o plano.* (esse é o Axioma 10.)

Lembremos que duas retas são ditas *paralelas* se são coplanares e se não se intersectam, e que duas retas não coplanares são chamadas *reversas*. Temos a propriedade:

7) *Dados uma reta e um ponto fora dela, existe, no espaço, uma única reta paralela à reta dada e que contém o ponto dado.*

De fato, sejam r uma reta e P um ponto fora dela. Seja α o plano que os contém. Pelo Axioma 16 existe em α uma única reta s paralela a r e que contém P. Por outro lado, seja t uma reta qualquer paralela a r e que também contenha P. Como t e r são paralelas, existe um plano β que os contém. Então α e β são planos que contêm, ambos, r e P, logo são o mesmo plano. Assim t está contida em α, o que implica $t = s$. Portanto não é possível existir no espaço uma segunda paralela a r por P.

15.3 Perpendicularismo entre retas e planos

Precisamos estudar perpendicularismo no espaço nas seguintes situações: (i) entre retas; (ii) entre retas e planos; (iii) entre planos.

Se duas retas (do espaço) se intersectam, então elas são coplanares. Se os ângulos formados por elas forem retos, dizemos que são perpendiculares. Portanto a noção de retas perpendiculares no espaço é a mesma da do plano.

Vejamos resultados básicos sobre perpendicularismo entre retas e planos.

Definições 15.1. Uma reta e um plano se dizem *perpendiculares* quando se intersectam e cada reta contida no plano que passa pelo ponto de interseção é perpendicular à reta dada. Se A é o ponto de interseção dizemos que o plano é perpendicular à reta em A, ou vice-versa. Um segmento ou uma semirreta é perpendicular a um plano se intersectam o plano e se a reta que os contém é perpendicular ao plano. Se o segmento AB é perpendicular a um plano com B no plano, então o ponto B chama-se *pé* do segmento perpendicular que liga A ao plano. A notação usual de perpendicularismo é $\perp$

Para verificar que uma reta é perpendicular a um plano não é necessário provar que ela é perpendicular a **todas** as retas do plano que contêm o ponto de interseção. Sabemos por experiência que basta fazer a verificação para duas retas. Vamos ver isso na forma de um teorema. Para que a demonstração fique mais clara vejamos primeiro o seguinte

Lema 15.2. *Sejam S e U pontos equidistantes dos pontos P e Q. Então todo ponto do segmento SU é equidistante de P e Q.*

Demonstração.

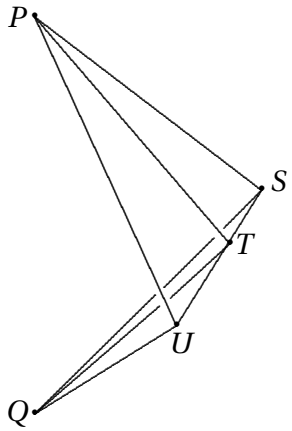


Figura 15.1 Ilustração do Lema 15.2

Confira ilustração na Figura 15.1, em que procuramos deixar claro que a situação ocorre no espaço.

Temos $PSU \cong QSU$ pelo caso LLL. Logo $\angle PSU \cong \angle QSU$. Seja T um ponto arbitrário do interior de SU. Por LAL temos $PST \cong QST$. Portanto $PT = QT$.

□

Teorema 15.3. *Se uma reta é perpendicular a duas retas que se intersectam em seu ponto de interseção, então ela é perpendicular ao plano que as contém.*

Demonstração. A demonstração está ilustrada na Figura 15.2. Sejam α um plano contendo duas retas s e u que se intersectam em A. Seja r uma reta perpendicular a s e u em A. Queremos provar que toda reta t de α que contém A também é perpendicular a r. Sejam P e Q pontos de r equidistantes de A. Sejam S um ponto de s e U de u, diferentes de A, e situados em semiplanos opostos de α em relação à reta t. Portanto SU intersecta t num ponto T. Temos $T \neq A$ pois SU não está contido em s. Como S e U são equidistantes de P e Q então, em virtude do Lema anterior, T também é.

No plano que contém r e t, os pontos A e T são equidistantes dos extremos do segmento PQ, logo t é a mediatriz desse segmento no referido plano. Assim t é perpendicular a r. □

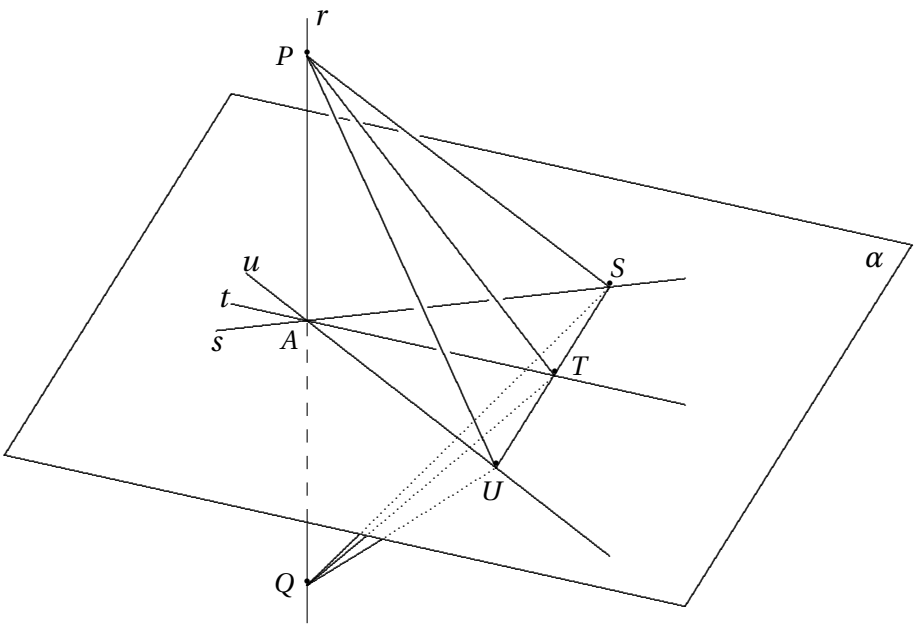


Figura 15.2. Ilustração do Teorema 15.3

Nossa experiência com objetos geométricos nos diz que por um ponto de uma reta passa um plano perpendicular a ela, e esse plano é único. Veremos isso na forma de teorema. As duas proposições seguintes constituem uma preparação para que possamos demostrá-lo.

Proposição 15.4. *Por um ponto de uma reta passa um plano perpendicular à reta.*

Demonstração. Confira a Figura 15.3. Sejam r uma reta e P um ponto nela contido. Sejam α e β planos que contêm r (por que existem?). Seja s a reta de α que é perpendicular a r por P, e seja t a reta de β que é perpendicular a r por P. Seja γ o plano determinado por s e t. Então r é perpendicular a duas retas de γ pelo ponto P, portanto r é perpendicular a esse plano.

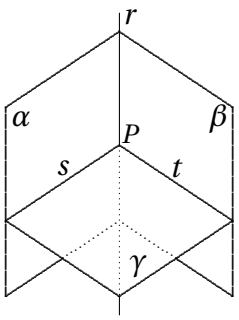


Figura 15.3 Ilustração da Proposição 15.4

Proposição 15.5. *Se uma reta e um plano são perpendiculares em um ponto P, então o plano contém toda reta que passa por P e é perpendicular à reta dada.*

Demonstração. A demonstração está ilustrada na Figura 15.4. Sejam α um plano e r uma reta perpendicular a ele pelo ponto P. Seja t uma reta (do espaço) perpendicular a r por P. Queremos provar que a reta t está contida em α.

Como r e t são retas concorrentes, existe um plano β determinado por elas. Como α e β se intersectam (em P), então eles se intersectam em uma reta s. Assim, no plano β, as retas s e t são perpendiculares a r, logo são iguais. Segue que t está contida em α. □

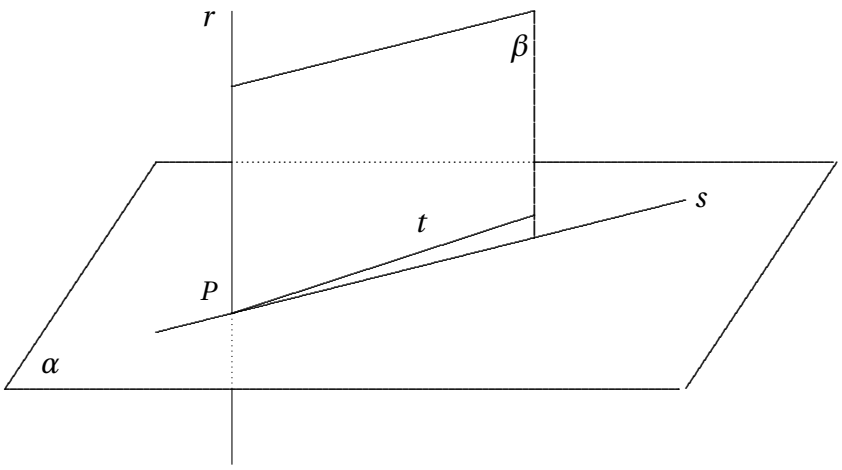


Figura 15.4. Ilustração da Proposição 15.5

Teorema 15.6. *Por um ponto de uma reta passa um único plano perpendicular à reta.*

Demonstração. A existência do plano é garantida pela Proposição 15.4 acima. Vejamos a unicidade. Sejam α e β planos perpendiculares a uma reta r por um ponto P. Seja t a reta de interseção desses planos. Seja s outra reta de α que passa por P, logo ela é perpendicular a r. Pela Proposição 15.5 acima, o plano β também contém s. Portanto, α e β se intersectam em duas retas diferentes, logo são iguais. □

Em particular, todo segmento tem um plano perpendicular pelo seu ponto médio, denominado *plano mediador* desse segmento. Já vimos que, dado um segmento em um plano, sua mediatriz é o conjunto dos pontos do plano que são equidistantes dos extremos do segmento. Os resultados vistos acima sobre planos e retas perpendiculares nos permitem demonstrar uma versão espacial dessa propriedade:

Teorema 15.7. *O plano mediador de um segmento é o conjunto dos pontos (do espaço) que são equidistantes dos extremos do segmento.*

Demonstração. A demonstração está ilustrada na Figura 15.5. Seja α um plano perpendicular ao segmento PQ pelo seu ponto médio M. Seja $\mathscr{C}$ o conjunto dos pontos do espaço que são equidistantes de P e Q. Pretendemos mostrar que $\alpha = \mathscr{C}$.

Seja $X \in \alpha$ com $X \neq M$. O segmento XM está nesse plano, logo é perpendicular a PQ pelo seu ponto médio. Então X está em uma mediatriz de PQ, e assim é equidistante de seus extremos. Em consequência $X \in \mathscr{C}$, e $\alpha \subset \mathscr{C}$.

Seja agora $X \in \mathscr{C}$. Como X é equidistante de P e Q, XM está na mediatriz do segmento PQ (no plano que contém PQ e X). Logo XM é perpendicular a PQ. Como o plano α contém qualquer reta perpendicular a PQ pelo ponto M, vem que XM está nesse plano. Logo $X \in \alpha$ e $\mathscr{C} \subset \alpha$.

Provamos que $\alpha = \mathscr{C}$. □

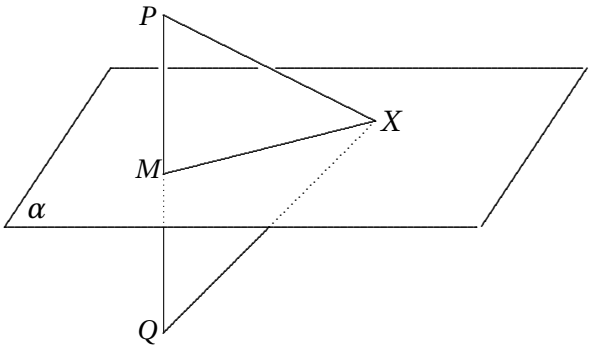


Figura 15.5. Ilustração do Teorema 15.7

O resultado seguinte descreve uma propriedade frequentemente utilizada em construções. Se levantamos verticalmente dois pilares e esticamos sobre eles uma tela de arame, esperamos que essa tela forme uma figura planar. Abstratamente temos o

Teorema 15.8. *Duas retas quaisquer perpendiculares a um mesmo plano são coplanares.*

Demonstração. Na Figura 15.6 vemos ilustrados um plano α e duas retas r e s a ele perpendiculares. Sejam P e Q respectivamente os pés de r e s em α. Se $P = Q$ então r e s são concorrentes e já sabemos que existe um plano que as contém. Suponhamos $P \neq Q$. Seja AB um segmento em α e que intersecta PQ em M, sendo M o ponto médio de ambos, e AB é perpendicular a PQ. Seja β o plano perpendicular a AB por M. Nosso objetivo é provar que r e s estão em β.

Vamos provar que r está em β. Seja C um ponto de r diferente de P. Como $PA = PB$ temos $CPA \cong CPB$ pelo caso *LAL*. Segue que $CA = CB$, e assim C é equidistante dos extremos do segmento AB. Então, pelo Teorema 15.7, C está no plano mediador de AB. Mas esse plano é β. Assim β tem dois pontos de r, a saber, P e C. Portanto r está em β.

Da mesma forma se prova que s está em β, e terminamos. □

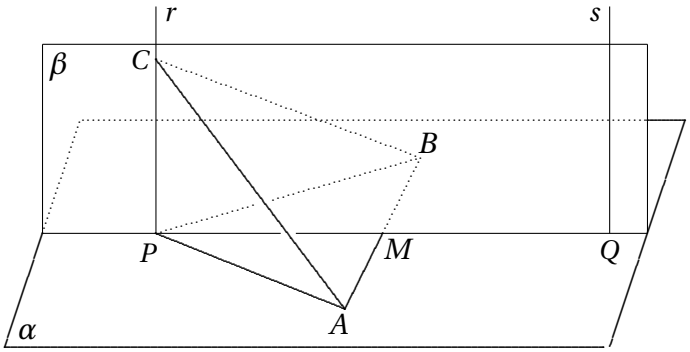


Figura 15.6. Ilustração do Teorema 15.8

Prosseguimos nossos estudos sobre planos e retas perpendiculares. Queremos provar agora que *por um ponto de um plano passa uma única reta perpendicular ao plano.* Essa afirmação é um tipo de "dual" do Teorema 15.6. Começamos com a existência da reta.

Proposição 15.9. *Por um ponto de um plano dado existe uma reta perpendicular ao plano.*

Demonstração. Seja P um ponto em um plano α. Escolhemos, nesse plano, uma reta r que contenha P. Confira ilustração na Figura 15.7.

Consideremos o plano β perpendicular a r pelo ponto P. Esse plano existe em virtude do Teorema 15.6 (β é único, mas não vamos usar isso agora). β é diferente de α, pois r está em α mas tem um único ponto em β. Mas α e β se intersectam em P, logo sua interseção é uma reta s. Seja t a reta de β perpendicular a s por P. A reta t também é perpendicular a r, pois r é perpendicular a β e t está nesse plano. Assim t é perpendicular a duas retas diferentes de α (r e s) no ponto P. Portanto t é perpendicular a α pelo ponto P. □

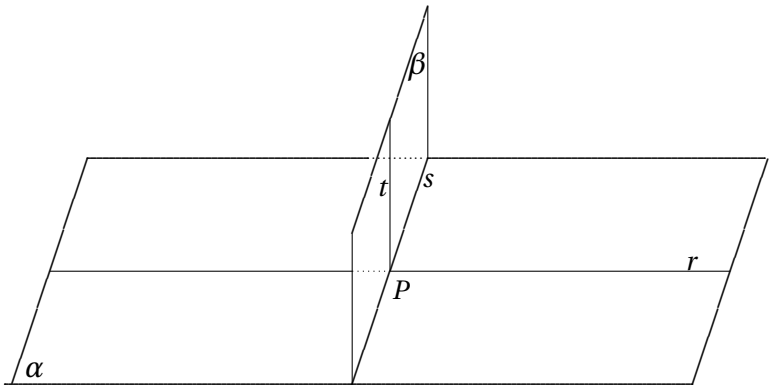


Figura 15.7. Ilustração da Proposição 15.9

Desejamos agora provar que a reta perpendicular é única. Examinando a demonstração acima verificamos que o plano β é o único plano perpendicular a r por P, e t é a única reta perpendicular a s por P. Assim, se consideramos o processo usado nessa demonstração, a reta t assim obtida é única. Mas temos que considerar que poderíamos obter a reta perpendicular por outro processo, e eventualmente ela seria diferente de t.

Assim, para provar que a perpendicular é única, parece que a melhor tática é usar contradição. Supomos que temos duas, e tentamos obter uma contradição com a teoria. Isso é o que fazemos em

Teorema 15.10. *Por um ponto de um plano dado existe uma única reta perpendicular ao plano.*

Demonstração. Conforme comentamos, falta provar a unicidade. Seja P um ponto em um plano α. Sejam t e u retas perpendiculares ao plano pelo ponto. Confira ilustração na Figura 15.8.

Como t e u são retas concorrentes, existe um plano β que as contém. Esse plano é diferente de α, pois t está nele mas não está em α. Por outro lado α e β se intersectam em P, logo sua interseção é uma reta s. Concentremo-nos agora no plano β. Nele temos as retas t e u que são perpendiculares a s no mesmo ponto P. Então $t = u$. □

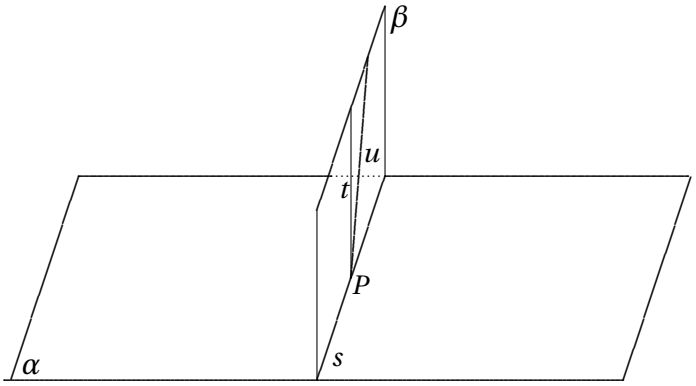


Figura 15.8. Ilustração do Teorema 15.10

Retomamos agora o Teorema 15.6, que afirma que "Por um ponto de uma reta passa um único plano perpendicular à reta". Mas agora consideramos o caso em que o ponto não está na reta.

Teorema 15.11. *Dados um ponto e uma reta (que contém o ponto ou não), existe um único plano que contém o ponto e é perpendicular à reta.*

Demonstração. Conforme comentamos, o caso em que o ponto está na reta já foi visto no Teorema 15.6. Suponhamos que o ponto não está na reta.

Sejam r uma reta e P um ponto fora dela. Existe um único plano α determinado por eles. Veja ilustração na Figura 15.9. Nesse plano existe uma reta s perpendicular a r e contendo o ponto P. Seja Q o pé dessa perpendicular em r. Pelo Teorema 15.6 existe um plano β perpendicular a r por Q. Pela Proposição 15.5 esse plano contém todas as retas perpendiculares a r, logo s está em β. Assim P pertence a β, e β é o plano procurado.

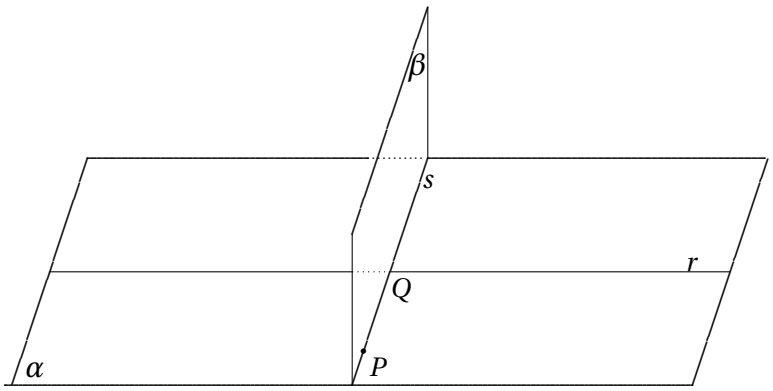


Figura 15.9. Ilustração do Teorema 15.11

Vejamos agora a unicidade. Sejam β e β' planos perpendiculares a r e contendo P, e sejam, respectivamente, s e s' suas intersecções com α. Não podemos ter $s \neq s'$, pois se isso ocorresse teríamos no plano α duas retas perpendiculares a r e concorrentes, o que não é possível. Logo $s = s'$. Então β e β' são planos perpendiculares a r por um ponto de r, e o Teorema 15.6 implica $\beta = \beta'$. □

O Teorema 15.10 afirma que "Por um ponto de um plano dado existe uma única reta perpendicular ao plano". Consideramos agora o caso em que o ponto não está no plano.

Teorema 15.12. *Dados um ponto e um plano (que contém o ponto ou não), existe uma única reta que contém o ponto e é perpendicular ao plano.*

Demonstração. Conforme comentamos, o caso em que o ponto está no plano já foi visto no Teorema 15.10. Suponhamos que o ponto não está no plano. Vejamos primeiro a existência da reta perpendicular.

Sejam α um plano e P um ponto fora dele. Podemos acompanhar a demonstração na Figura 15.10. Por um ponto qualquer Q de α tomamos a reta r perpendicular a esse plano. Se r contém P, terminamos. Se não contém, seja β o plano determinado por r e P.

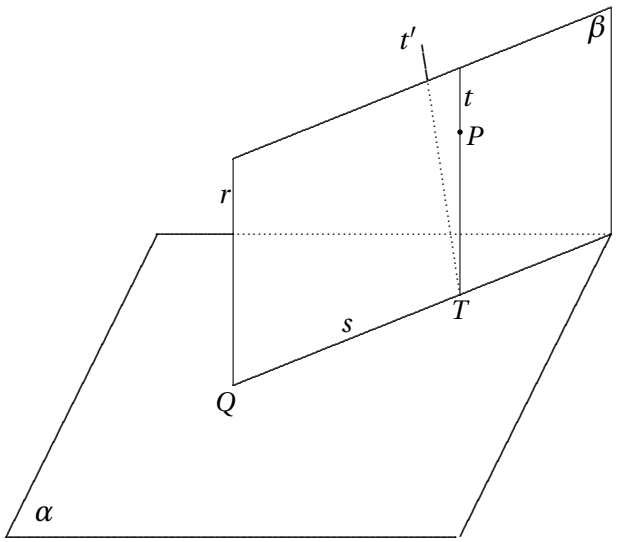


Figura 15.10. Ilustração do Teorema 15.12

Observemos que β é diferente de α pois contém r e α não. Ainda Q pertence a ambos, de modo que a interseção desses planos é uma reta s que contém Q. Como r é perpendicular a α, r e s são perpendiculares. Seja t a reta de β paralela a r por P. Então t é perpendicular a s em um ponto T. Afirmamos que t é a reta procurada. Para ver isso, seja t' a reta perpendicular a α por T. Então r e t' são ambas perpendiculares a α, e o Teorema 15.8 garante que elas são coplanares. Seja γ esse plano. Então γ contém r e T, assim como β. Portanto $\gamma = \beta$. Vemos a partir disso que t e t' são perpendiculares a s por T no plano β. Dessa forma $t = t'$, e t é perpendicular a α.

Vejamos agora a unicidade. Sejam α um plano e P um ponto fora dele. Suponhamos que existam duas perpendiculares t e u a α por P. Sejam T e U os pés dessas perpendiculares em α. Então, no plano que contém t e u, temos uma reta $\overleftrightarrow{TU}$, um ponto P fora dela e duas retas t e u a ela perpendiculares por P. Sabemos que isso não é possível. Assim vale a unicidade, e terminamos. □

Deixamos para o estudante a demonstração da

Proposição 15.13. *O menor segmento ligando um plano a um ponto que não lhe pertence é o segmento perpendicular.*

Aproveitamos o ensejo para definir distância entre ponto e plano.

Definição 15.14. A *distância* de um plano a um ponto que não lhe pertence é o comprimento do segmento perpendicular do ponto ao plano. Se o ponto pertence ao plano dizemos que a distância é zero. Dado um plano α e um ponto $A \notin \alpha$, o *pé da perpendicular* de A a α é o ponto $P \in \alpha$ tal que AP é perpendicular a α.

Estivemos estudando propriedades de perpendicularismo entre retas e planos. Precisamos também definir o que significa um plano ser perpendicular a outro. Vamos fazer isso mais abaixo, depois que estudarmos o conceito de diedro.

15.4 Paralelismo de retas e planos

Apresentamos agora resultados básicos sobre paralelismo entre retas e planos e entre planos e planos. Já vimos os conceitos de retas paralelas e retas reversas, e os repetimos aqui.

Definições 15.15. Duas retas são ditas *paralelas* se são coplanares e se não se intersectam. Duas retas não coplanares são ditas *reversas*. Dois planos, ou um plano e uma reta, se dizem *paralelos* se não se intersectam. Um segmento se diz paralelo a um plano se a reta que o contém é paralela ao plano. O símbolo de paralelismo continua sendo $\parallel$

Lembremos que, em virtude do Axioma 16, dado uma reta e um ponto fora dela, existe (no espaço) uma única reta paralela à reta dada e contendo o ponto dado.

Agora a primeira propriedade que vamos estudar é

Proposição 15.16. *Se um plano intersecta dois planos paralelos, então as interseções são duas retas paralelas.*

Demonstração. A afirmação está ilustrada na Figura 15.11. Sejam α e β planos paralelos. Seja γ um plano que intersecta α na reta r e β na reta s. Essas retas são paralelas pois: (i) são coplanares (estão no plano γ); (ii) não se intersectam (pois α e β não se intersectam). □

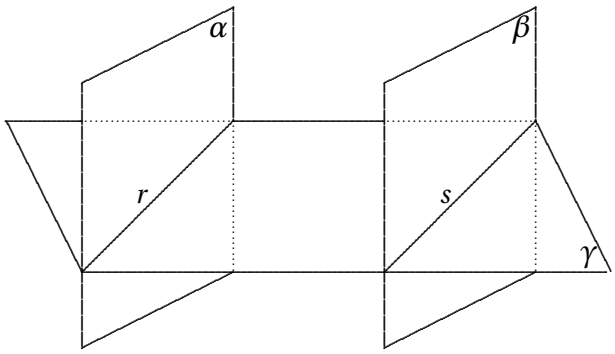


Figura 15.11. Ilustração da Proposição 15.16

O próximo resultado tem seu análogo no plano, que já conhecemos.

Teorema 15.17. *Se uma reta é perpendicular a um de dois planos paralelos, então ela é perpendicular ao outro.*

Demonstração. Sejam α e β planos paralelos e t uma reta perpendicular a α. Queremos provar que t intersecta β e, ainda mais, lhe é perpendicular. Veja ilustração na Figura 15.12.

Certamente que β não está contido em t. Portanto existe em β um ponto A que não pertence a t. Isso implica que t e A determinam um plano γ. Esse plano intersecta α, pois contém t e essa reta intersecta α. Seja r a interseção de γ e α. Por outro lado, γ também intersecta β, pois o ponto A é comum. Seja s a interseção de γ e β. Pelo que foi observado na Proposição acima, r e s são paralelas.

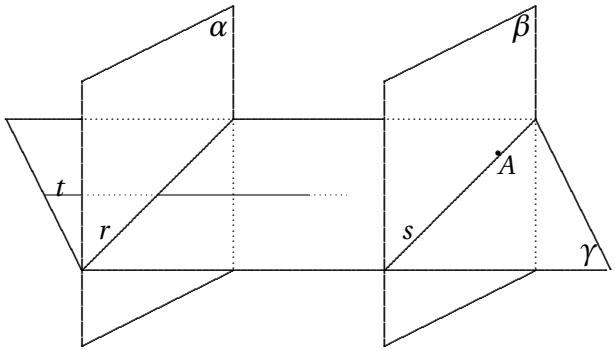


Figura 15.12. Ilustração do Teorema 15.17

Em resumo, no plano γ temos duas retas paralelas r e s e uma reta t que é perpendicular a r. Pelo Problema **??**, já citado acima, t intersecta s em um ponto Q e é perpendicular a ela. Portanto t é perpendicular a uma reta de β pelo ponto Q.

Tomando agora um ponto B de β, diferente de Q e fora de s, repetimos a construção acima e encontramos outra reta de β perpendicular a t pelo ponto Q. Portanto t é perpendicular a β. □

Outro resultado sobre paralelismo é

Teorema 15.18. *Se dois planos são perpendiculares a uma reta então eles são paralelos.*

Demonstração. Sejam α e β dois planos perpendiculares a uma mesma reta nos pontos P e Q respectivamente. Se os dois planos se encontrassem em um ponto R, então PQR seria um triângulo com dois ângulos retos, o que é impossível. Logo os planos não se encontram, e assim são paralelos. □

Corolário 15.19. *Dois planos, cada um paralelo a um terceiro plano, são paralelos.*

Demonstração. Sejam α e β dois planos, cada um deles paralelo a um terceiro plano γ. Seja r uma reta perpendicular a α. Como α e γ são paralelos, então r é também perpendicular a γ. Como γ e β são paralelos, então r é perpendicular a β. Portanto, α e β têm uma reta perpendicular comum, e assim são paralelos. □

O seguinte resultado já foi praticamente visto no Teorema 15.8, mas vamos repetí-lo aqui para enfatizar o aspecto de que as retas perpendiculares são paralelas.

Proposição 15.20. *Duas retas perpendiculares a um mesmo plano são paralelas.*

Demonstração. Sejam r e s duas retas perpendiculares a um plano α pelos pontos P e Q, respectivamente. O Teorema 15.8, mencionado acima, nos diz que elas são coplanares. Seja β o plano que as contém. Nesse plano temos duas retas (r e s) perpendiculares a outra reta ($\overleftrightarrow{PQ}$). Logo r e s são paralelas. □

Uma consequência dessa afirmação é

Corolário 15.21. *Um plano perpendicular a uma de duas retas paralelas é perpendicular à outra.*

Demonstração. Sejam r e s retas paralelas e α um plano perpendicular a r. Queremos mostrar que s encontra α e lhe é perpendicular. Faremos isso indiretamente. Confira ilustração na Figura 15.13.

Seja A um ponto qualquer de s. O Teorema 15.12 garante que existe uma (única) reta t que contém A e é perpendicular ao plano. Pela Proposição 15.20 r e t são paralelas. Pelo Axioma das Paralelas, $t = s$. Logo s encontra α e lhe é perpendicular. □

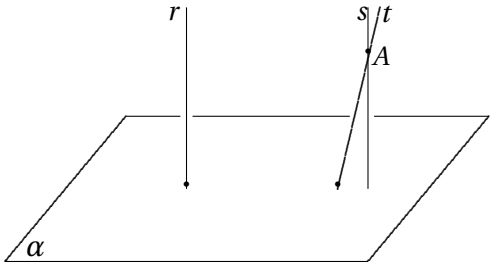


Figura 15.13. Ilustração do Corolário 15.21

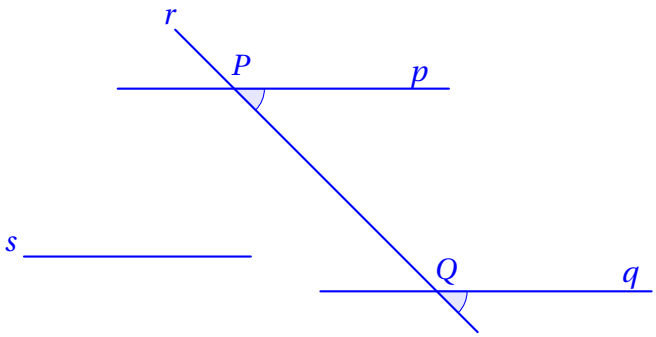
Vimos no Capítulo 9 do Tomo II, que "em um plano, se duas retas são paralelas a uma terceira, então elas são paralelas entre si". Usando as propriedades de planos perpendiculares a retas podemos agora eliminar a exigência de que as três retas devem estar no mesmo plano.

Corolário 15.22. *Duas retas, cada uma paralela a uma terceira reta, são paralelas.*

Demonstração. Sejam r e s duas retas, cada uma paralela a uma terceira reta t. Seja α um plano perpendicular a t. Como r e t são paralelos, então α é perpendicular a r. Como s e t são paralelos, então α é perpendicular a s. Como r e s são perpendiculares ao mesmo plano, então são paralelas. □

Esse corolário nos dá a oportunidade de definir ângulo entre retas quaisquer assim como retas ortogonais. Observemos primeiro o

Corolário 15.23. *Sejam r e s duas retas do espaço, e P e Q dois pontos de r. Sejam p a reta paralela a s por P, e q a reta paralela a s por Q. Então os ângulos formados por r e p são congruentes aos ângulos correspondentes formados por r e q. Em particular, p é perpendicular a r se e somente se q também o for.*



Demonstração. Como p e q são paralelas a s, o Corolário 15.22 indica que são paralelas entre si. Em particular, existe um plano que contém p e q. Nesse plano r é uma transversal a p e q, e sabemos que r determina com p e q ângulos correspondentes congruentes. Se um desses ângulos for reto, todos os outros também são. Assim temos demonstradas as afirmações. □

Dadas duas retas que se intersectam, já sabemos que elas determinam um plano, e nesse plano essas retas definem quatro ângulos. Se esses ângulos forem retos as retas são ditas perpendiculares. Se essas retas não forem perpendiculares, uma forma de estabelecer o ângulo entre elas é dizer que esse ângulo é um dos ângulos agudos por elas formados.

Definição 15.24. Sejam r e s retas reversas. Escolhemos um ponto P em r, e seja p a reta paralela a s por ele. Dizemos que os ângulos formados por r e p são os ângulos entre r e s. Se esses ângulos forem retos, r se diz ortogonal a s. Se esses ângulos não forem retos, podemos escolher um dos ângulos agudos (são opostos pelo vértice) e defini-lo como o ângulo entre r e s.

Temos duas observações a fazer sobre essa definição. Primeiro que ela não depende da escolha do ponto P em r. Isso se deve ao Corolário 15.23. Ademais, a definição também não depende do fato de P estar em r ou em s, ou seja, os ângulos entre r e s são os mesmos daqueles entre s e r. Para ver isso sejam P um ponto de r e T um ponto de s. Sejam p a reta paralela a s por P e t a reta paralela a r por T. Confira a Figura 15.14.

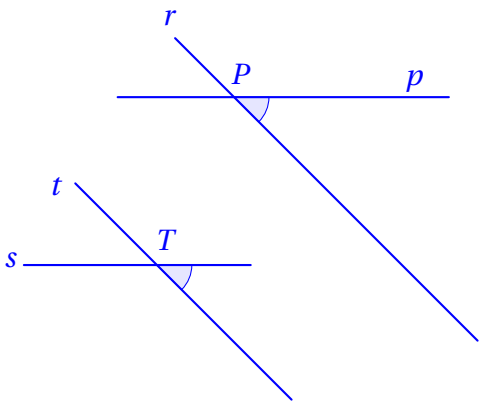


Figura 15.14. Observação sobre ângulos entre retas.

Devido ao Problema 15.7.34 o plano determinado por r e p é paralelo ao plano determinado por s e t. Aplicando a seguir o Problema 15.7.37 vemos que os ângulos determinados por r e p podem ser postos em correspondência com os ângulos formados por s e t de modo que ângulos correspondentes sejam congruentes. Portanto o ponto P da Definição 15.24 pode estar em r ou s. Em outros termos, nessa Definição não importa a ordem com que r e s são tomados.

Nossa experiência da vida comum nos diz que planos paralelos são equidistantes. Isso pode ser demonstrado no nosso sistema axiomático da Geometria Euclidiana. Começamos com a

Proposição 15.25. *Se dois planos são paralelos é constante a distância de qualquer ponto de um deles ao outro.*

Demonstração. Sejam α e β planos paralelos. Sejam A e B pontos arbitrários de α. Sejam C e D seus respectivos pés sobre β. Queremos provar que $AC = BD$. Confira ilustração na Figura 15.15.

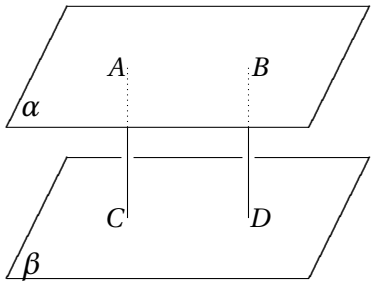


Figura 15.15. Ilustração da Proposição 15.25

Como os segmentos AC e BD são perpendiculares a β, eles pertencem a um plano e são paralelos (Teorema 15.8). Esse plano, por sua vez, intersecta os planos α e β em retas paralelas (Proposição 15.16). Considere agora o quadrilátero plano $ABDC$. Pelo que foi observado ele tem os dois pares de lados opostos paralelos, logo é um paralelogramo. Portanto seus lados opostos são congruentes. Em particular, $AC = BD$. □

Para definir distância entre planos paralelos precisamos ainda da

Proposição 15.26. *Dados dois planos paralelos, o menor segmento com extremidades nos dois planos ocorre quando esse segmento é perpendicular aos planos.*

Demonstração. Sejam α e β planos paralelos. Sejam $A \in \alpha$ e $B \in \beta$ pontos tais que $AB \perp \alpha$. Para obter esse segmento escolha um ponto arbitrário $a \in \alpha$ e tome a reta perpendicular a α por A. Pelo Teorema 15.17 essa reta intersecta β em um ponto B, logo $AB \perp \alpha$. Temos também $AB \perp \beta$. Sejam agora $C \in \alpha$ e $D \in \beta$ pontos quaisquer. Queremos provar que $AB \leq CD$. Confira ilustração na Figura 15.16.

Seja $E \in \beta$ tal que $CE \perp \beta$. Isso implica $AB = CE$. Se $E = D$, terminamos. Se $E \neq D$ então CDE é um triângulo retângulo com hipotenusa CD, logo $CE < CD$. Assim $AB < CD$. Com isso terminamos. □

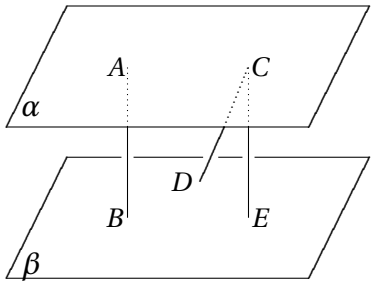


Figura 15.16. Distância entre planos paralelos.

Esses resultados nos permitem colocar a

Definição 15.27. A distância entre dois planos paralelos é a medida de qualquer segmento perpendicular que os liga.

Terminamos essa seção observando o

Teorema 15.28 (Teorema de Tales para planos paralelos)**.** *Planos paralelos determinam sobre duas retas secantes quaisquer segmentos correspondentes proporcionais.*

Demonstração. Sejam α, β, γ, ... planos paralelos e m e n retas secantes a esses planos. Suponhamos primeiro que $m||n$. Então m e n estão em um plano ω, e as interseções desse plano com os planos paralelos são retas paralelas. Essas retas determinam com m e n paralelogramos e os lados opostos desses paralelogramos determinados por m e n são congruentes, e temos o resultado desejado.

Se m não é paralelo a n, consideramos por $m \cap \alpha$ a reta l paralela a n. Pelo que foi observado o resultado vale para os segmentos determinados sobre l e n. Mas l e m são coplanares, pois são concorrentes, de modo que podemos aplicar a elas o Teorema de Tales no plano, e o resultado vale para l e m. Combinando os dois resultados obtidos segue que a afirmação é verdadeira para m e n. □

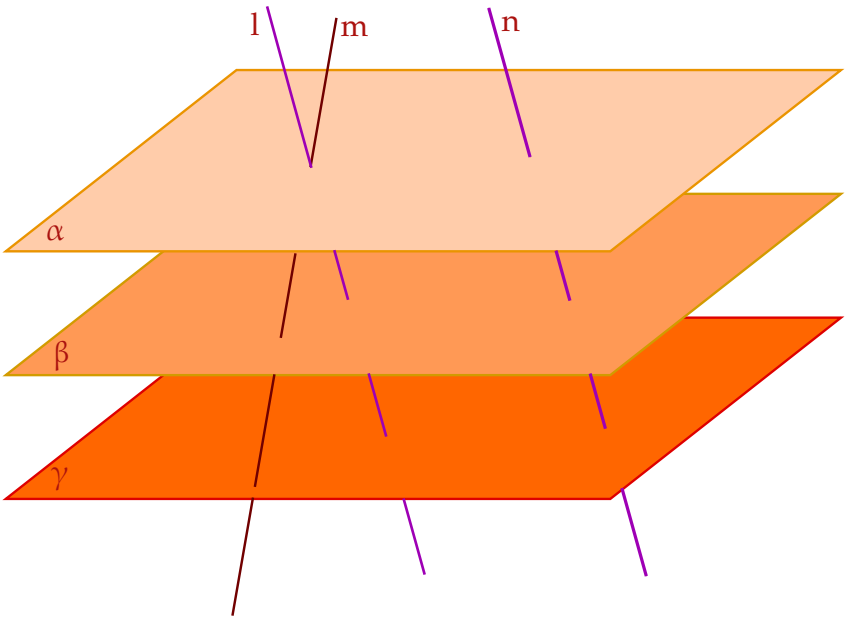


Figura 15.17. Ilustração do Teorema de Tales para planos paralelos.

15.5 Diedros, n-edros e planos perpendiculares

Um conceito básico em geometria espacial é o de diedro. Ele é uma generalização da ideia de ângulo entre retas no plano. Usamos esse novo conceito para definir planos perpendiculares. Vemos também algumas propriedades dos n-edros.

Definições 15.29. Dados dois semiplanos com a mesma origem e não contidos no mesmo plano, a reunião dos dois semiplanos e sua origem comum é chamada *diedro*. A origem dos dois semiplanos é chamada *aresta* ou *origem* do diedro. A reunião da aresta e de qualquer um dos dois semiplanos é denominada *face* do diedro. Se P e Q são pontos da aresta do diedro e A é um ponto de uma face e B um ponto da outra, ambos fora da aresta, então o diedro é indicado por $\angle APQB$ ou por $[APQB]$. A interseção de um diedro com um plano perpendicular à sua aresta é um ângulo chamado *seção normal* do diedro. A Figura 15.18 ilustra essas definições. A definição de *interior* de um diedro é solicitada no Problema 15.7.16.

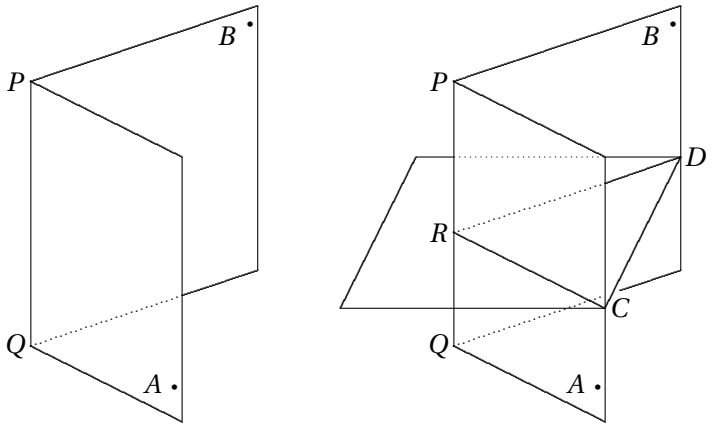


Figura 15.18. À esquerda, um diedro. À direita, uma seção normal de um diedro.

Pode-se provar que duas seções normais quaisquer de um diedro são congruentes.

Proposição 15.30. *Todas as seções normais de um diedro têm a mesma medida.*

Demonstração. Consideremos um diedro $\angle APQB$ e duas seções normais $\angle CRD$ e $\angle ESF$. Queremos provar que esses ângulos têm a mesma medida. Os pontos C, D, E e F podem ser tomados de forma que C e E estão no mesmo semiplano que A, D e F estão no mesmo semiplano que B, $RC = SE$ e $RD = SF$. Confira ilustração na Figura 15.19, à esquerda. À direita da mesma figura vemos como esses pontos formam figuras no espaço: três quadriláteros e dois triângulos. Vamos provar que os dois triângulos são congruentes.

Notemos primeiro que $SFDR$ é um paralelogramo, pois $SF = RD$ (por construção) e SF e RD são perpendiculares à mesma reta em um plano, logo são paralelos. De modo análogo se vê que $SECR$ é um paralelogramo.

Uma consequência é que EC e DF são paralelos e congruentes, pois são ambos paralelos e congruentes a SR. Logo $ECDF$ é um paralelogramo, do que vem $CD = EF$. Assim são congruentes os triângulos ESF e CRD pelo caso LLL. Portanto $\angle CRD$ e $\angle ESF$ têm a mesma medida. □

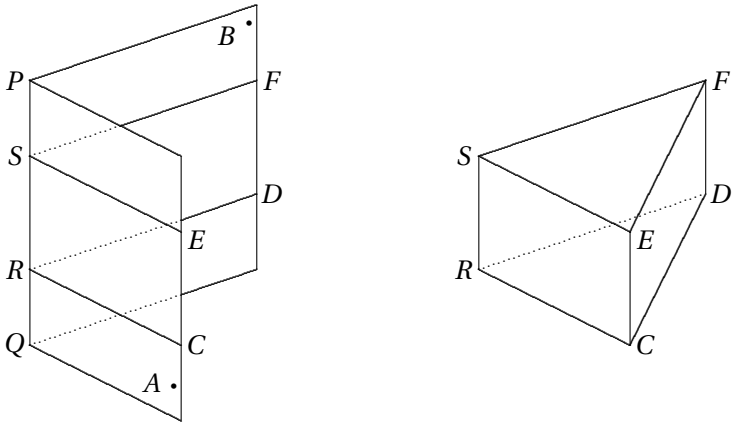


Figura 15.19. Ilustração da Proposição 15.30

Conforme comentamos, a ideia de diedro nos permite definir planos perpendiculares.

Definições 15.31. A *medida* de um diedro é a medida de qualquer uma de suas seções normais. Um diedro se diz *reto* se sua medida for 90°. Dois planos se dizem *perpendiculares* se contêm um diedro reto.

Sobre planos perpendiculares veremos dois resultados. O primeiro nos diz que para que um plano seja perpendicular a outro basta que ele contenha uma reta perpendicular ao segundo plano. Em outros termos,

Teorema 15.32. *Se uma reta é perpendicular a um plano, então todo plano contendo a reta é perpendicular ao plano dado.*

Demonstração. Acompanhamos a demonstração com a Figura 15.20. Sejam α um plano e r uma reta perpendicular a ele no ponto P. Seja β um plano qualquer contendo r. Queremos provar que esse plano é perpendicular a α. Para isso temos que ver que eles formam um diedro reto.

Seja s a interseção de α e β, e consideremos a reta t de α perpendicular a s por P. Como s é perpendicular a r, vemos que ela é perpendicular a duas retas concorrentes do plano γ definido por r e t. Logo γ é perpendicular a s e as retas r e t definem uma seção normal dos diedros formados por α e β. Essa seção normal é um ângulo reto, de modo que α e β são perpendiculares. □

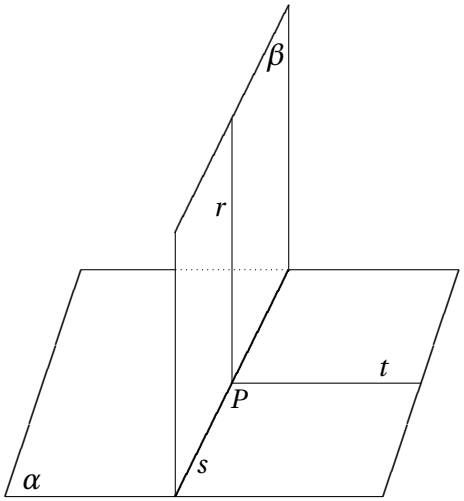


Figura 15.20. Ilustração dos Teoremas 15.32 e 15.33

Temos também o

Teorema 15.33. *Se dois planos são perpendiculares então qualquer reta de um deles perpendicular à interseção dos planos é perpendicular ao outro plano.*

Demonstração. A demonstração pode também ser acompanhada com a Figura 15.20. Sejam α e β planos perpendiculares e seja s a reta interseção. Seja r uma reta de β perpendicular a s em um ponto P. Queremos provar que r é perpendicular a α.

Para isso consideremos em α a reta t perpendicular a s em P. Então s é perpendicular a r e t, de modo que essas duas retas formam uma seção normal dos diedros definidos por α e β. Como esses planos são perpendiculares, então a referida seção normal é um ângulo reto. Assim r e t são perpendiculares. Vemos que r é perpendicular a duas retas concorrentes de α, logo r é perpendicular a esse plano. □

Vimos que, dado um ângulo qualquer, sua bissetriz menos a sua origem é o conjunto dos pontos do interior do ângulo que são equidistantes dos seus lados. Temos agora a versão espacial dessa propriedade.

Teorema 15.34. *Dado um diedro, existe um semiplano com mesma origem que ele, com interior contido no interior do diedro, que forma com as faces do diedro dois diedros de mesma medida, igual à metade da medida do diedro dado. Além disso, esse semiplano menos sua origem é o conjunto dos pontos do interior do diedro dado que são equidistantes de suas faces.*

O semiplano a que se refere o Teorema 15.34 chama-se *semiplano bissetor* do diedro dado, ou simplesmente *plano bissetor*, se considerarmos o plano que contém aquele semiplano.

Demonstração. Seja $[APQB]$ o diedro dado, e consideremos um ponto R de sua aresta $\overleftrightarrow{PQ}$. Seja α o plano perpendicular a $\overleftrightarrow{PQ}$ por R. Seja C um ponto da interseção da face $[PQA]$ e de α, com $C \neq R$, e seja D um ponto da interseção da face $[PQB]$ e de α, com $D \neq R$. O ângulo $\widehat{CRD}$ tem uma bissetriz $\overrightarrow{RE}$, com E no interior do ângulo, portanto no interior do diedro.

Consideremos o semiplano $[PQE]$ determinado pela aresta $\overleftrightarrow{PQ}$ e por E. Então $[APQE]$ e $[BPQE]$ são diedros com origem comum ao diedro inicial. Ainda $\widehat{CRE}$ e $\widehat{DRE}$ são seções normais desses diedros, do que segue que eles têm a mesma medida, que é igual à metade da medida do diedro original. Confira ilustração na Figura 15.21

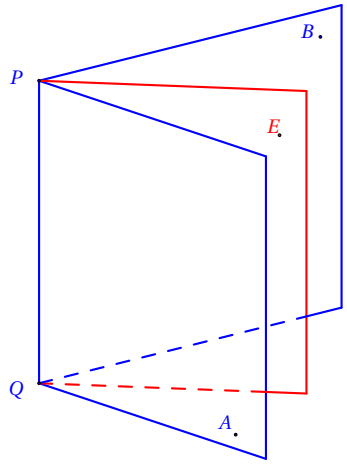


Figura 15.21. Desenho de um diedro e seu semiplano bissetor.

Vamos provar agora que o semiplano $[PQE]$ menos a sua origem é o conjunto dos pontos do interior do diedro $[APQB]$ que são equidistantes de suas faces.

Seja X um ponto do semiplano $[PQE]$ fora de sua origem. Consideremos o plano α perpendicular a $\overleftrightarrow{PQ}$ por X. Esse plano determina uma seção normal $\widehat{CRD}$, com $C \in [PQA]$ e $D \in [PQB]$, sendo que $\overrightarrow{RX}$ é sua bissetriz. Pelo Teorema 15.33 a perpendicular de X a $\overrightarrow{RC}$ é também perpendicular a $[PQA]$, e a perpendicular de X a $\overrightarrow{RD}$ é também perpendicular a $[PQB]$. Como X é equidistante dos lados do ângulo $\widehat{CRD}$, segue que ele é também equidistante das faces do diedro $[APQB]$.

Por outro lado, seja X um ponto equidistante das faces do diedro $[APQB]$ e situado no seu interior. Passando um plano α por X e perpendicular a $\overleftrightarrow{PQ}$, com as mesmas notações acima, vemos que X é um ponto do interior do ângulo $\widehat{CRD}$ e equidistante de seus lados. Assim X está na bissetriz de $\widehat{CRD}$. Mas a semirreta do semiplano $[PQE]$ perpendicular à sua origem também é bissetriz de $\widehat{CRD}$. Como a bissetriz de um ângulo é única, segue que $X \in [PQE]$. Com isso terminamos. □

Sejam $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$, ..., $\overrightarrow{OA_n}$, com $n \geq 3$, n semirretas (no espaço) com um vértice comum O, consideradas nessa ordem (ou em reordenações circulares ou inversas), satisfazendo às seguintes condições: (i) os ângulos $\angle A_1OA_2$, $\angle A_2OA_3$, ..., $\angle A_{n-1}OA_n$ e $\angle A_nOA_1$ têm medida $< 180°$; (ii) os interiores desses ângulos são disjuntos dois a dois; (iii) dois ângulos contíguos quaisquer não são coplanares.

A união dessas semirretas chama-se *n-edro*. O ponto O é o seu *vértice* e as semirretas são as suas *arestas*. Os ângulos $\angle A_iOA_{i+1}$ ($1 \leq i \leq n$, sendo que $n+1$ significa 1), juntamente com os seus interiores, são as *faces* ou os *ângulos planos* do n-edro. A reunião das faces chama-se *superfície* do n-edro. O n-edro $\hat{O}A_1A_2\ldots A_n$ será dito ser *convexo* quando satisfizer à seguinte condição: o plano suporte de cada face deixa o restante do n-edro contido em um de seus lados. O n-edro será anotado por $\hat{O}A_1A_2\ldots A_n$.

Na Figura 15.22 vemos o desenho de um n-edro. Um caso particular é $n = 3$, chamado *triedro*, ilustrado na Figura 15.23.

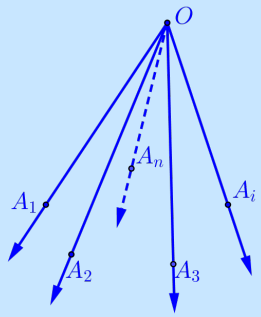


Figura 15.22: Desenho de um n-edro.

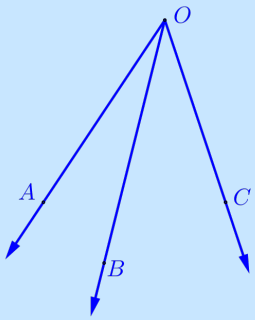


Figura 15.23. Um triedro.

No Problema 15.7.17 é solicitada a demonstração para a afirmação de que todo triedro tem uma trissetriz, isto é, uma semirreta com origem na origem do triedro, com interior contido no interior do triedro, de modo que o interior dessa semirreta é o conjunto dos pontos do interior do triedro que são equidistantes de suas três faces.

Na literatura os n-edros são também chamados pelos nomes de *ângulo poliédrico*, *cone poliédrico* ou *espaço piramidal*. O nome "ângulo poliédrico" nos lembra de observar que se considerarmos a definição usual de poliedro, como a que está apresentada na seção 19.5, um vértice qualquer, juntamente com as arestas que a ele concorrem, determinam um n-edro. Se o poliedro for convexo o n-edro também é.

Vejamos algumas propriedades dos n-edros. As demonstrações podem ser consultadas em [45].

Proposição 15.35. *Em todo n-edro convexo a medida de um ângulo plano qualquer é menor do que a soma das medidas dos outros ângulos planos.*

Proposição 15.36. *Dado um n-edro convexo, existe um plano que contém seu vértice e que deixa todas as suas arestas em um único de seus lados, com exceção do próprio vértice.*

Proposição 15.37. *Dado um n-edro convexo, existe um plano que não contém seu vértice e que intersecta todas as suas arestas. Ainda mais, se o n-edro é $\hat{O}A_1A_2\ldots A_n$, e indicando por B_i a interseção de $\overrightarrow{OA_i}$ com o plano referido, então $B_1B_2\ldots B_n$ é um polígono convexo.*

Teorema 15.38. *Em todo n-edro convexo a soma das medidas dos seus ângulos planos é $< 360^\circ$.*

15.6 Projeções e pontos simétricos

Vimos, no Capítulo 9 do Tomo II, o conceito de projeção de um ponto sobre uma reta. Mais importante é o correspondente conceito de projeção sobre um plano. Afinal das contas, sempre que desenhamos um objeto tridimensinal do espaço em uma folha de papel, estamos na verdade desenhando uma projeção desse objeto em um plano.

Definições 15.39. A *projeção ortogonal* (neste texto denominada simplesmente projeção) de um ponto sobre um plano que não o contém é o pé da perpendicular do ponto ao plano. Se o ponto pertence ao plano dizemos que sua projeção sobre o plano é ele mesmo. A *projeção* de um conjunto de pontos sobre um plano é o conjunto das projeções de todos os seus pontos sobre o plano.

O estudo das projeções é bastante extenso e engloba inúmeras técnicas. No momento veremos apenas o seguinte resultado:

Teorema 15.40. *Se uma reta e um plano não são perpendiculares então a projeção da reta sobre o plano é uma reta. Se a reta suporte de um segmento e um plano não são perpendiculares então a projeção do segmento sobre o plano é um segmento.*

Demonstração. Sejam α um plano e r uma reta não perpendicular a ele. Se a reta está no plano, ela é sua própria projeção, e terminamos. Suponhamos que r não está contida em α. Sejam A e B dois pontos de r, e A' e B' os respectivos pés das perpendiculares desses pontos ao plano. Primeiro observamos que AA' e BB' estão em retas diferentes, pois, se estivessem na mesma reta, essa reta seria r, e r seria perpendicular a α, o que não é o caso. Ainda, A' e B' não são coincidentes, pois, se o fossem, haveria duas perpendiculares a α pelo mesmo ponto, o que não é possível. Portanto está bem definida a reta s que contém A' e B', e essa é uma reta de α. Vamos mostrar que s é a projeção de r sobre α.

Como AA' e BB' são perpendiculares a α, eles estão no mesmo plano, que chamaremos de β. Esse plano contém r, assim é diferente de α, mas tem com ele pontos em comum, a saber, A' e B', logo sua interseção é a reta s. Pelo Teorema 15.32, α e β são perpendiculares, pois β contém uma reta perpendicular a α.

Seja C um ponto qualquer de r, e seja C' sua projeção sobre α. Queremos provar que C' está em s. Para isso, seja CD perpendicular a s em β, com D em s. Então CD está em β e é perpendicular à interseção desse plano com α. Pelo Teorema 15.33 CD é perpendicular a α. Assim CD e CC' são perpendiculares ao mesmo plano pelo mesmo ponto C, logo são iguais. Então $D = C'$ e C' está em s.

Seja agora T um ponto qualquer de s. Queremos mostrar que ele é projeção de algum ponto de r. Seja t a perpendicular a s por T no plano β. Logo t é perpendicular à interseção de α e β, que são planos perpendiculares. Pelo Teorema 15.33 t é perpendicular a α. Como r não é perpendicular a s, segue que t e r não são paralelas. Seja C sua interseção. Assim T é o pé da perpendicular de C a α, ou seja, é a projeção de C. Provamos assim que s é a projeção de r.

Seja agora AB um segmento cuja reta suporte r não é perpendicular a α. Se o segmento estiver contido em α, ele é a projeção dele mesmo, e terminamos. Do contrário, usando as notações acima, a projeção de AB está na reta s. Seja C tal que $A - C - B$. Já vimos que a projeção C' de C sobre α está em s. Queremos provar que $A' - C' - B'$. Como $t = \overleftrightarrow{AA'}$ e $v = \overleftrightarrow{BB'}$ são paralelas, B e B' estão do mesmo lado de t no plano β. Chamaremos esse lado de $\mathscr{L}$. Em virtude de resultado do Capítulo 9 do Tomo II, temos $C \in \mathscr{L}$. Como $u = \overleftrightarrow{CC'}$ e t são paralelas, $C' \in \mathscr{L}$. Portanto $C' \in \overrightarrow{A'B'}$. Do mesmo modo se prova que $C' \in \overrightarrow{B'A'}$. Segue que $A' - C' - B'$.

Seja agora T um ponto tal que $A - T - B$. Já vimos que existe um ponto $C \in r$ tal que T é a projeção de C sobre α. Com o mesmo argumento do parágrafo anterior provamos que $A - C - B$. Logo a projeção de AB sobre α é o segmento $A'B'$. □

Já vimos o que é o simétrico de um ponto em relação a uma reta. Vejamos agora a definição de simétrico de um ponto em relação a um plano.

Definições 15.41. Seja A um ponto e α um plano que não o contém. O *simétrico de A em relação a α* é o ponto A' tal que: (i) A' está na perpendicular a α por A e no semiespaço oposto a A em relação ao plano; (ii) A e A' têm a mesma distância de α.

Se o ponto A está no plano α, dizemos que ele mesmo é seu simétrico em relação ao plano.

Dado um conjunto $\mathscr{F}$ do espaço, seu simétrico em relação a α é o conjunto dos simétricos dos seus pontos em relação ao plano.

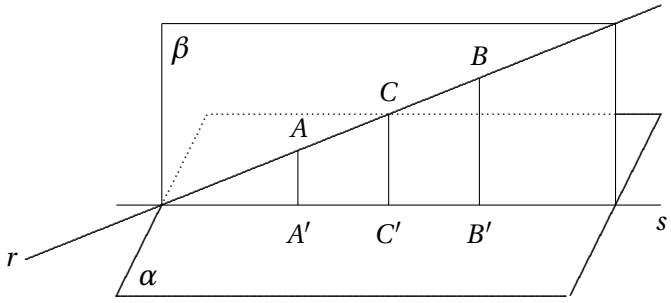


Figura 15.24. Ilustração do Teorema 15.40

Confira ilustração na Figura 15.25. Usando o resultado do Teorema 15.12 vemos que, dado um ponto e um plano, existe e é único o simétrico do ponto em relação ao plano.

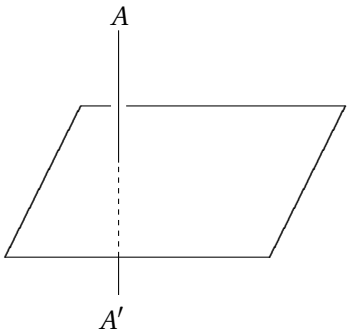


Figura 15.25. A' é o simétrico de A em relação ao plano.

15.7 Problemas

Problema 15.7.1. Explique por que vale a Proposição 15.13: O menor segmento ligando um plano a um ponto que não lhe pertence é o segmento perpendicular.

Problema 15.7.2. Sejam r e s retas reversas, P e Q dois pontos de r e S e T dois pontos de s. Explique por que as retas $\overleftrightarrow{PS}$ e $\overleftrightarrow{QT}$ são reversas.

Problema 15.7.3. O espaço menos um ponto é um conjunto convexo?

Problema 15.7.4. Demonstre que se uma reta intersecta um de dois planos paralelos e não está nele contido, então ela intersecta o outro plano.

Problema 15.7.5. Prove que, dado um plano, existem infinitos planos paralelos a ele.

Problema 15.7.6. Dados um plano e um ponto, é uma reta a interseção de todos os planos perpendiculares ao plano dado passando pelo ponto dado.

Problema 15.7.7. Demonstre o seguinte: dado um plano α e pontos P e Q situados em semiplanos diferentes em relação ao plano α, existem infinitos planos β que contêm P e Q e que intersectam α em alguma reta. Faça uma figura ilustrando a afirmação.

Problema 15.7.8. Em cada uma das afirmações abaixo, assinale **V** se for sempre verdadeira, **F** se for sempre falsa e **A** se for às vezes verdadeira, às vezes falsa. Justifique suas respostas e faça figuras.

a) Duas retas paralelas ao mesmo plano são perpendiculares entre si.

b) Se um plano intersecta dois planos paralelos, as retas de interseção são reversas.

c) Se dois planos são paralelos à mesma reta, então eles são paralelos entre si.

d) A interseção de um plano com as faces de um diedro é um ângulo contido no diedro.

e) Se duas retas são perpendiculares ao mesmo plano, elas são paralelas.

f) Se duas retas são paralelas ao mesmo plano, elas são paralelas.

g) Se uma reta é perpendicular a um plano, todo plano contendo a reta é perpendicular ao plano dado.

h) A projeção de um ângulo sobre um plano pode ser um ponto.

i) Duas retas são paralelas se forem perpendiculares a uma mesma reta.

Problema 15.7.9. Prove que, dada uma reta, existem infinitos planos que a contêm. Faça um desenho mostrando uma reta e três planos que a contêm.

Problema 15.7.10. Usando que o espaço contém pelo menos quatro pontos não coplanares, mostre que existem retas reversas. Desenhe duas retas reversas.

Problema 15.7.11. Considere um retângulo $ABCD$ em um plano α. Seja E um ponto fora de α tal que $EA \perp \alpha$. As medidas são: $AB = a$, $BC = b$ e $EA = c$. **a)** Faça uma figura ilustrativa desses elementos. **b)** Ache as distâncias de E aos outros vértices do retângulo. **c)** Explique por que $CD \perp ED$. **d)** Ache a tangente trigonométrica do ângulo $\angle DCE$. Observação: exprima todos os valores em função de a, b e c.

Problema 15.7.12. Seja α um plano e sejam A e B dois pontos desse plano. Seja C um ponto fora de α tal que AC é perpendicular a α. Fixemos o número $\rho = BC$. Determine o lugar geométrico (isto é, o conjunto) dos pontos de α que distam ρ de C. Faça uma figura ilustrativa.

Problema 15.7.13. Um plano α e uma reta r não contida nele são paralelos se e somente se r é paralela a alguma reta de α.

Problema 15.7.14. Mostre que se uma reta intersecta um plano, existe no plano uma reta perpendicular a ela pelo ponto de interseção. Em que situação essa reta é única?

Problema 15.7.15. Dê condições mínimas sobre os pontos A, B, P e Q para que esteja bem definido o diedro $[APQB]$.

Problema 15.7.16. Explique por que o interior de um triedro é um conjunto convexo. Explique também por que a superfície de um triedro é a interseção dos três diedros determinados por suas faces.

Problema 15.7.17. Demonstre que todo triedro tem uma trissetriz, isto é, uma semirreta com origem na origem do triedro, com interior contido no interior do diedro, de modo que o interior dessa semirreta é o conjunto dos pontos do interior do triedro que são equidistantes de suas três faces.

Problema 15.7.18. Na Figura 15.26 (a), A, B, C e D são não coplanares, $AD = DC$, $BC = BA$ e $\angle DBA$ é um ângulo reto. Então pelo menos um dos segmentos da figura é perpendicular a um dos planos. Que segmento e que plano? Demonstre sua resposta.

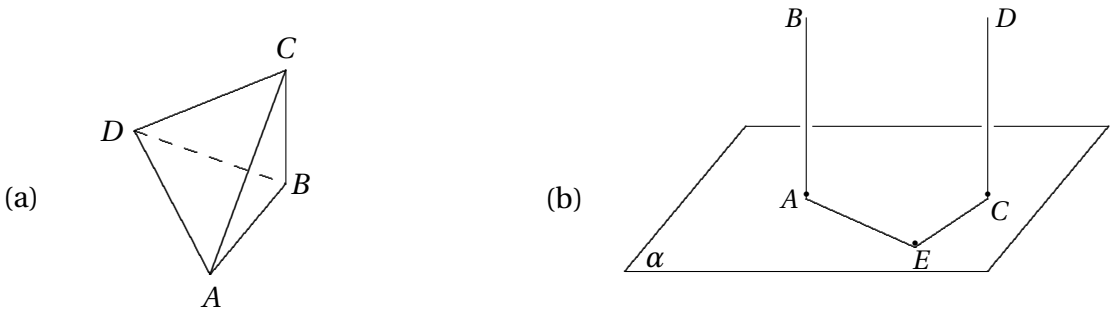


Figura 15.26. Figura para os Problemas 15.7.18 e 15.7.19.

Problema 15.7.19. Na Figura 15.26 (b), A, C e E estão no plano α e não são colineares. Ainda, AB é perpendicular a AE e CD a CE, e AB é paralela a CD. Prove que AB e CD são perpendiculares a α.

Problema 15.7.20. Na Figura 15.27, A e B estão em semiespaços opostos em relação ao plano α e são equidistantes dele. As perpendiculares a α por A e B intersectam α em T e S, respectivamente. Prove que: (i) AB intersecta ST; (ii) se R é o ponto de interseção de AB com ST então R é o ponto médio de ST.

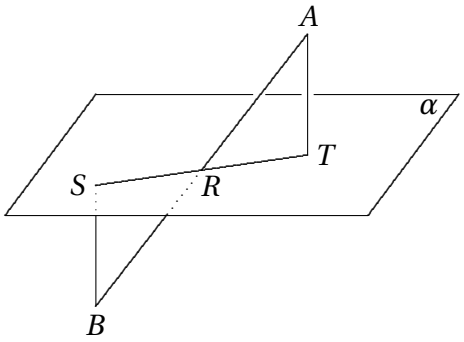


Figura 15.27. Figura para o Problema 15.7.20.

Problema 15.7.21. Sejam A, B, C e D quatro pontos do espaço não coplanares e tais que três a três não são colineares. A reunião dos segmentos AB, BC, CD e DA é chamada *quadrilátero reverso*. Prove que é um paralelogramo o quadrilátero que se obtém ligando-se consecutivamente os pontos médios desses segmentos. Faça uma figura ilustrativa.

Problema 15.7.22. Se dois planos (diferentes) se intersectam em uma reta r, então qualquer reta paralela aos dois planos é paralela a r.

Problema 15.7.23. Suponha que três planos têm exatamente um ponto em comum. Existe uma reta que seja simultaneamente paralela aos três planos?

Problema 15.7.24. Prove que, dado um plano e um ponto fora dele, existe um único plano contendo o ponto e paralelo ao plano dado.

Problema 15.7.25. Sejam α e β planos que se intersectam na reta r. Sejam A um ponto de α, B um ponto de β e P um ponto de r tais que $\angle APB$ é uma seção normal de um dos diedros formados por α e β. Determine em que situação exatamente se tem AP perpendicular a β. Nesse caso vale $\alpha \perp \beta$? Por que? Confira ilustração na Figura 15.28.

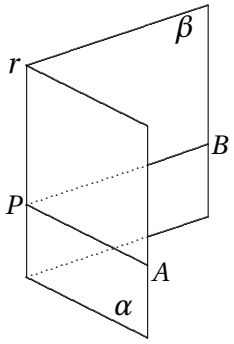


Figura 15.28. Figura ilustrativa do Problema 15.7.25.

Problema 15.7.26. Sejam α um plano e r uma reta. Prove que existe um plano contendo r e perpendicular a α. Em que condições esse plano é único?

Problema 15.7.27. Sejam α um plano e AB um segmento. Mostre que o simétrico de AB em relação a α é o segmento $A'B'$, em que A' é simétrico de A e B' o de B.

Problema 15.7.28. O que é a projeção de uma reta sobre um plano? E o simétrico de uma reta em relação a um plano?

Problema 15.7.29. Se cada um de dois planos que se intersectam é perpendicular a um terceiro plano, a reta de interseção é perpendicular ao terceiro plano. Confira ilustração na Figura 15.29.

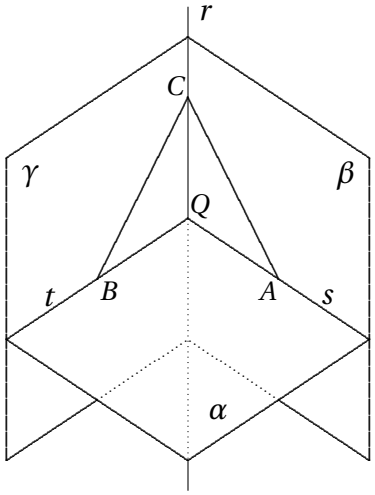


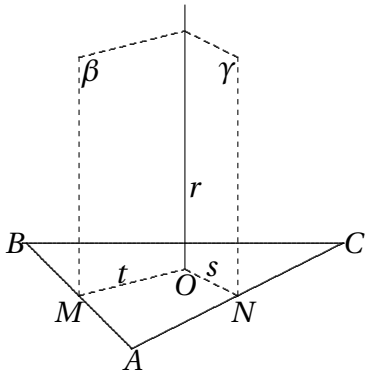
Figura 15.29. Ilustração do Problema 15.7.29

Problema 15.7.30. Sejam A, B e C três pontos não colineares do espaço. Identifique (e justifique) o Lugar Geométrico (conjunto) dos pontos do espaço equidistantes de A, B e C simultaneamente.

Solução 1. Seja α o plano determinado pelos pontos A, B e C. Sejam β o plano mediador de AB (plano perpendicular a AB pelo seu ponto médio M) e γ o plano mediador de AC (plano perpendicular a AC pelo seu ponto médio N). Consideremos as retas $t = \alpha \cap \beta$ e $s = \alpha \cap \gamma$. Então $t \perp AB$ pelo seu ponto médio M, pois AB é ortogonal a qualquer reta de β. Assim t é a mediatriz de AB em α. Do mesmo modo se vê que s é a mediatriz de AC em α. Sabemos que t e s se encontram no circuncentro O de ABC. Como $O \in \beta \cap \gamma$, existe a reta $r = \beta \cap \gamma$, com $O \in r$. Por outro lado sabemos que β é o conjunto dos pontos equidistantes de A e B, e γ é o conjunto dos pontos equidistantes de A e C. Dessa forma r é o conjunto dos pontos equidistantes de A, B e C. Confira a Figura abaixo.

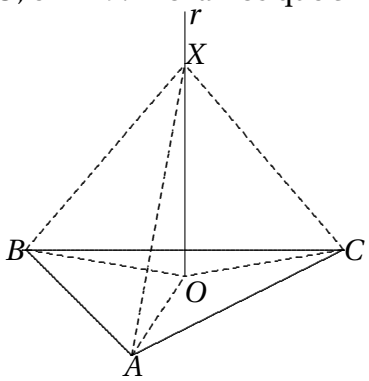
Para caracterizar melhor r observemos que essa reta é $\perp \alpha$. De fato, por ser $AB \perp \beta$ e $r \subset \beta$ vem $r \perp AB$. Do mesmo modo se vê que $r \perp AC$. Assim r é ortogonal a duas retas não paralelas de α, e temos $r \perp \alpha$.

Portanto o LG procurado é a reta perpendicular ao plano α pelo circuncentro O de ABC.



Observação. Alguns autores denominam a esse LG como *reta medial* do triângulo ABC.

Solução 2. Seja $\mathscr{S}$ o conjunto dos pontos do espaço equidistantes de A, B e C. Sabemos que o circuncentro O de ABC está em $\mathscr{S}$ pois o circuncentro é o centro da circunferência circunscrita, portanto é equidistante dos vértices de ABC. Seja r a reta perpendicular a α por O. Afirmamos que $\mathscr{S} = r$. O é ponto comum a esses conjuntos. Assim, seja $X \in r - O$. Temos $XOA \cong XOB \cong XOC$ por LAL, o que implica $XA = XB = XC$, e $X \in \mathscr{S}$. Seja agora $X \in \mathscr{S} - O$. Seja Y a projeção de X sobre α. Temos $XYA \cong XYB \cong XYC$ pelo caso hipotenusa-cateto de triângulos retângulos, o que implica $YA = YB = YC$. Logo $Y = O$, e $X \in r$. Provamos que $\mathscr{S} = r$.



Problema 15.7.31. Seja $\mathscr{C}$ uma circunferência em um plano α. Identifique (e justifique) o Lugar Geométrico (conjunto) dos pontos do espaço simultaneamente equidistantes dos pontos de $\mathscr{C}$.

Problema 15.7.32. Considere a Figura 15.30, em que se tem as seguintes propriedades: $AB \perp BC$, $AB \perp BE$, $BC \perp CE$, $C - D - E$. Demonstre que $AC \perp CE$.

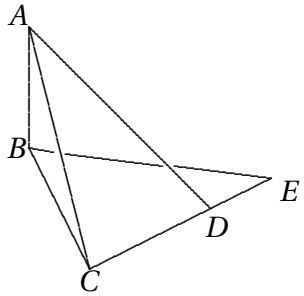


Figura 15.30. Figura ilustrativa do Problema 15.7.32.

Problema 15.7.33. Prove que, dados um plano e um ponto (no plano ou não), existem infinitos planos contendo o ponto e perpendiculares ao plano dado. Faça um desenho ilustrativo mostrando pelo menos dois desses planos.

Problema 15.7.34. Sejam α um plano e P um ponto fora dele. Sejam r e s retas que contêm P e que são paralelas a α. Prove que o plano determinado por essas retas é paralelo a α.

Problema 15.7.35. Na Figura 15.31, α e β são planos paralelos. Os pontos A e B estão em α, e os pontos C e D são suas respectivas projeções em β. Prove que as diagonais do quadrilátero $ABDC$ se cortam ao meio.

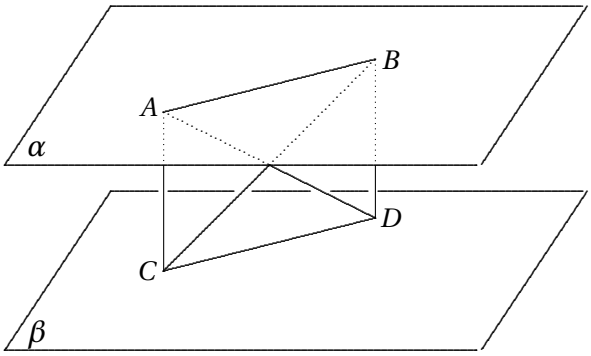


Figura 15.31. Figura para o Problema 15.7.35.

Problema 15.7.36. Na Figura 15.32, AC, BC e CD são segmentos perpendiculares dois a dois. Ainda, $AD = BD$ e E, F e G são pontos médios de AD, BD e CD, respectivamente. Demonstre que são congruentes os ângulos $\angle FEG$ e $\angle BAC$, e ache sua medida.

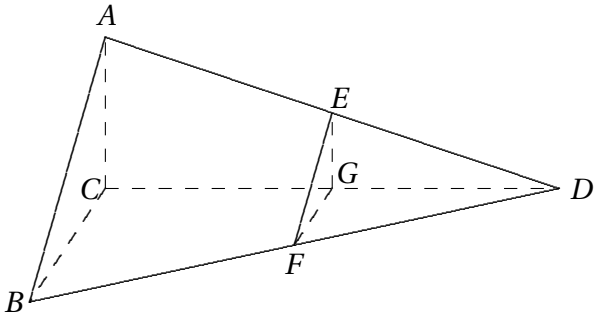


Figura 15.32. Figura ilustrativa do Problema 15.7.36.

Problema 15.7.37. Sejam α e β dois planos paralelos. Sejam $\angle BAC \in \alpha$ e $\angle EDF \in \beta$ ângulos tais que $AB||DE$ e $AC||DF$. Prove que esses ângulos têm a mesma medida ou são suplementares. Identifique quando ocorre cada um desses casos. Confira ilustração na Figura 15.33.
Solução. Como $AB||DE$ existe um plano γ que contém esses segmentos. Seja $\mathscr{C}$ o lado de γ em que está C. O ponto F pode estar em $\mathscr{C}$ ou no lado oposto. Vamos estudar o caso em que $F \in \mathscr{C}$.

Da mesma forma, como $AC||DF$ existe um plano δ que contém esses segmentos. Seja $\mathscr{B}$ o lado de δ em que está B. O ponto E pode estar em $\mathscr{B}$ ou no lado oposto. Vamos estudar o caso em que $E \in \mathscr{B}$.

Sem perda de generalidade podemos assumir que $AB = DE$ e $AC = DF$. Com as hipóteses assumidas $ABED$ é um quadrilátero convexo com dois lados opostos congruentres e paralelos,

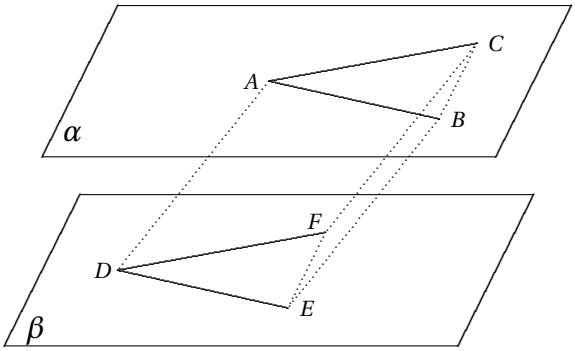


Figura 15.33. Figura ilustrativa do Problema 15.7.37.

logo $ABED$ é um paralelogramo. Em particular $BE = AD$ e $BE||AD$. De modo análogo temos que $ACFD$ é um quadrilátero convexo com dois lados opostos congruentres e paralelos, logo $ACFD$ é um paralelogramo. Em particular $CF = AD$ e $CF||AD$. Segue que $BE = CF$ e $BE||CF$. Com as hipóteses assumidas $BCFE$ é um quadrilátero convexo. Com o que foi provado esse quadrilátero tem dois lados opostos congruentes e paralelos. Assim $BCFE$ é um paralelogramo o que implica que $BC = EF$. Logo $ABC \cong DEF$ por LLL e assim $\angle BAC \cong \angle EDF$.

Suponhamos agora o caso em que $F \in \mathscr{C}$ mas $E \notin \mathscr{B}$. Seja E' o ponto tal que $E - D - E'$ com $DE = DE'$. Então $E' \in \mathscr{B}$, e, pelo que vimos acima, $\angle BAC \cong \angle E'DF$. Mas $\angle EDF$ e $\angle E'DF$ são suplementares, de modo que $\angle BAC$ e $\angle EDF$ são suplementares.

Os outros dois casos podem ser analisados de forma similar, e se conclui que $\angle BAC$ e $\angle EDF$ são congruentes ou são suplementares.

Problema 15.7.38. Sejam α e β dois planos paralelos. Seja $A_1A_2\ldots A_n$ um polígono em α. Escolha um ponto qualquer $B_1 \in \beta$. Sejam B_2, ..., B_n os pontos de β tais que $A_1B_1||A_2B_2||...||A_nB_n$. Prove que $B_1B_2\ldots B_n$ é um polígono congruente a $A_1A_2\ldots A_n$. A Figura 15.34 pode ajudar.

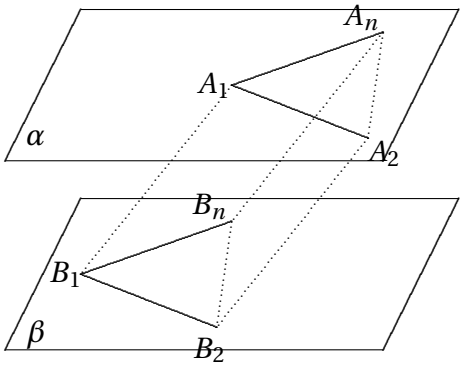


Figura 15.34. Figura ilustrativa do Problema 15.7.38.

Problema 15.7.39. Sejam r e s retas reversas. Construa um plano contendo s e paralelo a r. Esse plano é único?

Problema 15.7.40. Existe uma e somente uma reta perpendicular a duas retas reversas dadas.

Problema 15.7.41. Sejam r e s retas reversas. Mostre que existem dois planos paralelos, cada um contendo uma das retas.

Problema 15.7.42. Sejam r uma reta e s uma segunda reta não paralela à primeira (concorrente a ela ou não). Descreva o conjunto formado por todas as retas paralelas a s e que intersectam r.

Problema 15.7.43. Sejam r e s retas reversas. Mostre que a menor distância entre elas é dada pelo comprimento do segmento que as une e é perpendicular a ambas.

Problema 15.7.44. Sejam r e s retas reversas e P um ponto do espaço. Investigue qual deve ser o posicionamento de P para que exista uma reta t que o contenha e que intersecte r e s.

Problema 15.7.45. Seja r uma reta e P um ponto fora dela. Determine o lugar geométrico do espaço formado pelos pés das perpendiculares traçadas de P a todos os planos que contém r.

15.8 Temas para investigação

Tema 15.8.1. No texto foram estudados o que são ângulos entre retas e entre planos. Investigue o que poderia ser uma definição adequada de ângulo entre reta e plano. Descubra e demonstre algum resultado associado a esse conceito.

Tema 15.8.2. Dois planos que se encontram têm, cada um, uma reta perpendicular, e essas retas também se intersectam. Investigue o que se pode dizer sobre a relação entre os ângulos formados pelas retas e os diedros dos planos.

Tema 15.8.3. Investigue como podem ser as posições relativas de três planos, listando todos os casos possíveis.

Tema 15.8.4. Investigue a quantidade de regiões determinadas por três planos, listando todos os casos possíveis. Generalize para n planos.

Tema 15.8.5. Considere polígonos em um plano. Investigue sob quais condições existe algum ponto do espaço que seja equidistante de todos os vértices do polígono.

Capítulo 16

Prismas e pirâmides

16.1 Introdução

Estudamos neste Capítulo duas classes gerais de figuras geométricas não planas denominadas prismas e pirâmides. Seus tipos mais simples, o cubo e o tetraedro, constituem os sólidos geométricos mais conhecidos e aparecem em todos os campos da atividade humana.

Informamos que os termos *figura*, *sólido* e *região do espaço* constituem palavras da linguagem comum usadas como sinônimos para indicar subconjuntos do espaço. Esses termos também aparecem neste texto com esse sentido.

16.2 O cubo

O *cubo* é a figura geométrica formada pela reunião de seis quadrados congruentes de modo que cada lado de cada um dos quadrados coincide com um lado de um único outro quadrado.

Existe uma única figura que satisfaz esses requisitos. O estudante é convidado a verificar isso no Problema 16.3.1. Essa figura tem um formato bastante conhecido, e vemos a seguir desenhos de cubos em diversas posições. O desenho da esquerda é o que corresponde melhor à definição dada. Nos outros dois desenhos os interiores dos quadrados são coloridos para proporcionar uma visão mais artística.

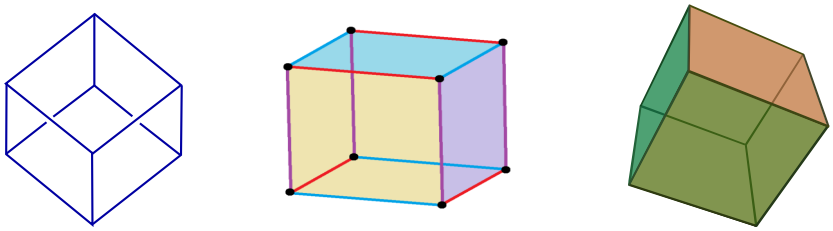


Figura 16.1. Desenhos de cubos.

Lembramos que um quadrado é o conjunto dos pontos que formam seus lados. Portanto o cubo também é um conjunto de pontos, formado pela reunião dos 12 segmentos que o constituem. Esses segmentos são denominados *arestas* do cubo. O comprimento de uma aresta também é chamado aresta.

Para contar as arestas de um cubo podemos usar um desenho e contá-las diretamente, ou fazemos a seguinte conta. Cada quadrado que forma o cubo tem 4 lados, e como são seis quadrados, isso perfaz um total de $6 \times 4 = 24$ lados. No cubo os lados coincidem aos pares para formar as arestas, de modo que resultam $24/2 = 12$ arestas.

Os *vértices* de um cubo são os vértices dos quadrados que o formam. Podemos contar os vértices de um cubo em um desenho e ver que são 8. Outra forma é observar que seis quadrados têm um total de $6 \times 4 = 24$ vértices, e que no cubo cada vértice é formado pela coincidência de três vértices de quadrados, de modo que o cubo tem $24/3 = 8$ vértices. Ou então observamos que cada aresta tem duas extremidades e em cada vértice concorrem três arestas, logo são $12 \times 2 = 24$ extremidades de arestas, e assim são $24/3 = 8$ vértices.

As *faces* de um cubo são as regiões quadradas dos quadrados que o formam. Como não existem quadrados coincidentes, o cubo tem seis faces. Cada face do cubo tem uma aresta em comum com outras quatro faces, e é disjunta de uma face, que dizemos ser sua *face oposta*. Duas faces opostas quaisquer são paralelas (resultado solicitado no Problema 16.3.2).

Lembramos que uma região quadrada inclui os lados do quadrado e seu interior. Assim uma face de um cubo inclui as suas aretas respectivas.

É costume indicar por A a quantidade de arestas, por V a de vértices e por F a de faces. Portanto no cubo temos

$$A = 12, \qquad V = 8, \qquad F = 6$$

Uma *diagonal* de um cubo é um segmento com extremos em dois vértices que não estão em uma mesma face. Examinando desenhos de cubos vemos que eles têm 4 diagonais. Essa conta pode ser feita sem o uso de desenhos. Como o cubo tem 8 vértices, existem $\binom{8}{2}$ segmentos ligando dois quaisquer desses pontos. Dessa quantidade subtraímos as 12 arestas e os segmentos que são diagonais das faces, que são $6 \times 2 = 12$. Logo a quantidade de diagonais de um cubo é

$$D = \binom{8}{2} - 12 - 12 = \frac{8!}{2!\,6!} - 24 = 28 - 24 = 4$$

Todas as diagonais de um cubo têm a mesma medida, confira o Problema 16.3.7.

A reunião das faces de um cubo denomina-se *superfície* do cubo. A soma das áreas das faces é chamada *área de superfície* do cubo. O cubo tem um *interior*, que o estudante poderá facilmente definir. Isso é solicitado no Problema 16.3.4. Chamamos de *cubo sólido* à reunião da superfície do cubo com o seu interior.

Observamos que ao estudar cubos em um livro de Geometria deve-se ficar atento às definições adotadas pelo autor. Alguns autores denominam cubo ao que aqui estamos chamando de superfície do cubo, e outros ao que aqui denominamos cubo sólido. Não conhecemos nenhum autor que chama de cubo à reunião dos seus 8 vértices, mas, quem sabe, pode ocorrer.

Vamos obter agora o que chamamos *centro* do cubo. Consideremos um cubo $ABCDEFGH$ definido na Figura 16.2, com faces $ABCD$, $EFGH$, $ADHE$, etc. Notemos que $ACGE$ é um quadrilátero com lados opostos congruentes. Usando o resultado do Problema 16.3.2, sabemos que AE e CG são perpendiculares ao plano $ABCD$, logo são coplanares e perpendiculares a AC, de modo que $ACGE$ é um retângulo. As diagonais AG e CE desse retângulo são congruentes e se encontram num ponto O, que as divide ao meio (portanto O é equidistante de A, C, G e E, seja ρ essa distância). Sejam I o ponto médio de EG e J o ponto médio de AC. Então o segmento IJ tem O como seu ponto médio.

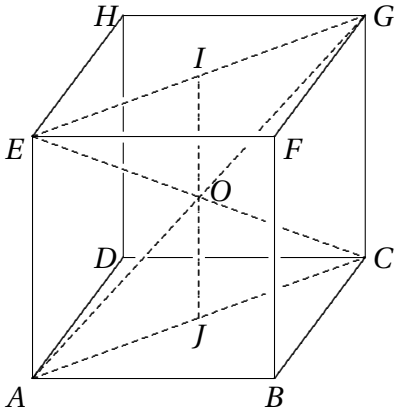


Figura 16.2. Localização do centro de um cubo.

De modo análogo consideremos $BDHF$, que também é retângulo, e o ponto de encontro O' de suas diagonais BH e DF as divide ao meio, e assim é equidistante de B, D, H e F. Essa distância é ρ, pois as diagonais do cubo são todas congruentes. Ainda, I é também o ponto médio de FH e J o de BD, de modo que O' é o ponto médio de IJ. Portanto $O = O'$.

Encontramos assim um ponto O equidistante dos vértices do cubo. Chamamos a esse ponto de *centro do cubo*. Esse ponto tem outras propriedades que serão estudadas nos problemas abaixo.

Uma *planificação* de um cubo de aresta a é uma figura plana formada por 6 quadrados de lado a, de forma que cada quadrado tem pelo menos um lado em comum com outro quadrado e se dobrarmos a figura nos lados comuns obtemos o cubo. Vemos na Figura 16.3 um exemplo de planificação do cubo.

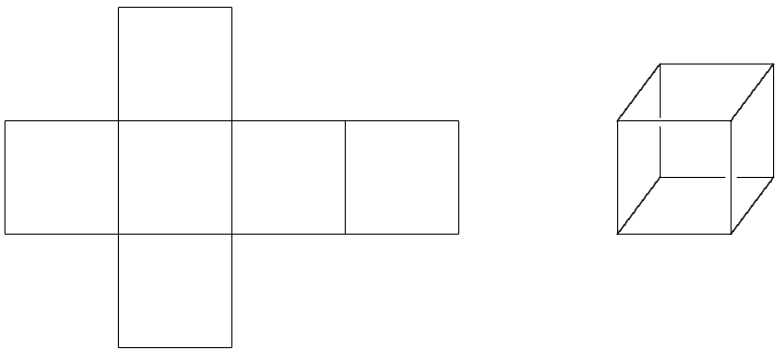


Figura 16.3. Um exemplo de planificação do cubo.

Desconsiderando-se rotações e reflexões, o cubo tem 11 planificações, apresentadas nas Figuras 16.4 e 16.5.

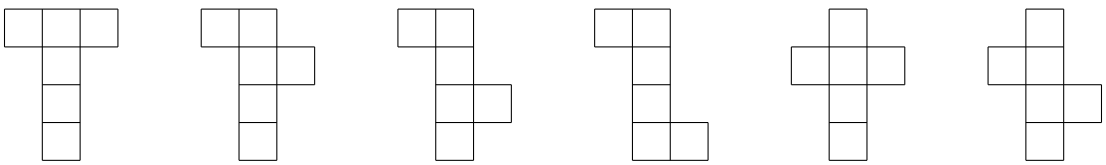


Figura 16.4. Seis exemplos de planificações do cubo.

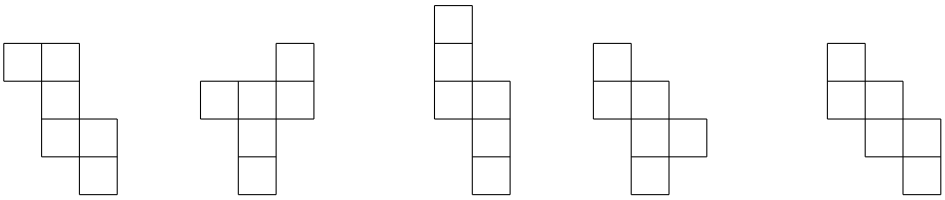


Figura 16.5. Mais cinco exemplos de planificações do cubo

Um cubo pode ser expresso em coordenadas cartesianas. Para determinar o cubo basta escrever as coordenadas de seus vértices. O cubo de aresta unitária colocado no primeiro quadrante e com um vértice na origem tem vértices

$$A = (1,0,0) \quad B = (1,1,0) \quad C = (0,1,0) \quad D = (0,0,0)$$

$$E = (1,0,1) \quad F = (1,1,1) \quad G = (0,1,1) \quad H = (0,0,1)$$

Na Figura 16.6 vemos um desenho desse cubo.

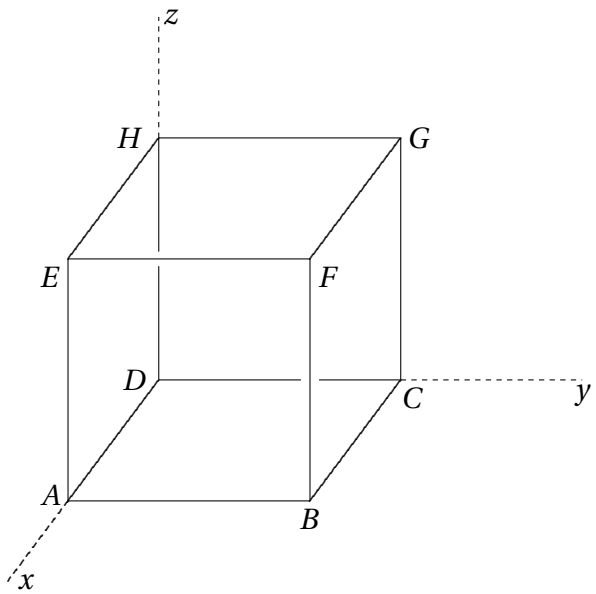


Figura 16.6. Desenho de cubo em um sistema de coordenadas cartesianas.

Apresentamos algumas dicas simples para desenhar cubos. Um cubo é uma figura em três dimensões, e um desenho em folha de papel é uma figura em duas dimensões, chamada *projeção plana* do cubo. Para realizar essa redução empregamos algumas técnicas. Uma das mais usadas é a denominada projeção *cavaleira* ou *militar*. Para obter um cubo de aresta a, desenhamos dois quadrados de lado a, com lados correspondentes paralelos, e deslocados um em relação ao outro. Ligando os vértices correspondentes (chamados lados oblíquos) obtemos um desenho do cubo. Os lados oblíquos têm uma redução de um fator k que depende do ângulo θ que esse lado faz com a direção horizontal da folha. Os manuais de Desenho Técnico apresentam a seguinte tabela com os valores mais usados:

θ	k
30	2/3
45	1/2
60	1/3

Por exemplo, em um cubo com lado de 4 cm, a aresta oblíqua deve medir $(2/3)4 = 8/3$ cm se a angulação for de 30°. Seguem desenhos com os valores da tabela acima (Figura 16.7).

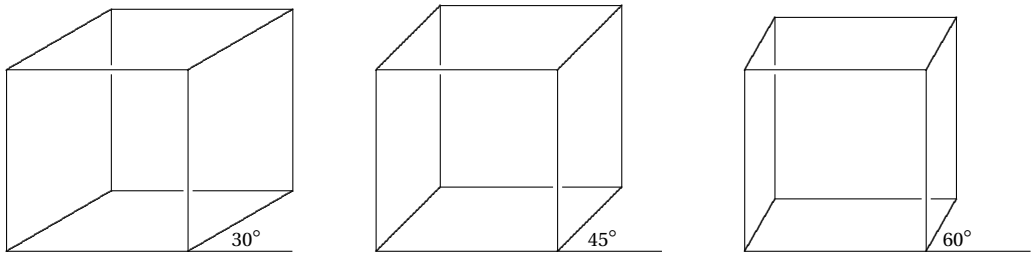


Figura 16.7. Desenho de cubos usando a projeção cavaleira.

Na Figura 16.8 vemos o desenho de um cubo com o uso da chamada *perspectiva isométrica*. Todos os segmentos desenhados têm a mesma medida. Os quadriláteros são paralelogramos com ângulos de medida 120° e 60°.

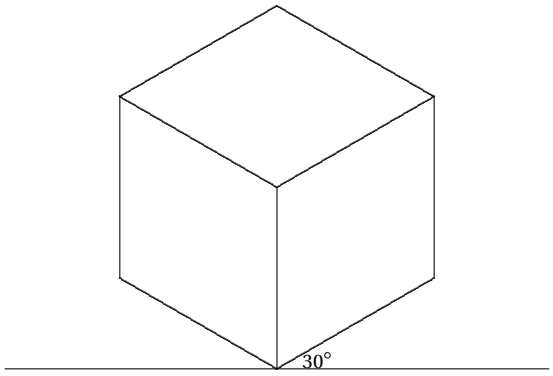


Figura 16.8. Desenho de cubo na perspectiva isométrica.

Os métodos de projeção vistos acima, perspectiva cavaleira e isométrica, são os mais usados em desenhos técnicos de Geometria. Se quisermos desenhos mais realistas podemos usar outros recursos, como pontos de fuga. A Figura 16.9 ilustra um exemplo em que se usa um ponto de fuga.

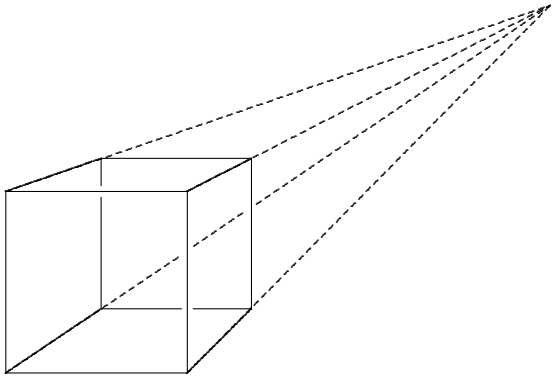


Figura 16.9. Desenho de cubo com um ponto de fuga.

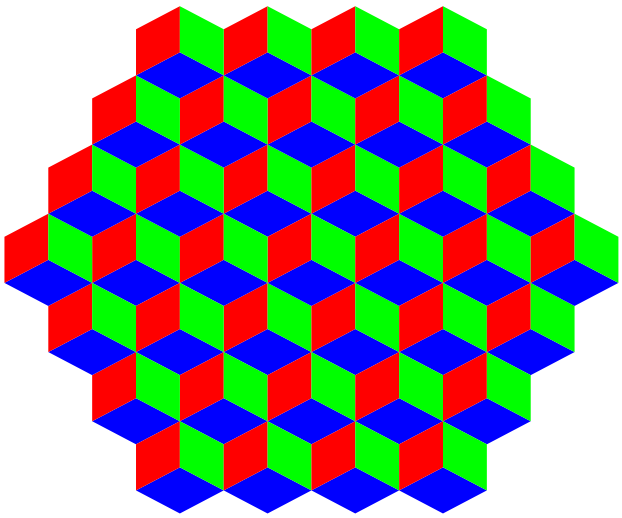


Figura 16.10. Composição artística com cubos.

16.3 Problemas

Problema 16.3.1. Seja $\mathscr{P}$ uma figura formada pela reunião de seis quadrados congruentes de modo que cada lado de cada um dos quadrados coincide com um único lado de outro quadrado (essa é a definição de cubo). **a)** Explique por que dois quaisquer desses quadrados com um lado comum não são coplanares. **b)** Explique por que dois quaisquer desses quadrados com um lado comum formam um diedro de medida 90. **c)** Sejam $ABCD$ e $ABEF$ dois desses quadrados com um lado comum AB. Explique por que BC e BE têm que ser lados de um mesmo quadrado. **d)** Mostre que cada vértice do cubo é um ponto de encontro de três vértices dos quadrados, e a ele concorrem três arestas. **e)** Usando desenhos explique por que $\mathscr{P}$ tem que ter o formato de um cubo como os da Figura 16.1.

Problema 16.3.2. Seja $\mathscr{P}$ um cubo, e seja α o plano determinado por uma face qualquer. **a)** Explique por que existem quatro arestas do cubo que têm extremidades em α e não estão nele contidas, e essas quatro arestas estão do mesmo lado de α e são perpendiculares a ele. **b)** Explique por que duas faces opostas quaisquer de um cubo estão em planos paralelos.

Problema 16.3.3. Seja $\mathscr{P}$ uma figura formada pela reunião de polígonos de forma que cada lado de cada polígono é coincidente com um lado de um único outro polígono, e, dois polígonos quaisquer com um vértice comum não são coplanares. Explique por que a cada vértice concorrem pelo menos três arestas.

Problema 16.3.4. Seja $\mathscr{P}$ um cubo. Defina seu interior. Mostre que o interior de qualquer cubo é um conjunto convexo. Mostre que o cubo reunido com suas faces e seu interior (cubo sólido) é um conjunto convexo.

Problema 16.3.5. No cubo da Figura 16.11 temos $BK = BM$ e P é ponto médio de KM. **a)** Prove que H é equidistante de K e de M. **b)** Prove que o plano HDP é perpendicular a KM.

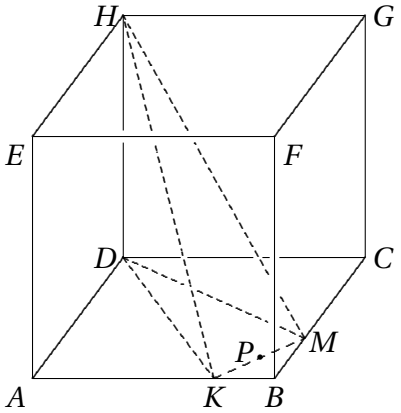


Figura 16.11. Figura para o Problema 16.3.5.

Problema 16.3.6. Dado o cubo da Figura 16.11 calcule as medidas dos ângulos $\angle EGD$ e $\angle EGA$.

Problema 16.3.7. Dado o cubo de aresta a, mostre que todas as suas diagonais são congruentes e calcule sua medida.

Problema 16.3.8. Dado o cubo de aresta a, calcule a distância R de seu centro O aos seus vértices.

Problema 16.3.9. Dado o cubo de aresta a, calcule a distância r de seu centro O às suas faces.

Problema 16.3.10. Dado o cubo de aresta a, calcule a distância ρ de seu centro O às suas arestas.

Problema 16.3.11. Explique por que, a menos de rotações e reflexões, o cubo tem 11 planificações, conforme são vistas nas Figuras 16.4 e 16.5.

Problema 16.3.12. Ache as coordenadas cartesianas dos vértices do cubo de aresta 2 com centro na origem das coordenadas e arestas paralelas aos eixos cartesianos. Expresse, em coordenadas cartesianas, as arestas, as faces e o interior desse cubo.

Problema 16.3.13. Uma *seção plana* de um cubo é a interseção da superfície de um cubo com um plano. Estude que tipo de seções planas podem ser formadas com o cubo. Faça um desenho para cada caso, explicando com detalhes.

Problema 16.3.14. A superfície de um cubo é secionada por um plano não paralelo a nenhuma das faces. A seção pode ser um quadrado? Se a resposta for afirmativa determine com exatidão a posição de um tal quadrado. Se a resposta for negativa, justifique.

Problema 16.3.15. Prove que se uma seção plana da superfície de um cubo é um retângulo, então um lado desse retângulo (e, portanto, dois lados opostos) é paralelo a uma aresta do cubo.

Problema 16.3.16. Considere o cubo $ABCDEFGH$ da Figura 16.12. Sejam M o ponto médio de AE e N o ponto médio de CG. **(a)** Mostre que os pontos H, M, B e N são coplanares e que o plano α que os contém também contém o centro O do cubo (ponto de encontro das diagonais do cubo). **(b)** Supondo que a aresta do cubo meça a, ache os lados do quadrilátero $HMBN$. **(c)** Prove que $HMBN$ é um losango não quadrado. **(d)** O plano α é perpendicular à diagonal DF?

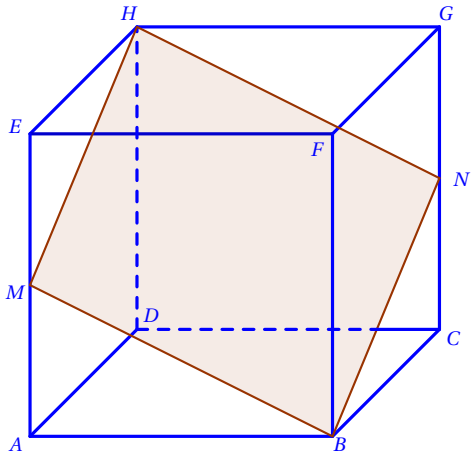


Figura 16.12. Desenho para o Problema 16.3.16.

Problema 16.3.17. A superfície de um cubo é secionada por um plano que interseta quatro arestas paralelas. **a)** Mostre que a figura formada é um paralelogramo. **b)** Encontre condições necessárias e suficientes (em relação à posição do plano) para que o paralelogramo seja um retângulo. **c)** Encontre condições necessárias e suficientes (em relação à posição do plano) para que o paralelogramo seja um quadrado.

Problema 16.3.18. A Figura 16.13 mostra o cubo $ABCDEFGH$. Sejam M, N, P, Q, R e S os pontos médios das arestas AB, BF, FG, GH, HD e DA. **a)** Mostre que esses seis pontos são coplanares. (sugestão: prove que eles estão no plano mediador de EC). **b)** Mostre que o hexágono $MNPQRS$ é regular.

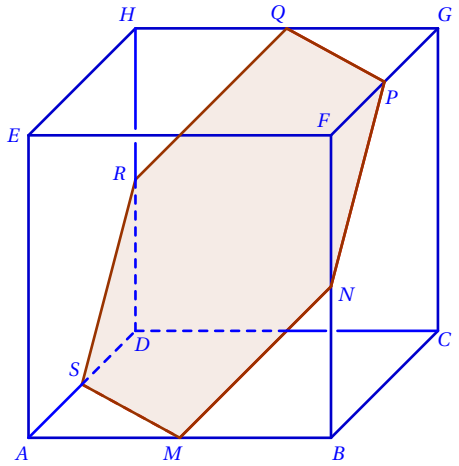


Figura 16.13. Desenho para o Problema 16.3.18.

Problema 16.3.19. **a)** Calcule as medidas dos ângulos formados por segmentos que unem o centro de um cubo com dois vértices. **b)** Calcule as medidas dos ângulos formados por uma diagonal do cubo e as arestas que concorrem no mesmo vértice.

Problema 16.3.20. Considere o cubo $ABCDEFGH$ conforme definido na Figura 16.11. Calcule a distância de A às diagonais CE e BH.

Problema 16.3.21. A Figura 16.14 mostra o cubo $ABCDEFGH$ de aresta a. **(a)** Demonstre que as retas suporte de DB e EC são ortogonais. **(b)** Calcule o comprimento da perpendicular comum entre DB e EC.

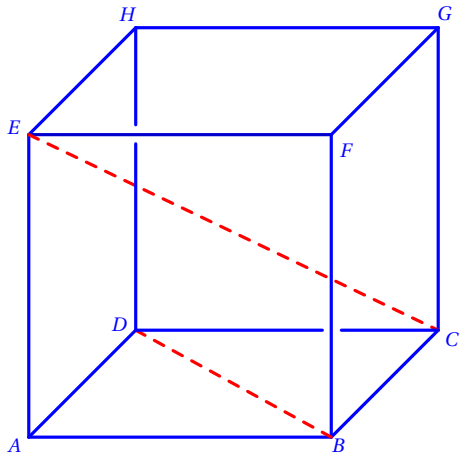


Figura 16.14. Desenho para o Problema 16.3.21.

Problema 16.3.22. Em um cubo, $ABCD$ e $EFGH$ são faces opostas e AE, BF, CG e DH são arestas paralelas. Sejam M e N os pontos médios das arestas BC e DH, respectivamente. **a)** Se a aresta do cubo mede 2, calcule a distância entre os pontos M e N. **b)** Calcule o cosseno do ângulo entre as retas AB e NM.

Problema 16.3.23. Um plano é perpendicular à diagonal AG do cubo $ABCDEFGH$ da Figura 16.15, de forma que sua interseção com as faces do cubo seja o hexágono $UVWXYZ$.

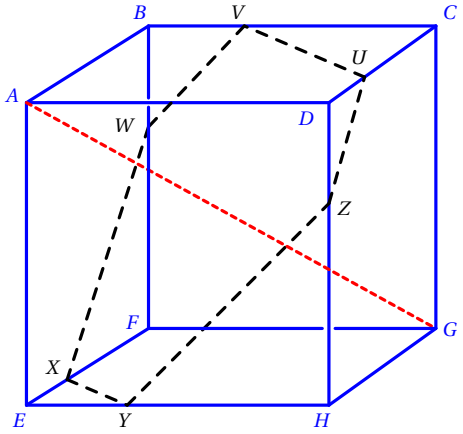


Figura 16.15. Desenho para o Problema 16.3.23.

a) Mostre que cada lado do hexágono $UVWXYZ$ é paralelo a uma das diagonais da face do cubo em que está contido. b) Determine o perímetro do hexágono $UVWXYZ$, sendo 1 (um) a medida da aresta do cubo.

Problema 16.3.24. Um cubo de aresta de medida 3 é intersectado por um plano, determinando o triângulo DPQ, como mostra a Figura 16.16. Sabe-se que $AP = AQ = 2$. **a)** Calcule a área do triângulo DPQ. **b)** Determine a distância do vértice A do cubo ao plano que contém o triângulo DPQ.

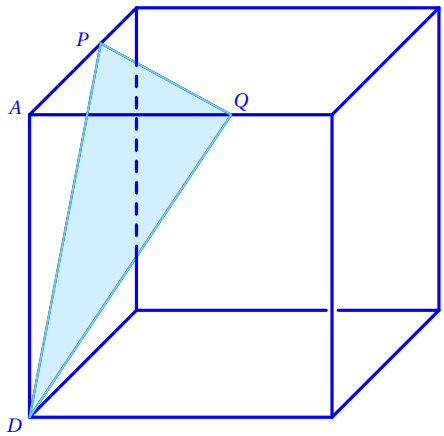


Figura 16.16. Desenho para o Problema 16.3.24.

Problema 16.3.25. Dado um cubo e um plano, a projeção ortogonal do cubo no plano é a figura formada pelas projeções ortogonais das arestas do cubo no plano (confira Seção 15.6 na página 20). Ao projetar um cubo em um plano podemos obter vários desenhos. Três deles estão na Figura 16.17. São denominadas projeções simétricas do cubo. Para cada uma delas descreva a posição do cubo em relação ao plano de projeção. Se o cubo tem aresta a, calcule, em cada projeção, as medidas de todos os segmentos e ângulos.

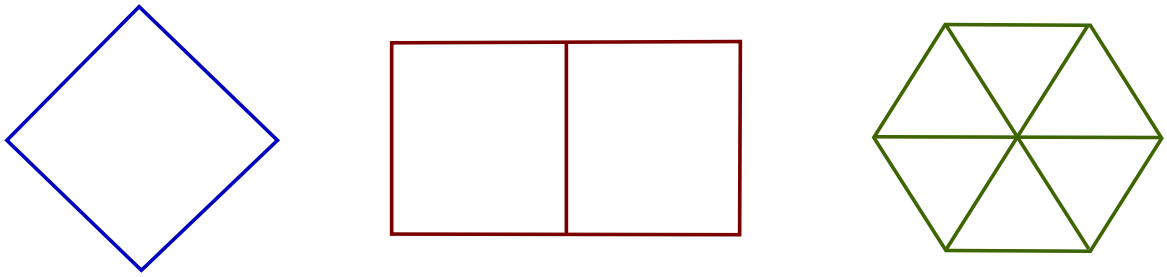


Figura 16.17

Problema 16.3.26. Complete a tabela abaixo referente a um cubo de aresta a. Alguns desses dados serão estudados na Seções 17.6 e 17.7 e no Capítulo 18.

a	aresta	a
A, V, F	quantidade de arestas, vértices e faces	
d	diagonal de uma face	
D	diagonal do cubo	
a	área de uma face	
$\mathscr{A}$	área de superfície	
$\mathscr{V}$	volume	a^3
R	distância do centro aos vértices	
r	distância do centro às faces	
ρ	distância do centro às arestas	
α	diedro (medida do ângulo entre duas faces)	

16.4 O tetraedro

O *tetraedro* é a figura geométrica formada pela reunião dos segmentos que unem quatro pontos não coplanares quaisquer. Essa figura tem um formato bastante conhecido, e vemos a seguir desenhos de tetraedros em diversas posições. O desenho da esquerda corresponde à definição dada. Nos outros dois desenhos algumas faces foram coloridas.

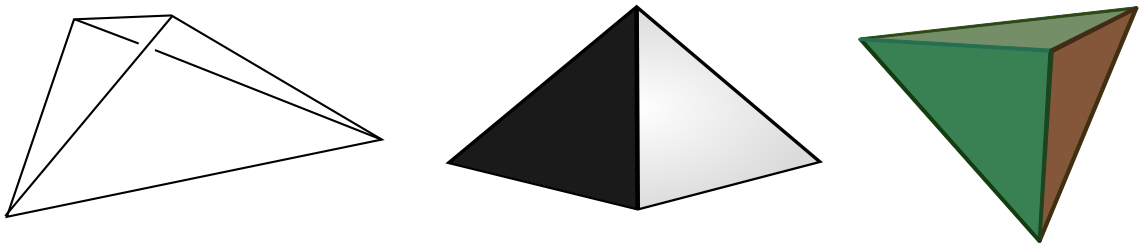


Figura 16.18. Desenhos de tetraedros.

As arestas de um tetraedro são os segmentos que o formam. Quatro pontos não coplanares determinam $\binom{4}{2} = 6$ segmentos, de modo que um tetraedro tem $A = 6$ arestas. As faces de um tetraedro são as regiões triangulares dos triângulos que os formam. Como são $\binom{4}{3} = 4$ triângulos, temos $F = 4$ faces. Os vértices do tetraedro são os quatro pontos que o definem, e assim temos $V = 4$.

O tetraedro não tem diagonais (segmento ligando dois vértices e não contido em uma face).

Dado um vértice de um tetraedro, existe apenas uma face que não o contém, denominada *face oposta* a esse vértice. Uma *altura* de um tetraedro é o segmento com um extremo em um vértice e outro extremo no plano determinado pela face oposta, ao qual é perpendicular.

A reunião das faces de um tetraedro chama-se *superfície* do tetraedro. A soma das áreas das faces é chamada *área de superfície* do tetraedro. Examinando desenhos de tetraedros fica claro o que é seu interior. É possível definir formalmente esse interior (confira o Problema 16.5.5). A reunião da superfície de um tetraedro com seu interior denomina-se *tetraedro sólido*.

Um tetraedro se diz *regular* quando os triângulos que o compõem são todos equiláteros. Isso implica que todas as arestas são congruentes (duas a duas). Um tetraedro se diz *isósceles* quando tem um vértice ao qual concorrem três arestas congruentes. Um tetraedro com três arestas concorrentes perpendiculares duas a duas chama-se *trirretângulo*. Um tetraedro não regular com as faces congruentes duas a duas chama-se *disfenóide*. Um tetraedro com as arestas não congruentes duas a duas denomina-se *escaleno*. Veremos em nossa lista de problemas que existem todos esses tipos de tetraedros.

Conforme já observamos a respeito dos cubos, ao estudar tetraedros em um livro de Geometria deve-se ficar atento às definições adotadas pelo autor. Alguns autores denominam tetraedro ao que aqui estamos chamando de superfície do tetraedro, e outros ao que aqui estamos chamando de tetraedro sólido. Não conhecemos nenhum autor que chama de tetraedro à reunião dos seus 4 vértices, mas, quem sabe, pode ocorrer.

Estudamos a seguir algumas propriedades do tetraedro regular. Vamos mostrar que ele tem um centro, que é o ponto de encontro das quatro alturas.

Seja $ABCD$ um tetraedro regular de lado a. Se X é um vértice de tetraedro, anotamos por H_X o pé da altura relativa a X. Sabemos, do Problema 15.7.30, que o conjunto dos pontos do espaço que são simultaneamente equidistantes dos vértices de BCD é a reta perpendicular ao plano $[BCD]$ determinado por B, C e D, e que passa pelo circuncentro de BCD (a chamada reta medial de BCD). Como $ABCD$ é regular, A está nessa reta e H_A é o circuncentro de BCD. Igualmente se tem que H_B é o circuncentro de ACD, H_C o de ABD e H_D o de ABC.

Lembremos que o circuncentro de um triângulo é o ponto de encontro de suas mediatrizes. Como as faces do tetraedro são triângulos equiláteros, neles cada mediatriz coincide com a altura e a mediana correspondentes. Em particular, o circuncentro coincide com o baricentro. Se X e Y são vértices do tetraedro, indicamos por M_{XY} o ponto médio de XY. Dessa forma H_A é o ponto de encontro das medianas BM_{CD}, CM_{BD} e DM_{BC}, e sabemos que $BH_A = (2/3)BM_{CD}$. Propriedades análogas valem para H_B, H_C e H_D. Confira a Figura 16.19.

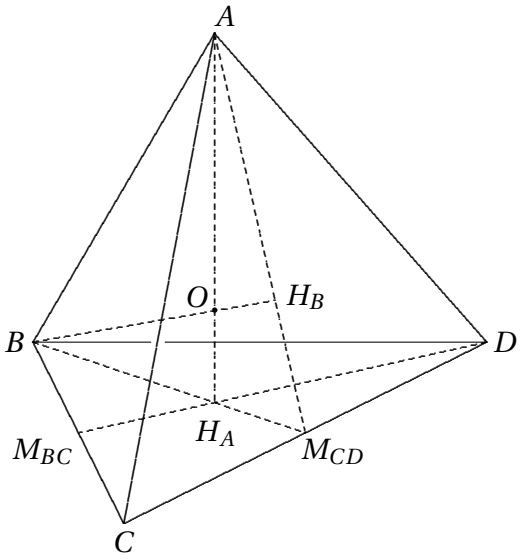


Figura 16.19. Centro do tetraedro regular.

Sabemos que a altura $h = BM_{CD}$ do triângulo equilátero BCD de lado a é $h = (\sqrt{3}/2)a$. Portanto $BH_A = (2/3)BM_{CD} = (\sqrt{3}/3)a$. Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo ABH_A, retângulo em H_A, podemos calcular a altura $H = AH_A$ do tetraedro:

$$H^2 = AB^2 - BH_A^2 = a^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2 \Rightarrow H = \frac{\sqrt{6}}{3}a$$

Observamos que todas as alturas do tetraedro têm esse mesmo valor.

Consideremos agora a altura BH_B. O plano $[ABM_{CD}]$ contém as duas alturas AH_A e BH_B, pois $H_A \in BM_{CD}$ e $H_B \in AM_{CD}$. Como H_A está no interior de $\angle BAM_{CD}$ e H_B está no interior de $\angle ABM_{CD}$, o **Teorema crossbar** (Tomo II, Seção 9.11) garante que essas duas alturas se encontram num ponto O.

A distância $r = OH_A$ pode ser calculada. Notemos primeiro a semelhança $H_BBM_{CD} \sim H_ABO$ em virtude do caso AA. Isso implica

$$\frac{H_BM_{CD}}{H_AO} = \frac{BM_{CD}}{BO} = \frac{H_BB}{H_AB} \iff \frac{h/3}{r} = \frac{h}{BO} = \frac{H}{2h/3}$$

Usando que $h = (\sqrt{3}/2)a$ e $H = (\sqrt{6}/3)a$ calculamos $r = (\sqrt{6}/12)a$. Das relações acima temos também $BO = 3r$.

Repetimos os mesmos cálculos no triângulo AH_AM_{CD} com a semelhança $H_AAM_{CD} \sim H_BAO$ e obtemos $OH_B = (\sqrt{6}/12)a = r$ e $AO = 3r$.

Tomando agora em conjunto as alturas CH_C e AH_A, e repetindo o procedimento, vemos que elas se encontram em um ponto O' tal que $O'H_A = r$, portanto $O' = O$. Temos também $OH_C = r$ e $CO = 3r$.

Finalmente usando os mesmos recursos vemos que $O \in DH_D$, $OH_D = r$ e $DO = 3r$.

Concluímos que o ponto O pertence às quatro alturas, dista $r = (\sqrt{6}/12)a$ dos quatro pés dessas alturas e dista $3r = (\sqrt{6}/4)a$ dos quatro vértices. Em outros termos, O é equidistante dos vértices e das faces do tetraedro.

Veremos no Capítulo 17 propriedades da esfera. Os resultados acima significam que o ponto O é o centro da esfera de raio $3r = (\sqrt{6}/4)a$ que passa pelos quatro vértices do tetraedro $ABCD$. Ainda, O é o centro da esfera de raio $r = (\sqrt{6}/12)a$ que tangencia as quatro faces do mesmo tetraedro. Essas esferas são denominadas respectivamente esfera circunscrita e esfera inscrita do tetraedro regular.

O tetraedro regular tem uma outra esfera a ele conectada, com centro em O e tangente às suas arestas. Para observar isso basta demonstrar que O é equidistante das arestas do tetraedro. Esse resultado é solicitado no Problema 16.5.14.

Veremos ainda no Capítulo 17 que qualquer tetraedro tem esfera circunscrita e esfera inscrita. Entretanto, os centros dessas esferas podem não ser os mesmos e tampouco são o encontro das alturas. Em um tetraedro qualquer pode não existir um ponto em comum às suas alturas.

Para desenhar tetraedros regulares uma opção é usar coordenadas cartesianas. Vemos na Figura o desenho do tetraedro regular cujos vértices têm as coordenadas

$$A = \left(0, -1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad B = \left(-1, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad C = \left(1, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad D = \left(0, 1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

O estudante pode verificar que se trata realmente de um tetraedro regular e calcular a sua aresta.

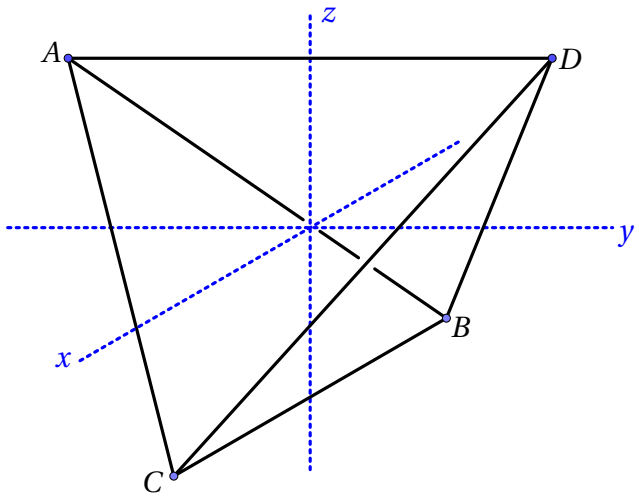


Figura 16.20. Desenho de um tetraedro regular em um sistema de coordenadas cartesianas.

São inúmeras as propriedades dos tetraedros. Para mais informações o estudante pode consultar, por exemplo, as referências [8] e [51]. Consulte também a Wikipedia nos verbetes *Tetrahedron* (em lingua inglesa) e *Tetraedro* (em português e espanhol).

Por exemplo, em [8], pág. 307, o autor apresenta uma demonstração do fato de que todo tetraedro disfenóide $ABCD$ pode ser inscrito em um paralelepípedo reto retângulo $BHCGEDFA$. Confira a Figura 16.21.

Denominamos *ortocêntrico* ao tetraedro que tem um ponto comum às suas alturas. Exemplo de tetraedros ortocêntricos são os regulares e os trirretângulos. Pode-se provar ainda que um tetraedro é ortocêntrico se e somente se são ortogonais entre si duas arestas opostas quaisquer.

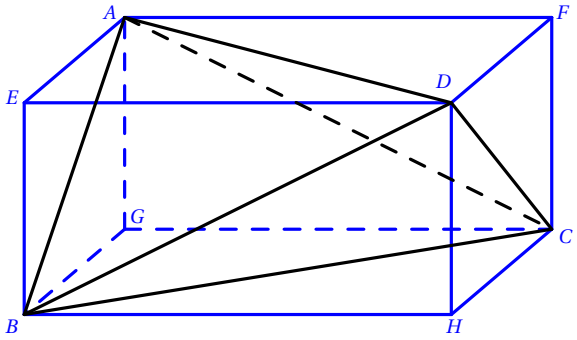


Figura 16.21. Tetraedro disfenóide inscrito em um paralelepípedo reto retângulo.

16.5 Problemas

Problema 16.5.1. Seja $\mathscr{P}$ um sólido formado pela reunião de quatro triângulos de modo que cada lado de cada um dos triângulos coincide com um lado de um único outro triângulo, e dois triângulos contíguos quaisquer não são coplanares. Explique por que $\mathscr{P}$ é um tetraedro.

Problema 16.5.2. **a)** Em uma folha de papel desenhe um triângulo e recorte. Dobre o triângulo recortado seguindo os segmentos que unem os pontos médios dos seus lados. Explique por que dessa forma de obtém um modelo de tetraedro. Explique por que esse tetraedro tem todas as faces congruentes duas a duas. Em que situações esse tetraedro é regular, disfenóide e isósceles. **b)** Em uma folha de papel desenhe um triângulo (de preferência escaleno). Desenhe, aproveitando seus lados, mais três triângulos a ele congruentes, colocados externamente ao primeiro triângulo. Recorte a figura assim obtida e a dobre nos três segmentos internos. Como devem ser desenhados os três triângulos adicionais para que dessa forma se possa obter um modelo de tetraedro? O método a) é diferente do método b)?

Problema 16.5.3. Explique por que um tetraedro qualquer não tem diagonais.

Problema 16.5.4. Vimos que em um tetraedro duas arestas se dizem *opostas* quando não se intersetam. Explique por que em um tetraedro qualquer as arestas se organizam em pares de arestas opostas.

Problema 16.5.5. Defina interior de um tetraedro qualquer e mostre que é um conjunto convexo. Por que esse conjunto é não vazio? Sugestão: considere os planos determinados pelas faces, e escolha convenientemente um dos semiespaços determinado por cada um.

Problema 16.5.6. Explique por que num tetraedro regular todas as arestas são congruentes duas a duas. Em particular, todo tetraedro regular é isósceles.

Problema 16.5.7. Seja ABC um triângulo, e seja x um número real positivo. Descubra para que valores de x existem exatamente dois pontos V tais que $VA = VB = VC = x$.

Problema 16.5.8. Explique por que existem tetraedros regulares e tetraedros isósceles não regulares. Existem tetraedros isósceles com nenhuma face regular? Sugestão: use o Problema 16.5.7.

Problema 16.5.9. Explique por que existem tetraedros escalenos, isto é, as arestas têm medidas diferentes duas a duas.

Problema 16.5.10. Calcule a área de superfície de um tetraedro regular de aresta a.

Problema 16.5.11. É dado um tetraedro $ABCD$. Os pontos E, F e G dividem respectivamente os segmentos AC, BC e DC em sua terça parte mais próxima de C. Assim é formado um novo tetraedro $CEFG$. Calcule a área de superfície desse novo tetraedro em função da do antigo. Confira ilustração na Figura 16.22.

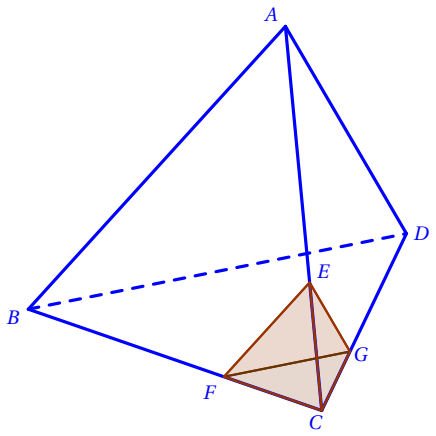


Figura 16.22. Desenho para o Problema 16.5.11.

Problema 16.5.12. Mostre que um tetraedro é isósceles se e somente se tem uma altura com pé no circuncentro de uma face.

Problema 16.5.13. Na Figura 16.23, $ABCD$ é um tetraedro regular de aresta a, e P e Q são os pontos médios de AD e BC, respectivamente. **a)** Demonstre que PQ é perpendicular a AD e a BC; **b)** Calcule PQ.

Problema 16.5.14. Dado um tetraedro regular de aresta a, calcule a distância de seu centro às arestas.

Problema 16.5.15. Em um tetraedro qualquer os três segmentos que unem os pontos médios de dois lados opostos quaisquer se encontram em um ponto.

Problema 16.5.16. Um tetraedro isósceles $ABCD$ tem três arestas que partem de A congruentes de medida a, e BCD é um triângulo equilátero de lado b. **a)** Mostre que esse tetraedro existe se e somente se $a > b/\sqrt{3}$. **b)** Ache a medida da altura relativa a A, e localize o seus pé na face BCD.

Problema 16.5.17. Ligando os pontos médios de arestas do cubo escolhidas convenientemente, exiba um tetraedro disfenóide cujas faces são triângulos isósceles congruentes.

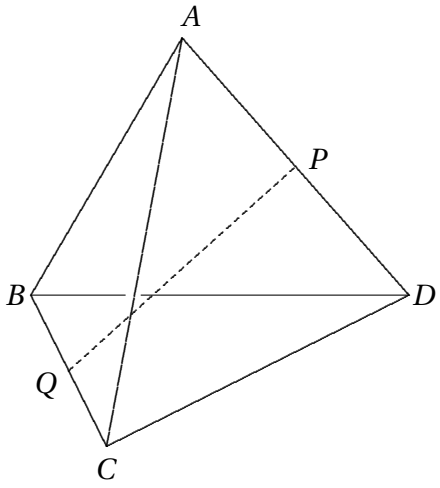


Figura 16.23. Figura para o Problema 16.5.13.

Problema 16.5.18. Demonstre que se um tetraedro é disfenóide então duas arestas opostas quaisquer são congruentes. Por outro lado, se num tetraedro duas arestas opostas quaisquer são congruentes então ele é disfenóide ou regular.

Problema 16.5.19. Mostre que se um tetraedro tem todas as faces congruentes (portanto é regular ou disfenóide), então a soma dos três ângulos que concorrem em qualquer vértice é 180. Para provar a recíproca considere uma planificação conveniente do tetraedro.

Problema 16.5.20. Em um tetraedro regular duas arestas opostas quaisquer são ortogonais, isto é, deslocando uma delas paralelamente até intersetar a segunda, essa segunda aresta é perpendicular à aresta deslocada.

Problema 16.5.21. Calcule o valor (em radianos e em graus) do denominado *ângulo tetraédrico* de um tetraedro regular. Esse ângulo tem vértice no centro do tetraedro e lados cada um contendo um vértice do tetraedro. Resposta: $\arccos(-1/3) = 2\,\text{arctg}(\sqrt{2}) \approx 1,910633 \approx 109,4712°$

Problema 16.5.22. Calcule a medida (em radianos e em graus) dos diedros de um tetraedro regular. Resposta: $\arccos(1/3) = \text{arctg}(2\sqrt{2}) = \text{arcsen}(2\sqrt{2}/3) \approx 1,230959417 \approx 70,528779340°$

Problema 16.5.23. Calcule a medida do ângulo entre uma aresta e uma face que não a contém em um tetraedro regular. Resposta: $\arccos(\sqrt{3}/3) \approx 0,955316618 \approx 54,73561°$

Problema 16.5.24. **a)** Defina o que é uma planificação para tetraedros. **b)** Encontre, a menos de rotações ou reflexões, todos as formas de planificar um tetraedro regular. Faça modelos usando folha de papel.

Problema 16.5.25. Considere um tetraedro trirretângulo $OABC$, sendo O o vértice ao qual concorrem as três arestas mutuamente perpendiculares. **a)** Explique por que em um sistema de coordenadas cartesianas adequado podemos escrever

$$O = (0,0,0) \quad A = (a,0,0) \quad B(0,b,0) \quad C = (0,0,c) \quad a > 0,\ b > 0,\ c > 0$$

b) Calcule as arestas e a área de superfície desse tetraedro em função de a, b e c. **c)** Prove o Teorema de GUA (Gua de Malves, J.P. (1712-1785)):

$$a(ABC)^2 = a(OAB)^2 + (OAC)^2 + (OBC)^2$$

d) Mostre que o pé da altura relativa ao vértice O é o ortocentro de ABC.

Problema 16.5.26. Mostre que são coordenadas dos vértices de um tetraedro regular os pontos

$$A=\left(0,-1,\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\quad B=\left(-1,0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\quad C=\left(1,0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\quad D=\left(0,1,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Calcule a aresta desse tetraedro.

Problema 16.5.27. Mostre que são coordenadas dos vértices de um tetraedro regular os pontos

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a,0,0\right)\quad\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}a,\pm\frac{a}{2},0\right)\quad\left(0,0,\frac{\sqrt{6}}{3}a\right)$$

Calcule a aresta desse tetraedro.

Problema 16.5.28. Mostre que podemos colocar um tetraedro regular "dentro" de um cubo de modo que todas as arestas do tetraedro estejam contidas em faces do cubo. Se o cubo tem aresta a, calcule a aresta do tetraedro. Faça um desenho ilustrando o cubo e o tetraedro.

Problema 16.5.29. Ao projetar (projeção ortogonal, Seção 15.6, página 20) um tetraedro regular em um plano podemos obter vários desenhos. Três deles estão na Figura 16.24. São denominadas projeções simétricas do tetraedro regular. Para cada uma delas encontre a posição do tetraedro em relação ao plano de projeção. Se o tetraedro tem aresta a, calcule, em cada projeção, a medida de todos os segmentos.

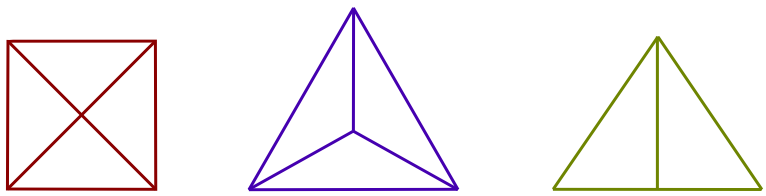


Figura 16.24

Problema 16.5.30. **a)** Investigue que tipo de figuras se obtém intersetando um plano com as faces de um tetraedro. **b)** Mostre que a interseção de um plano com as faces de um tetraedro qualquer pode ser um paralelogramo. **c)** Mostre que a interseção de um plano com as faces de um tetraedro regular pode ser um quadrado. Se esse tetraedro tem aresta a, calcule o lado do quadrado que você obteve.

Problema 16.5.31. Em um tetraedro $ABCD$, $AB=x$, $CD=y$ e as demais arestas medem z. Determine a distância entre as arestas AB e CD em função de x, y e z.

Problema 16.5.32. Um tetraedro $ABCD$ possui como base o triângulo equilátero BCD, cujos lados têm medida 1 (um). Suas faces laterais são tais que $AB=AC=AD=a$, com ângulos de medida $\angle BAC=\angle CAD=\angle BAD=\theta$. **a)** Expresse a em função de θ. **b)** Determine, em função de θ, a medida da altura desse tetraedro traçada a partir de A.

Problema 16.5.33. Complete a tabela abaixo referente a um tetraedro regular de aresta a. Alguns desses dados serão estudados na Seções 17.6 e 17.7 e no Capítulo 18.

a	aresta	a
(A,V,F)	arestas, vértices e faces	
h	altura da face	
H	altura do tetraedro	
a	área da face	
$\mathscr{A}$	área de superfície	
$\mathscr{V}$	volume	$(\sqrt{2}/12)a^3$
R	distância do centro aos vértices	
r	distância do centro às faces	
ρ	distância do centro às arestas	
α	diedro	
θ	ângulo tetraédrico	

16.6 Pirâmides

Vejamos a definição e resultados básicos sobre esse importante sólido geométrico, a pirâmide.

Sejam α um plano e $\mathscr{P}$ um polígono nele contido. Seja V um ponto fora de α. A *pirâmide de base $\mathscr{P}$ e vértice V* é a reunião dos lados de $\mathscr{P}$ e dos segmentos que unem os vértices de $\mathscr{P}$ com V.

Vemos na Figura 16.25 desenhos de pirâmides. No desenho da esquerda temos uma pirâmide quadrangular. As pirâmides costumam ser nomeadas de acordo com sua base.

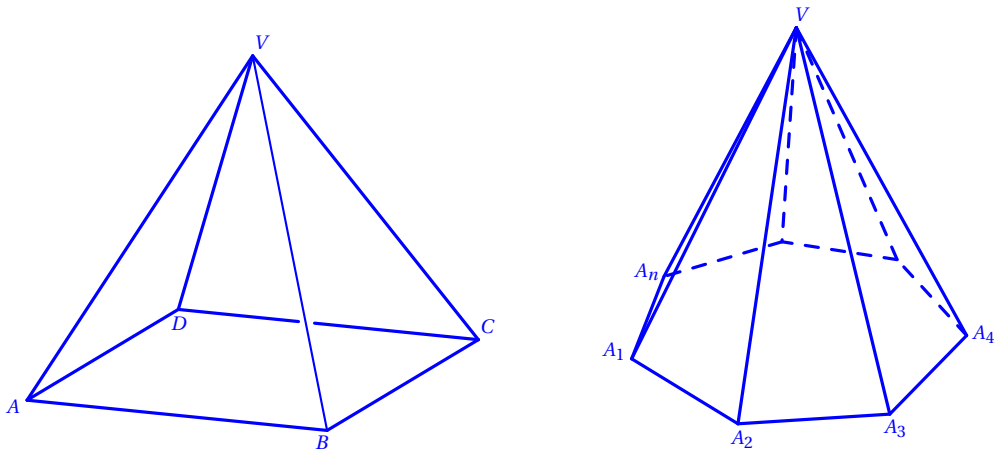


Figura 16.25. Desenhos de pirâmides.

A *altura* da pirâmide é a distância de V a α, ou o segmento perpendicular de V a α. Um segmento que une um vértice da base com o vértice da pirâmide denomina-se *aresta lateral*. Um lado qualquer de $\mathscr{P}$ chama-se *aresta da base*. O triângulo formado por qualquer lado de $\mathscr{P}$ e pelas arestas laterais que unem ao vértice os extremos desse lado chama-se *triângulo lateral* da pirâmide. Um triângulo lateral, juntamente com seu interior, chama-se *face lateral*. A reunião das faces laterais denomina-se *superfície lateral*. A reunião dessa com $\mathscr{P}$ e seu interior chama-se *superfície total*. A superfície total também pode ser designada por *pirâmide fechada*. A *área lateral* da pirâmide é a área de sua superfície lateral, e a *área total* é a área de sua superfície total.

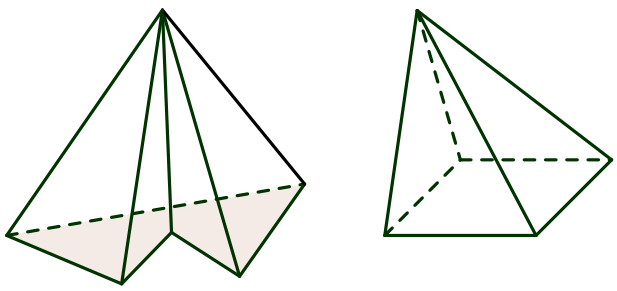


Figura 16.26. Uma pirâmide côncava e uma pirâmide oblíqua.

É possível definir *interior* de uma pirâmide (confira o Problema 16.7.2). A reunião da superfície total com seu interior chama-se *pirâmide sólida*.

Se $\mathscr{P}$ for um polígono regular e seu centro O é o pé da altura, dizemos que se trata de uma *pirâmide regular*. Uma pirâmide se diz *reta* quando o pé da altura no plano da base é o seu baricentro

(ou centróide). Caso contrário ela se diz *oblíqua*. Se a base de uma pirâmide for um polígono convexo, essa pirâmide pode ser chamada de *convexa*. Caso contrário, *côncava*. Confira a Figura 16.26.

Observamos que ao estudar pirâmides em um livro de Geometria deve-se ficar atento às definições adotadas pelo autor. Alguns autores denominam pirâmide ao que aqui chamamos de sua superfície total, e outros ao que aqui chamamos de pirâmide sólida. O uso da expressão *vértice da pirâmide* pode causar confusão. Como poliedro, os vértices da base também são vértices da pirâmide. Mas a pirâmide tem aquele vértice distinguido, oposto à sua base, e procuramos deixar claro no contexto a qual estamos nos referindo.

Um resultado importante sobre pirâmides é estudado no teorema a seguir. Responde ao que ocorre quando a seccionamos com um plano paralelo à sua base.

Teorema 16.1. *A interseção da superfície lateral de uma pirâmide de base $\mathscr{P}$ e altura h com um plano paralelo à base, situado à distância $k>0$ do vértice e $h-k>0$ do plano da base, é um polígono $\mathscr{Q}$, semelhante a $\mathscr{P}$ na razão k/h.*

Demonstração. As notações podem ser acompanhadas pela Figura 16.27. Sejam V o vértice da pirâmide, e seja $\mathscr{P} = A_1A_2\ldots A_n$ o polígono da base. Chamamos de α o plano da base, e seja β o plano que interseta a pirâmide na forma do enunciado. Seja P o pé da altura em α por V. Então β interseta PV em um ponto interior desse segmento, e denotamos esse ponto por Q. Temos $VQ/VP = k/h$. Ainda, β interseta cada aresta lateral VA_i em um ponto B_i, e vemos que $\mathscr{Q} = B_1B_2\ldots B_n$ é um polígono.

Queremos mostrar que $\mathscr{Q} \sim \mathscr{P}$ com razão k/h. Para isso precisamos verificar que os lados de $\mathscr{Q}$ estão para os lados correspondentes de $\mathscr{P}$ na razão k/h, e que os ângulos correspondentes são congruentes.

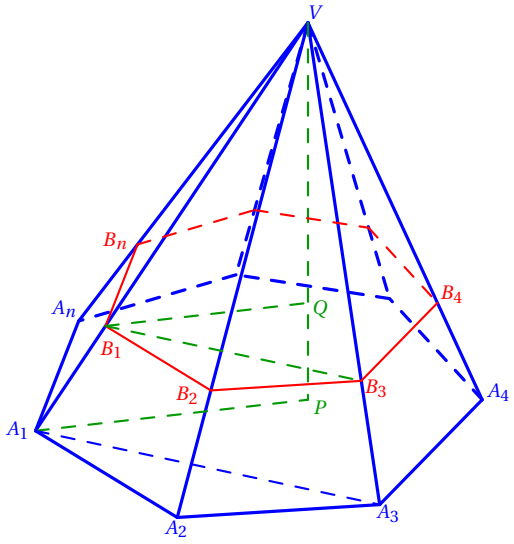


Figura 16.27. Ilustração do Teorema 16.1.

Vamos verificar inicialmente que $VB_i/VA_i = k/h$ para todo $1 \le i \le n$. Se $A_i = P$ temos $B_i = Q$, e vale a relação. Se $A_i \neq P$, consideramos o triângulo VPA_i. Como $\alpha \parallel \beta$ temos $QB_i \parallel PA_i$, de forma que $VPB_i \sim VQA_i$. Assim

$$\frac{VB_i}{VA_i} = \frac{VQ}{VP} = \frac{k}{h} \quad \text{para todo } 1 \le i \le n$$

Examinando agora os triângulos laterais A_iVA_{i+1}, com $1 \le i \le n-1$, assim como A_nVA_1, vemos que $B_iVB_{i+1} \sim A_iVA_{i+1}$, para todo $1 \le i \le n-1$, e $B_nVB_1 \sim A_nVA_1$, logo

$$\frac{B_iB_{i+1}}{A_iA_{i+1}} = \frac{VB_i}{VA_i} = \frac{k}{h} \qquad \text{e} \qquad \frac{B_nB_1}{A_nA_1} = \frac{VB_n}{VA_n} = \frac{k}{h}$$

para todo $1 \le i \le n-1$.

Mostramos assim que os lados B_iB_{i+1} e B_nB_1 de $\mathscr{Q}$ estão para os lados correspondentes A_iA_{i+1} e A_nA_1 de $\mathscr{P}$ na razão k/h.

Para ver que os ângulos correspondentes dos dois polígonos são congruentes, consideremos, por exemplo, o triângulo $A_1A_2A_3$ e seu correspondente $B_1B_2B_3$. Pelo que foi considerado acima temos $B_1B_2/A_1A_2 = k/h$, $B_2B_3/A_2A_3 = k/h$ e, por razões similares, também vale que $B_1B_3/A_1A_3 = k/h$. Portanto $A_1A_2A_3 \sim B_1B_2B_3$ pelo caso *LLL* de semelhança. Segue que $\angle A_1A_2A_3 \cong \angle B_1B_2B_3$. Com isso se vê que todos os ângulos correspondentes dos dois polígonos são congruentes. Isso termina a demonstração. □

No final da demonstração do Teorema 16.1, para ver que os ângulos correspondentes dos dois polígonos são congruentes, podemos, alternativamente, usar o resultado do Problema 16.1.

Futuramente precisaremos do

Corolário 16.2. *Com as anotações do Teorema 16.1, a razão entre a área da seção com a área da base da pirâmide é* $(k/h)^2$.

Demonstração. Vimos no Teorema 16.1 que os polígonos da seção e da base são semelhantes com razão k/h. Então a razão entre as suas áreas é $(k/h)^2$. □

Observação. Caso o estudante não se sinta confortável com a demonstração do Corolário 16.2, pode acompanhar as seguintes ideias. Primeiro escolha uma triangulação do polígono $\mathscr{P}$ (confira a definição de triangulação no Tomo II, Seção 13.3). Considere a triangulação correspondente na seção $\mathscr{Q}$. Pelo que vimos na demonstração do Teorema 16.1, dois triângulos correspondentes, um em cada triangulação, são semelhantes de razão k/h. Portanto as áreas desses triângulos (o menor para o maior) estão entre si na razão $(k/h)^2$. Como a área de cada polígono é a soma das áreas dos triângulos de sua triangulação, segue o resultado.

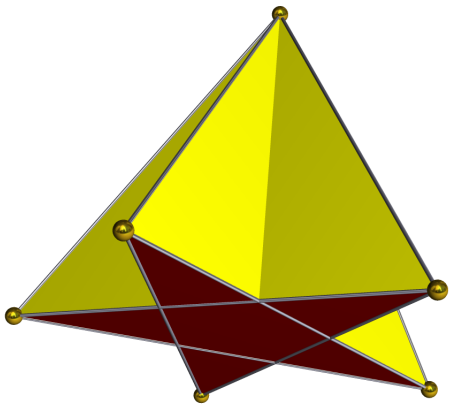


Figura 16.28. Desenho artístico de uma pirâmide com base num polígono estrelado.

Direitos reservados. Autor: Robert Webb. Origem: *Robert Webb's Stella software*
`http://www.software3d.com/Stella.php`

16.7 Problemas

Problema 16.7.1. Explique por que todo tetraedro é uma pirâmide, e qualquer vértice dele pode ser tomado como vértice da pirâmide. Existe outra pirâmide para a qual mais de um ponto pode ser considerado seu vértice? Explique por que todo tetraedro regular é uma pirâmide regular em relação a qualquer vértice.

Problema 16.7.2. Defina interior de uma pirâmide. Esse conjunto é sempre convexo? No interior não se incluem os interiores dos triângulos laterais e nem o interior do polígono da base.

Problema 16.7.3. Explique por que toda pirâmide regular é reta.

Problema 16.7.4. Uma pirâmide pode ser chamada de *isósceles* quando todas as arestas laterais são congruentes (duas a duas). Isso implica que ela é regular? Se uma pirâmide tem base regular e é isósceles, isso implica que ela é regular?

Problema 16.7.5. Prove que se uma pirâmide é isósceles (no sentido do Problema 16.7.4) então sua base tem um circuncentro (ponto do plano da base equidistante de seus vértices) e o pé da sua altura é esse circuncentro.

Problema 16.7.6. Considere uma pirâmide regular cuja base é um hexágono regular de lado 3 cm, e cuja altura mede 4 cm. Desenhe várias planificações desse sólido.

Problema 16.7.7. Uma pirâmide tem base quadrada de lado a e altura h. Expresse o valor da aresta lateral.

Problema 16.7.8. A base de um tetraedro é um triângulo cujos lados medem 6 cm, 8 cm e 10 cm, e sua altura mede 30 cm. Calcule a área da seção determinada no tetraedro pelo plano paralelo à sua base e distante 20 cm desse plano.

Problema 16.7.9. Calcule a área lateral e a total de uma pirâmide regular de altura de 4 cm e cuja base é um hexágono cujo apótema mede 3 cm.

Problema 16.7.10. Uma pirâmide regular tem altura h e a base tem apótema a_b e perímetro p. Dê uma fórmula para a sua área lateral em função desses três valores.

Problema 16.7.11. Calcule a área lateral e a total de uma pirâmide regular octogonal de altura h e lado da base b.

Problema 16.7.12. Uma pirâmide tem altura h. Ela é seccionada por um plano paralelo ao plano da sua base, e a distância entre esses dois planos é $d < h$. Assim uma nova pirâmide é formada, agora com base no segundo plano. Calcule a razão entre as áreas laterais da pirâmide menor para a maior.

Problema 16.7.13. Consideremos uma pirâmide qualquer com altura h e base em um plano α. Seja β um plano paralelo a α e que secciona a pirâmide a uma distância $d < h$ de α. A porção da pirâmide situada em e entre os planos α e β chama-se *tronco de pirâmide*. A altura do tronco é a distância d e a base da pirâmide e a seção em β chamam-se *bases* do tronco. Explique por que as faces de um tronco de pirâmide são trapézios.

Considere um tronco obtido de uma pirâmide regular. Explique por que suas faces são trapézios isósceles congruentes. Demonstre que a área lateral do tronco é dada pela fórmula

$$\frac{p_1 + p_2}{2}\, a$$

em que p_1 e p_2 são os perímetros das bases e a é a altura das faces.

Problema 16.7.14. As bases de um tronco de pirâmide regular são quadrados de lados 12 cm e 4 cm. Sabe-se que a área lateral é igual à soma das áreas das bases. Calcule a altura do tronco. Sugestão: use a Figura 16.29.

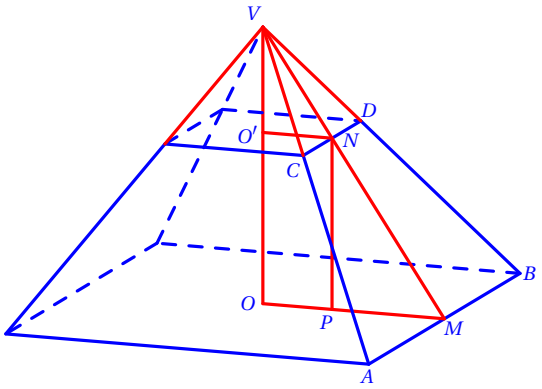


Figura 16.29. Referência para o Problema 16.7.14.

16.8 Prismas

Os prismas são sólidos importantes e, a princípio, podem ser definidos da seguinte maneira. Em dois planos paralelos consideramos duas cópias congruentes de um mesmo polígono, uma em cada plano, dispostas de forma que lados correspondentes sejam paralelos entre si. Essas duas cópias não precisam estar na direção vertical aos dois planos. Em seguida ligamos com segmentos os vértices correspondentes das duas cópias. Reunindo esses segmentos e os lados dos dois polígonos temos um conjunto de pontos que chamamos de *prisma*. O desenho de um prisma é mostrado na Figura 16.30.

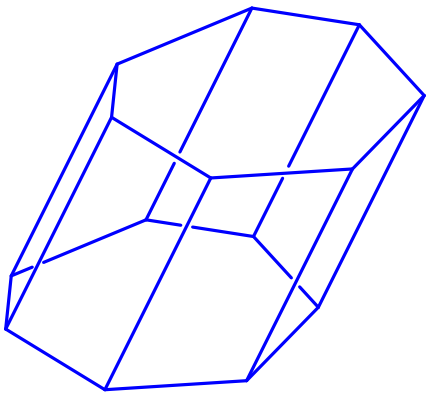


Figura 16.30. Desenho de um prisma: é a reunião dos segmentos representados.

Para trabalhar com prismas e obter suas propriedades necessitamos proceder com mais precisão. Para isso seguiremos um caminho um pouco diferente do proposto acima, mas com o mesmo resultado.

Sejam α e β planos paralelos. Consideremos em α um polígono $\mathscr{P} = A_1A_2A_3\ldots A_n$. Escolhemos em β um ponto B_1 (não necessariamente na direção vertical em relação a A_1). Seja r a reta que contém A_1 e B_1. Consideremos agora a reta paralela a r pelo ponto A_i, para todo $2 \leq i \leq n$. Em virtude do resultado do Problema 15.7.4 essa reta interseta β num ponto B_i. Essa construção pode ser acompanhada com a Figura 16.31.

Como $A_iB_i \parallel A_{i+1}B_{i+1}$ para todo $1 \leq i \leq n$ (entendendo-se que $n+1$ significa 1), vemos que esses segmentos são coplanares e $A_iA_{i+1}B_{i+1}B_i$ é um quadrilátero plano. Mas $\alpha \parallel \beta$ implica $A_iA_{i+1} \parallel B_iB_{i+1}$, de forma que esse quadrilátero é um paralelogramo. Segue que $A_iA_{i+1} = B_iB_{i+1}$ para todo $1 \leq i \leq n$.

Notemos que essa mesma ideia pode ser aplicada a qualquer segmento determinado por dois vértices de $\mathscr{P}$ e ao segmento correspondente em β. Por exemplo, $A_nA_2 \cong B_nB_2$. Assim, pelo caso *LLL*, qualquer triângulo formado por três vértices de $\mathscr{P}$ é congruente ao triângulo formado pelos vértices correspondentes em β. Por exemplo, $A_nA_1A_2 \cong B_nB_1B_2$. Disso segue que $\angle A_nA_1A_2 \cong \angle B_nB_1B_2$. Procedendo dessa forma vemos que todos os ângulos de $\mathscr{P}$ são congruentes aos ângulos correspondentes em β. Portanto podemos afirmar que $\mathscr{Q} = B_1B_2B_3\ldots B_n$ é um polígono em β e é congruente a $\mathscr{P}$.

Notemos que a reta r citada acima pode ser considerada independentemente. Assim, dados planos paralelos α e β, uma reta r que os interseta e um polígono em α, o *prisma* por eles determinado é a reunião dos lados desse polígono, dos lados do polígono formado em β pelo processo

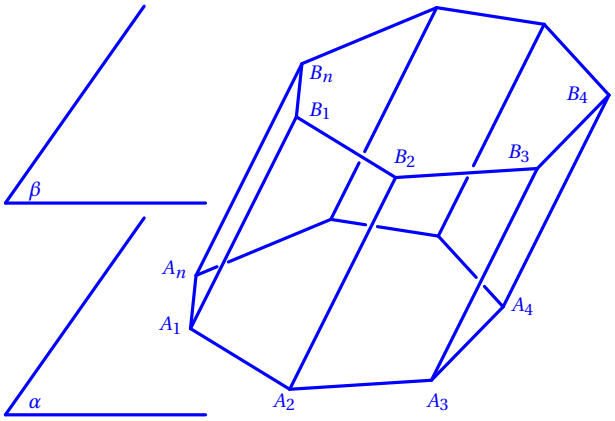


Figura 16.31. Construção de um prisma.

descrito acima, e dos segmentos que unem os vértices correspondentes desses dois polígonos.

A distância entre α e β chama-se *altura* do prisma. Os polígonos $\mathscr{P}$ e $\mathscr{Q}$ chamam-se *bases* do prisma. O prisma se diz *reto* quando $r \perp \alpha$. Um prisma não reto pode ser chamado de *oblíquo*. A reta r chama-se *diretriz* do prisma. Se o polígono da base for regular, o prisma se diz *regular*.

Os vértices dos polígonos que são suas bases também se chamam *vértices* do prisma. Os segmentos A_iB_i, para $1 \leq i \leq n$, chamam-se *arestas laterais* do prisma. Os lados dos polígonos das bases chamam-se *arestas das bases* do prisma. Os quadriláteros $A_iA_{i+1}B_{i+1}B_i$, para $1 \leq i \leq n$ (entendendo-se que $n+1$ significa 1) juntamente com seus interiores chamam-se *faces laterais* do prisma. As bases juntamente com seus interiores chamam-se *faces das bases*. A reunião das faces laterais é a *superfície lateral*, e a reunião de todas as faces é a *superfície total*. É possível definir *interior* de um prisma (confira o Problema 16.9.1). A reunião da superfície total com o interior do prisma chama-se *prisma sólido*. A soma das áreas das faces laterais chama-se *área lateral* e a soma das áreas de todas as faces chama-se *área total*. O que aqui estamos chamando de superfície total é, às vezes, denominado *prisma fechado*.

Os prismas são nomeados, em geral, pelo nome do polígono da base. A Figura 16.32 mostra alguns exemplos. O desenho da esquerda é que corresponde melhor à nossa definição. Nos outros dois desenhos as faces são coloridas para uma melhor apreciação artística.

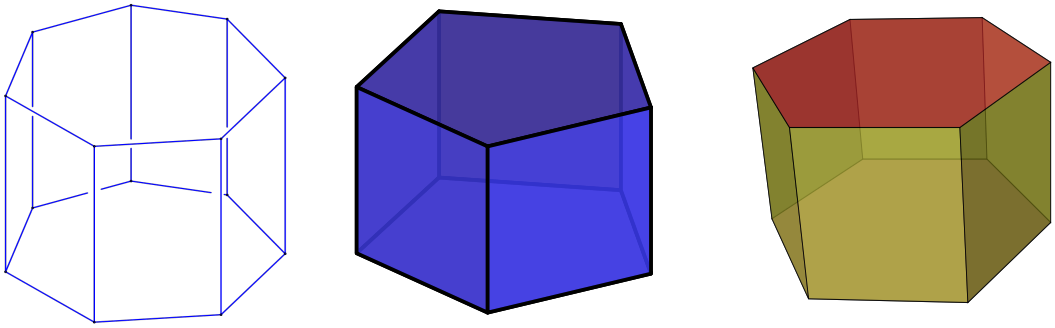


Figura 16.32. Prisma heptagonal, prisma pentagonal e prisma hexagonal.

Observamos que ao estudar prismas em um livro de Geometria deve-se ficar atento às definições adotadas pelo autor. Alguns autores denominam prisma ao que aqui estamos chamando de prisma sólido.

Da definição mais precisa de prisma feita acima extraímos um resultado importante.

Teorema 16.3. *A interseção de um prisma por um plano situado entre os planos das bases e paralelo a eles determina um polígono congruente aos polígonos das bases.*

Demonstração. Com as notações acima, seja γ um plano paralelo a α (e a β) e situado entre os dois. Esse plano interseta a aresta lateral A_iB_i em um ponto C_i, para todo $1 \leq i \leq n$. Procedemos com esses pontos de modo inteiramente análogo ao que fizemos com os pontos B_i, e constatamos que $C_1C_2C_3\ldots C_n$ é um polígono congruente aos polígonos das bases do prisma dado. Confira a Figura 16.33. □

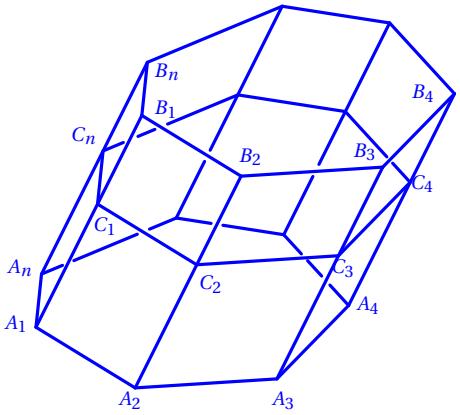


Figura 16.33. Desenho de prisma mostrando uma seção paralela.

Corolário 16.4. *A interseção de um prisma por um plano situado entre os planos das bases e paralelo a eles determina um polígono com mesma área que os polígonos das bases.*

Demonstração. Vimos que a seção determina um polígono congruente ao da base. Consideremos uma triangulação do polígono da base (confira a definição de triangulação no Capítulo 13 do Tomo II). Considere a triangulação correspondente no polígono determinado pela seção. Pelo que vimos, triângulos correspondentes das duas triangulações são congruentes, portanto têm a mesma área. Como a área de um polígono é a soma das áreas dos triângulos de uma triangulação qualquer, segue o resultado. □

Um exemplo importante de prisma é o cubo, já estudado na Seção 16.2, a partir da página 31. O cubo é um prisma quadrangular reto regular cuja altura é igual ao lado da base. Outro exemplo importante de prisma são os *paralelepípedos*. Também são prismas quadrangulares, com a única condição adicional de que suas bases são paralelogramos. Se sua base for um retângulo, ele se diz *paralelepípedo retângulo*. Se, além disso, for um prisma reto, chama-se *paralelepípedo reto retângulo*. Um exemplo particular desse último é o cubo.

Confira, na Figura 16.34, desenhos de paralelepípedos.

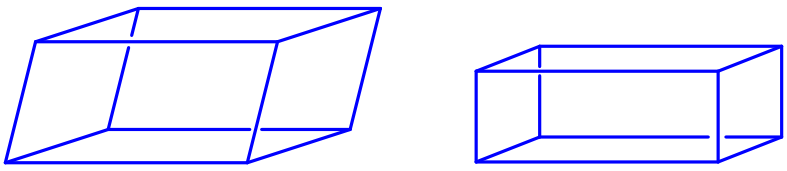


Figura 16.34. Desenho de um paralelepípedo oblíquo e de um reto retângulo.

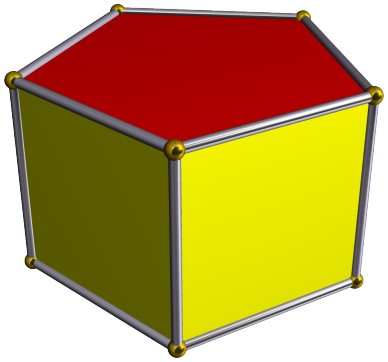


Figura 16.35. Desenho artístico de um prisma com base pentagonal.
Direitos reservados. Autor: Robert Webb. Origem: *Robert Webb's Stella software*
`http://www.software3d.com/Stella.php`

16.9 Problemas

Problema 16.9.1. Defina interior de um prisma qualquer. Não inclua os interiores das suas bases. Dê condições para que o interior de um prisma seja um conjunto convexo.

Problema 16.9.2. Calcule a área lateral e a área total de um prisma reto de altura h e cuja base é um hexágono regular de lado a.

Problema 16.9.3. Uma *diagonal* de um prisma é um segmento que liga dois vértices e que não está contido em uma face. Calcule quantas diagonais tem um prisma cuja base é um polígono convexo de n lados (dê uma fórmula em função de n).

Problema 16.9.4. Um tetraedro regular $ABCD$ tem lado a. Sejam E o ponto médio de AB, F o de AD, G o de AC, K o de BC e H o de BD. Que tipo de sólido é $EFGBHK$ e qual é a área de sua superfície total (em função de a). Confira ilustração na Figura 16.36

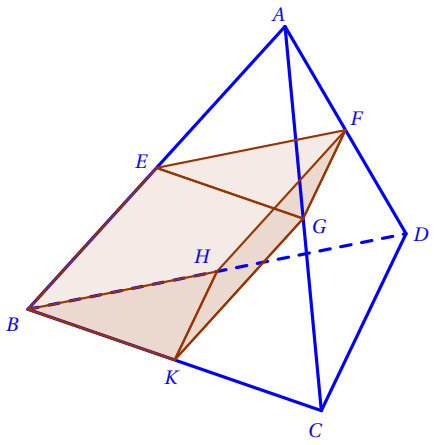


Figura 16.36. Tetraedro regular com sólido interno.

Problema 16.9.5. Mostre que todo paralelepípedo reto retângulo tem um centro, que é um ponto equidistante de seus vértices.

Problema 16.9.6. Um paralelepípedo reto de altura h tem como base um retângulo com lados de medidas a e b. Calcule o comprimento de todas as suas diagonais em função dessas medidas.

Problema 16.9.7. Explique por que as arestas de um paralelepípedo qualquer se organizam em pares denominados *arestas opostas*. Que propriedade têm as arestas de um par desses? A superfície de um paralelepípedo é seccionado por um plano que contém duas arestas opostas. Que figura foi formada no plano? Tome uma das partes (superfície do paralelepípedo situada em um dos lados do plano). Que figura é essa?

Problema 16.9.8. Explique por que as faces de um paralelepípedo qualquer se organizam em pares denominados *faces opostas*. Explique por que duas faces opostas quaisquer são congruentes. Explique por que, dado um paralelepípedo, podemos escolher qualquer face como base, e ele será um prisma em relação a essa base. Um paralelepípedo reto não retângulo pode ser um paralelepípedo retângulo não reto?

Problema 16.9.9. Explique como deve ser calculada a área total de um paralelepípedo qualquer.

Problema 16.9.10. No paralelepípedo reto retângulo da Figura 16.37, calcule a distância do vértice C ao segmento AM, sendo M o ponto médio de CG.

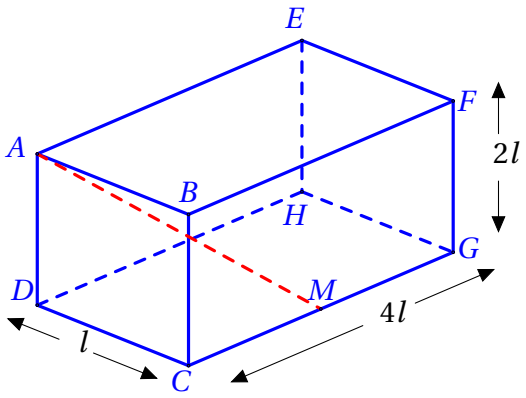


Figura 16.37. Distância em um paralelepípedo reto retângulo.

16.10 Temas para investigação

Tema 16.10.1. Defina o que poderia ser chamado de *plano diagonal* de um cubo e estude suas propriedades.

Tema 16.10.2. **a)** Dado um tetraedro, escolha um ponto no interior de cada face. Unindo esses pontos com segmentos, que figura se obtém? **b)** Dado um tetraedro regular, que figura se obtém ao se unir com segmentos os circuncentros de suas faces?

Tema 16.10.3. Um cubo sólido de dimensão três pode ser expresso em coordenadas cartesianas tridimensionais $Oxyz$ pelas desigualdades

$$-k \leq x \leq k \quad -k \leq y \leq k \quad -k \leq z \leq k$$

para algum número real positivo k.

Um cubo "sólido" de dimensão quatro pode ser expresso em coordenadas cartesianas quadridimensionais $Oxyzw$ pelas desigualdades

$$-k \le x \le k \quad -k \le y \le k \quad -k \le z \le k \quad -k \le w \le k$$

Estude as propriedades desse cubo. Por exemplo, o que são seus elementos de dimensões zero, um, dois e três? O que seria para essa figura o análogo do que é a planificação para o cubo tridimensional? Esse cubo tem centro?

Tema 16.10.4. A *característica de Euler* χ de uma figura formada por polígonos é o número inteiro

$$\chi = F + V - A$$

Investigue por que a fórmula desse número é $F + V - A$ e não uma outra qualquer, por exemplo, $F + V + A$, ou quem sabe $3F + V - A$, ou ainda $(F + V)/A$. Por que será que é usado o termo "característica" para adjetivar esse número?

Tema 16.10.5. Dentre todas as seções triangulares do cubo, encontre a que tem área máxima.

Tema 16.10.6. Dentre todas as seções do cubo na forma de quadrilátero, encontre a que tem área máxima.

Tema 16.10.7. Uma planificação de um tetraedro é formada por uma cópia de cada face organizadas em um plano da seguinte maneira: (i) cada face tem pelo menos um lado em comum com outra; (ii) se duas faces têm um ponto em comum, então elas têm em comum um lado ou um vértice, exatamente; (iii) é possível obter um modelo espacial do tetraedro dobrando-se convenientemente a figura da planificação nos lados comuns das faces.

Encontre, a menos de rotações ou reflexões, todos as formas de planificar tetraedros escalenos e isósceles. Faça modelos usando folha de papel.

Tema 16.10.8. Estude como são as planificações de pirâmides e prismas.

Capítulo 17

Cones, cilindros e a esfera

17.1 Introdução

Continuando nosso estudo da Geometria Euclidiana, abordamos agora os cones, os cilindros e a esfera. Esses sólidos são, às vezes, denominados "corpos redondos". Veremos suas definições, classificação e propriedades básicas.

17.2 Cones

Seja α um plano e $\mathscr{C}$ uma circunferência nele contida. Seja V um ponto fora de α. O *cone circular* de base $\mathscr{C}$ e vértice V é a reunião dos segmentos que unem os pontos de $\mathscr{C}$ com V.

Vemos na Figura 17.1 desenhos de cones circulares em diversas posições. O desenho da esquerda é o que corresponde melhor à definição dada. Os outros dois desenhos são coloridos para proporcionar uma visão mais artística.

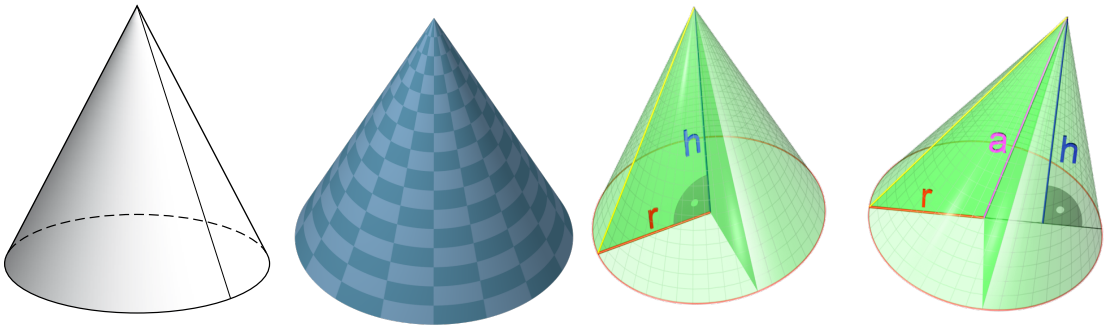


Figura 17.1. Desenhos de cones.

Se a base $\mathscr{C}$ do cone tem raio ρ, pode-se também se referir a esse cone como *cone de raio ρ e vértice V*.

A *altura* do cone é a distância de V a α. É possível definir *interior* de um cone (confira o Problema 17.3.1). A reunião de um cone com seu interior e o interior da base chama-se *cone sólido*. Nesse contexto é costume dizer que o cone é a *superfície lateral do cone sólido*. A reunião do cone com o disco determinado por sua base $\mathscr{C}$ chama-se *superfície total do cone*. Se O é o centro de

$\mathscr{C}$ e o segmento OV for perpendicular a α, dizemos que o cone é *circular reto*. Nesse caso OV chama-se *eixo* do cone circular reto, e cada segmento AV, com $A \in \mathscr{C}$, denomina-se *geratriz* do cone circular reto. Se duas geratrizes têm extremos em um diâmetro da base, o ângulo de vértice V por elas formado é o *ângulo de abertura* do cone, e sua medida é a *abertura* do cone. Um cone não reto pode ser chamado de *oblíquo*. Se necessário podemos definir *cone circular fechado* como o sólido que contém o cone e o disco de sua base.

O estudante deve estar atento à definição geral de cone. É a mesma acima, mas considerando $\mathscr{C}$ um subconjunto não vazio qualquer de α. Por exemplo, $\mathscr{C}$ pode ser uma elipse, uma parábola, uma hipérbole. Se for um polígono, o cone é uma pirâmide. No ensino básico dificilmente se estudam cones não circulares. Por isso, nesse contexto, se diz simplesmente cone em vez de cone circular.

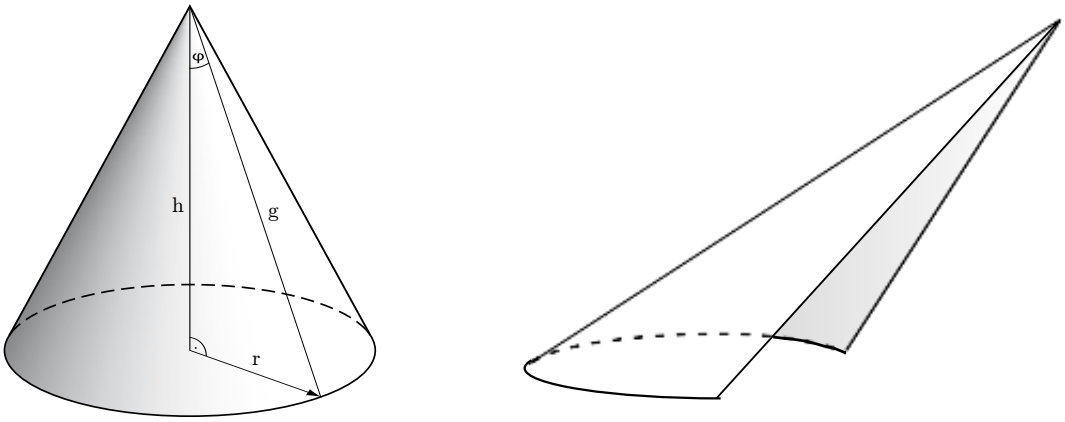


Figura 17.2. Um cone circular reto e um cone geral.

A Figura 17.2 mostra, à esquerda, um cone circular reto com alguns elementos, como o raio, a altura, uma geratriz, e um ângulo relacionado com o ângulo de abertura. Observamos que o raio e a altura não fazem parte do cone, as geratrizes, sim. À direita, na mesma Figura, vemos um cone geral, cuja base é uma curva aberta.

Observamos que ao estudar cones em um livro de Geometria deve-se ficar atento às definições adotadas pelo autor. Alguns autores denominam cone ao que aqui estamos chamando de cone sólido.

Um resultado importante sobre cones é estudado no teorema a seguir. Responde ao que ocorre quando seccionamos um cone com um plano paralelo à sua base. Ao desenhar um cone circular numa folha de papel temos que adotar alguma perspectiva. Assim, ao seccionar o cone em um desenho parece que obtemos uma elipse. Mas é uma circunferência mesmo. Vejamos os detalhes.

Teorema 17.1. *A interseção de um cone circular de altura h e raio ρ com um plano paralelo à base, situado à distância $k > 0$ do vértice e $h-k > 0$ do plano da base, é uma circunferência de raio $(k/h)\rho$. Além disso, o centro dessa circunferência, o centro da base e o vértice são colineares.*

Demonstração. Usaremos as notações da Figura 17.3. Chamamos de α o plano da base, β o plano que interseta o cone e O o centro de $\mathscr{C}$. Então β interseta OV em um ponto interior desse segmento, e denotamos esse ponto por O'. Seja $\mathscr{L}$ a interseção de β com o cone. Queremos provar que $\mathscr{L}$ é a circunferência $\mathscr{C}'$ de β com centro em O' e raio $(k/h)\rho$.

Suponhamos primeiro que o cone seja reto. Temos a situação ilustrada no desenho da esquerda da Figura 17.3. Notemos que OV é o eixo e altura do cone.

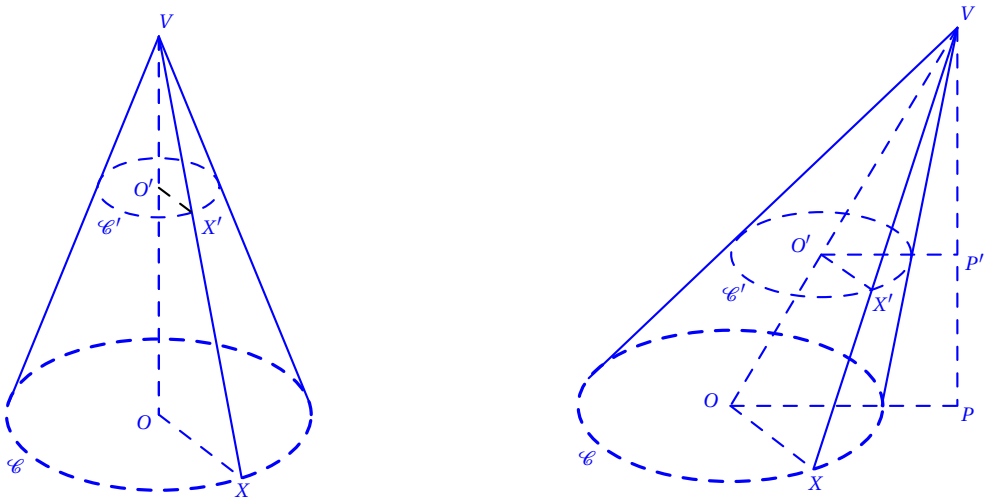


Figura 17.3. Ilustração do Teorema 17.1.

Seja $X' \in \mathscr{L}$. Como X' está no cone, pertence a uma geratriz VX desse cone, com $X \in \mathscr{C}$. Os pontos O, O', V, X e X' são coplanares e formam dois triângulos VOX e $VO'X'$. Como $\alpha \parallel \beta$ temos $OX \parallel O'X'$, de forma que $VOX \sim VO'X'$. Daí temos

$$\frac{O'X'}{OX} = \frac{VO'}{VO} = \frac{k}{h} \Rightarrow O'X' = \frac{k}{h}\rho$$

Portanto $X' \in \mathscr{C}'$, e provamos que $\mathscr{L} \subset \mathscr{C}'$.

Por outro lado, seja $X' \in \mathscr{C}'$. Temos $X' \in \beta$ e $O'X' = (k/h)\rho$, mas não sabemos se X' está no cone. Para verificar isso consideremos a reta de α por O paralela a $O'X'$. Essa reta interseta $\mathscr{C}$ em dois pontos, seja X aquele que está do mesmo lado que X' em relação a $\overleftrightarrow{OV}$. Então VX é uma geratriz do cone, VOX é um triângulo e a semirreta $\overrightarrow{O'X'}$ interseta VX num ponto X''. Aplicando semelhança de triângulos da mesma forma com que fizemos acima, temos $O'X'' = (k/h)\rho$. Então $X'' = X'$, e assim X' está no cone, logo em $\mathscr{L}$. Provamos que $\mathscr{L} = \mathscr{C}'$.

Suponhamos agora que o cone seja oblíquo, de modo que temos a situação ilustrada no desenho da direita da Figura 17.3. Seja VP uma altura, com $P \in \alpha$ e $VP \perp \alpha$. O plano β interseta VP no ponto P'. Os pontos O, O', V, P e P' são coplanares e formam dois triângulos VOP e $VO'P'$. Como $\alpha \parallel \beta$ temos $OP \parallel O'P'$, de forma que $VOP \sim VO'P'$. Daí temos

$$\frac{VO'}{VO} = \frac{VP'}{VP} = \frac{k}{h}$$

Estamos agora em situação análoga à do caso reto, e a demonstração feita ali pode ser assumida. Com isso terminamos. □

Futuramente precisaremos do

Corolário 17.2. *Com as anotações do Teorema 17.1, a razão entre a área da seção com a área da base do cone é* $(k/h)^2$.

Demonstração. Vimos no Teorema 17.1 que o raio da seção é $(k/h)\rho$, sendo ρ o raio da base do cone. Então a razão entre a área da seção com a área da base do cone é

$$\frac{\pi[(k/h)\rho]^2}{\pi\rho^2} = \left(\frac{k}{h}\right)^2$$

□

Consideremos um modelo, contruído com uma folha de papel, de um cone circular reto de vértice V, altura h e raio ρ. Cortando o modelo ao longo de uma geratriz g podemos obter uma planificação, como mostra a Figura 17.4. O cone planificado é um setor de um disco de raio g e ângulo θ, ângulo esse que devemos determinar.

Notemos primeiro que o contorno desse setor é o arco de circunferência de extremos A e B e raio g. A relação de θ (medido em graus) com o comprimento desse arco é dada pelo Teorema **??**:

$$l(\overset{\frown}{AB}) = g\frac{\pi}{180}\theta$$

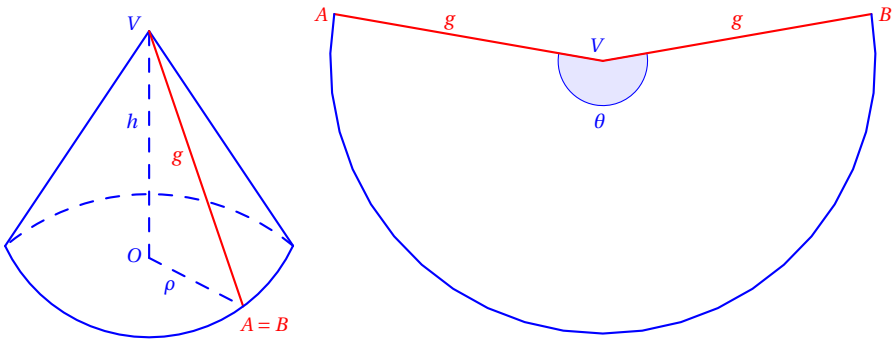


Figura 17.4. Planificação do cone reto.

Por outro lado, o arco $\overset{\frown}{AB}$ da planificação apareceu como um desdobramento da circunferência da base do cone. Como essa circunferência tem raio ρ então

$$l(\overset{\frown}{AB}) = 2\pi\rho$$

Igualando essas duas relações obtemos

$$\theta = \frac{\rho}{g}360$$

(repetimos: aqui θ está medido em graus).

A área S desse setor de circunferência é dada pelo Teorema **??**:

$$S = \pi g^2\frac{\theta}{360} = \pi g^2\frac{\rho}{g} = \pi\rho g = \pi\rho\sqrt{\rho^2+h^2}$$

Se aceitarmos que a planificação não deforma a superfície do cone, então essa é a área do cone, ou, como se costuma dizer, é a área da superfície lateral, sem a área da base.

Em resumo, a área S do cone circular reto de raio ρ, altura h e geratriz g é

$$S = \pi\rho g = \pi\rho\sqrt{\rho^2+h^2} \tag{17.1}$$

Sobre a área do cone confira também o Problema 17.3.16.

17.3 Problemas

Problema 17.3.1. Defina interior de um cone circular. É melhor não incluir em sua definição os pontos do interior da circunferência da base. Argumente para justificar que esse conjunto é convexo.

Problema 17.3.2. Explique por que em um cone circular reto todas as geratrizes são congruentes. Ache uma fórmula algébrica que relacione a altura, a geratriz e o raio de um cone reto. Explique por que o ângulo entre uma geratriz e a altura (ângulo ϕ da Figura 17.2) é a metade do ângulo de abertura do cone.

Problema 17.3.3. Ao definir abertura de um cone usamos um diâmetro da base. Esquecemos de dizer que a abertura não depende do diâmetro escolhido. Explique você por que não depende.

Problema 17.3.4. Argumente para justificar por que o desenho da direita da Figura 17.4 é a planificação do cone. Qual é a relação entre θ e o ângulo de abertura do cone?

Problema 17.3.5. Como fica a planificação do cone se nele estiver incluído o disco da base?

Problema 17.3.6. Planificando um cone reto de geratriz g e de base circular de raio ρ, obtém-se um setor circular de 210^0. Calcule $\operatorname{sen}\theta$, em que θ é o ângulo formado pela geratriz com o eixo do cone.

Problema 17.3.7. Um cone circular reto se diz *equilátero* se o diâmetro da base for congruente à geratriz. Qual é a sua abertura? Como é a planificação de um tal cone?

Problema 17.3.8. Um cone circular reto tem altura h e área lateral S. Ele é cortado por um plano paralelo ao plano da base e que dista $h/3$ desse plano. Qual é a área lateral do cone menor assim obtido? O que muda nesse problema se "área lateral" for trocado por "área total"?

Problema 17.3.9. Um cone circular reto tem altura h e raio ρ. Ele é cortado por um plano paralelo ao plano da base. A que distância deve estar esse plano do plano da base para que a área do cone menor seja a metade da do cone original?

Problema 17.3.10. Considere um cone fechado circular reto de raio ρ e altura h. Determine a figura (descreva e calcule seus elementos métricos) formada pela seção do cone por um plano que contém seu eixo. Calcule sua área.

Problema 17.3.11. Desenhe um triângulo ABC, retângulo em A, com medidas $BC = a$, $AC = b$ e $AB = c$. **a)** Gire a figura em torno do cateto AB, obtendo a superfície de um cone. Calcule sua área lateral S_{AB}. **b)** Gire a figura em torno do cateto AC, obtendo a superfície de um cone. Calcule sua área lateral S_{AC}. **c)** Gire a figura em torno da hipotenusa BC, obtendo a superfície de um sólido que é a junção de dois cones pela base. Calcule sua área S_{BC}. **d)** Prove que

$$\frac{S_{AB} + S_{AC}}{S_{BC}} = \frac{a^2}{bc}$$

Problema 17.3.12. Considere um cone circular reto de vértice V, de altura h e cuja base $\mathscr{C}$ de raio ρ está contida em um plano α. Um plano β, paralelo a α e à distância $d < h$, interseta o cone na circunferência $\mathscr{C}'$, de raio ρ'. A porção do cone situada entre sua base e o plano α é denominada **tronco de cone reto** de bases $\mathscr{C}$ e $\mathscr{C}'$ (ou raios ρ e ρ') e altura d. Obtenha a forma da planificação de um tronco de cone reto, e relacione suas medidas com a do modelo espacial. Escreva uma fórmula para a área do tronco de cone reto como diferença das áreas de dois cones. Confira Ilustração na Figura 17.5.

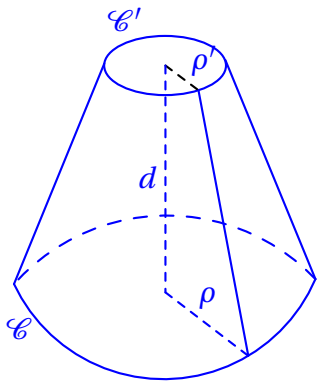


Figura 17.5. Tronco de cone reto.

Problema 17.3.13. Considere o tronco de cone reto definido no Problema 17.3.12. Seja g a porção da geratriz situada entre os planos α e β. Obtenha a seguinte fórmula para a sua área S_T:

$$S_T = \pi g(\rho + \rho') \tag{17.2}$$

Sugestão: Seja g' a geratriz do cone que foi "eliminado", e seja g'' a geratriz do cone inteiro. Use a Figura 17.6 para obter as relações necessárias.

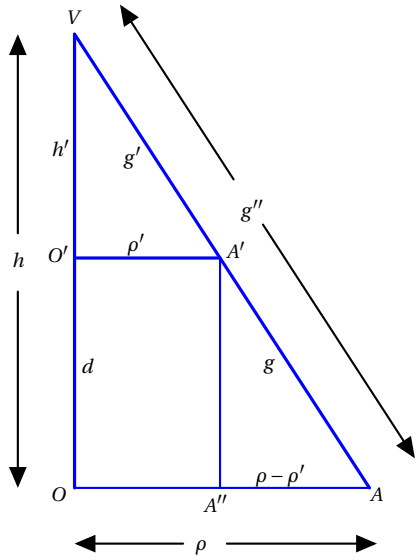


Figura 17.6. Esquema para o tronco de cone reto.

Problema 17.3.14. Considere o tronco de cone definido no Problema 17.3.12. Obtenha uma fórmula para a sua área S_T que só dependa de ρ, ρ' e d, provando que

$$S_T = \pi\left(\rho + \rho'\right) d\sqrt{1 + \left(\frac{\rho - \rho'}{d}\right)^2}$$

Problema 17.3.15. Considere um tronco de cone fechado circular reto de raios ρ e λ e altura h. Determine a figura (descreva e calcule seus elementos métricos) formada pela seção do cone por um plano que contém seu eixo. Calcule sua área.

Problema 17.3.16. Considere um cone circular reto de vértice V, base $\mathscr{C}$ de raio ρ, altura h e geratriz g. Tome polígonos regulares com n lados inscritos em $\mathscr{C}$, de perímetros p_n. Construa as pirâmides regulares $\mathscr{P}_n$ com base nesses polígonos e vértice V. Confira ilustração na Figura 17.7. **a)** Calcule a área lateral $a(\mathscr{P}_n)$ dessas pirâmides em função de p_n, ρ e g. **b)** Assumindo que (p_n) converge para o comprimento de $\mathscr{C}$, isto é, $p_n \to 2\pi\rho$, verifique que $a(\mathscr{P}_n) \to \pi\rho g$. **c)** Observe agora que o texto ainda não definiu área do cone. Defina essa área como o limite de $a(\mathscr{P}_n)$ para $n \to \infty$. Assim confirme a fórmula para essa área comentada no texto com o uso da planificação do cone.

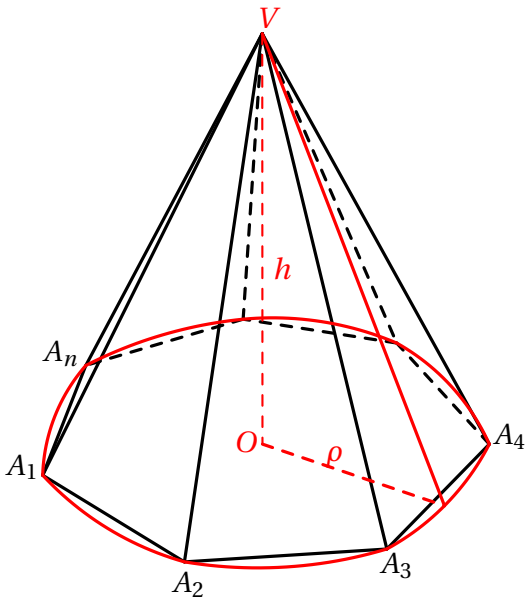


Figura 17.7. Pirâmide regular inscrita em um cone circular reto.

17.4 Cilindros

A definição de cilindro é similar à dos prismas. Vejamos.

Sejam α e β dois planos paralelos à distância h, e seja r uma reta que os interseta. Seja $\mathscr{C}$ uma circunferência em α. O *cilindro circular* de *base* $\mathscr{C}$, *diretriz* r e *altura* h é a reunião dos segmentos paralelos a r que unem os pontos de $\mathscr{C}$ a pontos de β. Esses segmentos são chamados *geratrizes* do cilindro. O raio de $\mathscr{C}$ se diz *raio* do cilindro. O cilindro se diz *reto* se $r \perp \alpha$. Um cilindro não reto pode ser chamado de *oblíquo*.

Na definição *geral* de cilindro $\mathscr{C}$ pode ser qualquer subconjunto não vazio de α. Em particular, se $\mathscr{C}$ for um polígono, o cilindro é um prisma. No ensino básico o termo cilindro é geralmente usado no lugar de cilindro circular reto.

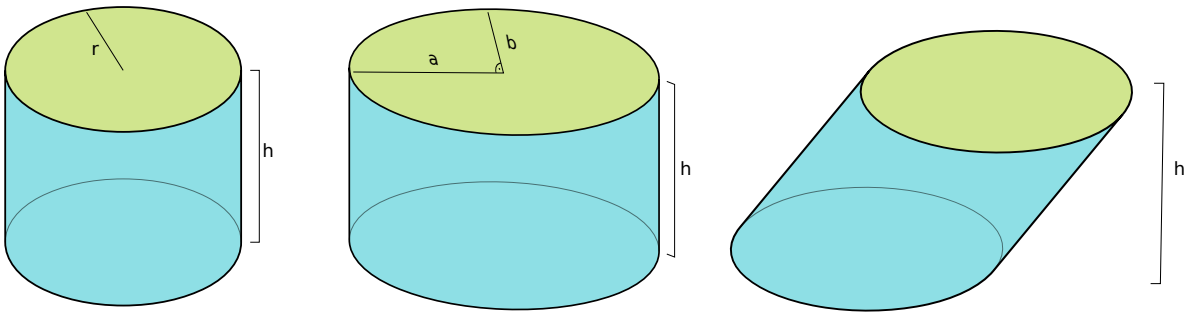


Figura 17.8. Um cilindro circular reto, um cilindro elíptico reto e um cilindro oblíquo.

A Figura 17.8 mostra, à esquerda, um cilindro circular reto com seus elementos, o raio e a altura. Observamos que o segmento que representa o raio não faz parte do cilindro. No centro, na mesma Figura, vemos um cilindro elíptico reto, mostrando os semieixos e suas medidas. À direita, um cilindro oblíquo.

A interseção do cilindro com o plano β é também chamada de base. Veremos, no Corolário 17.4, que, para o cilindro circular, ela é uma circunferência com mesmo raio que $\mathscr{C}$. É possível definir *interior* de um cilindro circular (confira o Problema 17.5.1). A reunião de um cilindro com seu interior e o interior de suas duas bases chama-se *cilindro sólido*. Nesse contexto é costume dizer que o cilindro é a *superfície lateral do cilindro sólido*. Se quisermos incluir no cilindro os interiores das suas duas bases podemos usar o nome de *cilindro fechado* ou *superfície total* do cilindro.

Observamos que ao estudar cilindros em um livro de Geometria deve-se ficar atento às definições adotadas pelo autor. Alguns autores denominam cilindro ao que aqui estamos chamando de cilindro sólido.

Um resultado importante sobre cilindros é estudado no teorema a seguir. Descreve o que ocorre se seccionamos um cilindro circular com um plano paralelo ao plano de sua base. Ao desenhar um cilindro circular numa folha de papel temos que adotar alguma perspectiva. Assim, ao seccionar o cilindro circular da forma referida parece que obtemos uma elipse. Mas é uma circunferência mesmo. Vejamos os detalhes.

Teorema 17.3. *A interseção de um cilindro circular de altura h, raio ρ e diretriz r com um plano paralelo à base, situado à distância k do plano da base, com $0 < k \leq h$, é uma circunferência de raio ρ. Além disso, o centro dessa circunferência está na reta paralela a r pelo centro da base.*

Demonstração. Sejam α e β os planos (paralelos) que delimitam o cilindro. Seja $\mathscr{C}$ a base em α, com centro em O. Seja γ o plano que secciona o cilindro, referido no enunciado. A reta s paralela à diretriz r e passando por O interseta γ em O'. Seja $\mathscr{L}$ a interseção do cilindro com γ. Queremos provar que $\mathscr{L}$ é a circunferência $\mathscr{C}'$ de γ com centro em O' e raio ρ.

Seja $X' \in \mathscr{L}$. Como X' está no cilindro, está em uma geratriz, que interseta $\mathscr{C}$ em um ponto X. Como OO' e XX' são ambos paralelos a r, segue que são paralelos entre si, e o quadrilátero $OO'X'X$ é coplanar. Como $\alpha \parallel \gamma$ segue $OX \parallel O'X'$, e o quadrilátero é um paralelogramo, o que implica $O'X' = OX = \rho$. Portanto $X' \in \mathscr{C}'$. Provamos que $\mathscr{L} \subset \mathscr{C}'$. Confira ilustração na Figura 17.9.

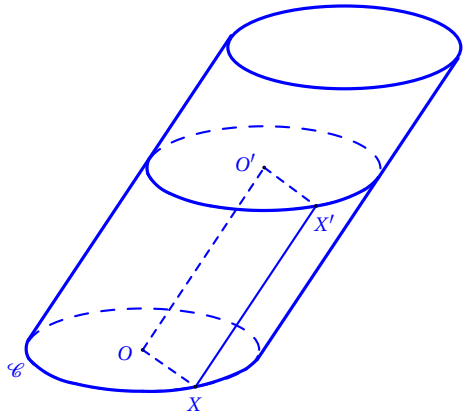


Figura 17.9. Cilindro oblíquo com seção paralela.

Seja agora $X' \in \mathscr{C}'$. Temos $X' \in \gamma$ e $O'X' = \rho$, mas não sabemos se X' está no cilindro. Para verificar isso consideremos a reta de α por O paralela a $O'X'$. Essa reta interseta $\mathscr{C}$ em dois pontos, seja X aquele que está do mesmo lado que X' em relação a $\overleftrightarrow{OO'}$. Consideremos a geratriz g do cilindro determinada por X. Essa geratriz interseta γ em um ponto X'' (esse ponto pertence ao cilindro). Novamente o quadrilátero $OO'X''X$ é coplanar e paralelogramo (por ter os dois pares de lados opostos paralelos). Isso implica $O'X'' = OX = \rho$. Como $O'X' \parallel OX$ e $O'X'' \parallel OX$, e X' e X'' estão do mesmo lado em relação a O', segue que são pontos da semirreta $\overrightarrow{O'X'}$ situados à distância ρ de O'. Logo são o mesmo ponto. Assim X' está no cilindro, o que implica $X' \in \mathscr{L}$. Portanto $\mathscr{C}' \subset \mathscr{L}$.

Isso completa a demonstração de que $\mathscr{L} = \mathscr{C}'$. □

Corolário 17.4. *Dado um cilindro circular de raio ρ e diretriz r, a segunda base é uma circunferência de raio ρ. Alem disso, o segmento que une os centros das duas bases é paralelo a r.*

Demonstração. Basta tomar $\gamma = \beta$ no Teorema 17.3. □

Consideremos um modelo, contruído com uma folha de papel, de um cilindro circular reto de altura h e raio ρ. Cortando o modelo ao longo de uma geratriz g podemos obter uma planificação, como mostra a Figura 17.10. O cilindro planificado é um retângulo de altura h e comprimento $2\pi\rho$.

Se aceitarmos que a planificação não deforma a superfície do cilindro, então a área desse retângulo é a área do cilindro, ou, como se costuma dizer, é a área da superfície lateral, sem as áreas das bases.

Em resumo, a área S do cilindro circular reto de raio ρ e altura h é

$$S = 2\pi\rho h \tag{17.3}$$

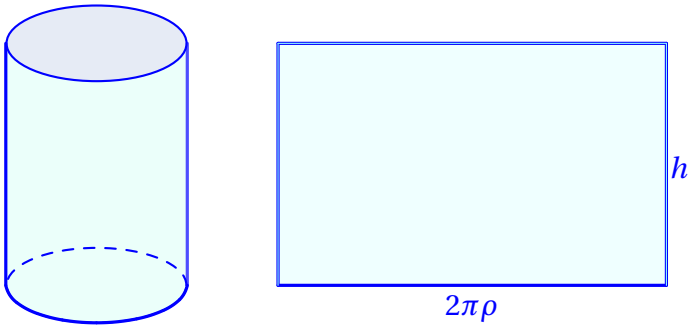


Figura 17.10. Planificação do cilindro reto.

Sobre a área do cilindro confira também o Problema 17.5.13.

17.5 Problemas

Problema 17.5.1. Defina interior de um cilindro circular. Argumente para justificar que esse conjunto é convexo.

Problema 17.5.2. Explique por que em qualquer cilindro (reto ou oblíquo) todas as geratrizes são congruentes.

Problema 17.5.3. Um cilindro circular reto se diz *equilátero* quando sua altura for igual ao diâmetro das bases. Escreva uma expressão para a área desse tipo de cilindro.

Problema 17.5.4. A *inclinação* de um cilindro é a medida do ângulo que a sua reta diretriz faz com o plano da base. Explique por que a medida do ângulo entre qualquer geratriz e o plano da base é essa mesma inclinação. Dê uma relação algébrica entre as medidas das geratrizes, a altura e a inclinação.

Problema 17.5.5. Argumente para justificar por que o desenho da direita da Figura 17.10 é a planificação do cilindro circular reto de raio ρ e altura h.

Problema 17.5.6. Como fica a planificação do cilindro circular reto fechado (inclua os discos das duas bases)?

Problema 17.5.7. Descubra como fica a planificação de um cilindro circular oblíquo de raio ρ, altura h e inclinação ϕ. Qual é a área desse cilindro?

Problema 17.5.8. É dado um cilindro circular reto de raio ρ e altura h. Qual deve ser a altura de um cone circular reto com mesmo raio para que os dois sólidos tenham a mesma área (área de superfície lateral)?

Problema 17.5.9. Considere um cilindro circular reto de raio ρ cm e altura h cm. Se o raio aumentar 10% e a altura 20%, qual é a porcentagem de aumento da área?

Problema 17.5.10. Considere um cilindro fechado circular reto de raio ρ e altura h. Determine que tipo de figuras podem ser formadas por sua interseção com planos paralelos ao seu eixo. Dê os elementos dessas figuras em função da distância do plano ao eixo.

Problema 17.5.11. Um cilindro circular reto de raio ρ está apoiado dentro de um cone circular reto de raio $\lambda > \rho$ e altura h, de modo que seus eixos estão na mesma reta (confira a Figura 17.11). Determine a distância do centro da base inferior do cilindro ao vértice do cone.

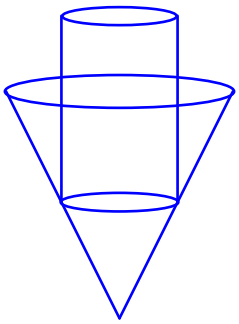


Figura 17.11. Cilindro circular reto apoiado em um cone circular reto.

Problema 17.5.12. Um cone circular reto de raio ρ e altura h está apoiado dentro de um cilindro circular reto de raio $\lambda < \rho$ e altura H, de modo que seus eixos estão na mesma reta (confira a Figura 17.12). Encontre condições sobre essas medidas para que: (i) o vértice do cone coincida com o centro da base inferior do cilindro; (ii) o vértice do cone esteja acima do centro da base inferior do cilindro. Nesse caso ache a distância do centro da base inferior do cilindro ao vértice do cone.

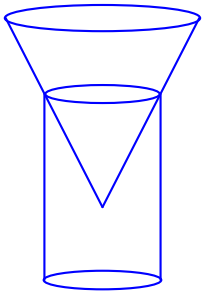


Figura 17.12. Cone circular reto apoiado em um cilindro circular reto.

Problema 17.5.13. Considere um cilindro circular reto de base $\mathscr{C}$ com raio ρ e altura h. Tome polígonos regulares com n lados inscritos em $\mathscr{C}$, de perímetros p_n. Construa os prismas retos $\mathscr{P}_n$ com base nesses polígonos e com altura h. Confira ilustração na Figura 17.13. **a)** Calcule a área lateral $a(\mathscr{P}_n)$ desses prismas em função de p_n e h. **b)** Assumindo que (p_n) converge para o comprimento de $\mathscr{C}$, isto é, $p_n \to 2\pi\rho$, verifique que $a(\mathscr{P}_n) \to 2\pi\rho h$. **c)** Observe agora que o texto ainda não definiu área do cilindro. Defina essa área como o limite de $a(\mathscr{P}_n)$ para $n \to \infty$. Assim confirme a fórmula para essa área comentada no texto com o uso da planificação do cilindro.

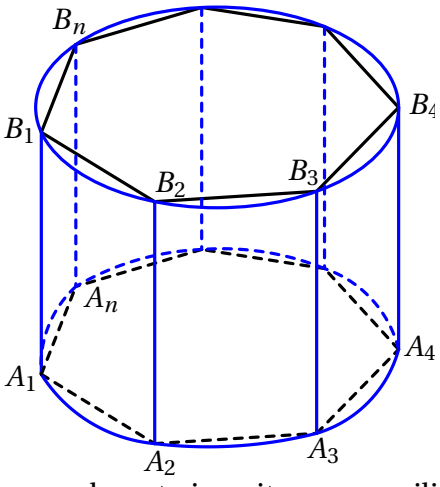


Figura 17.13. Prisma regular reto inscrito em um cilindro circular reto.

17.6 A esfera

Procedemos agora ao estudo da esfera. Vejamos inicialmente algumas definições.

Definições 17.5. Sejam O um ponto do espaço e ρ um número real positivo. A *superfície esférica*, ou, simplesmente, *esfera*, de *centro* O e *raio* ρ é o conjunto dos pontos do espaço cuja distância a O é ρ. Também chamamos de raio ao segmento que liga o centro da esfera a um de seus pontos. Uma *corda* da esfera é um segmento cujas extremidades estão na esfera. Um *diâmetro* é uma corda que passa pelo centro. Por diâmetro também designamos o número que é o dobro do raio. Dois pontos da esfera se dizem *antípodas* se forem extremidades do mesmo diâmetro. A interseção de uma esfera com um plano que contém seu centro e com qualquer um dos semiplanos por ele determinado chama-se *semiesfera* ou *hemisfério*.

O *interior* de uma esfera é estudado no Problema 17.7.2. O termo "esfera" é, às vezes, utilizado para designar o conjunto formado pela superfície esférica e seu interior. Aqui chamaremos esse conjunto de *região esférica* ou *esfera sólida*.

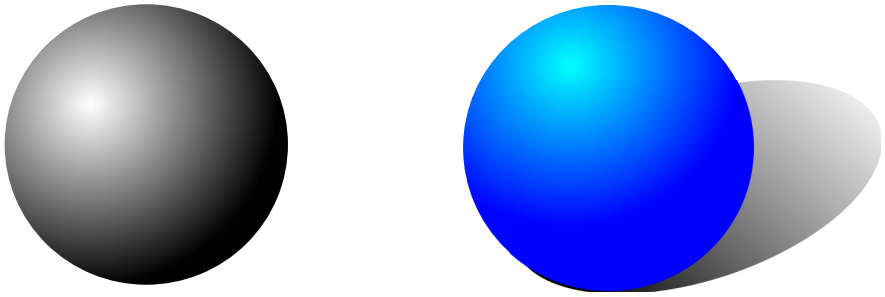


Figura 17.14. Desenhos artísticos de esferas.

O primeiro resultado sobre esferas é a

Proposição 17.6. *A interseção de uma esfera com um plano que contém seu centro é a circunferência desse plano com centro igual ao centro da esfera e raio igual ao raio da esfera.*

Demonstração. Basta usar as definições de esfera e circunferência. Confira ilustração na Figura 17.15. □

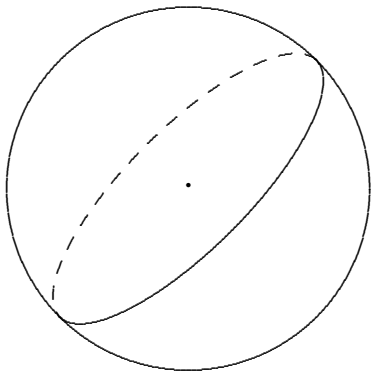


Figura 17.15. Representação de uma esfera e de um círculo máximo.

Com esse resultado podemos considerar a

Definição 17.7. A interseção de uma esfera com um plano passando pelo seu centro chama-se *círculo máximo* (da esfera). Um *semicírculo máximo* é uma semicircunferência de um círculo máximo.

Definições 17.8. Uma reta ou um plano que intersetam uma esfera em um único ponto se dizem *tangentes* a ela. Nesse caso o ponto de interseção chama-se *ponto de contato*. Uma reta ou um plano que intersetam uma esfera em mais de um ponto se dizem *secantes* a ela.

No Problema 17.7.8 vemos uma condição necessária e suficiente para que uma reta seja tangente a uma esfera. As posições relativas entre retas e esferas são estudadas no Problema 17.7.9. Vejamos resultados análogos para planos e esferas.

Teorema 17.9. *Um plano é tangente a uma esfera em um ponto de contato se e somente se o plano é perpendicular ao raio que tem extremidade nesse ponto.*

Demonstração. Seja $\mathscr{E}$ uma esfera de centro O e raio ρ. Seja α um plano perpendicular a um raio de $\mathscr{E}$, digamos $\alpha \perp OT$, com $T \in \mathscr{E} \cap \alpha$. Precisamos provar que α é tangente a $\mathscr{E}$ em T. Seja $S \in \alpha$, com $S \neq T$. Então OTS é um triângulo retângulo com hipotenusa OS, de modo que $OS > OT = \rho$. Assim S não pertence a $\mathscr{E}$, e α é tangente a $\mathscr{E}$ em T. Confira a Figura 17.16.

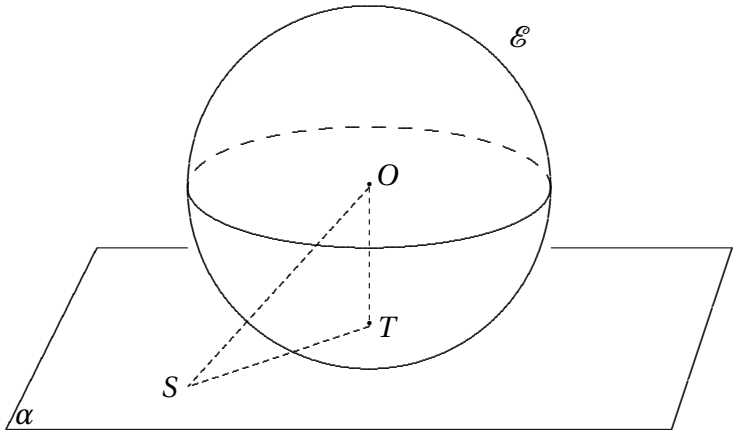


Figura 17.16. Representação de uma esfera e um plano tangente.

Reciprocamente, seja α um plano tangente a $\mathscr{E}$ em T. Portanto, por definição, o plano α interseta $\mathscr{E}$ apenas no ponto T. Queremos provar que $OT \perp \alpha$. Se não for, seja P o pé da perpendicular a α por O. No plano α consideremos o ponto U na semirreta oposta a $\overrightarrow{PT}$ e tal que $UP = PT$. Temos $U \neq T$ e $OPT \cong OPU$, de modo que $OU = OT = \rho$. Assim $U \in \alpha \cap \mathscr{E}$, o que é uma contradição. □

Escólio 17.10. *Se um plano é tangente a uma esfera em um ponto de contato então qualquer outro ponto do plano está no exterior da esfera.*

Demonstração. Seja $\mathscr{E}$ uma esfera de centro O e raio ρ e seja α um plano tangente a $\mathscr{E}$ em $T \in \mathscr{E} \cap \alpha$. Pelo Teorema 17.9 temos $\alpha \perp OT$. Seja $S \in \alpha$, com $S \neq T$. Então OTS é um triângulo retângulo com hipotenusa OS, de modo que $OS > OT = \rho$. Assim S está no exterior de $\mathscr{E}$. □

Lema 17.11. *Se um plano tem um ponto no interior de uma esfera, então a interseção do plano com a esfera é a circunferência cujo centro é o pé da perpendicular do centro da esfera ao plano e cujo raio é $\sqrt{\rho^2 - d^2}$, em que ρ é o raio da esfera e d a distância do centro da esfera ao plano.*

Demonstração. Seja $\mathscr{E}$ uma esfera de centro O e raio ρ. Seja α um plano com um ponto no interior de $\mathscr{E}$. Se esse plano contém o centro da esfera, já sabemos, da Proposição 17.6, que $\mathscr{E} \cap \alpha$ é a circunferência de α com centro em O e raio ρ. Nesse caso $d = 0$, e o Teorema vale.

Suponhamos que α não contém O. Como α tem um ponto no interior de $\mathscr{E}$, a distância de O a α é $< \rho$. Seja P o pé da perpendicular de O a α. Logo $OP = d$ é a distância de O ao plano α, com $0 < d < \rho$. Confira a Figura 17.17.

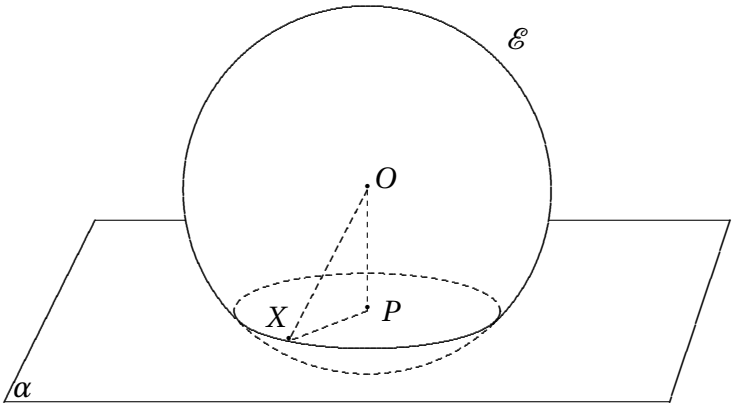


Figura 17.17. Representação de uma esfera e um plano secante.

Seja $\mathscr{L} = \mathscr{E} \cap \alpha$ e seja $\mathscr{C}$ a circunferência de α de centro P e raio $r = \sqrt{\rho^2 - d^2}$ ($r > 0$ pois $d < \rho$). Queremos provar que $\mathscr{L} = \mathscr{C}$.

Seja $X \in \mathscr{L}$. Como $X \in \mathscr{E}$ temos $OX = \rho$. Note que $X \neq O$ e $X \neq P$. Usando que OXP é retângulo em P temos $XP = \sqrt{OX^2 - OP^2} = \sqrt{\rho^2 - d^2} = r$. Como $X \in \alpha$, temos $X \in \mathscr{C}$. Provamos que $\mathscr{L} \subset \mathscr{C}$.

Seja agora $X \in \mathscr{C}$. Então $X \in \alpha$, $PX = r$, $X \neq O$ e $X \neq P$. Usando que OXP é retângulo em P temos $OX = \sqrt{PX^2 + OP^2} = \sqrt{r^2 + d^2} = \sqrt{(\rho^2 - d^2) + d^2} = \rho$, de modo que $X \in \mathscr{E}$. Logo $X \in \mathscr{E} \cap \alpha = \mathscr{L}$. Provamos que $\mathscr{C} \subset \mathscr{L}$, do que segue $\mathscr{L} = \mathscr{C}$. □

Teorema 17.12. *Sejam $\mathscr{S}$ uma esfera de raio ρ e centro O, e α um plano. Seja d a distância de O ao plano. Temos: (i) se $d > \rho$ então o plano não interseta a esfera; (ii) se $d = \rho$ então o plano é tangente à esfera; (iii) se $d < \rho$, então a interseção do plano com a esfera é a circunferência cujo centro é o pé da perpendicular do centro da esfera ao plano e cujo raio é $\sqrt{\rho^2 - d^2}$.*

Demonstração. (i) Como a menor distância de α a O é d, então todo ponto de α dista de O mais do que ρ. Portanto α e $\mathscr{S}$ não de intersetam. Na verdade, todo ponto de α está no exterior de $\mathscr{S}$.

(ii) Se $d = \rho$ então o pé da perpendicular de O ao plano é um ponto P que pertence ao plano e à esfera. Qualquer outro ponto de α dista de $\mathscr{S}$ mais do que ρ, de modo que o plano interseta a esfera em um único ponto, e assim são tangentes.

(iii) Se $d < \rho$ então o pé da perpendicular de O ao plano é um ponto P que pertence ao plano e ao interior da esfera. O resultado segue do Lema 17.11. □

17.7 Problemas

No Capítulo 22 do Tomo IV são estudadas outras propriedades da esfera.

Problema 17.7.1. Sejam O um ponto do espaço e ρ um número real positivo. Explique por que a esfera de raio ρ e centro O tem infinitos pontos.

Problema 17.7.2. Defina interior e exterior de uma esfera. Prove que são conjuntos com uma infinidade de pontos, que o interior é convexo e o exterior não é convexo.

Problema 17.7.3. Prove que, dados dois pontos não antípodas em uma esfera, existe um círculo máximo que os contém, e é único. O que ocorre se os pontos forem antípodas?

Problema 17.7.4. Consideremos em uma esfera uma corda qualquer que não contenha seu centro. Prove que um raio a interseta em seu ponto médio se e somente se o raio lhe é perpendicular.

Problema 17.7.5. Demonstre que, dada uma corda de uma esfera, o interior da corda está contido no interior da esfera.

Problema 17.7.6. Demonstre que, em uma esfera, o diâmetro é a maior das cordas.

Problema 17.7.7. Sejam AB e CD dois diâmetros de uma esfera. Prove que $ACBD$ é um retângulo. O que ocorre se os diâmetros são perpendiculares?

Problema 17.7.8. Demonstre que uma reta é tangente a uma esfera num ponto de contato se e somente se a reta é perpendicular ao raio de extremidade nesse ponto.

Problema 17.7.9. Seja d a distância de uma reta ao centro de uma esfera de raio ρ. Prove que: (i) se $d > \rho$ então a reta não interseta a esfera; (ii) se $d = \rho$ então a reta é tangente à esfera; (iii) se $d < \rho$ então a reta interseta a esfera em exatamente dois pontos. Como corolário conclua que uma reta interseta uma esfera em no máximo dois pontos.

Problema 17.7.10. Prove que, em toda esfera, dois círculos máximos quaisquer se encontram em exatamente dois pontos antípodas.

Problema 17.7.11. Em uma esfera, dois círculos máximos se dizem perpendiculares quando os planos que os contêm são perpendiculares. Demonstre que, dados dois círculos máximos quaisquer, existe um único círculo máximo perpendicular a ambos.

Problema 17.7.12. Considere um sistema de coordenadas cartesianas $O(x,y,z)$. Calcule o raio da circunferência formada pela interseção da esfera de centro $(0,0,0)$ e raio 2 com o plano $10x+7.5y+12z-30=0$. Confira ilustração na Figura 17.18.

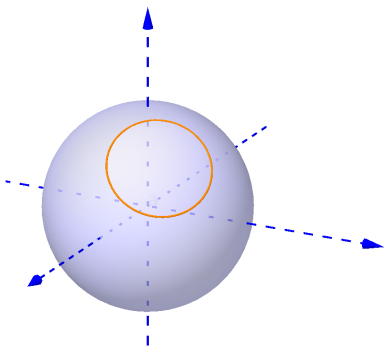


Figura 17.18. Interseção de esfera com plano.

Problema 17.7.13. Seja AB um segmento (do espaço). Seja $\mathscr{L}$ o conjunto dos pontos P tais que $\widehat{APB}$ é um ângulo reto. Demonstre que $\mathscr{L}$ é a esfera com diâmetro AB, menos os pontos A e B.

Problema 17.7.14. Fixemos um círculo máximo em uma esfera, que será designado por *equador*. Os *polos* da esfera (relativos a esse equador) são aqueles pontos (da esfera) que equidistam de todos os pontos do equador. Localize esses polos.

Problema 17.7.15. Seja P um ponto no exterior de uma esfera. Determine o conjunto dos pontos T da esfera para os quais $\overleftrightarrow{PT}$ lhe é tangente.

Problema 17.7.16. Mostre que quatro pontos não coplanares determinam uma única esfera que os contém.

Solução. Sejam A, B, C e D quatro pontos não coplanares. Sejam P e Q os circuncentros dos triângulos BCD e ABC, respectivamente. Sejam r a reta por P perpendicular ao plano do triângulo BCD, e s a reta por Q perpendicular ao plano do triângulo ABC. Sabemos que r é o conjunto dos pontos do espaço equidistantes de B, C e D, e que s é o conjunto dos pontos do espaço equidistantes de A, B e C (Problema 15.7.30). Confira a Figura 17.19.

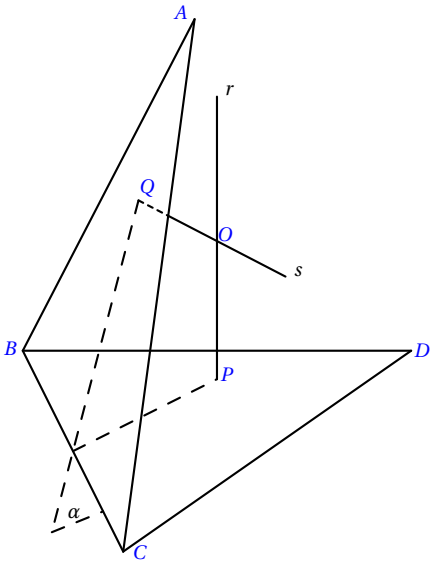


Figura 17.19. Desenho para o Problema 17.7.16.

Seja α o plano mediador do segmento BC. Como α contém todos os pontos equidistantes de B e C, temos $r \subset \beta$ e $s \subset \beta$. Assim r e s são coplanares. Essas retas não são paralelas, pois se o fossem os planos dos triângulos BCD e ABC seriam o mesmo, contrariando a hipótese de que os quatro pontos A, B, C e D não são coplanares. Seja O a interseção de r e s. Então O é equidistante desses quatro pontos. A esfera $\mathscr{E}$ com centro em O e raio OA contém os quatro pontos.

A esfera $\mathscr{E}$ é única. De fato, seja O' o centro de uma esfera qualquer contendo os quatro pontos. Então $O' \in r$ pois é equidistante de B, C e D, e $O' \in s$ pois é equidistante de A, B e C. Logo $O' \in r \cap s$ e segue que $O' = O$. Assim qualquer esfera contendo os quatro pontos tem centro em O, e o raio é a distância de O a um desses pontos, de modo que essa esfera é $\mathscr{E}$.

Portanto existe e é única a esfera contendo quatro pontos não coplanares quaisquer.

Problema 17.7.17. Sejam $\mathscr{C}$ uma circunferência e A um ponto não contido no plano de $\mathscr{C}$. Prove que existe uma única esfera que contém $\mathscr{C}$ e A.

Problema 17.7.18. Duas circunferências não coplanares têm dois pontos em comum. Explique por que existe uma esfera que contém ambas as circunferências.

Problema 17.7.19. Uma esfera de raio R está apoiada no interior de um cone circular reto de raio ρ e altura h, como ilustrado na Figura 17.20. Ache a distância d do centro da esfera ao vértice do cone. Mostre que a interseção do cone com a esfera é uma circunferência, e ache a medida de seu raio.

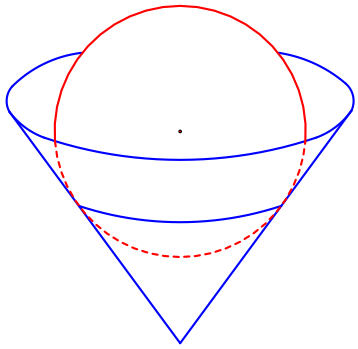


Figura 17.20. Representação de uma esfera apoiada no interior de um cone.

17.8 Inscrição e circunscrição de um sólido em outro

Esse é um dos assuntos mais interessantes da Geometria Espacial. Vejamos alguns resultados básicos e uma lista de problemas correlatos.

De forma geral se diz que um sólido $\mathscr{P}$ *está inscrito* em um sólido $\mathscr{R}$ quando $\mathscr{P}$ está no interior de $\mathscr{R}$ e alguns elementos de $\mathscr{P}$, escolhidos convenientemente e de acordo com a situação, pertencem à superfície de $\mathscr{R}$.

De outra forma, se diz que um sólido $\mathscr{R}$ *circunscreve* ou é *circunscrito* a um sólido $\mathscr{P}$ quando $\mathscr{P}$ está no interior de $\mathscr{R}$ e alguns elementos de $\mathscr{P}$, escolhidos convenientemente e de acordo com a situação, pertencem à superfície de $\mathscr{R}$.

Já vimos no texto vários resultados sobre esferas inscritas e circunscritas em sólidos, apenas não usamos essa nomenclatura.

Por exemplo, vimos na página 32 que o cubo tem um centro, um ponto O situado em seu interior. Se a aresta do cubo mede a, a distância desse ponto aos seus vértices tem o valor comum $R = a\sqrt{3}/2$ (metade da diagonal do cubo). Portanto a esfera de centro O e raio R contém todos os vértices do cubo e se diz a ele circunscrita. Por outro lado O é equidistante das faces do cubo, e essa distância é $\rho = a/2$ (metade da medida da aresta do cubo). Portanto a esfera de centro O e raio ρ é tangente a todas as faces do cubo, e é chamada esfera nele inscrita. Os pontos de tangência são os centros das faces. Confira ilustração na Figura 17.21.

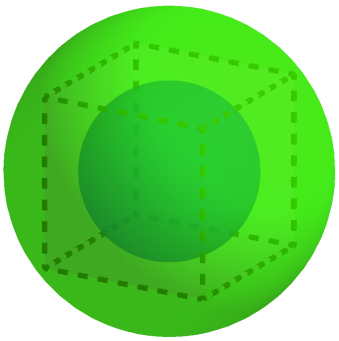


Figura 17.21. Cubo com esfera inscrita e esfera circunscrita.

O cubo tem outra esfera coligada. O ponto O é também equidistante das arestas do cubo, e essa distância mede $r = a\sqrt{2}/2$. Assim a esfera com centro em O e raio r é tangente a todas as arestas do cubo. Os pontos de tangência são os pontos médios das arestas. Essa esfera pode ser denominada *esfera média*. Confira ilustração na Figura 17.22.

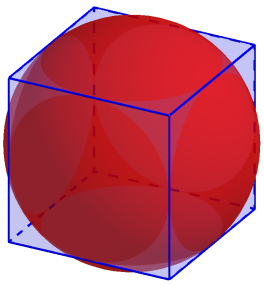


Figura 17.22. Cubo com esfera inscrita nas arestas.

Vejamos agora esferas relacionadas com o tetraedro. Temos o

Teorema 17.13. *Todo tetraedro tem uma única esfera inscrita, tangente a todas as suas faces, e uma única esfera circunscrita, que contém todos os seus vértices.*

Demonstração. Vimos no Problema 17.7.16 que quatro pontos não coplanares determinam uma única esfera que os contém. Portanto existe uma única esfera circunscrita ao tetraedro.

Seja $ABCD$ um tetraedro qualquer. Sejam α o semiplano bissetor do diedro $[CABD]$ e β o semiplano bissetor do diedro $[ABCD]$. Como os quatro vértices do tetraedro são não coplanares, esses semiplanos não são paralelos. Assim se intersetam em uma semirreta ω com origem em B (essa semirreta é a trissetriz do triedro com origem em B, confira o Problema 15.7.17 na página 20). A interseção de ω com o interior do tetraedro é o conjunto dos pontos (desse interior) que são equidistantes das três faces $[ABC]$, $[BCD]$ e $[ABD]$. Considere agora γ o semiplano bissetor do diedro $[ACDB]$. Sua interseção com ω é o ponto O que é assim equidistante das quatro faces do tetraedro. Esse ponto é o centro de uma esfera tangente às faces do tetraedro. Portanto, é uma esfera inscrita.

Seja O' o centro de uma esfera inscrita no tetraedro. Então O' está no seu interior e é equidistante de todas as faces, assim está nos planos bissetores dos seus diedros. Isso implica $O' = O$. Como seu raio é essa distância comum, essa esfera tem que ser aquela já determinada. Portanto a esfera inscrita é única. Confira ilustrações na Figura 17.23. □

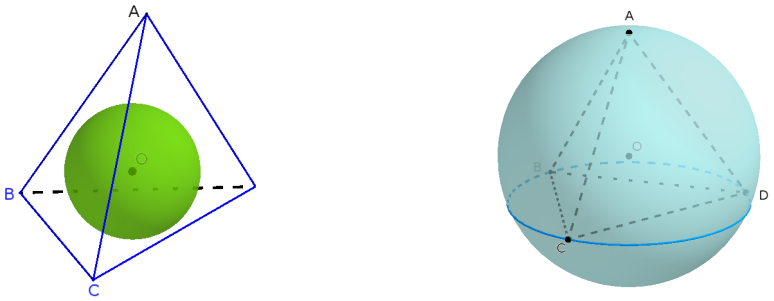


Figura 17.23. Esfera inscrita e esfera circunscrita a um tetraedro

Em casos particulares não é difícil calcular o circunraio R (raio da esfera circunscrita) e o inraio ρ (raio da esfera inscrita) do tetraedro. Já fizemos isso para o tetraedro regular, a partir da página 41. Vimos que o tetraedro regular tem um centro, e $R = \sqrt{6}a/4$, sendo a a aresta desse tetraedro. O inraio é $\rho = \frac{\sqrt{6}}{12}a$. O tetraedro regular também tem a esfera média (esfera tangente às suas arestas), e seu raio é $r = a\sqrt{2}/4$.

Sobre fórmulas para o circunraio e o inraio relativos a tetraedros quaisquer consulte [51].

O assunto de inscrição e circunscrição de sólidos é bastante extenso. Alguns aspectos adicionais são propostos na lista de problemas a seguir.

17.9 Problemas

Problema 17.9.1. Considere um tetraedro regular, e ligue com segmentos os centros de suas faces. Que sólido se obtém? Se a aresta do tetraedro regular é a, quanto medem as arestas desse sólido?

Problema 17.9.2. Defina o que é um cubo inscrito em um cilindro circular reto. Dados um cilindro circular reto e um cubo nele inscrito, relacione as medidas de ambos.

Problema 17.9.3. Um cubo se diz inscrito em um cone circular quando uma face do cubo está contida no disco da base do cone e os vértices da face oposta estão contidos na superfície lateral do cone. **a)** Demonstre que se um cubo está inscrito em um cone circular reto, então o centro da base do cone coincide com o centro da face do cubo nela contida. **b)** Um cubo de aresta a está inscrito em um cone circular reto de raio ρ e altura h. Calcule a em função de ρ e h. Faça figuras ilustrativas. **c)** Explique por que todo cone circular reto tem cubo inscrito. **d)** Cones circulares oblíquos podem ter cubo inscrito?

Problema 17.9.4. Uma esfera se diz inscrita em um cone quando ela for tangente ao plano da base do cone e for tangente a todas as arestas laterais do cone. Confira a Figura 17.24, desenho da esquerda. **a)** Demonstre que todo cone circular reto tem esfera inscrita. Localize o centro dessa esfera e calcule seu raio em função da altura h e do raio ρ do cone. Sugestão: use a Figura 17.24, desenho da direita. **b)** Demonstre que a interseção da superfície lateral de um cone circular reto com sua esfera inscrita é uma circunferência situada em um plano paralelo ao plano da base do cone. Nesse caso calcule o raio dessa circunferência. **c)** Cones oblíquos têm esfera inscrita?

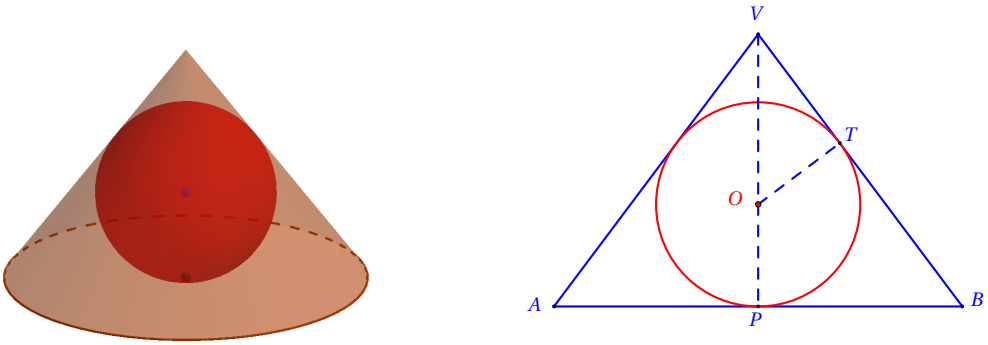


Figura 17.24. Esfera inscrita em um cone e esquema de um corte vertical.

Problema 17.9.5. Esclareça o que é uma esfera circunscrita a um cone. Prove que todo cone circular (reto ou não) tem esfera circunscrita. Se um cone circular reto está inscrito em uma esfera, relacione algebricamente as medidas dos dois sólidos. Particularize para cones equiláteros.

Problema 17.9.6. Considerando o desenho da Figura 17.25, esclareça o que é uma esfera inscrita em um cilindro circular reto. Determine os cilindros circulares retos que têm esfera inscrita, localizando o centro da esfera e relacionando entre si os elementos métricos dos dois sólidos.

Problema 17.9.7. Consideremos um cilindro circular reto com bases nos planos paralelos α e β. Esse cilindro se diz inscrito numa esfera se suas duas bases são iguais à interseção dessa esfera com α e β. Confira ilustração na Figura 17.26. **a)** Prove que todo cilindro circular reto pode ser inscrito numa esfera, e que o centro dessa esfera é o ponto médio do eixo do cilindro. Relacione o raio da esfera com os elementos métricos do cilindro. **b)** Explique por que um cilindro circular oblíquo não tem esfera circunscrita.

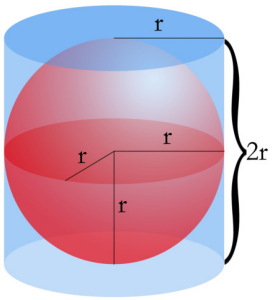


Figura 17.25. Desenho de esfera inscrita em cilindro.

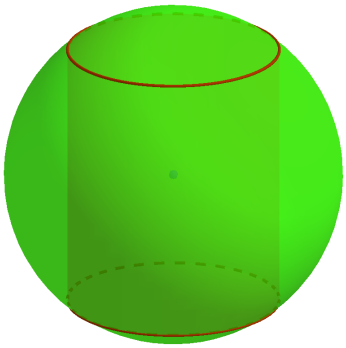


Figura 17.26. Desenho de um cilindro inscrito em uma esfera.

Problema 17.9.8. Uma pirâmide se diz inscritível em uma esfera quando todos os seus vértices pertencem à esfera. Demonstre que uma pirâmide é inscritível em uma esfera se e somente se o polígono da sua base for inscritível em uma circunferência. Nesse caso, a esfera circunscrita à pirâmide é única.

Problema 17.9.9. Devido ao Problema 17.9.8, toda pirâmide regular é inscritível em uma esfera. Nessa situação localize o centro da esfera e calcule seu raio em função dos elementos da pirâmide.

Problema 17.9.10. Defina o que é uma esfera ser inscrita a uma pirâmide. Prove que toda pirâmide regular tem esfera inscrita (e que é única).

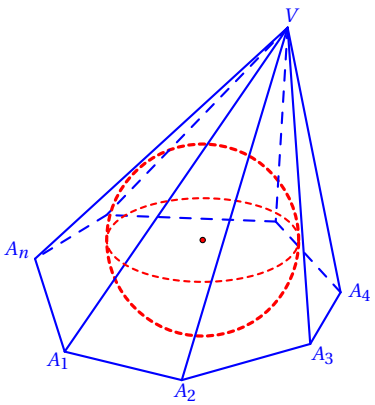


Figura 17.27. Esfera inscrita em uma pirâmide.

Problema 17.9.11. Defina o que é um prisma ser inscritível em uma esfera. Demonstre que um prisma é inscritível em uma esfera se e somente se o prisma for reto e suas bases são polígonos inscritíveis em circunferências. Nesse caso encontre a posição do centro da esfera e calcule seu raio em função dos elementos do prisma.

Problema 17.9.12. Defina o que é um prisma ter uma esfera inscrita. Encontre condições necessárias e suficientes para que um prisma tenha esfera inscrita. Nesse caso encontre a posição do centro da esfera e calcule seu raio em função dos elementos do prisma.

Problema 17.9.13. Na Figura 17.28 vemos um cone circular reto de raio ρ e altura h inscrito em um cilindro circular reto (também de raio ρ e altura h). Um plano paralelo ao plano da base do cone e situado à distância k desse, com $0 < k < h$, interseta os dois sólidos. Calcule a área da região situada no plano e entre os dois sólidos.

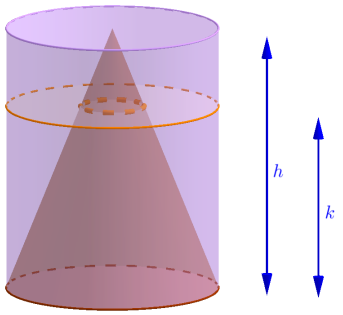


Figura 17.28. Seção de um cone inscrito em um cilindro.

Problema 17.9.14. Na Figura 17.29 vemos um cilindro circular reto de raio ρ e altura h, e dois cones, ambos com vértice no ponto médio do eixo do cilindro e cada um com base coincidindo com uma das bases do cilindro. Um plano paralelo aos planos da base do cilindro e situado à distância k de um deles, com $0 < k < h$, interseta os dois sólidos. Calcule a área da região situada no plano e entre os dois sólidos.

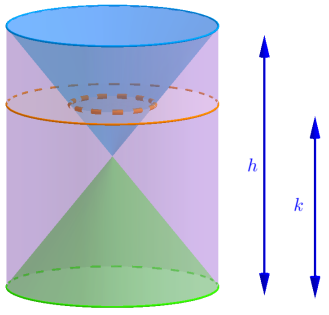


Figura 17.29. Seção de dois cones inscritos em um cilindro.

Problema 17.9.15. Na Figura 17.30 vemos um cilindro circular reto de raio ρ e altura $h = 2\rho$, e uma esfera nele inscrita. Um plano paralelo aos planos da base do cilindro e situado à distância k desse, com $0 < k < h$, interseta os dois sólidos. Calcule a área da região situada no plano e entre os dois sólidos.

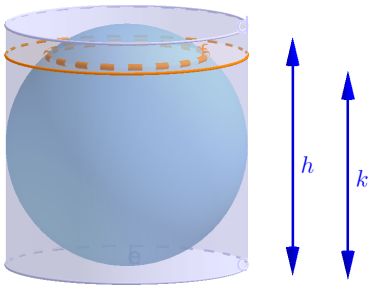


Figura 17.30. Seção de esfera inscrita em um cilindro.

Problema 17.9.16. A Figura 17.31 mostra o cubo $ABCD-EFGH$ de aresta a. Sejam M, N, P, Q, R e S os pontos médios das arestas AB, BF, FG, GH, HD e DA. Sabemos que esses seis pontos estão no plano perpendicular a EC pelo seu ponto médio e são os vértices de um hexágono regular (confira Problema 16.3.18). Mostre que existe uma esfera inscrita no sólido delimitado pelas faces $ABFE$, $ADHE$ e $EFGH$, assim como pelo plano do hexágono $MNPQRS$. Calcule seu raio. Sugestão: mostre que existe um ponto $K \in EC$ equidistante das faces mencionadas e do plano do hexágono.

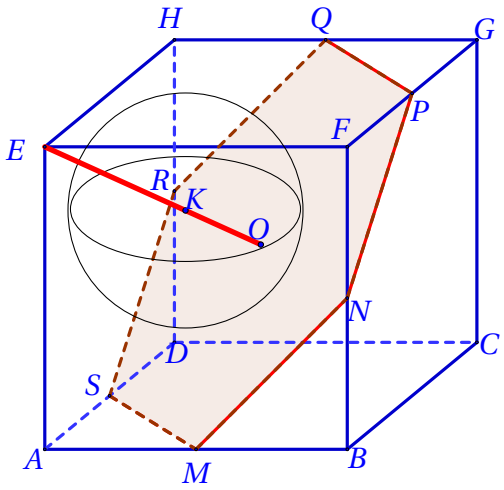


Figura 17.31. Desenho para o Problema 17.9.16.

17.10 Temas para investigação

Tema 17.10.1. Investigue as possíveis posições relativas entre duas esferas. Isto é, dadas duas esferas, descreva como elas se intersetam, e as condições em que ocorre cada tipo de interseção. Justifique suas conclusões.

Tema 17.10.2. Investigue o que poderia ser o baricentro de um cone sólido. Localize o baricentro do cone sólido circular reto de raio ρ e altura h.

Tema 17.10.3. Investigue uma versão análoga à do Teorema 17.3 para cilindros cuja base é uma elipse.

Tema 17.10.4. Investigue uma versão análoga à do Teorema 17.1 para cones cuja base é uma elipse.

Tema 17.10.5. Como pode ser a seção de um plano qualquer com um cone?

Tema 17.10.6. Como pode ser a seção de um plano qualquer com um cilindro?

Capítulo 18

Volume de sólidos e área de superfície

18.1 Introdução: o conceito de volume

A grosso modo, o volume de um sólido é um número real positivo ou nulo que, de certa forma, mede "a quantidade de espaço que ele ocupa".

Precisamos definir bem essas ideias. Talvez nem todo subconjunto do espaço possa ser associado com uma tal medida, assim devemos distinguir quais conjuntos estamos considerando. Precisamos também deixar claro quais propriedades dessa medida desejamos, e propor técnicas ou fórmulas para obter o volume de sólidos, pelo menos daqueles que estivemos estudando em capítulos anteriores, como prismas, pirâmides, cones, cilindros e a esfera.

Na Matemática Superior a construção da "medida de conjuntos", que engloba numa única ideia comprimentos, áreas e volumes, é feita por um ramo dessa ciência denominado *Teoria da Medida*. Em geral, não há como escapar do uso de limites, portanto de propriedades essenciais do conjunto dos número reais.

No estudo da Matemática Elementar, particularmente aquela que se pratica no ensino básico, procura-se evitar o uso de limites, e o principal recurso para isso consiste em lançar mão do chamado *Princípio de Cavalieri*, que é assumido como um Axioma. Neste texto seguimos essas ideias, procurando aplicar algumas deduções mas sem ir às últimas consequências.

Iniciamos com algumas definições.

Definição 18.1. Um conjunto do espaço se diz ter *interior não vazio* quando existe alguma esfera sólida nele contida. Caso contrário, o conjunto se diz ter *interior vazio*

Lembramos que uma esfera sólida é uma esfera juntamente com seu interior. Um exemplo de conjunto com interior não vazio é o cubo sólido. Escolhendo um ponto P do interior desse cubo, consideremos as suas distâncias às faces, e seja ρ a menor delas. Tomamos a esfera com centro em P e raio ρ. Essa esfera, assim como seu interior, está inteiramente contida no cubo sólido. Portanto o cubo tem interior não vazio. Por outro lado, qualquer reta tem interior vazio. Sabemos que a interseção de uma reta com qualquer esfera sólida que a intersecta em mais de um ponto é uma corda, assim muitos pontos da esfera ficam fora da reta. Outros exemplos de conjuntos com interior vazio: plano, semiplano, regiões poligonais, discos, circunferências, segmentos, uma quantidade finita de pontos ou de segmentos, e o próprio conjunto vazio. Só para esclarecer, têm interior não vazio: a própria esfera sólida, prismas e pirâmides sólidos, e cilindros e cones circulares sólidos.

Definição 18.2. Um conjunto $\mathscr{S}$ do espaço se diz *mensurável* quando existe um plano α com a seguinte propriedade: para todo plano β paralelo a α (podendo ser $\beta = \alpha$), a interseção $\mathscr{S} \cap \beta$ é

uma região com área definida ou um conjunto com área zero. O plano α chama-se *referência* de $\mathscr{S}$.

Neste texto as regiões planas que têm área definida são as poligonais e o disco (assim como setores e segmentos circulares). Por outro lado, têm área zero a circunferência (sem o seu interior), uma reunião finita de segmentos ou pontos, ou o conjunto vazio. O estudante irá reconhecer que são mensuráveis os seguintes sólidos já estudados neste texto: a esfera sólida, prismas e pirâmides sólidos, e cilindros e cones circulares sólidos. Consideremos, por exemplo, um cone circular sólido, e seja α o plano da base como sua referência. Se β é um plano paralelo à base (podendo ser o próprio α), sua interseção com o cone sólido é um disco (que tem área), um ponto ou vazia. Isso é consequência do Teorema 17.1. Confira ilustração na Figura 18.1.

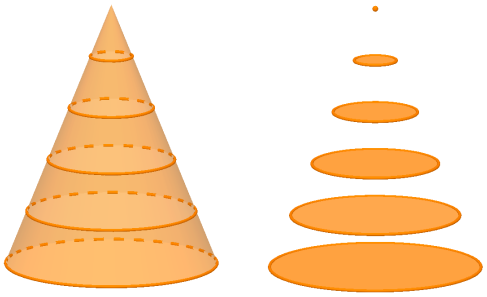


Figura 18.1. Seções de um cone circular por planos paralelos à sua base.

Vejamos agora dois axiomas. O primeiro estabelece a definição de volume e quatro propriedades. O segundo é o Princípio de Cavalieri, que, conforme comentamos, nos fornece importante ferramenta para calcular volumes no âmbito da Matemática Elementar.

Axioma 21. *(da definição de volume)*

Existe uma função $\mathcal{V}$, denominada volume, com domínio na coleção de conjuntos mensuráveis e com imagem no intervalo $[0,\infty)$ dos números reais não-negativos, tal que:

(i) o volume de qualquer conjunto mensurável com interior vazio é zero, e com interior não vazio é positivo;

(ii) Sejam $\mathscr{S}_1$ e $\mathscr{S}_2$ conjuntos mensuráveis tais que $\mathscr{S}_1 \cap \mathscr{S}_2$ tem interior vazio e $\mathscr{S}_1 \cup \mathscr{S}_2$ é mensurável. Então $\mathcal{V}(\mathscr{S}_1 \cup \mathscr{S}_2) = \mathcal{V}(\mathscr{S}_1) + \mathcal{V}(\mathscr{S}_2)$.

(iii) Se $\mathscr{S}_1$ e $\mathscr{S}_2$ são conjuntos mensuráveis tais que $\mathscr{S}_1 \subset \mathscr{S}_2$ então $\mathcal{V}(\mathscr{S}_1) \leq \mathcal{V}(\mathscr{S}_2)$.

(iv) O volume do cubo unitário (de aresta 1) é 1.

O estudante já sabe que os comprimentos são obtidos em algum sistema de medida, como m (metro), cm (centímetro), mm (milímetro). Os valores dos volumes têm que manter coerência mesmo se o sistema não esteja especificado. A notação também é conhecida do estudante. Se a unidade de comprimento é u, a de volume correspondente é u^3.

Deixamos implícita a propriedade de que o volume de um conjunto mensurável não depende do seu posicionamento no espaço. Assim podemos transportá-lo de um lugar para outro, fazer uma rotação, tomar o seu simétrico em relação a algum plano, e o volume não se altera, desde que não modifiquemos suas medidas.

Assumir que o volume do cubo unitário (de aresta 1) vale 1 é uma escolha arbitrária mas muito conveniente, conforme veremos.

Finalmente temos o

Axioma 22. *(do Princípio de Cavalieri)*
São dados dois conjuntos mensuráveis e um plano de referência comum a ambos. Suponha que todo plano paralelo ao plano dado intersecta os dois em conjuntos de mesma área. Então os dois conjuntos dados têm o mesmo volume.

Conforme foi comentado no início dessa seção, o Princípio de Cavalieri é assumido como axioma para evitar o uso de limites (ou de propriedades mais difíceis dos números reais) no ensino básico. Observamos que, sob certas condições, esse axioma é, na verdade, um teorema, que pode ser facilmente provado. Confira mais detalhes no Tomo IV, Seção 24.2.

Esse princípio leva o nome do matemático italiano Bonaventura Francesco Cavalieri, que os chamava de *método dos indivisíveis*, e os divulgou (em versões mais restritas) através de seu famoso livro *Geometria Indivisibilibus*, de 1635. Mas, na verdade, esse método é muito anterior a Cavalieri. Era conhecido dos antigos gregos, como Demócrito e Arquimedes, que o utilizavam para obter volumes de sólidos. Esses resultados eram depois demonstrados pelo método da dupla redução ao absurdo, já que na época não tinham uma teoria de integração. O mesmo faziam muitos matemáticos dos séculos XVI e XVII.

Usaremos o Princípio de Cavalieri várias vezes. Para ambientar o estudante vejamos um caso bem simples.

Exemplo 18.3. Dois cones circulares sólidos quaisquer com raios e alturas iguais têm o mesmo volume.

A ideia desse exemplo é a de chamar a atenção do estudante para o fato de que o cone circular pode ser reto ou oblíquo, seu volume é o mesmo, desde que suas medidas básicas (raio e altura) sejam iguais. Para ver isso coloque os dois cones com suas bases no mesmo plano. Confira ilustração na Figura 18.2.

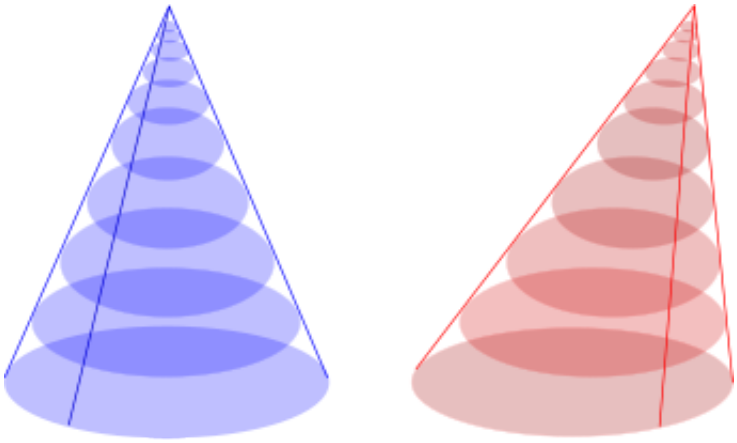


Figura 18.2. Princípio de Cavalieri aplicado a dois cones, um reto e outro oblíquo.

As seções neles determinadas por planos paralelos ao plano da base são vazias em ambos, um ponto em ambos (que são seus vértices), ou discos. Vimos, pelo Teorema 17.1, que o raio desse disco depende da distância do plano ao vértice, da altura dos cones e de seus raios. Como essas medidas são as mesmas em ambos os cones, os discos têm o mesmo raio, portanto a mesma área. Pelo Princípio de Cavalieri os dois cones têm o mesmo volume.

Vemos que, para obter o volume de cones circulares sólidos, basta considerar os cones circulares retos. Notemos também que o Exemplo 18.3 nos chama atenção de que o volume do cone

circular sólido só depende do raio e da altura (e não da sua inclinação). Portanto numa fórmula de volume de cone deve constar apenas esses dois ingredientes. Mesmas observações valem para pirâmides sólidas, prismas sólidos e cilindros circulares sólidos. Confira a lista de problemas a seguir.

Ao nos referir a volumes de cones sólidos, pirâmides sólidas, etc, frequentemente omitiremos a palavra "sólido".

18.2 Problemas

Problema 18.2.1. Argumente por que têm interior não vazio os seguintes conjuntos: (i) a esfera sólida; (ii) prismas sólidos; (iii) pirâmides sólidas; (iv) cilindros circulares sólidos.

Problema 18.2.2. Argumente por que têm interior vazio os seguintes conjuntos: (i) segmentos; (ii) planos e semiplanos; (iii) circunferências e discos; (iv) regiões poligonais.

Problema 18.2.3. Argumente por que são mensuráveis os seguintes sólidos: (i) a esfera sólida; (ii) prismas sólidos; (iii) pirâmides sólidas; (iv) cilindros circulares sólidos.

Problema 18.2.4. Sejam $\mathscr{S}_1$ e $\mathscr{S}_2$ conjuntos mensuráveis tais que $\mathscr{S}_1 \subset \mathscr{S}_2$. Suponha que o conjunto $\mathscr{S}_2 - \mathscr{S}_1$ seja mensurável e tenha interior não vazio. Justifique por que $\mathscr{V}(\mathscr{S}_1) < \mathscr{V}(\mathscr{S}_2)$.

Problema 18.2.5. Imitando os argumentos do Exemplo 18.3 demonstre que: (i) prismas com bases congruentes e alturas iguais têm o mesmo volume; (ii) pirâmides com bases congruentes e alturas iguais têm o mesmo volume; (iii) cilindros circulares com raios e alturas iguais têm o mesmo volume. Conclua que o volume desses sólidos dependem apenas da área da base e da altura, e não da inclinação.

18.3 Volume de prismas

Até esse momento conhecemos o volume de apenas um sólido: o cubo unitário. É costume dos livros didáticos deduzir logo no início o volume do paralelepípedo reto retângulo. Vejamos.

Teorema 18.4. *O volume de um paralelepípedo reto retângulo qualquer é o produto da área da base pela altura.*

Demonstração. Seja $\mathscr{P}$ um paralelepípedo reto retângulo qualquer. Já sabemos que ele é mensurável e que tem volume. Como sua base é um retângulo, sejam a e b seus lados. Seja h sua altura. Queremos provar que

$$\mathscr{V}(\mathscr{P}) = \text{área da base} \times \text{altura} \quad \text{ou} \quad \mathscr{V}(\mathscr{P}) = abh$$

Suponhamos primeiro que a, b e h sejam números inteiros positivos. Juntando uma quantidade suficiente de cubos unitários podemos construir um paralelepípedo reto retângulo $\mathscr{Q}$ com mesmas medidas de $\mathscr{P}$: fazemos uma fileira de a cubos, depois juntamos b dessas fileiras, formando uma "base" de ab cubos, em seguinda empilhamos h cópias dessas "bases", obtendo o que queremos. Vemos que $\mathscr{Q}$ é um sólido mensurável e é a reunião de abh cubos unitários. De acordo com o item (ii) do Axioma 21 $\mathscr{V}(\mathscr{P})$ é a soma dos volumes de abh cubos unitários. Mas o volume de um cubo unitário é 1, de forma que $\mathscr{V}(\mathscr{P}) = abh$.

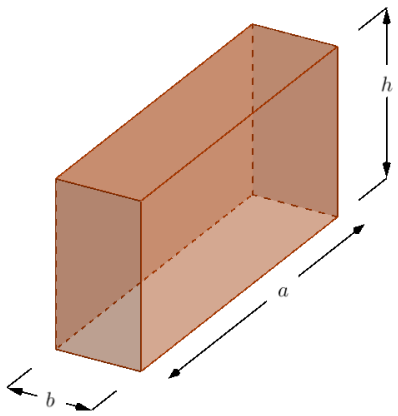


Figura 18.3. Medidas de um paralelepípedo reto retângulo.

Suponhamos agora que a, b e h sejam números racionais, digamos $a = c/m$, $b = d/n$ e $h = g/l$, sendo c, m, d, n, g e l inteiros positivos. Fazendo uma fileira de m cópias de $\mathscr{P}$, obtemos um paralelepípedo reto retângulo cuja base tem um dos lados medindo c. Enfileirando n cópias dele temos um paralelepípedo reto retângulo cuja base tem lados medindo c e d. Empilhando agora l cópias desse último obtemos um paralelepípedo reto retângulo $\mathscr{Q}$ cuja base tem lados com medida c e d e cuja altura é g. Já vimos que $\mathscr{V}(\mathscr{Q}) = cdg$, pois essas medidas são números inteiros. Mas $\mathscr{Q}$ é a reunião de mnl cópias de $\mathscr{P}$, de forma que $\mathscr{V}(\mathscr{Q}) = mnl\,\mathscr{V}(\mathscr{P})$. Assim

$$\mathscr{V}(\mathscr{P}) = \frac{1}{mnl}\mathscr{V}(\mathscr{Q}) = \frac{cdg}{mnl} = abh,$$

portanto a afirmação também vale nesse caso.

Suponhamos agora que a, b e h sejam números quaisquer. Sejam (a_n), (b_n) e (h_n) sequências de números racionais tais que $a_n \le a$, $b_n \le b$ e $h_n \le h$, e também que $a_n \to a$, $b_n \to b$ e $h_n \to h$ quando $n \to +\infty$. Seja $\mathscr{P}_n$ o paralelepípedo reto retângulo com base de medidas a_n e b_n e altura h_n. Temos $\mathscr{V}(\mathscr{P}_n) = a_n b_n h_n$, pois essas medidas são racionais. Por outro lado, $\mathscr{P}_n \subset \mathscr{P}$, de forma que $\mathscr{V}(\mathscr{P}_n) \le \mathscr{V}(\mathscr{P})$. Isso implica que $a_n b_n h_n \le \mathscr{V}(\mathscr{P})$ para todo n. Mas $a_n b_n h_n \to abh$, e temos $abh \le \mathscr{V}(\mathscr{P})$.

Consideremos agora (a_n), (b_n) e (h_n) sequências de números racionais tais que $a \le a_n$, $b \le b_n$ e $h \le h_n$, e também que $a_n \to a$, $b_n \to b$ e $h_n \to h$ quando $n \to +\infty$. Por raciocínio análogo ao que foi feito acima vem que $\mathscr{V}(\mathscr{P}) \le abh$. Portanto $\mathscr{V}(\mathscr{P}) = abh$, e terminamos. □

Podemos agora obter o volume de um prisma qualquer.

Teorema 18.5. *O volume de um prisma qualquer é o produto da área da base pela altura.*

Demonstração. Consideremos um prisma qualquer $\mathscr{P}$ cuja base é um polígono de área w e com altura h. Construímos um paralelepípedo reto retângulo $\mathscr{Q}$ cuja base é um quadrado de lado $\sqrt{w}$ e com altura também h. Portanto $\mathscr{P}$ e $\mathscr{Q}$ têm bases com mesma área e têm mesma altura. Conforme foi observado no Exemplo 18.3 e no Problema 18.2.5 eles têm o mesmo volume. Portanto

$$\mathscr{V}(\mathscr{P}) = \mathscr{V}(\mathscr{Q}) = wh,$$

de modo que $\mathscr{V}(\mathscr{P})$ é o produto da área da base pela altura. □

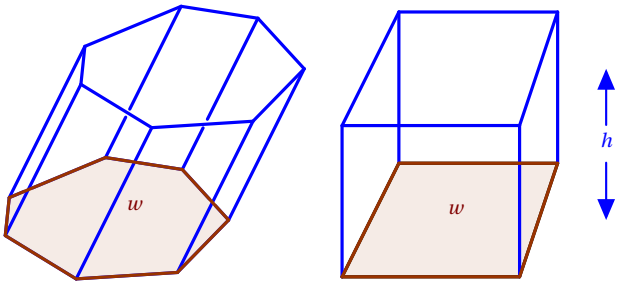


Figura 18.4. Cálculo do volume de um prisma qualquer.

18.4 Volume de pirâmides

Consideremos agora as pirâmides. Já sabemos que elas são mensuráveis e que têm volume. Desejamos uma fórmula para calcular esse volume. Dada uma pirâmide, podemos colocá-la dentro de um prisma de mesma base a altura. Portanto o volume da pirâmide é menor do que o do prisma. Já sabemos que o volume da pirâmide só depende de sua base e sua altura. Como a pirâmide e o prisma têm a mesma base e altura, o volume da pirâmide deve ser

$$\text{área da base} \times \text{altura} \times \text{um fator de redução.}$$

Precisamos saber se esse fator de redução é constante ou depende da pirâmide. Para ver isso vamos considerar o exemplo mais simples possível de pirâmide, um tetraedro $ABCD$, de base ABC, com $AD \perp AB$ e $AC \perp CB$. Ele pode ser colocado dentro de um prisma reto $ABCDEF$ de bases ABC e DEF. Confira a Figura 18.5.

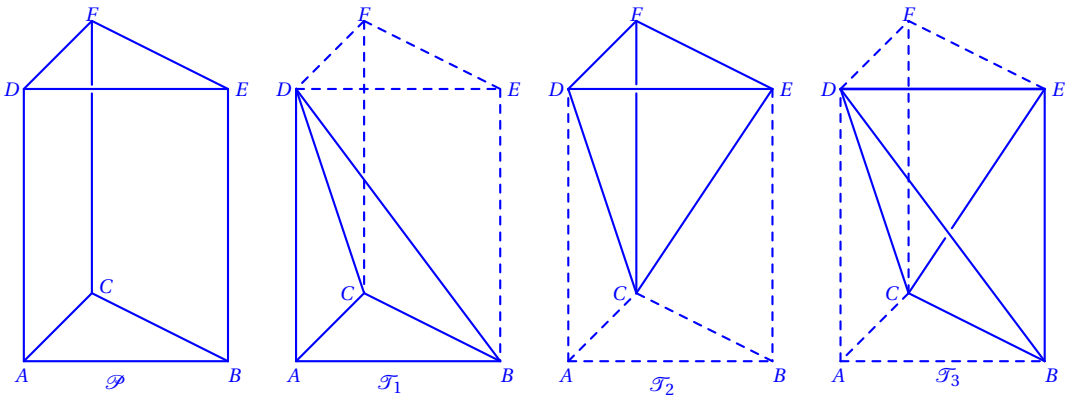


Figura 18.5. Repartição de um prisma em três tetraedros de mesmo volume.

O nosso tetraedro $ABCD$ está sendo chamado de $\mathscr{T}_1$. Sua base, conforme comentado, é ABC e sua altura é AD. O tetraedro $\mathscr{T}_2 = DEFC$ também está dentro do prisma, e sua base pode ser DEF e altura CF. Como ABC e DEF são as duas bases do prisma, temos $ABC \cong DEF$. As alturas desses dois tetraedros são AD e CF, e temos $AD = CF$, pois são arestas laterais do prisma. Portanto $\mathscr{T}_1$ e $\mathscr{T}_2$ são pirâmides com mesma altura e com bases de mesma área. Conforme foi observado no Exemplo 18.3 e no Problema 18.2.5 eles têm o mesmo volume.

Para completar o prisma consideramos o sólido $\mathscr{T}_3 = BCDE$, que também é um tetraedro. Escolhemos BCE como sua base, assim sua altura é a distância de D ao plano da base, e vemos que é DF. Vejamos agora o tetraedro $\mathscr{T}_2 = DEFC$ tendo como base CEF; sua altura também é DF. Como $BCE \cong FEC$ (são duas metades de um retângulo) esses dois tetraedros também têm o mesmo volume.

Consequentemente o prisma fica repartido em três tetraedros de mesmo volume. Assim

$$\mathscr{V}(\mathscr{T}_1) = \frac{1}{3} \text{ volume do prisma} = \frac{1}{3} \text{ área da base do prisma} \times \text{ altura do prisma.}$$

Como as áreas das bases do prisma e do tetraedro são iguais e suas alturas também, obtemos

$$\mathscr{V}(\mathscr{T}_1) = \frac{1}{3} \text{ área da base} \times \text{ altura.}$$

Temos agora o volume de uma pirâmide qualquer.

Teorema 18.6. *O volume de um pirâmide qualquer é a terça parte do produto da área da base pela altura.*

Demonstração. Seja $\mathscr{P}$ uma pirâmide qualquer com área da base igual a w e altura h. Construímos um tetraedro nas mesmas condições do $\mathscr{T}_1$ descrito acima, com área da base igual a w e altura h. Conforme foi observado no Exemplo 18.3 e no Problema 18.2.5 eles têm o mesmo volume. Assim

$$\mathscr{V}(\mathscr{P}) = \mathscr{V}(\mathscr{T}_1) = \frac{1}{3}wh,$$

e segue o resultado. □

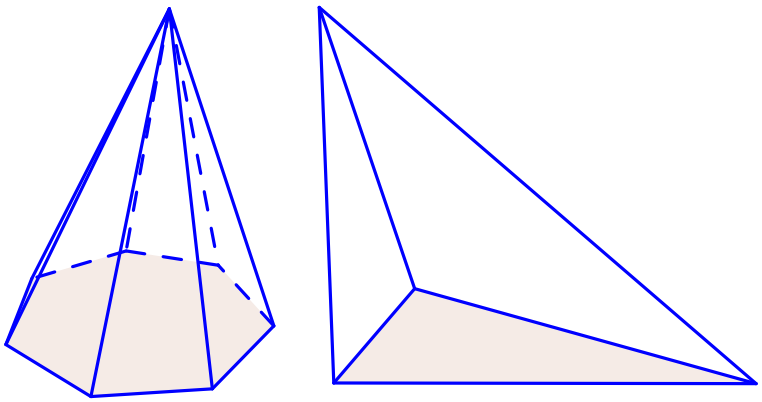


Figura 18.6. Uma pirâmide qualquer e um tetraedro de mesmo volume.

18.5 Volume de cilindros e cones

As fórmulas de volume de cilindros e cones podem ser obtidas com aplicação do Princípio de Cavalieri.

Teorema 18.7. *O volume de qualquer cilindro circular é o produto da área da base pela altura.*

Demonstração. Consideremos um cilindro circular de raio ρ e altura h. A área do disco da sua base é $\pi\rho^2$. No plano da base do cilindro consideremos um quadrado de lado $\rho\sqrt{\pi}$. Então sua área é também $\pi\rho^2$. Com base nesse quadrado construímos um paralelepípedo de altura h, de modo que os dois sólidos fiquem do mesmo lado do plano da base. Sabemos, pelo Teorema 17.3, que qualquer seção do cilindro paralela à base é um disco de área $\pi\rho^2$. Por outro lado, do Corolário 16.4, qualquer seção do paralelepípedo paralela à base é um quadrado com mesma área da base. Assim qualquer seção paralela determina nos dois sólidos figuras de mesma área. Pelo Princípio de Cavalieri os dois sólidos têm o mesmo volume.

Segue que o volume do cilindro é $\pi\rho^2 h$, ou seja, é o produto da área da base pela altura. □

Teorema 18.8. *O volume de qualquer cone circular é a terça parte do produto da área da base pela altura.*

Demonstração. Consideremos um cone circular de raio ρ e altura h. A área do disco da sua base é $\pi\rho^2$. No plano da base do cilindro consideremos um quadrado de lado $\rho\sqrt{\pi}$. Então sua área é também $\pi\rho^2$. Com base nesse quadrado construímos uma pirâmide de altura h, de modo que os dois sólidos fiquem do mesmo lado do plano da base. Consideremos um plano paralelo ao plano dessa base comum situado à distância $k > 0$ dos vértices e $h - k > 0$ do plano da base. Sabemos, pelos Corolários 16.2 e 17.2, que a razão entre a área da seção determinada nos sólidos e a área da base respectiva é $(k/h)^2$. Assim qualquer seção paralela determina nos dois sólidos figuras de mesma área. Pelo Princípio de Cavalieri os dois sólidos têm o mesmo volume.

Segue que o volume do cone é $(1/3)\pi\rho^2 h$, ou seja, é a terça parte do produto da área da base pela altura. □

18.6 Volume da esfera

Vejamos como o volume da esfera de raio ρ pode ser calculado usando-se o Princípio de Cavalieri. A esfera é comparada com o sólido obtido retirando-se dois cones sólidos de um cilindro de raio ρ e altura 2ρ. Confira ilustração na Figura 18.7. A literatura não é clara a respeito da autoria dessa ideia, mas ela certamente foi inspirada em ideias de Arquimedes, particularmente aquelas decritas em um tratado chamado *O Método*.

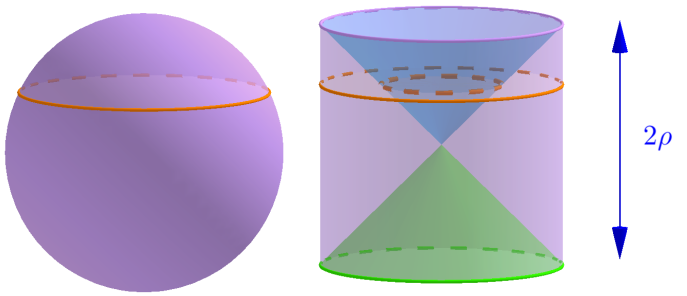


Figura 18.7. Comparando uma esfera com um cilindro menos dois cones.

Teorema 18.9. *O volume da esfera de raio ρ é $\frac{4}{3}\pi\rho^3$.*

Demonstração. Consideremos uma esfera $\mathscr{E}$ de raio ρ e centro O, e seja α um plano que passa por O. Consideremos nesse plano uma circunferência de raio ρ e centro O', e um cilindro reto de altura ρ com base nessa circunferência. Consideremos ainda o cone circular reto de altura ρ com vértice em O' e base na segunda base do cilindro. Seja $\mathscr{P}$ o sólido obtido retirando-se do cilindro sólido esse cone sólido. Seja $\mathscr{E}_0$ a semiesfera sólida que está do mesmo lado de α que $\mathscr{P}$. Vamos comparar as áreas das seções paralelas a α em $\mathscr{E}_0$ e em $\mathscr{P}$. Confira ilustração na Figura 18.8.

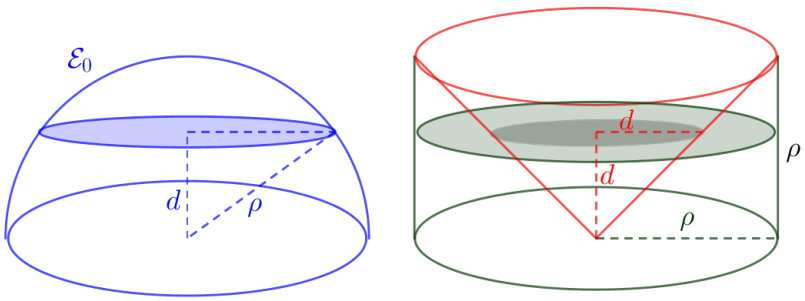


Figura 18.8. Áreas das seções paralelas da semiesfera e do cilindro menos um cone.

Seja β um plano paralelo a α e situado à distância d desse plano, e do mesmo lado que os dois sólidos. Vemos que se $d > \rho$ a interseção de β com os dois sólidos é vazia, portanto têm a mesma área. Se $d = \rho$ a interseção de β com $\mathscr{E}_0$ é um ponto, e com $\mathscr{P}$ é uma circunferência, ambas de área zero. Se $d = 0$ então β coincide com α. Sua interseção com $\mathscr{E}_0$ é uma circunferência de raio ρ, e com $\mathscr{P}$ é uma circunferência de raio ρ menos um ponto, e têm a mesma área.

Suponhamos $0 < d < \rho$. Vemos que β intersecta $\mathscr{E}_0$ em uma circunferência de raio $\sqrt{\rho^2 - d^2}$, portanto sua área é $\pi(\rho^2 - d^2)$. Por outro lado, β intersecta $\mathscr{P}$ em um anel cuja circunferência externa tem raio ρ. O raio da circunferência interna é dado pelo Teorema 17.1: é o raio ρ da base do cone multiplicado pela razão entre a distância d da seção ao vértice do cone e a altura do cone, que no caso é também ρ. Em resumo, o raio da circunferência interna é $\frac{d}{\rho}\rho = d$. Vemos assim que a área do anel é $\pi(\rho^2 - d^2)$. Portanto coincidem as áreas das duas seções.

Pelo Princípio de Cavalieri os volumes de $\mathscr{E}_0$ e $\mathscr{P}$ são iguais. Mas o volume de $\mathscr{P}$ é

$$\text{volume do cilindro de raio } \rho \text{ e altura } \rho - \text{volume do cone de raio } \rho \text{ e altura } \rho =$$

$$\pi\rho^2\rho - \frac{1}{3}\pi\rho^2\rho = \frac{2}{3}\pi\rho^3$$

Esse é o volume da semiesfera. Tomando o dobro temos o volume da esfera. □

Definição 18.10. Um plano secante a uma esfera sólida a divide em duas regiões, que são as interseções da esfera sólida com o plano junto com os semiespaços determinados pelo plano. Se o plano não contém o centro da esfera, o sólido que está no semiespaço que não contém o centro denomina-se *segmento esférico sólido de uma base* ou *capa esférica*. O raio do segmento esférico é o raio da circunferência formada pela interseção da esfera com o plano. A altura do segmento é a diferença entre o raio da esfera e a distância do plano ao centro da mesma. Confira a Figura 18.9.

Teorema 18.11. *O volume de um segmento esférico sólido de uma base de altura h em uma esfera de raio ρ é*

$$\frac{1}{3}\pi h^2(3\rho - h)$$

Se a base do segmento esférico (ou base da calota) tem raio r essa fórmula também pode ser escrita como

$$\frac{1}{6}\pi h\left(3r^2 + h^2\right)$$

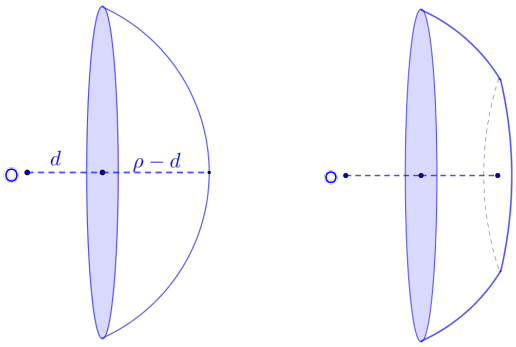


Figura 18.9. Capa e segmento esférico em uma esfera de raio ρ e centro O.

Definição 18.12. Um *segmento esférico sólido de duas bases* ou *zona esférica* é a região de uma esfera sólida situada entre dois planos paralelos (incluindo as interseções com os dois planos). Os raios do segmento esférico são os raios das duas circunferências formadas pela interseção da esfera com os planos. A altura do segmento é a distância entre os planos. Confira a Figura 18.9.

Teorema 18.13. *O volume do segmento esférico sólido de duas bases de altura h e raios r_1 e r_2 é*

$$\frac{1}{6}\pi h\left(3r_1^2+3r_2^2+h^2\right)$$

Definição 18.14. Dados uma esfera sólida e um diedro cuja aresta contém seu centro, denominamos *cunha esférica* à interseção dessa esfera sólida com o diedro e seu interior. O ângulo da cunha é o ângulo do diedro e o raio da cunha é o raio da esfera. A superfície da cunha chama-se *fuso esférico* e é interseção da esfera com o diedro e seu interior. Confira ilustração na Figura 18.10.

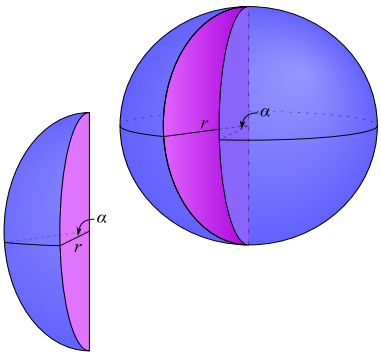


Figura 18.10. Cunha ou fuso esférico.

Teorema 18.15. *O volume da cunha esférica de raio ρ e ângulo de medida a graus é*

$$\frac{4}{3}\pi\rho^3\frac{a}{360}$$

Lembramos que se um ângulo mede a graus, então sua medida em radianos é $\alpha=\pi a/180$. Dessa forma o volume da cunha de raio ρ e ângulo de medida α radianos é $\frac{2}{3}\rho^3\alpha$.

Definição 18.16. Consideremos uma esfera sólida de raio ρ e um cone sólido circular reto com vértice no centro da esfera e cujas geratrizes medem ρ. O plano da base do cone determina um segmento esférico. A reunião do cone sólido e desse segmento chama-se *setor esférico*. Confira ilustração na Figura 18.11.

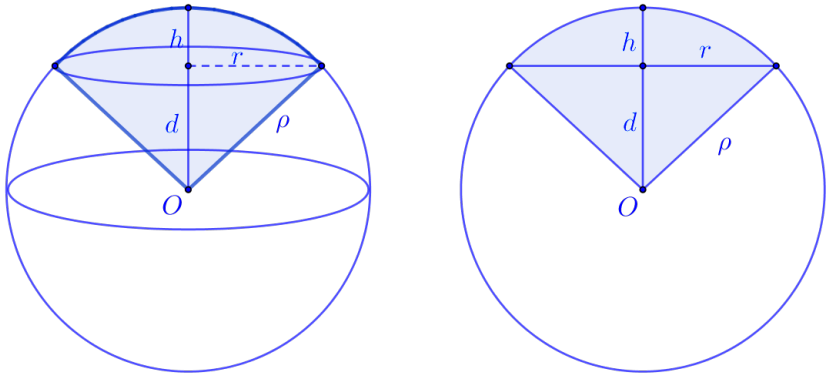


Figura 18.11. Setor esférico.

Teorema 18.17. *Um setor esférico, em uma esfera de raio ρ, é determinado por um cone circular reto de altura d. O volume do setor é*

$$\frac{2}{3}\pi\rho^2(\rho - d)$$

18.7 Área de superfícies de sólidos

Lembramos que neste texto *esfera* e *superfície esférica* são sinônimos. A esfera e seu interior é denominada *esfera sólida* ou *região esférica*.

Teorema 18.18. *A área da esfera de raio ρ é $4\pi\rho^2$.*

Uma demonstração usando Cálculo Diferencial e Integral está apresentada na Seção **??**, a partir da página **??**. Outra demonstração, mais simples mas apenas indicativa, pode ser consultada em [32], volume 2, página 269.

Definição 18.19. Um plano secante a uma esfera a reparte em duas superfícies, que são as interseções da esfera com o plano junto com os semiespaços determinados pelo plano. Se o plano não contém o centro da esfera, a superfície que está no semiespaço que não contém o centro denomina-se *calota esférica*. A altura da calota é a diferença entre o raio da esfera e a distância do plano ao centro da mesma.

Portanto, a calota esférica é a parte da superfície esférica que recobre um segmento esférico de uma base, ou a capa esférica.

Teorema 18.20. *A área de uma calota esférica de altura h em uma esfera de raio ρ é $2\pi\rho h$.*

Uma demonstração usando Cálculo Diferencial e Integral está apresentada na Seção **??**, a partir da página **??**.

Teorema 18.21. *Em uma esfera de raio ρ, a área do fuso cujo ângulo mede a graus é $4\pi\rho^2\frac{a}{360}$.*

Lembramos novamente que se um ângulo mede a graus, então sua medida em radianos é $\alpha = \pi a/180$. Dessa forma a área da superfície desse fuso é $2\rho^2\alpha$.

18.8 Problemas

Problema 18.8.1. Um cubo tem diagonal de medida d. Qual é o seu volume?

Problema 18.8.2. Um paralelepípedo reto retângulo tem duas arestas com medidas 3 cm e 4 cm. Sabe-se que sua diagonal mede $5\sqrt{2}$ cm. Qual é o seu volume?

Problema 18.8.3. O cone circular reto da Figura 18.12 tem 3 cm de raio e 4 cm de altura. Seja d a distância do vértice a um plano α, paralelo à base. Determine d de modo que as duas partes do cone separadas pelo plano α tenham volumes iguais.

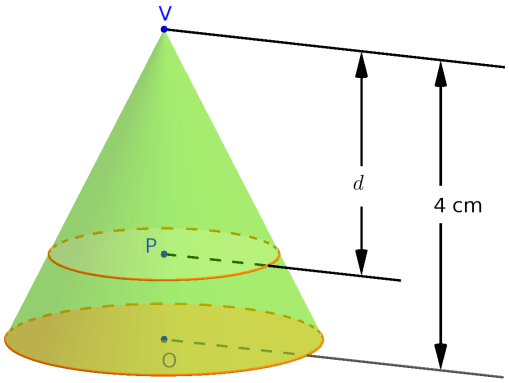


Figura 18.12. Figura para o Problema 18.8.3.

Solução 1. Sejam v o volume do cone menor, V o do maior, e V_T o volume do tronco de cone. Temos $v + V_T = V$. Queremos $v = V_T$ do que segue $2v = V$, ou $v/V = 1/2$. Por outro lado a razão entre os volumes dos dois cones é igual ao cubo da razão das alturas correspondentes. Logo

$$\frac{1}{2} = \left(\frac{d}{4}\right)^3 \iff d = 2\sqrt[3]{4}\text{ cm}$$

Solução 2. Consideremos uma seção plana dos cones passando pela altura. Temos, com as notações da Figura 18.13,

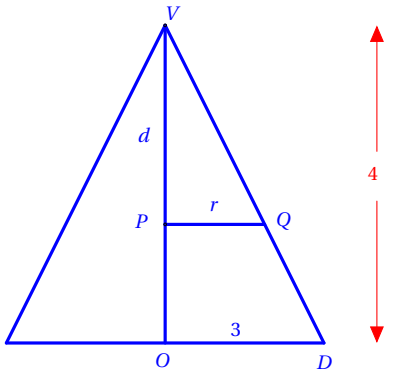


Figura 18.13. Figura da solução 2 do Problema 18.8.3.

$$VOD \sim VPQ \Rightarrow \frac{r}{3} = \frac{d}{4} \Rightarrow r = \frac{3d}{4}$$

Com isso

$$v = \frac{1}{3}\pi r^2 d = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{3d}{4}\right)^2 d = \frac{3}{16}\pi d^3$$

e

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 4 = 12\pi$$

Portanto

$$2v = V \Rightarrow \frac{3}{8}\pi d^3 = 12\pi \Rightarrow d = 2\sqrt[3]{4}\text{ cm}$$

Problema 18.8.4. Um cubo de 20 cm de aresta, apoiado em um piso horizontal e com a parte superior aberta, contém água até a altura de 15 cm. Colocando uma pirâmide regular de base quadrada sólida de altura 30 cm com a base apoiada no fundo do cubo, o nível da água atinge a altura máxima do cubo, sem derramar. **a)** Qual o volume do tronco de pirâmide submerso? **b)** Qual é o volume da pirâmide?

Problema 18.8.5. Demonstre a afirmação usada na solução 1 do Problema 18.8.3. É dado um cone circular de altura h. Um cone menor é obtido seccionando o primeiro cone por um plano paralelo à sua base e situado à distância k do seu vértice. Mostre que a razão entre o volume do cone menor e o do maior é $(k/h)^3$. E se precisarmos de usar a razão entre os raios, como fica? Nesse problema podemos trocar "cone circular" por "pirâmide"?

Problema 18.8.6. Calcule o volume do tetraedro regular cujas arestas medem a.

Problema 18.8.7. $OABC$ é um tetraedro trirretângulo em O e $OA = x$, $OB = y$ e $OC = z$. Sabe-se que $AB = \sqrt{41}$, $AC = 2\sqrt{13}$ e $BC = \sqrt{61}$. **a)** Determine x, y e z. **b)** Calcule o volume do tetraedro $OABC$. Confira a Figura 18.14.

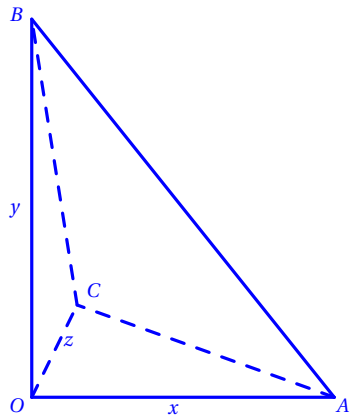


Figura 18.14. Figura para o Problema 18.8.7.

Solução de a) Aplicando o Teorema de Pitágoras aos triângulos AOB, AOC e BOC, todos retângulos em O, temos

$$x^2 + y^2 = AB^2 = 41 \qquad (I)$$
$$x^2 + z^2 = AC^2 = 52 \qquad (II)$$
$$y^2 + z^2 = AB^2 = 41 \qquad (III)$$

Somando membro a membro as três equações vem

$$2x^2+2y^2+2z^2=154 \Rightarrow x^2+y^2+z^2=77 \qquad (IV)$$

Fazemos agora as diferenças:

$$(IV)-(I) \Rightarrow x^2=16 \Rightarrow x=4$$
$$(IV)-(II) \Rightarrow y^2=25 \Rightarrow y=5$$
$$(IV)-(III) \Rightarrow z^2=36 \Rightarrow z=6$$

Solução de b) Tomando a face AOC como base, OB será sua altura. Então o volume é

$$V=\frac{1}{3}\frac{xz}{2}y=\frac{1}{3}\frac{4\cdot 6}{2}5=20$$

Problema 18.8.8. O volume de um tetraedro $ABCD$ é v. Se E é o ponto médio de AC, F o de BC e G o de CD, calcule (em relação a v) o volume do sólido $ECFG$. Confira ilustração na Figura 18.15, desenho da esquerda.

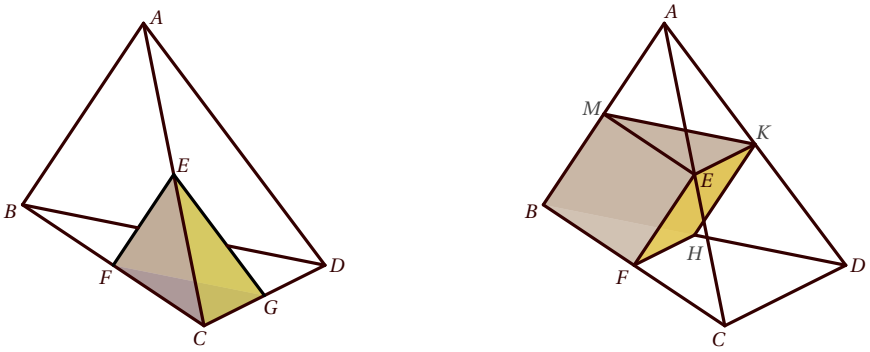


Figura 18.15. Referências para os Problemas 18.8.8 e 18.8.9.

Problema 18.8.9. O volume de um tetraedro $ABCD$ é v. Se E, F, H, K e M são os pontos médios de AC, BC, BD, AD e AB, respectivamente, calcule (em relação a v) o volume do sólido $BFHMEK$. Confira ilustração na Figura 18.15, desenho da direita.

Problema 18.8.10. Desenhe um triângulo ABC, retângulo em A, com medidas $BC=a$, $AC=b$ e $AB=c$. **a)** Gire a figura em torno do cateto AB, obtendo um cone. Calcule seu volume V_{AB}. **b)** Gire a figura em torno do cateto AC, obtendo outro cone. Calcule seu volume V_{AC}. **c)** Gire a figura em torno da hipotenusa BC, obtendo um sólido que é a junção de dois cones pela base. Calcule seu volume V_{BC}. **d)** Encontre uma relação tipo "pitagórica" entre os três volumes.

Problema 18.8.11. O volume de um cilindro reto de altura h e raio da base r é $V=\pi r^2 h$. Se o raio for aumentado de 10% e a altura diminuída de 20%, que alteração sofrerá o volume?

Problema 18.8.12. Calcule o volume de uma pirâmide regular triangular de altura h sabendo-se que as arestas da base medem a.

Problema 18.8.13. Calcule o volume de uma pirâmide regular quadrangular de altura h sabendo-se que as arestas da base medem a.

Problema 18.8.14. Calcule o volume de um prisma regular hexagonal de altura h sabendo-se que as arestas da base medem a.

Problema 18.8.15. Calcule o volume de uma pirâmide regular octogonal de altura h sabendo-se que as arestas da base medem a.

Problema 18.8.16. No sólido da Figura 18.16 os segmentos que parecem ser paralelos realmente o são. Ainda, $BC \perp BF$. Calcule o volume desse sólido.

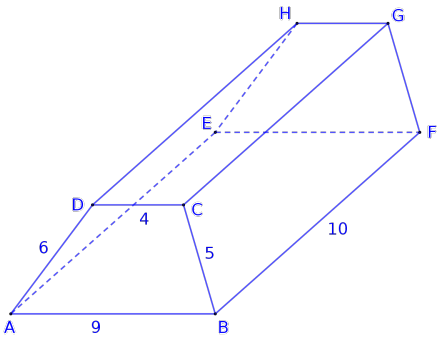


Figura 18.16. Figura para o Problema 18.8.16.

Problema 18.8.17. No sólido da Figura 18.17 os segmentos que parecem ser paralelos realmente o são. Calcule o volume e a área de superfície desse sólido.



Figura 18.17. Figura para o Problema 18.8.17.

Problema 18.8.18. Um cilindro circular reto tem uma esfera inscrita. Calcule a razão entre a área do cilindro e a área da esfera. Calcule também a razão entre seus volumes. Observe os resultados assim obtidos e enuncie um teorema. Conta a História da Matemática que esse teorema foi descoberto por Arquimedes e era um de seus preferidos.

Problema 18.8.19. Um cone circular reto tem diâmetro da base igual a d e ângulo de abertura de medida 2ϕ. Expresse seu volume em função desses dois dados.

Problema 18.8.20. Um cone circular reto equilátero de raio ρ tem uma esfera inscrita. Calcule o volume da esfera.

Problema 18.8.21. Um cone circular reto de altura h e está circunscrito a uma esfera de raio 1. Calcule o volume desse cone (em função de h).

Problema 18.8.22. A aresta da base de uma pirâmide reta de base quadrada mede 2 unidades e a esfera inscrita nessa pirâmide tem raio r com $0 < r < 1$. Calcule o volume $V(r)$ da pirâmide em função de r, e faça um esboço do gráfico dessa função.

Problema 18.8.23. Planificando um cone circular reto de geratriz g, obtém-se um setor circular de 210^0. Calcule o volume desse cone.

Problema 18.8.24. É dado um tetraedro $ABCD$ trirretângulo em A. Anotemos $AB = b$, $AC = c$ e $AD = d$. Calcule o seu volume.

Problema 18.8.25. Complete a fórmula do Teorema 18.11 provando o seguinte: O volume de segmento esférico sólido de uma base de altura h e raio r é

$$\frac{1}{6}\pi h(3r^2 + h^2)$$

Problema 18.8.26. Um setor esférico, em uma esfera de raio ρ, é determinado por um cone circular reto de altura d. Ache o raio do cone e a sua abertura em função de ρ e d.

Problema 18.8.27. Complete a fórmula do Teorema 18.17 provando o seguinte: Um setor esférico, em uma esfera de raio ρ, é determinado por um cone circular reto de altura d. O volume do setor é

$$\frac{2}{3}\pi\rho^3(1-\cos\phi)$$

sendo ϕ a medida da metade da abertura do cone.

Problema 18.8.28. A base de uma calota esférica em uma esfera de raio ρ é também base de um cone circular reto com vértice no centro da esfera. Sabendo-se que a metade a abertura desse cone é ϕ, mostre que a área dessa capa se escreve como $2\pi\rho^2(1-\cos\phi)$. Sugestão: na fórmula $2\pi\rho h$ do Teorema 18.20 reescreva h em função de ϕ.

Problema 18.8.29. Um setor esférico, em uma esfera de raio ρ, é determinado por um cone circular reto de altura d. Ache uma fórmula para a sua área de superfície (apenas a porção do setor que pertence à esfera).

Problema 18.8.30. Ache uma fórmula para a área de superfície de um segmento esférico de duas bases.

Problema 18.8.31. Dada um esfera de raio ρ, calcule como devem ser posicionados dois planos paralelos para que: **a)** sejam iguais os volumes das duas capas e do segmento esférico de duas bases; **b)** a superfície esférica fique particionada em três superfícies de mesma área.

Problema 18.8.32. Considere um segmento esférico sólido de duas bases de altura h e raios r_1 e r_2. Mostre que seu volume é dado pela soma dos volumes de uma esfera de raio $h/2$, de um cilindro circular de altura $h/2$ e raio r_1 e de um cilindro circular de altura $h/2$ e raio r_2.

Problema 18.8.33. Demonstre a fórmula dada no Teorema 18.11 do volume de um segmento esférico sólido de uma base de altura h em uma esfera de raio ρ:

$$\frac{1}{3}\pi h^2(3\rho-h)$$

Sugestão: use o Princípio de Cavalieri com a mesma ideia do Teorema 18.9.

Problema 18.8.34. Demonstre a fórmula dada no Teorema 18.13 do volume de um segmento esférico de duas bases de altura h e raios r_1 e r_2:

$$\frac{1}{6}\pi h\left(3r_1^2+3r_2^2+h^2\right)$$

Sugestão: use o resultado do Teorema 18.11. Considere separadamente dois casos: o centro da esfera está entre os planos ou não.

Problema 18.8.35. Demonstre a fórmula dada no Teorema 18.15 do volume da cunha esférica de raio ρ e ângulo de medida a graus:

$$\frac{4}{3}\pi\rho^3\frac{a}{360}$$

Sugestão: um jeito é admitir que o volume de uma cunha é proporcional ao seu ângulo. Assim se pode comparar como o volume da esfera. Pense em outras formas de demonstrar esse resultado.

Problema 18.8.36. Demonstre a fórmula dada no Teorema 18.21 da área do fuso esférico de raio ρ e ângulo de medida a graus:

$$4\pi\rho^2\frac{a}{360}$$

Sugestão: novamente um jeito é admitir que a área de um fuso é proporcional ao seu ângulo. Assim se pode comparar com a área de toda a esfera.

Problema 18.8.37. Demonstre a fórmula dada no Teorema 18.17 do volume de um setor esférico, em uma esfera de raio ρ, e determinado por um cone circular reto de altura d:

$$\frac{2}{3}\pi\rho^2(\rho-d)$$

Sugestão: some os volumes do cone e da capa.

Problema 18.8.38. Um marceneiro tomou uma esfera de madeira, e fez nela um furo cilíndrico, centralizado. Verificou que o comprimento do furo era de 6 cm. Qual o volume do sólido restante? Confira a Figura 18.18.

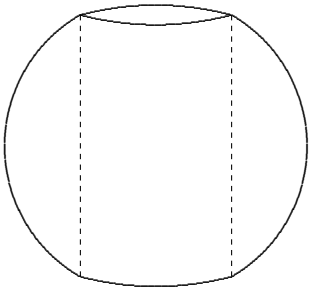


Figura 18.18. Ilustração do Problema 18.8.38

Problema 18.8.39. Um aviador está a uma distância d da superfície da Terra, que vamos supor ser uma esfera de raio ρ. Calcule, em termos de ρ e d, a área da superfície vista por ele.

Problema 18.8.40. Um tronco de pirâmide (confira Problema 16.7.13 na página 52) tem altura h e as áreas das bases são $\mathscr{S}_1$ e $\mathscr{S}_2$. Prove que seu volume é dado pela fórmula

$$\mathscr{V}=\frac{1}{3}h\left[\mathscr{S}_1+\mathscr{S}_2+\sqrt{\mathscr{S}_1\mathscr{S}_2}\right]$$

Sugestão. Suponha que $\mathscr{S}_1>\mathscr{S}_2$. Seja k a altura da pirâmide menor que completa o tronco. Então a pirâmide maior, que é a reunião do tronco e dessa pirâmide menor, tem altura $h+k$. Em virtude do Corolário 16.2, da página 51, temos $\mathscr{S}_2/\mathscr{S}_1=k/(h+k)$. Calcule o volume de cada pirâmide e faça a subtração para obter o volume do tronco.

Problema 18.8.41. Seja $ABCD$ um tetraedro disfenóide cujas arestas medem a, b e c. Mostre que seu volume é

$$\frac{1}{6\sqrt{2}}\sqrt{(a^2+b^2-c^2)(a^2+c^2-b^2)(b^2+c^2-a^2)}$$

Sugestão: use a observação feita na página 43 de que todo tetraedro disfenóide $ABCD$ pode ser inscrito em um paralelepípedo reto retângulo $BHCGEDFA$.

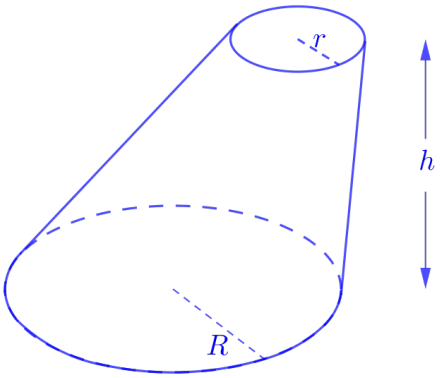


Figura 18.19. Tronco de cone circular oblíquo.

Problema 18.8.42. Troncos de cones circulares retos foram definidos no Problema 17.3.12, na página 65, mas podemos considerar também troncos de cones circulares oblíquos, como o da Figura 18.19. Um tronco de cone circular (reto ou oblíquo) tem altura h e os raios das bases são R e r. Demonstre que seu volume é

$$\frac{\pi}{3}h\left[R^2+r^2+Rr\right]$$

Problema 18.8.43. Um copo de plástico rígido e espessura muito fina tem a forma de um tronco de cone com 8 cm de diâmetro na boca, 6 cm de diâmetro no fundo e 12 cm de altura. a) Determine um valor aproximado para o volume do copo (ou seja, o número inteiro de cm^3 que melhor aproxima o volume). b) Determine um valor aproximado para a área externa total do copo (ou seja, o número inteiro de cm^3 que melhor aproxima a área externa).

Problema 18.8.44. O sólido da Figura 18.20 é limitado pelo triângulo ABC, pela lateral de um cone circular reto de vértice A e por um segmento circular de centro O contido na circunferência da base do cone. Sabe-se que o ângulo $\angle BOC$ é reto e que $OA = 6$ cm e $OB = 3$ cm. Determine o volume do sólido.

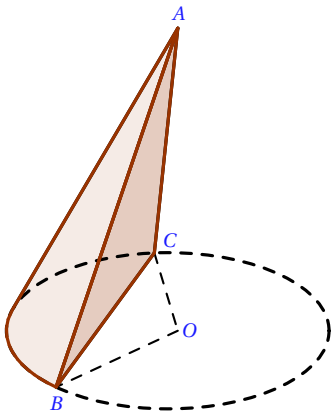


Figura 18.20. Cunha de um cone reto.

Solução. O sólido delimitado pelo segmento circular BOC e por A representa a quarta parte do cone cuja base é o círculo de centro O e altura AO. O volume desse sólido é

$$V_c = \frac{1}{4}\frac{1}{3}\pi OB^2 OA = \frac{1}{4}\frac{1}{3}\pi 3^2 \cdot 6 = \frac{9\pi}{2}$$

Dese sólido é retirada uma pirâmide de base BOC e vértice A, cujo volume é

$$V_P = \frac{1}{3}\frac{OB\cdot OC}{2}OA = \frac{1}{3}\frac{3\cdot 3}{2}6 = 9$$

Portanto o volume do sólido dado é

$$V = V_c - V_P = \frac{9\pi}{2} - 9 = 9\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$$

Problema 18.8.45. Considere uma esfera de centro O e raio $R = 1$, e seja AB um diâmetro dessa esfera. Um cone circular reto de raio 1 tem AB como altura e A como vértice. A Figura 18.21 mostra a seção nesses sólidos por um plano que contém o segmento AB. **a)** Mostre que a circunferência que é a interseção da superfície da esfera com a superfície lateral do cone tem raio igual a $4/5$. **b)** Calcule o volume da parte comum entre a esfera e o cone (relacionado com a área sombreada da figura).

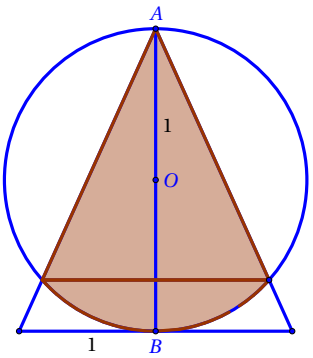


Figura 18.21. Desenho para o Problema 18.8.45.

Problema 18.8.46. A imagem que aparece na Figura 18.22 é a do planetário Thyco Brahe, que se localiza em Copenhague, na Dinamarca, e recebe esse nome em homenagem ao célebre astrônomo dinamarquês do século XVI. O prédio do planetário tem o formato de um cilindro circular reto seccionado por um plano não paralelo à sua base. Encontre uma fórmula que represente o seu volume sabendo-se que a base é uma circunferência de raio r, a altura maior é H e a menor é h.

Problema 18.8.47. Considere um tronco de pirâmide (confira o Problema 16.7.13, na página 52, e a Figura 18.23) de altura h, e sejam b_1 e b_2 as áreas de suas bases. Demonstre que seu volume é dado pela fórmula

$$\frac{1}{3}h\left[b_1 + b_2 + \sqrt{b_1 b_2}\right]$$

Sugestão: Complete o tronco para obter uma pirâmide de altura $h + k$. Então a base menor é uma seção dessa pirâmide. Use agora o Corolário 16.2, da página 51.

Problema 18.8.48. Consideremos um prisma com base num plano α, e seja γ um plano não paralelo a α e que intersecta todas as arestas laterais do prisma. A base do prisma, as partes das arestas laterais entre α e γ e a seção determinada por γ na superfície do prisma formam um *tronco de prisma*.

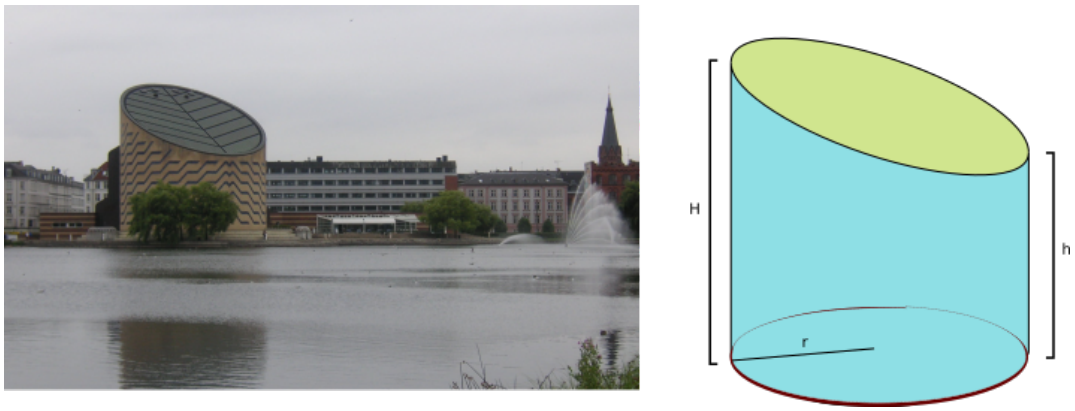


Figura 18.22. Planetário Thyco Brahe, em Copenhague, Dinamarca, e seu esquema geométrico.
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:TychoBrahePlanetarium-Copenhagen.jpg

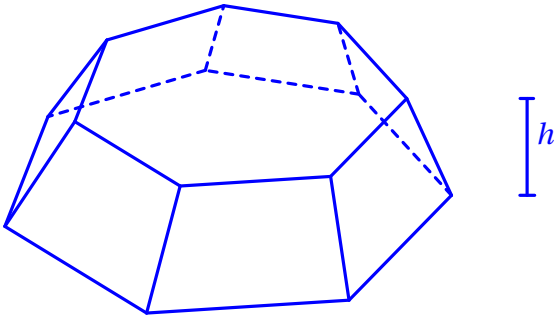


Figura 18.23. Referência para o Problema 18.8.47.

Considere um tronco de prisma triangular reto, como ilustrado na Figura 18.24, com base ABC e arestas laterais a, b e c. Seja w a área de ABC. Demonstre que o volume do tronco é

$$\frac{a+b+c}{3}w$$

Sugestão: Suponha que $a < b < c$. Considere o plano β paralelo à base ABC do prisma e à distância a. Ele reparte o tronco em dois sólidos. Calcule seus volumes e some. Considere separadamente os casos $a = b < c$ e $a < b = c$.

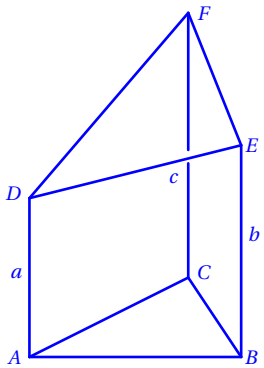


Figura 18.24. Referência para o Problema 18.8.48.

18.9 Temas para investigação

Tema 18.9.1. Investigue se existem generalizações do Teorema de Arquimedes referido no Problema 18.8.18. Por exemplo: **a)** o que ocorre com um cone circular reto equilátero e uma esfera inscrita; **b)** com um cubo e uma esfera inscrita; **c)** com um tetraedro regular e uma esfera inscrita; **d)** com um octaedro regular e uma esfera inscrita; **e)** investigue o que ocorre com outros poliedros regulares e não regulares; **f)** investigue a versão plana desses resultados. **g)** Explore outras possibilidades relativas a esse tema.

Tema 18.9.2. Investigue uma generalização do Problema 18.8.38, mostrando que o volume do sólido restante só depende da altura do cilindro que foi extraído da esfera (portanto não depende do raio da esfera).

Capítulo 19

Poliedros

19.1 Exemplos iniciais de poliedros

Continuamos nosso estudo de sólidos geométricos, dessa vez abordando os poliedros. Uma definição inicial e tentativa desses objetos geométricos poderia ser a seguinte:

Um *poliedro* é a reunião dos lados de uma quantidade finita de polígonos planos dispostos no espaço de maneira a cumprir as seguintes condições: (i) se dois desses polígonos se intersetam, a interseção é um vértice comum ou um lado comum; (ii) todo lado de qualquer polígono é comum com um lado de um único outro polígono, e (iii) dois polígonos com um lado em comum não são coplanares.

Os polígonos a que se referem essa definição chamam-se *polígonos constituintes* do poliedro.

Exemplos de poliedros que já estudamos são as pirâmides e os prismas. Vejamos o tetraedro $ABCD$ da Figura 19.1. Ele é formado por quatro triângulos, e cada um deles tem cada um de seus lados em comum com um único outro triângulo dessa coleção. O tetraedro é um poliedro típico, de certo modo o mais simples.

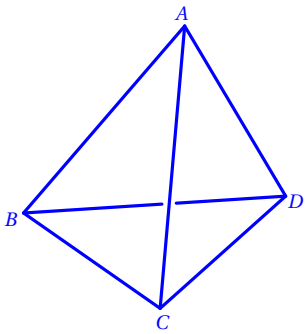


Figura 19.1. Tetraedro: um exemplo de poliedro.

Entretanto, a grande maioria dos poliedros não se encaixa nas categorias que já estudamos. Vemos, na Figura 19.2, da esquerda para a direita, os desenhos de um icosidodecaedro, de um triacontaedro rômbico e de um poliedro toroidal. Como se vê, os nomes dos poliedros podem ser muito criativos. O icosidodecaedro tem 20 triângulos e 12 pentágonos. O prefixo icosi vem de eikosi, da língua grega, que significa vinte. Por sua vez dodeca vem de dodeka, também da língua grega, que significa doze. O triacontaedro rômbico é formado por 30 losangos. Triacontaedro significa 30 faces, e rhombos significa losango. Finalmente a palavra toroidal indica um sólido com forma de toro (ou forma de câmara de um pneu de automóvel). O sufixo edro, de origem na língua grega, significa, na Geometria, face plana. Assim poliedro significa "várias faces".



Figura 19.2. Poliedros diversos.
Desenho da esquerda: direitos reservados. Autor: Robert Webb. Origem: *Robert Webb's Stella software*
`http://www.software3d.com/Stella.php`

Vejamos a terminologia básica. Se um polígono é constituinte de um poliedro, a região por ele definida chama-se *face* do poliedro, seus lados são *arestas* do poliedro, e seus vértices são *vértices* do poliedro. A reunião das faces do poliedro chama-se *superfície poliédrica*, ou apenas superfície do poliedro. Duas faces com uma aresta comum se dizem *contíguas*.

Observamos que muitos autores chamam de poliedro ao que aqui estamos denominando superfície poliédrica. Na verdade não faz muita diferença uma concepção da outra. É comum ainda chamar de poliedro ao sólido, isto é, à reunião da superfície poliédrica com seu interior. Existe uma dificuldade técnica, que é a de provar que os poliedros têm interior. Se necessário podemos usar o termo *poliedro sólido*.

Em um poliedro, duas faces com uma aresta comum determinam um diedro. Dado um vértice de um poliedro, a ele concorrem $n \geq 3$ arestas. Esse vértice, juntamente com essas arestas, determinam um n-edro. Se $n = 3$ já sabemos que o nome é triedro. Confira a Seção 15.5, na página 16.

19.2 Problemas

Problema 19.2.1. Explique por que os sólidos da Figura 19.2 não se encaixam nas definições dos sólidos estudados nos capítulos anteriores, como prismas e troncos de pirâmides.

Problema 19.2.2. Considere o poliedro desenhado na Figura 19.3. Ele foi formado pela junção de um cubo com uma pirâmide. Nomeie os seus polígonos constituintes. Indique um polígono cujos lados estão contidos no poliedro mas não é constituinte, e explique o motivo.

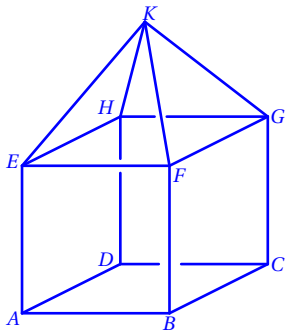


Figura 19.3. Figura para o Problema 19.2.2.

Problema 19.2.3. O sólido da Figura 19.4 é, conforme o desenho indica, um tipo de "junção" de dois paralelepípedos retos retângulos. Desenhe separadamente todas as suas faces admitindo que ele obedece à nossa definição inicial de poliedro.

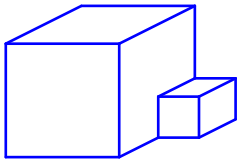


Figura 19.4. Figura para o Problema 19.2.3.

Problema 19.2.4. Um estudante tem uma quantidade grande de quadrados recortados em folha de cartolina, todos de lados de mesma medida. Ele tenta construir com eles superfícies poliédricas, cujas faces sejam esses quadrados. Que sólidos podem surgir?

Problema 19.2.5. Considere um vértice num poliedro. Argumente por que existem pelo menos três faces que o têm como vértice comum.

Problema 19.2.6. Você mesmo pode construir um modelo para o poliedro da Figura 19.5. Tome dois triângulos equiláteros congruentes recortados. Coloque-os em planos paralelos de modo que fiquem simetricamente dispostos como na figura para quem os vê da direção perpendicular. Na figura, são a face triangular que aparece na frente, desenhadas com linhas mais espessas (em cor vermelha para quem está com impressão colorida) e a detrás, que tem lados pontilhados. Complete com seis faces triangulares. Observe que essas seis faces triangulares podem ser triângulos equiláteros congruentes aos dois primeiros. Portanto esse poliedro é construído com 8 triângulos equiláteros congruentes.

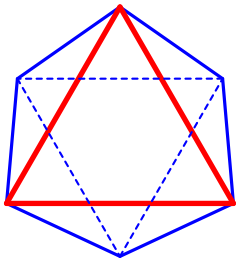


Figura 19.5. Figura para o Problema 19.2.6.

19.3 Construção de poliedros

Vejamos algumas maneiras importantes de obter novos poliedros a partir de algum poliedro dado. Comentamos primeiro o *ajuntamento*, ou *aglutinação*. Tendo dois poliedros com duas faces congruentes, uma em cada um, podemos fazer coincidir essas faces. Eliminando a face comum em geral se obtém um novo poliedro.

Um exemplo de aglutinação de um cubo com uma pirâmide se vê na figura 19.3. Conforme foi observado no Problema 19.2.2, as faces aglutinadas dos poliedros originais não formam uma face do novo poliedro.

Outro exemplo pode ser visto na Figura 19.6. O poliedro original é um prisma triangular com as arestas congruentes duas a duas. No desenho as arestas desse prisma estão coloridas de vermelho e estão desenhadas com linha um pouco mais espessa. As três faces laterais desse prisma são quadrados. A elas são aglutinadas três pirâmides regulares, com as arestas congruentes duas a duas, tendo por base quadrados congruentes às faces laterais do prisma. Note que esse poliedro é constituído por 14 triângulos equiláteros. O Problema 19.4.1 complementa essa construção. O autor [13], na página 76, denomina a esse poliedro de *prisma triangular tri-aumentado*, um nome bem sugestivo.

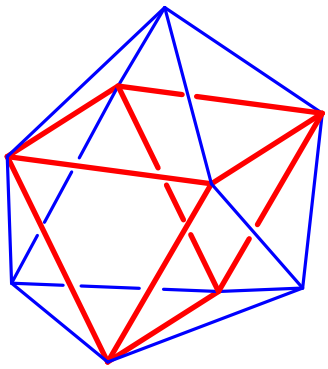


Figura 19.6. Um poliedro constituído de 14 triângulos equiláteros.

Observamos que na construção do sólido da Figura 19.6 podemos tomar um prisma e pirâmides não obrigatoriamente com todas as arestas congruentes duas a duas. Mas em cada caso é preciso ver se faces contíguas resultam coplanares. Nesse caso elas devem ser unidas em uma única face.

Podemos pensar em ajuntar poliedros por uma aresta ou por um vértice. Na Figura 19.7 vemos dois exemplos. No sólido da esquerda dois prismas são unidos por uma aresta. Ele não é um poliedro, pois a aresta comum é encontro de mais de duas faces, o que não é permitido pela nossa definição. No desenho da direita vemos duas pirâmides juntadas por um vértice. Esse tipo de construção nada acrescenta de importante, e atrapalha a determinação de padrões na contagem dos elementos dos poliedros. Assim evitamos esse tipo de sólido, e na definição formal de poliedro, que apresentamos na próxima seção, colocamos uma condição que proibe a aglutinação de poliedros por um vértice para formar novos poliedros.

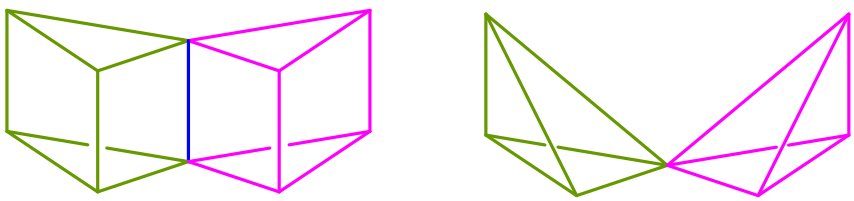


Figura 19.7. Sólidos que não consideramos poliedros.

O segundo método de construção de poliedros é o *seccionamento por planos*, ou mais brevemente, por cortes planos. Um exemplo conhecido é o corte de uma pirâmide por um plano paralelo à sua base, gerando um tronco de pirâmide. Mas esses cortes podem ser muito variados.

Uma forma muito usada é a seguinte. Dado um poliedro, escolhemos um ou mais vértices, e seccionamos com um plano as arestas que concorrem a ele. Tomando um plano suficientemente próximo do vértice, vemos que a seção e o vértice, sob certas condições, determinam uma pirâmide. Pensando no poliedro sólido, o que fazemos em seguida é "retirar" dele a pirâmide sólida. Pensando de outra forma, retiramos das arestas seccionadas as partes que pertencem à pirâmide (as arestas diminuem de tamanho mas continuam), e acrescentamos ao poliedro as arestas da base da pirâmide. Observe que o vértice original não faz mais parte do novo poliedro assim obtido. Esse processo, quando executado em todos os vértices do poliedro dado, é denominado *truncamento*.

Um exemplo de poliedro obtido por seccionamento é o *cubo truncado*, exibido na Figura 19.8. As seis faces quadradas originais do cubo se tornam octógonos, e são acrescentadas oito faces triangulares, que são as bases das oito pirâmides retiradas. É possível realizar o truncamento de modo que as faces do novo poliedro sejam regulares.

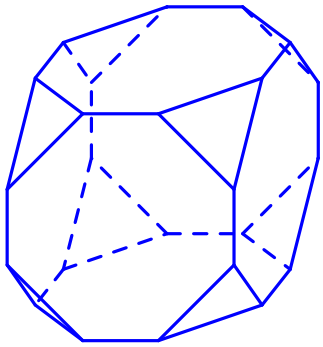


Figura 19.8. Cubo truncado.

Na Figura 19.9 vemos duas fases do processo de truncamento de um icosaedro regular. Esse poliedro tem apenas faces triangulares equiláteras, em número de 20, e 12 vértices (Figura 1). Para truncar um vértice marcamos um ponto em cada aresta que a ele está ligada, e unimos esses pontos em sequência para obter um pentágono (Figura 2). Se quisermos que o novo poliedro tenha todas as faces regulares (depois de truncar todos os vértices) marcamos esses pontos a uma distância de 1/3 do comprimento da aresta. Retirando a pirâmide de base pentagonal que ficou formada obtemos a Figura 3. Repetindo a mesma operação para todos os vértices do icosaedro obtém-se o poliedro denominado icosaedro truncado. Ele tem 12 faces pentagonais, que substituiram os vértices do poliedro original, e 20 faces hexagonais, que substituem as faces triangulares originais. O novo poliedro tem 60 vértices, pois cada vértice do poliedro original deu origem a 5 vértices, assim $12 \times 5 = 60$.

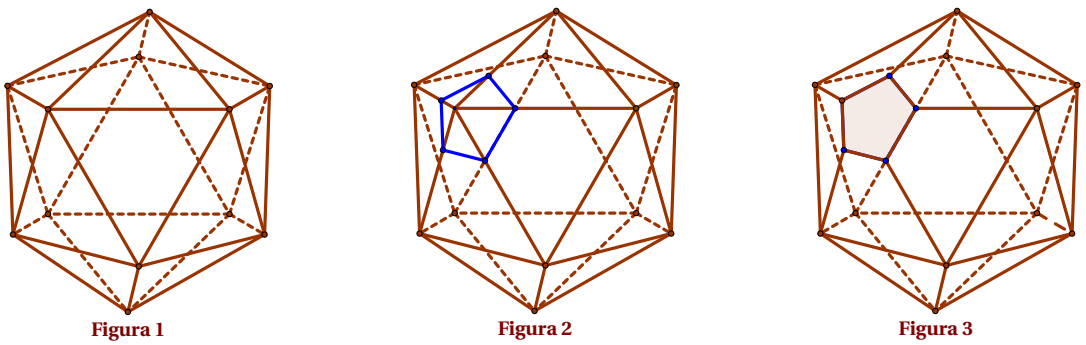


Figura 19.9. Fases do truncamento de um vértice do icosaedro regular.

Outro método de obter poliedros é a chamada *snubficação*. As faces do poliedro dado são afastadas umas das outras, podem passar por um giro ou não, e os espaços são preenchidos com triângulos, quadriláteros, etc. O giro das faces afastadas, quando ocorre, em geral é de 45°.

Na Figura 19.10 vemos duas snubficações do cubo. Sem girar as faces se obtém o cuboctaedro rômbico (terceiro desenho da esquerda para a direita). Girando as faces laterais do cubo aparece o snubcuboctaedro (desenho à direita). Esses movimentos podem ser feitos de modo que os novos poliedros tenhas todas as faces regulares.

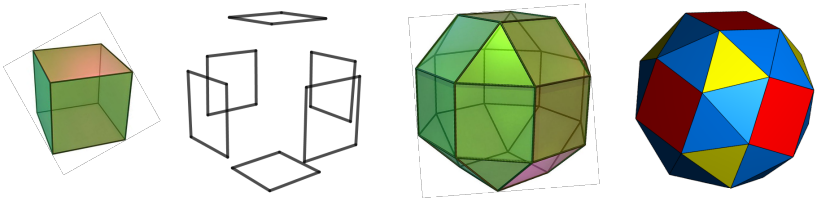


Figura 19.10. Snubficações do cubo.
Desenho da direita: direitos reservados. Autor: Robert Webb. Origem: *Robert Webb's Stella software*
`http://www.software3d.com/Stella.php`

As possibilidades de construção de poliedros parecem ser infinitas. Para não alongar mais esse texto, citamos por último os *antiprismas*. Para produzir um deles tome duas cópias do mesmo polígono, e as disponha em planos paralelos de forma que uma delas seja rotacionada numa posição em que vértices não fiquem na mesma direção perpendicular. Em seguida ligamos cada vértice de um polígono com os dois mais próximos do outro polígono. Um exemplo está apresentado na Figura 19.11.

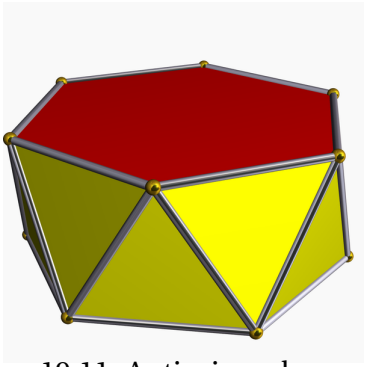


Figura 19.11. Antiprisma hexagonal.
Direitos reservados. Autor: Robert Webb. Origem: *Robert Webb's Stella software*
`http://www.software3d.com/Stella.php`

Para encerrar observamos que poliedros podem ser construídos com material concreto, como papel cartão, papel de dobradura, acrílico, arames, etc. Em [54], páginas 26 a 35, os autores mostram como construir, com dobraduras, o cubo e o tetraedro, o octaedro e o icosaedro regulares.

19.4 Problemas

Problema 19.4.1. Explique por que no poliedro da Figura 19.6 duas faces contíguas quaisquer não são coplanares.

Problema 19.4.2. Um antiprisma é construído com dois polígonos regulares com n lados. Quantas faces triangulares ele tem?

Problema 19.4.3. Aglutinando duas pirâmides quadrangulares pelas bases construa um poliedro constituído por 8 triângulos equiláteros, chamado *octaedro regular*. Faça um desenho. O poliedro da Figura 19.5 também é constituído por 8 triângulos equiláteros. Qual é a diferença entre eles?

Problema 19.4.4. Aglutinando duas pirâmides pelas bases construa um poliedro constituído por 10 triângulos equiláteros, chamado *pentagonal dipiramidal*. Faça um desenho.

Problema 19.4.5. Tentando generalizar os resultados dos Problemas 19.4.3 e 19.4.4, aglutinando duas pirâmides convenientes pelas bases talvez seja possível construir poliedros constituídos por $2n$ triângulos equiláteros, chamados quem sabe por *n-gonal dipiramidal*. Detalhe essa ideia.

Problema 19.4.6. Desenhe um tetraedro truncado e descreva suas faces.

Problema 19.4.7. Explique como deve ser truncado um cubo para que todas as suas faces sejam regulares (existe mais de uma forma?).

Problema 19.4.8. Explique por que o icosaedro regular truncado dá origem a um poliedro com faces regulares se o truncamento foi feito com pontos marcados a uma distância de $1/3$ do comprimento da aresta. Confira Figura 19.9 e a explicação que vem antes dela.

Problema 19.4.9. Examine o icosaedro regular mostrado na Figura 1 de 19.9. Retirando dele a "tampa" de cima e a de baixo, podemos decompô-lo em três poliedros. Descreva esses três poliedros. Quantas dessas "tampas" tem o icosaedro regular?

Problema 19.4.10. Trunque um cubo de aresta de medida a pelos pontos médios de suas arestas. Descreva o poliedro obtido. Calcule seu volume. Mostre que ele é inscritível em uma esfera e calcule o raio da esfera.

Problema 19.4.11. Suponha que os polígonos constituintes de um certo poliedro sejam todos regulares. Pode-se afirmar que os lados desses polígonos são todos congruentes? O que você precisa da definição de poliedro para ter condições de demonstrar isso?

Problema 19.4.12. Considere um tetraedro $ABCD$ e sejam M, N, P, Q, R e S os pontos médios das arestas AB, AC, AD, BC, CD e BD, respectivamente. Explique por que $MNPQRS$ é octaedro obtido pela aglutinação de duas pirâmides quadrangulares. Se o tetraedro for regular, o que se pode afirmar sobre o octaedro? Sugestão: você deve observar primeiro que o quadrilátero $MPRQ$ é coplanar. A Figura 19.12 pode ajudar.

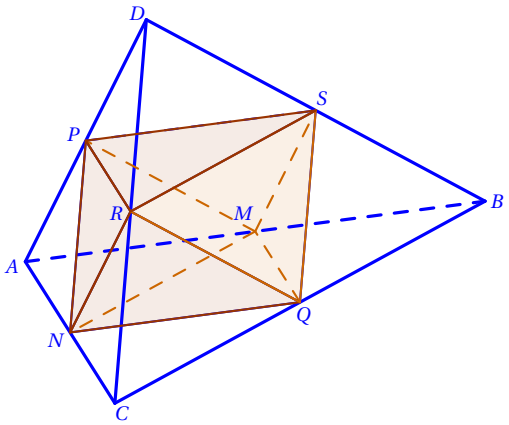


Figura 19.12. Octaedro inscrito em um tetraedro.

Problema 19.4.13. Explique por que, para todo $n \geq 4$, existe um poliedro com n faces. Complete a tabela abaixo com os nomes dos poliedros relativos à quantidade de faces. Veja que um poliedro pode ter mais de um nome, não existe uma regra fixa.

4	tetraedro	15	
5		16	
6	hexaedro	17	
7		18	
8		19	
9		20	
10		30	
11		40	
12		50	
13		60	
14		70	

Tabela com nomes de poliedros

19.5 Definições e propriedades gerais

Vimos no início deste capítulo uma definição inicial de poliedro. Precisamos de mais algumas condições técnicas, de forma que agora faremos uma definição mais completa.

Um *poliedro* é a reunião dos lados de uma quantidade finita de polígonos planos dispostos no espaço de maneira a cumprir as seguintes condições:

P1 se dois desses polígonos se intersetam, a interseção é um vértice comum ou um lado comum.

P2 todo lado de qualquer polígono é comum com um lado de um único outro polígono.

P3 dois polígonos com um lado em comum não são coplanares.

Essas são as condições que já tínhamos. As definições de vértices, arestas, faces e superfície seguem as mesmas. Prosseguimos com as condições:

P4 dadas duas faces e um ponto no interior de cada uma, é possível traçar uma linha poligonal de um ponto ao outro, inteiramente contida nas faces, e sem passar por vértice algum.

P5 para qualquer vértice, consideremos as faces que o têm como vértice comum. É possível ordená-las ciclicamente de forma que cada uma tenha uma aresta em comum com a sua sucessora.

As condições P3 e P4 nos dizem que sólidos como os da Figura 19.7 não são considerados poliedros. A condição P5 nos permitirá definir configuração de um vértice.

Neste texto nos limitamos ao estudo do poliedros convexos, de forma que acrescentamos a condição abaixo. Lembramos que um lado do espaço determinado por um plano é disjunto desse plano.

P6 (condição de convexidade) para cada plano que contém uma face, o restante do poliedro está inteiramente contido em um dos lados determinado pelo plano.

Com a condição de convexidade fica fácil observar que o poliedro tem interior. Ele é a interseção dos semiespaços determinados pelos planos que contêm suas faces e nos quais estão as outras faces. Como todo semiespaço é convexo e como a interseção de uma quantidade finita de convexos é convexa, segue que o interior de um poliedro (convexo) é convexo. Vemos ainda que o poliedro sólido também é convexo.

Dizemos que um conjunto do espaço é *limitado* quando existe uma esfera que o contém. Vamos admitir, sem demonstração, as seguintes propriedades.

Teorema 19.1. *Dado um vértice qualquer de um poliedro convexo, existe um plano que não contém esse vértice e que interseta todas as arestas que a ele concorrem. Essas arestas determinam no plano um polígono convexo.*

Esse resultado diz que qualquer vértice de um poliedro convexo, juntamente com suas arestas, determinam um n-edro, no sentido em que alguns autores definem n-edros. Confira a Seção 15.5, na página 16. Confira também [45].

Teorema 19.2. *Um poliedro convexo separa o espaço em três conjuntos disjuntos (dois a dois) $\mathscr{P}_e$, $\mathscr{P}_0$ e $\mathscr{P}_i$ satisfazendo às seguintes condições:*
(i) $\mathscr{P}_0$ é a superfície do poliedro.
(ii) $\mathscr{P}_i$ é o interior do poliedro, é convexo e limitado. Ainda, qualquer semirreta com origem num ponto P nesse conjunto interseta $\mathscr{P}_0$ num único ponto.
(ii) $\mathscr{P}_e$ é o complemento de $\mathscr{P}_0 \cup \mathscr{P}_i$.

Como a quantidade de polígonos que constituem o poliedro é finita, a superfície do poliedro também é limitada. Assim o Teorema 19.2 nos diz que o poliedro sólido é limitado. O Teorema 19.2, por sua vez, implica na seguinte propriedade. Dado um poliedro convexo, fixemos um ponto O de seu interior e consideremos uma esfera com centro em O. Para facilitar a imaginação, podemos supor que o raio da esfera é suficientemente grande para conter o poliedro em seu interior. Para todo ponto P da superfície do poliedro, consideremos a semirreta $\overrightarrow{OP}$. Ela interseta a esfera num único ponto, e vemos assim que existe uma aplicação biunívoca da superfície do poliedro na esfera. Notemos ainda que, dado uma aresta do poliedro, ela e o ponto O determinam um plano, e esse plano determina na esfera um círculo máximo. Portanto, a imagem da aresta sobre a esfera é um arco de geodésica (confira o Capítulo 22 do Tomo IV). Vemos assim que a imagem da superfície do poliedro é um poliedro esférico.

O icosaedro truncado, quando projetado na esfera, gera a famosa bola de futebol da copa de 1970, em que o time brasileiro obteve o seu tri-campeonato.

Em *Spherical polyhedron*, `https://en.wikipedia.org/wiki/Spherical_polyhedron`, o estudante pode apreciar muitos outros exemplos de poliedros esféricos. Na Figura 19.13 vemos um tetraedro esférico (desenho da esquerda) e um tetraedro truncado esférico (desenho da direita).

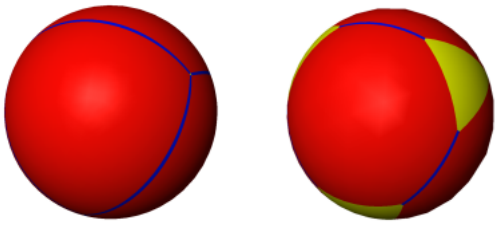


Figura 19.13. Tetraedro esférico e tetraedro truncado esférico.

Finalmente temos o

Teorema 19.3. *A interseção de um poliedro convexo sólido com um plano qualquer é: vazia, um ponto (que é um vértice do poliedro), um segmento (que é um lado de uma face) ou uma região poligonal convexa (que pode ser uma face ou um polígono contido na superfície do poliedro e com interior contido no interior do poliedro).*

Observamos que o Teorema 19.3 implica que todo poliedro convexo é mensurável e, portanto, tem volume. O cálculo desse volume geralmente é feito fazendo-se uma decomposição do poliedro em poliedros mais simples. Os resultados dos dois últimos Teoremas são mais claros quando definimos poliedros convexos como interseção de semiplanos do espaço através de desigualdades.

19.6 Problemas

Problema 19.6.1. Explique por que se um poliedro é convexo então todas as suas faces são regiões poligonais convexas.

Problema 19.6.2. Uma *diagonal* de um poliedro é um segmento que une dois vértices e não está contido em uma face. Quantas diagonais tem o cubo truncado? Confira a Figura 19.8. Explique como obteve a resposta.

Problema 19.6.3. Vimos na Figura 19.2 que o triacontaedro rômbico é constituído por 30 losangos. Quantas diagonais ele tem? Explique como obteve a resposta.

Problema 19.6.4. Um antiprisma é construído com dois polígonos convexos com n lados. Quantas diagonais ele tem?

19.7 Propriedades combinatórias dos poliedros

Contando as quantidades de faces, arestas e vértices de poliedros podemos perceber certos padrões. Esses números não são independentes, mas guardam entre si certas relações. Essas relações nos ajudam em vários tipos de investigação, como classificação de poliedros.

Vejamos um exemplo bem simples, para começar. Suponha que um poliedro tenha apenas faces triangulares. Cada face contribui com 3 arestas, de modo que, a princípio, o poliedro tem $3F$ arestas, sendo F a quantidade de faces. Mas não podemos nos esquecer de que cada aresta pertence necessariamente a duas faces, de modo que em $3F$ as arestas foram contadas duas vezes. Assim a quantidade de arestas é $A = 3F/2$. Mas A é um inteiro, de forma que F tem que ser par.

Assim descobrimos nosso primeiro teorema: "se num poliedro todas as faces forem triangulares, seu número é par". Já vimos exemplos de poliedros com faces exclusivamente triangulares, e não é coincidência que a quantidade delas é sempre par.

Dado um poliedro, utilizaremos as seguintes notações:

F é a quantidade de faces
F_n é a quantidade de faces com n lados
V é a quantidade de vértices
V_p é a quantidade de vértices aos quais concorrem p arestas
A é a quantidade de arestas

Se a um vértice concorrem p arestas, dizemos que ele "é do tipo p". Sabemos que $p \geq 3$. Se uma face tem n lados, dizemos que ela "é do tipo n". Sabemos que $n \geq 3$.

Começamos com alguns resultados simples:

Proposição 19.4. *Em qualquer poliedro (convexo ou não) valem as seguintes fórmulas:*

$$F = F_3 + F_4 + F_5 + \cdots \tag{19.1}$$
$$V = V_3 + V_4 + V_5 + \cdots \tag{19.2}$$
$$2A = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \cdots \tag{19.3}$$
$$2A = 3V_3 + 4VF_4 + 5V_5 + \cdots \tag{19.4}$$
$$2A \geq 3F \tag{19.5}$$
$$2A \geq 3V \tag{19.6}$$

Observação: as somas nas fórmulas (19.1) a (19.4) são finitas.

Demonstração. A verificação de (19.1) e de (19.2) depende apenas do significado de cada símbolo.

Vejamos (19.3). Cada face do tipo n contribui com n arestas. Como a quantidade de faces do tipo n é F_n, então elas contribuem com nF_n arestas. Assim todas as faces contribuem, a princípio, com $3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \cdots$ arestas. Mas lembremos que cada aresta pertence a exatamente duas faces, de modo que elas foram contadas duas vezes. Logo $2A = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \cdots$

Vejamos agora (19.4). A cada vértice do tipo p concorrem p arestas. Como a quantidade de vértices do tipo p é V_p, eles correspondem a pV_p arestas. Assim, contando as arestas pelos vértices elas são, a princípio, $3V_3+4V_4+5V_5+\cdots$ Mas lembremos que cada aresta corresponde a exatamente dois vértices, de modo que elas foram contadas duas vezes. Logo $2A = 3V_3 + 4V_4 + 5V_5 + \cdots$

Notemos agora que

$$2A = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \cdots = 3(F_3 + F_4 + F_5 + \cdots) + F_4 + 2F_5 + \cdots = 3F + F_4 + 2F_5 + \cdots \geq 3F \Rightarrow 2A \geq 3F$$

portanto vale (19.5).

Da mesma forma

$$2A = 3V_3 + 4V_4 + 5V_5 + \cdots = 3(V_3 + V_4 + V_5 + \cdots) + V_4 + 2V_5 + \cdots = 3V + V_4 + 2V_5 + \cdots \geq 3V \Rightarrow 2A \geq 3V$$

e vale (19.6). Com isso terminamos. □

A mais famosa relação combinatória dos poliedros convexos é a fórmula de Leonhard Euler.

Teorema 19.5. *Em qualquer poliedro convexo vale a chamada fórmula de Euler*

$$V + F = 2 + A \tag{19.7}$$

Para estudar uma demonstração, confira [32], volume 2, página 235, ou [8], página 320.

A *característica de Euler* χ de uma figura formada por polígonos é o número inteiro

$$\chi = F + V - A$$

Portanto o Teorema 19.5 nos diz que a característica de Euler de qualquer poliedro convexo é

$$\chi = F + V - A = 2$$

Poliedros em forma de "argola", como o poliedro toroidal, não satisfazem a fórmula de Euler. Mas, para valer essa fórmula, o poliedro não tem que ser convexo necessariamente. Uma outra condição é que ele satisfaça a propriedade descrita no Teorema 19.2.

Em alguns problemas da lista a seguir o estudante poderá necessitar da seguinte propriedade: a soma das medidas dos ângulos das faces e contíguos a qualquer vértice de um poliedro convexo é $< 360°$. Uma demonstração pode ser encontrada em [45].

19.8 Problemas

Problema 19.8.1. O icosidodecaedro, apresentado na Figura 19.2, é convexo e tem 20 faces triangulares e 12 pentagonais, e nenhuma outra face. (i) Encontre a quantidade de faces, arestas e vértices. (ii) Se soubermos de antemão que o icosidodecaedro tem os vértices de um único tipo, mostre que esse tipo é necessariamente $p = 4$.

Problema 19.8.2. Um dodecaedro convexo tem 12 faces pentagonais regulares, e nenhum outro tipo de face. Encontre a quantidade de arestas e vértices. Descreva os tipos possíveis de vértices e a quantidade de cada tipo.

Problema 19.8.3. Vimos no início da Seção 19.7 que "se num poliedro todas as faces forem triangulares, seu número é par". Usando essa mesma ideia descubra outros resultados.

Problema 19.8.4. Arrume bons argumentos para justificar que: (i) a quantidade mínima de faces que um poliedro pode ter é $F = 4$, e essa quantidade é realizada apenas pelo tetraedro; (ii) a quantidade mínima de vértices que um poliedro pode ter é $V = 4$, e essa quantidade é realizada apenas pelo tetraedro; (iii) a quantidade mínima de arestas que um poliedro pode ter é $A = 6$, e essa quantidade é realizada apenas pelo tetraedro.

Problema 19.8.5. Um poliedro convexo tem 8 vértices, apenas uma face pentagonal e todas as outras faces triangulares. Determine o número de faces triangulares. Faça um desenho possível desse poliedro.

Problema 19.8.6. Considere o cubo truncado da Figura 19.8. Descreva os tipos de faces e a quantidade de cada tipo. Descreva os tipos de vértices e a quantidade de cada tipo. Conte as faces, as arestas e os vértices, e veja que a fórmula de Euler está satisfeita.

Problema 19.8.7. Um poliedro convexo tem A arestas, F faces e V vértices. Demonstre que $A+6 \leq 3F$ e $A+6 \leq 3V$.

Problema 19.8.8. Mostre que a soma das medidas (em radianos) dos ângulos de todas as faces de um poliedro convexo é $2\pi(A-F)$.

Problema 19.8.9. Vimos na Figura 19.2 que o triacontaedro rômbico é constituído por 30 losangos e nenhum outro tipo de face. A Figura 19.14 apresenta outro desenho, talvez mais fácil de examinar. **a)** Calcule a quantidade de arestas. **b)** Examinando a figura se pode ver que esse poliedro é convexo. Usando essa informação calcule a quantidade de vértices. **c)** Ainda da figura percebemos que os vértices são dos tipos 3 e 5. Calcule as quantidades V_3 e V_5 desses tipos.

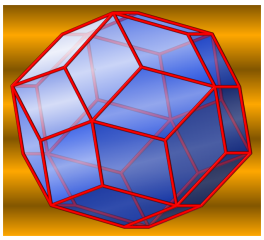


Figura 19.14. Outro desenho do triacontaedro rômbico.

Problema 19.8.10. Calcule a característica de Euler do poliedro toroidal da Figura 19.2 (terceiro desenho contando da esquerda para a direita).

Problema 19.8.11. Tome seis cubos modelados em papel, cada um juntamente com suas faces menos uma. Unindo esses objetos pelas arestas livres obtemos o sólido da Figura 19.15. **a)** Verifique que esse sólido satisfaz às condições P1 a P4 da definição de poliedro (página 115). **b)** Conte, a partir da figura, a quantidade de arestas A, a de faces F e a de vértices V. Veja assim que esse poliedro verifica a fórmula de Euler. **c)** Explique por que esse poliedro não satisfaz à condição de convexidade. Temos então um exemplo de poliedro não convexo que verifica a fórmula de Euler. O estudante pode criar muitos outros exemplos.

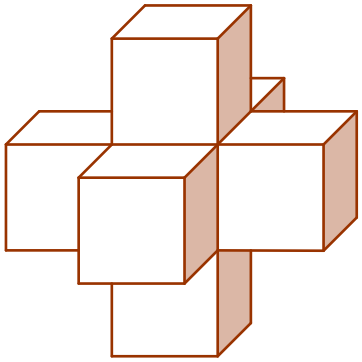


Figura 19.15. Desenho para o Problema 19.8.11.

Problema 19.8.12. Ache uma fórmula para a quantidade de diagonais de um poliedro convexo que dependa apenas da quantidade de vértices V, da de arestas A e de F_n (quantidade de faces do tipo n).

Problema 19.8.13. Um poliedro convexo tem 13 faces e 20 arestas. Ache a quantidade de vértices, quais tipos de faces tem e a quantidade de cada uma. Faça um desenho de um possível poliedro com essas características.

Problema 19.8.14. Um poliedro convexo tem por faces apenas triângulos equiláteros. Prove que tal poliedro tem não mais de 30 arestas.

Solução. Seja $\mathscr{P}$ um poliedro convexo nas condições dadas (existe pelo menos um, o tetraedro regular). Sejam V, A e F a quantidade de vértices, arestas e faces de $\mathscr{P}$. Temos $F = F_3$ (quantidade de faces triangulares). Já sabemos que, contando as arestas pelas faces, cada face contribui com 3 arestas, e cada aresta pertence a exatamente duas faces, assim $2A = 3F_3$.

Notemos por outro lado que o ângulo de um triângulo equilátero mede 60°, e em um n-edro a soma dos ângulos das faces não pode chegar a 360°. Como $6 \times 60° = 360°$, existem no máximo 5 faces concorrendo a um vértice qualquer de $\mathscr{P}$. Portanto $V = V_3 + V_4 + V_5$, sendo V_i a quantidade de vértices ao qual concorrem i arestas. Note que cada face tem 3 vértices, de modo que $3F_3$ seria a quantidade de vértices. Mas ao contar assim cada vértice do tipo V_3 foi contado 3 vezes, cada vértice do tipo V_4 foi contado 4 vezes e cada vértice do tipo V_5 foi contado 5 vezes. Portanto

$$3F_3 = 3V_3 + 4V_4 + 5V_5 \leq 3(V_3 + V_4 + V_5) = 5V$$

Em resumo, $2A = 3F$ e $3F \leq 5V$. Usando agora a fórmula de Euler vem

$$2 = V - A + F \Rightarrow 10 = 5V - 5A + 5F \Rightarrow 10 \geq 3F - 5A + 5F \Rightarrow 10 \geq 8F - 5A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 30 \geq 8 \cdot 3F - 15A \Rightarrow 30 \geq 8 \cdot 2A - 15A \Rightarrow 30 \geq A$$

e terminamos.

Problema 19.8.15. Descreva e desenhe todos os poliedros convexos com 10 aretas. Sugestão: primeiro prove que ele tem 6 faces.

Problema 19.8.16. (i) Mostre que se $n \geq 6$ é par então existe (pelo menos) um poliedro convexo com n arestas. (ii) Mostre que se $n \geq 9$ é múltiplo de 3 então existe (pelo menos) um poliedro convexo com n arestas. (iii) Examine outros casos para n.

Problema 19.8.17. Mostre que não existe poliedro convexo com 7 arestas. Sugestão: usando desigualdades conhecidas observe que $A + 6 \leq 3V \leq 2A$.

Problema 19.8.18. Um poliedro com A arestas, F faces e V vértices, só tem faces triangulares. Truncando todos os seus vértices, quantas arestas, faces e vértices tem o novo poliedro? Descreva os tipos de faces e a quantidade de cada um.

Problema 19.8.19. Um poliedro convexo tem A arestas, F faces e V vértices. Em cada polígono constituinte do poliedro é colocada uma pirâmide que tem esse polígono como base. Quantas arestas, faces e vértices tem o novo poliedro?

Problema 19.8.20. Podemos contar as arestas A, os vértices V e as faces F de planificações de poliedros. Você pode usar planificações já estudadas, do cubo, de pirâmides e de prismas. Na Figura 19.16 vemos mais dois exemplos. Descubra um padrão combinatório desse tipo de figura. Você tem alguma justificativa?

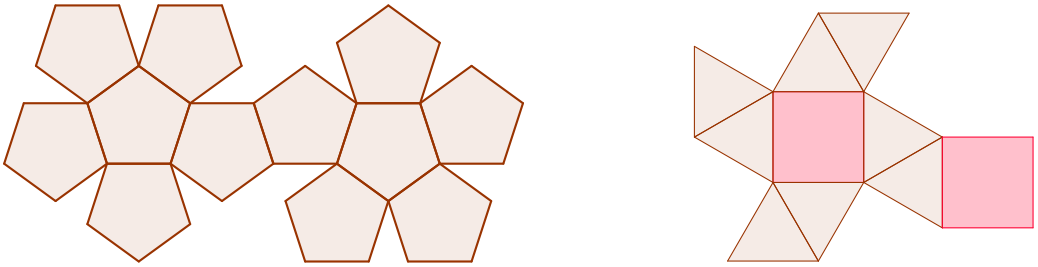


Figura 19.16. Desenhos de planificações do dodecaedro e do antiprisma quadrangular.

19.9 Classificação dos poliedros

Os poliedros são reunidos em famílias cujos elementos têm alguma propriedade em comum. São inúmeras as possibilidades, e veremos algumas delas.

A mais importante, pelo menos do ponto de vista histórico, é a família dos poliedros regulares. Um poliedro é chamado de *regular* quando for convexo e verificar as duas propriedades de regularidade seguintes: (i) todas as faces são polígonos regulares de um único tipo; (ii) todos os vértices são de um único tipo.

Um resultado famoso da antiguidade é a determinação de todos os poliedros regulares. Só existem 5, como veremos. São conhecidos como *poliedros de Platão*, em homenagem ao filósofo grego Platão.

Teorema 19.6. *Existem apenas cinco poliedros regulares, e são eles:*

(1) o cubo, formado por 6 faces quadradas;
(2) o tetraedro regular, formado por 4 faces triangulares equiláteras;
(3) o octaedro regular, formado por 8 faces triangulares equiláteras;
(4) o icosaedro regular, formado por 20 faces triangulares equiláteras;
(5) o dodecaedro regular, formado por 12 faces pentagonais regulares.

Vamos apresentar uma demonstração parcial desse teorema. Primeiro observamos que um vértice qualquer de um poliedro convexo forma um p-edro, sendo p o tipo do vértice. Assim, pelo que vimos na Seção 15.5, a partir da página 16, existem pelo menos três faces que concorrem a esse vértice, e a soma de seus ângulos é $< 360°$. Por outro lado sabemos que o ângulo interno de um polígono regular de n lados, para $n \geq 6$, é $\geq 120°$. Como $3 \times 120° = 360°$, vemos que num poliedro regular não podemos ter faces com n lados para $n \geq 6$. Portanto as faces só podem ser triângulos equiláteros, quadrados ou pentágonos regulares.

Outras observações gerais. Dado um poliedro regular, seja n o tipo de suas faces e p o tipo de seus vértices. Então, da Proposição 19.4, temos $2A = nF = pV$. Substituindo $A = nF/2$ e $V = nF/p$ na fórmula de Euler vem

$$V + F - A = 2 \Rightarrow \frac{nF}{p} + F - \frac{nF}{2} = 2 \Rightarrow F = \frac{4p}{2p + 2n - pn}$$

Lembrando que esses números são inteiros positivos com $3 \leq n \leq 5$ e $3 \leq p \leq 5$, não temos muitas opções. Vejamos cada caso.

As faces são triângulos equiláteros. Então $n = 3$ e $3 \leq p \leq 5$. Ainda $F = \frac{4p}{6-p}$.

Se $p = 3$ temos $F = 4$, assim o poliedro tem 4 faces triangulares equiláteras, 6 arestas e 4 vértices, todos do tipo 3. Existe um poliedro que tem essas condições, que é o tetraedro regular, e é o único.

Se $p = 4$ temos $F = 8$, assim o poliedro tem 8 faces triangulares equiláteras, 12 arestas e 6 vértices, todos do tipo 4. Existe um poliedro que tem essas condições, que é o octaedro regular, e é o único.

Se $p = 5$ temos $F = 20$, assim o poliedro tem 20 faces triangulares equiláteras, 30 arestas e 12 vértices, todos do tipo 5. Existe um poliedro que tem essas condições, que é o icosaedro regular, e é o único.

As faces são quadrados. Então $n = 4$ e $p = 3$. Ainda $F = \frac{2p}{4-p} = 6$. Assim o poliedro tem 6 faces quadradas, 12 arestas e 8 vértices, todos do tipo 3. Existe um poliedro que tem essas condições, que é o cubo, e é o único.

As faces são pentágonos regulares. Então $n = 5$ e $p = 3$. Ainda $F = \frac{4p}{10-3p} = 12$. Assim o poliedro tem 12 faces pentagonais regulares, 30 arestas e 20 vértices, todos do tipo 3. Existe um poliedro que tem essas condições, que é o dodecaedro, e é o único.

Vemos na Figura 19.17 um desenho de cada um desses poliedros.



Figura 19.17. Os cinco poliedros de Platão.

O que falta para terminarmos a demonstração do Teorema de classificação dos poliedros regulares? Falta observarmos que podemos construir cada um deles e que são únicos. Para o cubo e o tetraedro regular já fizemos isso neste texto. Para o octaedro regular, confira o Problema 19.10.4 abaixo. Para o icosaedro e o dodecaedro, o estudante deve consultar a literatura, por exemplo, o Capítulo 9 de [8]. Nesse livro o autor também prova que o icosaedro e o dodecaedro regulares são inscritíveis numa esfera. Já sabemos que o cubo e o tetraedro regular também são. Para o octaedro regular, isso será observado no Problema 19.10.4. Portanto temos o

Teorema 19.7. *Os cinco poliedros regulares são inscritíveis em esferas.*

Prosseguindo com nosso pequeno relato sobre a classificação de poliedros, veremos agora os semirregulares. Antes disso precisamos de um conceito mais apurado sobre os tipos de vértices. Vimos que um vértice se diz do "tipo p" quando a ele concorrem p arestas. Mas essas arestas, se o poliedro não for regular, podem ser de diferentes tipos de polígonos. Agora precisamos levar isso em conta, pois consideraremos poliedros que não têm todas as faces do mesmo tipo.

Dado um vértice V do tipo p de um poliedro convexo, ordenamos as faces que têm V como vértice comum, percorrendo-as em uma ordem circular em torno de V, iniciando com uma delas, e numerando-as 1, 2, ..., p. A *configuração cíclica* de V é a p-upla $(n_1, n_2, ..., n_p)$ em que n_i é o tipo da i-ésima face. Duas configurações são consideradas a mesma se uma for um rearranjo cíclico da outra ou se forem as mesmas quando uma delas for percorrida no sentido contrário.

Vemos na Figura 19.18 um poliedro convexo mostrando um vértice com configuração $(4,3,3,3)$.

Um poliedro é chamado de *semirregular* quando for convexo e verificar as duas propriedades de (semi)regularidade seguintes: (i) todas as faces são polígonos regulares de dois tipos ou mais;

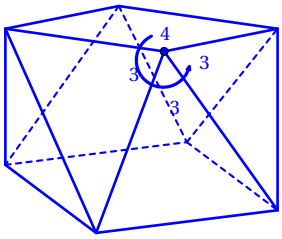


Figura 19.18. Um poliedro com vértices de configuração (4,3,3,3).

(ii) os vértices são *isogonais*, isto é, são equivalentes em relação a todas as simetrias da figura. Em particular, todos os vértices têm uma única configuração.

Um exemplo de poliedro semirregular é o da Figura 19.18 (o poliedro precisa ser construído com cuidado para que todas as suas faces sejam regulares). Ele é um caso particular da *série antiprismas*. Temos também os poliedros da *série prismas*: construindo prismas de modo que tenham todas as faces regulares, e as bases não sejam quadradas, eles também são semirregulares.

Vejamos agora o que são os sólidos de Arquimedianos, assim chamados em homenagem ao matemático Arquimedes da Antiga Grécia.

Um poliedro é chamado *arquimediano* quando for semirregular e não pertencer às séries dos prismas e dos antiprismas.

Arquimedes descobriu que existem 13 poliedros nessas condições. Uma demonstração pode ser estudada em [54], a partir da página 57. Na Figura 19.19 vemos os 13 poliedros arquimedianos.

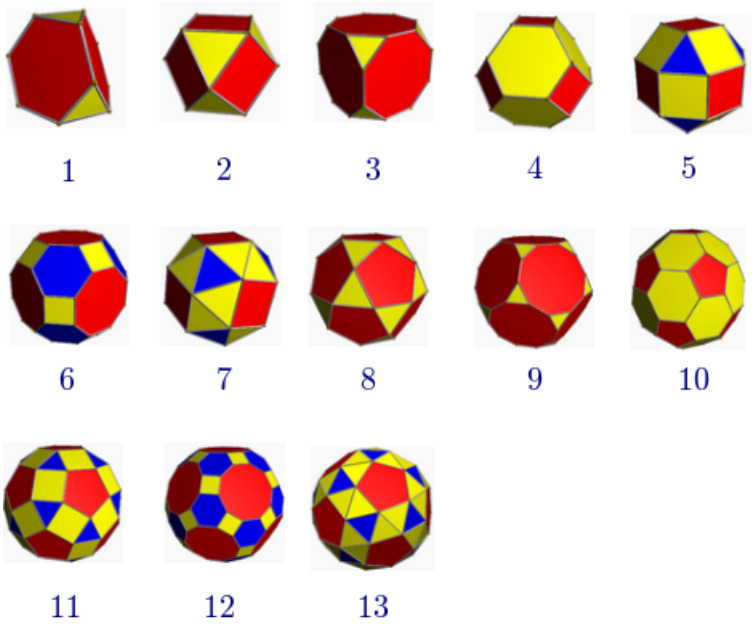


Figura 19.19. Os 13 poliedros arquimedianos.

Seus nomes são: (1) Tetraedro truncado; (2) cuboctaedro; (3) cubo truncado; (4) octaedro truncado; (5) cuboctaedro rômbico pequeno; (6) cuboctaedro rômbico grande; (7) cubo snub; (8) icosidodecaedro; (9) dodecaedro truncado; (10) icosaedro truncado; (11) icosidodecaedro rômbico pequeno; (12) icosidodecaedro rômbico grande; (13) dodecaedro snub.

Os *poliedros de Johnson* são convexos, têm todas as faces regulares mas não são poliedros regulares e nem semirregulares (portanto os vértices não têm a mesma configuração). Existem 92 desses poliedros, descritos por N. W. Johnson em 1966. Um exemplo é a pirâmide pentagonal

com lados congruentes, apresentada na Figura 19.20. Observe que existem cinco vértices com a configuração (5,3,3) e um com (3,3,3,3,3).



Figura 19.20. Um poliedro de Johnson, a pirâmide pentagonal com lados congruentes.

Existem muitas outras famílias de poliedros, mas vamos ficando por aqui!

19.10 Problemas

Problema 19.10.1. Se nunca fez isso, demonstre que é crescente a função $n \to \alpha_n$, $n \geq 3$, sendo α_n a medida do ângulo interno do polígono regular de n lados.

Problema 19.10.2. Dê exemplos de poliedros convexos que têm todas as faces regulares do mesmo tipo mas que não são regulares. Portanto apresentam vértices de mais de um tipo.

Problema 19.10.3. Um estudante tem uma quantidade grande de quadrados recortados em folha de cartolina, todos de lados de mesma medida. Ele tenta construir com eles superfícies poliédricas convexas, cujas faces sejam esses quadrados. Que sólidos podem surgir?

Problema 19.10.4. **a)** A princípio, podemos chamar de octaedro qualquer poliedro com 8 faces. Desenhe um octaedro que não tenha apenas faces triangulares. **b)** Na literatura o termo octaedro é mais usado para poliedros com 8 faces triangulares. Eles podem não ser regulares. Desenhe alguns. **c)** O ocatedro regular é aquele com 8 faces triangulares equiláteras, 12 arestas e 6 vértices, todos do tipo 4. Explique que ele pode ser construído pela aglutinação de duas pirâmides. Explique por que é o único possível.

Problema 19.10.5. Considere três segmentos congruentes dispostos no espaço de forma que são perpendiculares dois a dois pelos seus pontos médios. A união dos segmentos que unem os extremos desses segmentos, excluindo-se eles mesmos, formam um poliedro. Mostre que esse poliedro é o octaedro regular.

Problema 19.10.6. Demonstre as seguintes propriedades do octaedro regular cujo lado mede a. **a)** Ele tem três diagonais, que são congruentes duas a duas e perpendiculares duas a duas pelos seus pontos médios. **b)** Explique como os vértices e as faces do octaedro regular se organizam em pares, chamados vértices ou faces opostas. **c)** Demonstre que no octaedro regular duas faces opostas quaisquer são paralelas.

Problema 19.10.7. Calcule a área de superfície e o volume do octaedro regular cujo lado mede a.

Problema 19.10.8. Explique por que o octaedro regular é inscritível em uma esfera. Se o lado do octaedro mede a, qual é o raio da esfera?

Problema 19.10.9. Dado um cubo, considere os centros de suas faces. Una com segmentos cada um desses pontos com seus vizinhos. Mostre que esses segmentos formam um octaedro regular (é o poliedro dual do cubo). Faça um desenho ilustrando essa propriedade. Se a aresta do cubo mede a, calcule a aresta do octaedro. Devido a essa propriedade se diz que o *dual topológico* do cubo é o octaedro.

Problema 19.10.10. Dado um cubo de volume V, calcule o volume do octaedro seu dual topológico.

Problema 19.10.11. Dado um octaedro regular, considere os centros de suas faces. Una com segmentos cada um desses pontos com seus vizinhos. Mostre que esses segmentos formam um cubo. Faça um desenho ilustrando essa propriedade. Se a aresta do octaedro mede a, calcule a aresta do cubo. Devido a essa propriedade se diz que o *dual topológico* do octaedro regular é o cubo.

Problema 19.10.12. Vimos em problemas anteriores que o cubo e o octaedro regular são duais topológicos um do outro, em que o tetraedro regular é o dual topológico de si mesmo. Como você pode justificar que o dodecaedro e o icosaedro regulares são duais topológicos um do outro?

Problema 19.10.13. Descreva os poliedros semirregulares pertencentes à série dos prismas. Descreva como devem ser construídos, como são e quantas são suas faces, arestas e vértices, quais os tipos de faces e quantas são de cada tipo, e quais as configurações de seus vértices. Faça desenhos de alguns deles.

Problema 19.10.14. Descreva os poliedros semirregulares pertencentes à série dos antiprismas. Descreva como devem ser construídos, como são e quantas são suas faces, arestas e vértices, quais os tipos de faces e quantas são de cada tipo, e quais as configurações de seus vértices. Faça desenhos de alguns deles.

Problema 19.10.15. **a)** Mostre que se num poliedro semirregular os vértices têm a configuração $(3,m,n)$ então $m=n$. Em geral, se a configuração for (k,m,n), com k ímpar, então $m=n$ e são pares. Sugestão: desenhe uma face triangular e examine o que ocorre ao redor de seus três vértices. **b)** Mostre que se num poliedro, semirregular ou regular, não se sabe, os vértices têm a configuração (k,m,n) e dois desses valores forem ímpares, então o poliedro é o tetraedro ou o dodecaedro regulares.

Problema 19.10.16. Num poliedro semirregular os vértices têm a configuração $(3,n,n)$. Quais valores n pode assumir? Verifique, para cada um desses valores, se existe um poliedro arquimediano correspondente.

Problema 19.10.17. Uma pirâmide pentagonal tem todos os lados de medida a. Calcule: sua altura, a área de superfície lateral, a área total, o volume e os raios das esferas inscrita e circunscrita.

Problema 19.10.18. No cubo $ABCDEFGH$ da Figura 19.21, de aresta a, os pontos M, N, P e Q são médios das arestas EF, FG, GH e EH, respectivamente. Foram feitas as seções pelos planos AMQ, BNM, CPN e DPQ. Retirando-se os quatro tetraedros formados, resultou o poliedro $ABCDMNPQ$. O poliedro possui duas bases paralelas quadradas e faces laterais triangulares. Ele é um exemplo de *prismatóide*. Calcule seu volume.

Problema 19.10.19. Calcule o volume e a área lateral do antiprisma pentagonal com todas as arestas de medida a. Juntando isso com o resultado do Problema 19.10.17 calcule a área e o volume do icosaedro regular de aresta a.

Problema 19.10.20. Calcule quantas diagonais do icosaedro regular não passam pelo seu centro. Resposta: 30.

Problema 19.10.21. Calcule a medida do ângulo diédrico do icosaedro regular. Sugestão: use que a diagonal de um pentágono regular mede $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ de seu lado.

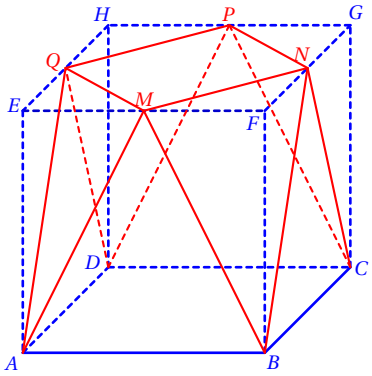


Figura 19.21. Um prismatóide.

Solução. Um ângulo diédrico é o ângulo formado por duas faces que têm uma aresta em comum. Como todo poliedro regular, os ângulos diédricos do icosaedro (regular) são todos de mesma medida, pois todos os vértices são n-edros congruentes, isto é, são formados por faces congruentes e do mesmo tipo.

Consideremos um vértice A do icosaedro e as faces que a ele concorrem ABC, ACD, ADE, AEF e AFB, conforme a Figura 19.22. Elas formam uma pirâmide cuja base é o pentágono regular $BCDEF$.

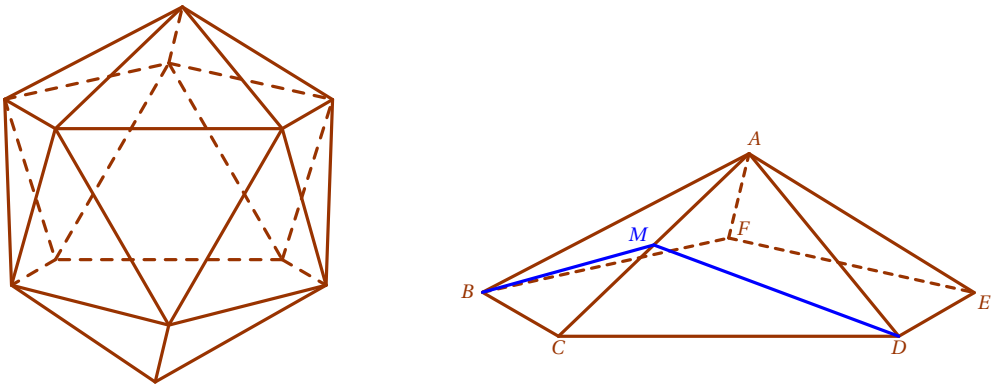


Figura 19.22. Ângulo diédrico de um icosaedro regular.

M é o ponto médio de AC. Como as faces são triângulos equiláteros, temos $BM \perp AC$ e $DM \perp AC$. Logo $\angle BMD$ é uma seção normal do diedro formado pelas faces ABC e ACD. Seja $\theta = m(\angle BMD)$. Vamos calcular o cosseno de θ. Seja a a medida das arestas do icosaedro. Notemos primeiro que

$$BM = DM = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad \text{e} \quad BD = \frac{1+\sqrt{5}}{2}a$$

Agora aplicamos a Lei dos Cossenos no triângulo BMD com referência ao vértice M:

$$BD^2 = BM^2 + DM^2 - 2BM \cdot DM \cos\theta \Rightarrow \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}a\right)^2 = 2\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}a\right)^2 - 2\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}a\right)^2 \cos\theta$$

$$\Rightarrow \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = -\frac{\sqrt{5}}{3}$$

Portanto a medida do ângulo diédrico do icosaedro regular é

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right) \approx 2,41186 \text{ rad} \approx 138,18968^\circ$$

Problema 19.10.22. No poliedro convexo $ABCDEF$, apresentado na Figura 19.23, a face $ABCD$ é um losango com diagonais de medidas $AC = a$ e $BD = b$, e as outras faces são triângulos, sendo BAE e DAE retângulos em A e BCF e DCF retângulos em C. Anotamos $AE = c$ e $CF = d$. Calcule o volume do poliedro em função de a, b, c e d.

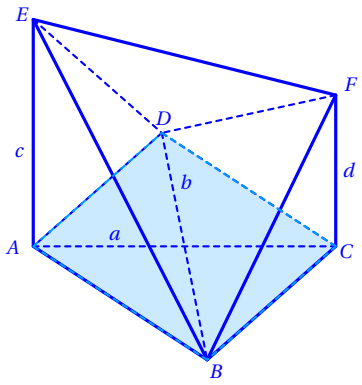


Figura 19.23. Um poliedro rômbico com seis faces tringulares.

Solução. Seja α o plano da face $ABCD$. Como AE é perpendicular a duas direções de α temos $AE \perp \alpha$. Do mesmo modo $CF \perp \alpha$. Portanto $AE \parallel CF$, de modo que esses segmentos estão no mesmo plano β. Temos $\beta \perp \alpha$ pois β contém um segmento perpendicular a α. Como $BD \subset \alpha$ e BD é perpendicular à interseção de α com β, vem $BD \perp \beta$.

Seja P o ponto de encontro das diagonais do losango. Provamos que PB e PD são perpendiculares a β. Olhamos agora $BACFE$ como uma pirâmide de base $ACFE$ e altura BP, e $DACFE$ como uma pirâmide de base $ACFE$ e altura DP. Portanto essas pirâmides têm a mesma base e a mesma altura, e o volume do poliedro $ABCDEF$ é o dobro do volume de uma delas, digamos $BACFE$. Confira a Figura 19.24.

Lembrando que as diagonais de um losango se dividem ao meio, a altura da pirâmide $BACFE$ é $BP = b/2$. Sua base $ACFE$ é um trapézio de área $\frac{1}{2}(c+d)a$. Portanto o volume do poliedro $ABCDEF$ é

$$2\frac{1}{3}\frac{1}{2}(c+d)a\frac{b}{2} = \frac{ab(c+d)}{6}$$

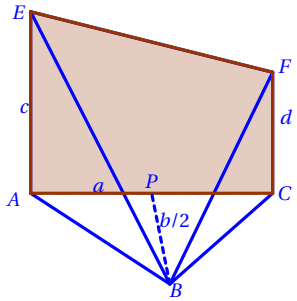


Figura 19.24. Referência para a solução do Problema 19.10.22.

Problema 19.10.23. Calcule a medida do ângulo diédrico do octaedro regular. Sugestão: na Figura 19.25 M o ponto médio de DE. O ângulo diédrico é $\widehat{AMB}$.

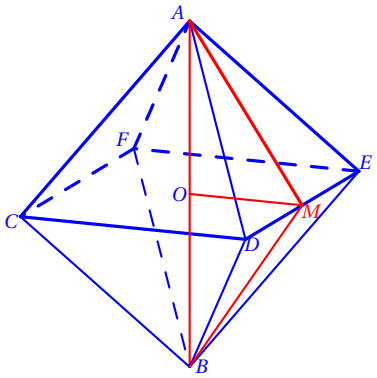


Figura 19.25. Referência para a solução do Problema 19.10.23.

Problema 19.10.24. Considere um octaedro regular de aresta de medida a. Já sabemos, do Problema 19.10.6, que duas faces opostas quaisquer são paralelas. Calcule a distância entre elas. Aproveite e obtenha o raio da esfera inscrita no octaedro regular.

Solução 1. Na Figura 19.26 vemos o octaedro regular $ABCDEF$ de aresta a. As diagonais AC e EF determinam o centro O do octaedro. Seja M o ponto médio de BC. Note que OM e EM são medianas das bases de triângulos isósceles, de modo que são também alturas, e $OM \perp BC$ e $EM \perp BC$. Portanto BC é perpendicular ao plano $[EOM]$. Assim os planos $[EOM]$ e $[EBC]$ são perpendiculares, e EM está contido na sua interseção. Logo o segmento $OG \perp EM$ é perpendicular a $[EBC]$, de modo que OG é a distância de O à face $[EBC]$.

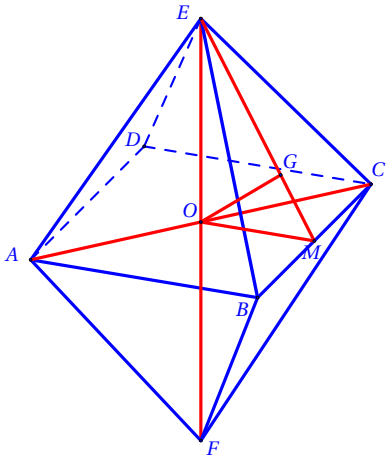


Figura 19.26. Referência para a solução do Problema 19.10.24.

Notemos agora que OG é a altura relativa à hipotenusa do triângulo retângulo EOM, de forma que

$$OG \cdot EM = OE \cdot OM \Rightarrow OG = \frac{OE \cdot OM}{EM}$$

Agora vemos que
$OE = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ por ser a metade da diagonal do quadrado de lado a
$OM = \frac{a}{2}$ é a distância do centro do quadrado $ABCD$ a um lado
$EM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ é a altura do triângulo equilátero EBC
Logo

$$OG = \frac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$$

Vemos, por outro lado, que OG é também a distância de O à face $[ABF]$ oposta a $[EBC]$. Logo a ditância entre as duas faces é $2OG = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Como a esfera inscrita no octaedro é tangente às faces, vemos que G é um ponto de tangência e o raio da esfera inscrita é $OG = \frac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$.

Solução 2. Podemos decompor a pirâmide $ABCDE$ em quatro tetraedros congruentes a $BCEO$. Temos

$$v(ABCDE) = \frac{1}{3}a^2 OE = \frac{a^3\sqrt{2}}{6} \quad \text{e} \quad v(BCEO) = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}OG$$

Usando que $v(ABCDE) = 4v(BCEO)$ achamos $OG = \frac{a\sqrt{6}}{6}$, de forma que a distância procurada é $2OG = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

19.11 Temas para investigação

Tema 19.11.1. Nos Problemas 19.8.15 a 19.8.17 estivemos investigando sobre a existência de poliedros com n arestas, para $n \geq 6$ inteiro dado. Para completar esse estudo quem sabe o artigo [64] ajude. Faça o mesmo estudo para faces e vértices. Observe que resultados sobre faces para poliedros convexos em geral também são válidos para vértices. O motivo é que na fórmula de Euler $V - A + F = 2$ podemos intercambiar os valores V e F e nada muda. Em outras fórmulas ocorre o mesmo.

Tema 19.11.2. Investigue os deltaedros, que são poliedros convexos unicamente com faces triangulares regulares.

Tema 19.11.3. Denominamos *fulerenos* aos poliedros convexos unicamente com faces pentagonais e hexagonais (não necessariamente regulares) e com vértices unicamente do tipo três. Sejam F_5 a quantidade de faces pentagonais e F_6 a de faces hexagonais. Investigue os valores de F_5 e F_6 que são possíveis.

Tema 19.11.4. Investigue, para cada sólido de Platão, se existem versões não regulares (isto é, com a mesma configuração combinatória mas com algumas ou todas as faces não regulares).

Tema 19.11.5. Investigue poliedros com 24 vértices, 12 faces pentagonais e 2 faces hexagonais. Existe algum com faces regulares?

Apêndice A

Respostas e sugestões

Observações: Nem sempre as respostas dadas estão completas. Fique atento ao enunciado do problema para ver se é necessário completar. Muitas vezes não apresentamos nenhum argumento, o que significa que ficou por conta do estudante. Portanto, muitas respostas devem ser vistas apenas como dicas. Lembramos que, na resolução de um problema, apenas encontrar a resposta correta não é suficiente. O processo de descoberta e uma justificativa adequada são muito importantes, e o estudante deve aprender a descrevê-los. Examine bem os exemplos que demos no texto, eventualmente eles podem servir de inspiração.

Problemas 15.7

15.7.1
15.7.2

Temas para investigação 15.8

15.8.1

Problemas 16.3

16.3.1
16.3.2

Problemas 16.5

16.5.1
16.5.2

Problemas 16.7

16.7.1
16.7.2

Problemas 16.9

16.9.1
16.9.2

Temas para investigação 16.10

16.10.1
16.10.2

Problemas 17.3

17.3.1

17.3.2

Problemas 17.5

17.5.1
17.5.2

Problemas 17.7

17.7.1
17.7.2

Problemas 17.9

17.9.1
17.9.2

Temas para investigação 17.10

17.10.1
17.10.2

Problemas 18.2

18.2.1
18.2.2

Problemas 18.8

18.8.1
18.8.2

Temas para investigação 18.9

18.9.1
18.9.2

Problemas 19.2

19.2.1
19.2.2

Problemas 19.4

19.4.1
19.4.2

Problemas 19.6

19.6.1
19.6.2

Problemas 19.8

19.8.1
19.8.2

Problemas 19.10

19.10.1
19.10.2

Temas para investigação 19.11

19.11.1
19.11.2

Apêndice B

Créditos das figuras

Observação: As figuras aqui não referidas foram construídos pelo autor com o uso do programa gráfico vetorial Inkscape ou com o Pictex.

Capa e Apresentação

Figura da capa externa Construída pelo autor com o Inkscape.

Figura da capa interna Clip Art Inkscape `http://www.openclipart.org/` Autor: Kattekrab. Domínio público. Consultado em outubro de 2010.

Figura da Apresentação, página iii Clip Art Inkscape `http://www.openclipart.org/` Autor: Krauskopf Tom Machovka. Domínio público. Consultado em outubro de 2010.

Capítulo 16: Prismas e pirâmides

Figura 16.1: Desenho da esquerda: `http://http://en.wikipedia.org/wiki/File:Cube_t0_fb.png` Imagem de domínio público. Consultado em março de 2014. Desenho central: `http://en.wikipedia.org/wiki/File:Cube_rotorotational_symmetry.png` Autor: Tomruen, de 5 de fevereiro de 2014. Licença: Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Consultado em março de 2014. Desenho da direita: `http://en.wikipedia.org/wiki/File:Hexahedron.svg` Autor: DTR Licença: Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Consultado em março de 2014.

Figura 16.10: Figura de Clip Art Inkscape `http://www.openclipart.org/detail/104335/3d-stairs-by-10binary` Consultado em março de 2014. Imagem de domínio público.

Figura 16.18: Desenho da esquerda: Figura de Clip Art Inkscape `http://www.openclipart.org/detail/60667/tetrahedron-by-laobc` Imagem de domínio público. Consultado em março de 2014. Desenho central: Figura de Clip Art Inkscape Imagem de domínio público `http://www.openclipart.org/detail/181458/refactoring-pyramid-by-aulitin-181458` Consultado em março de 2014. Desenho da direita: `http://http://en.wikipedia.org/wiki/File:Tetrahedron.svg` Autor: DTR Licença: Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Consultado em março de 2014.

Figura 16.28: Direitos reservados. Autor: Robert Webb, em 13 de outubro de 2008. Origem: *Robert Webb's Stella software* em `http://www.software3d.com/Stella.php` Licenciado pelo autor em `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Pentagram_pyramid.png` Créditos: "This image may be used by anyone for any purpose, provided that acknowledgement is given to Robert Web". Consultado em janeiro de 2018.

Figura 16.32: Desenho central: `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Blue_pentagonal_prism.svg` Autor: KSFT, em 15 de novembro de 2016. Licença: Creative Commons Attribution-Share Alike 4.0 Consultado em janeiro de 2018. Desenho da direita: `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Hexagonal_Prism_BC.svg` Autor: R. A. Nonenmacher, em 11 de agosto de 2008. Licença: GNU Free Documentation License. Consultado em janeiro de 2018.

Figura 16.35: Direitos reservados. Autor: Robert Webb, em 4 de maeço de 2006. Origem: *Robert Webb's Stella software* em `http://www.software3d.com/Stella.php` Licenciado pelo autor em `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Pentagram_pyramid.png` Créditos: "This image may be used by anyone for any purpose, provi-

ded that acknowledgement is given to Robert Web". Consultado em janeiro de 2018.

Capítulo 17: Cones, cilindros e a esfera

Figura 17.1: Desenho da esquerda: adaptado de https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Gerader_Kreiskegel.svg Autor Gerader Kreiskegel. Data 17 de outubro de 2010. Licença: Domínio Público. Segundo desenho obtido em https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Blue-cone.png Autor não informado. Licença: Domínio Público. Desenhos da direita: Autor: Dominique Toussaint. Data 19 de julho de 2006. Obtido em https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Cone_3d.png Licença: GNU Free Documentation License. Páginas consultadas em janeiro de 2018.

Figura 17.8: Desenhos da esquerda e da direita: adaptados de https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Circular_cylinder_rh.svg Autor não informado. Data 22 de março de 2012. Licença: Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0. Segundo desenho adaptado de https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Elliptic_cylinder_abh.svg Autor não informado. Data 22 de março de 2012. Licença: GNU Free Documentation License. Páginas consultadas em janeiro de 2018.

Figura 17.14: Desenho da esquerda: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Sphere_-_monochrome_simple.svg Licença: Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0. Desenho da direita: Autor: Juan Diego Perez, 03/11/2012. http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Sphere_-_Esfera.svg Licença: Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0. Consultado em abril de 2014.

Figura 17.25: Desenho obtido em http://en.wikipedia.org/wiki/File:Esfera_Arquímedes.jpg Licença: domínio público. Autor: Andertxuman, 16/06/2010. Consultado em abril de 2014.

Capítulo 17: Volumes de sólidos e áreas de superfície

Figura 18.10: Origem: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Spherical_Wedge.svg Autor: Anonymous Dissident. Data 9 de junho de 2009. Licença: Domínio Público. Página consultada em fevereiro de 2018.

Figura 18.11: Origem: adaptado de https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Kugel-sektor.png Autor: Ag2gaeh. Data 12 de janeiro de 2015. Licença: Creative Commons Attribution-Share Alike 4.0 International. Página consultada em fevereiro de 2018.

Figura 18.22: Origem: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:TychoBrahePlanetarium-Copenhagen.jpg Licença: Domínio Público. Página consultada em fevereiro de 2018.

Capítulo 19: Poliedros

Figura 19.2: A primeira imagem produzida em *Robert Webb's Stella software* em http://www.software3d.com/Stella.php Créditos: "This image may be used by anyone for any purpose, provided that acknowledgement is given to Robert Web". Desenhos da esquerda para a direita. 1º Origem: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Icosidodecahedron.png criada em 25 de fevereiro de 2006 por Tom Ruen; 2º Origem: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Rhombictriacontahedron.svg Autor: DTR. Licença: GNU Free Documentation License. 3º Origem: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Hexagonal_torus.png criada em 23 de outubro de 2009 por Tom Ruen; domínio público. Páginas consultadas em fevereiro de 2018.

Figura 19.10: Desenhos da esquerda para a direita. 1º Origem: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Hexahedron.jpg Criada por Cyp. Licença: GNU Free Documentation License. 3º Origem: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Rhombictriacontahedron.svg Criada por DTR. Licença: GNU Free Documentation License. 4º Origem: https://en.wikipedia.org/wiki/File:Uniform_polyhedron-43-s012.png criada por Tom Ruen; domínio público. A quarta imagem foi produzida em *Robert Webb's Stella software* em http://www.software3d.com/Stella.php Créditos: "This image may be used by anyone for any purpose, provided that acknowledgement is given to Robert Web". Páginas consultadas em fevereiro de 2018.

Figura 19.11: Origem: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Hexagonal_antiprism.png criada em 25 de fevereiro de 2006 por Tomruen; domínio público. Imagem produzida em *Robert Webb's Stella software* em http://www.software3d.com/Stella.php Créditos: "This image may be used by anyone for any purpose, provided that acknowledgement is given to Robert Web". Página consultada em março de 2018.

Figura 19.13: Desenho da esquerda: Origem: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Uniform_tiling_332-t0-1-.png criada em 22 de fevereiro de 2009 por Tomruen; domínio público. Desenho da direita: origem https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Uniform_tiling_332-t01-1-.png criada em 22 de fevereiro de

2009 por Tomruen; licença: GNU Free Documentation License. Página consultada em março de 2018.

Figura 19.14: Origem: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Enzo_Bono_-_Triacontaedro_rombico.png criada por Vincenzo Bono; licença: GNU Free Documentation License. Página consultada em março de 2018.

Figura 19.17: Desenhos da esquerda para a direita. 1º Origem: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Tetrahedron.svg Criada por Kjell André em 11 de junho de 2007. Licença: GNU Free Documentation License. 2º Origem: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Hexahedron.svg Criada por DTR. Licença: GNU Free Documentation License. 3º Origem: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Octahedron.svg Criada por Stannered em 4 de março de 2007. Licença: GNU Free Documentation License. 4º Origem: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Dodecahedron.svg Criada por DTR. Licença: GNU Free Documentation License. 5º Origem: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Icosahedron.svg Criada por DTR. Licença: GNU Free Documentation License. Páginas consultadas em março de 2018.

Figura 19.17: Desenhos da esquerda para a direita. 1º Origem: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Truncated_tetrahedron.png Criada por Tomruen em 25 de fevereiro de 2006. Licença: domínio público. 2º Origem: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Cuboctahedron.png Criada em 25 de fevereiro de 2006 com o software Stella. Licença: domínio público. 3º Origem: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Truncated_hexahedron.png Criada por Tomruen em 25 de fevereiro de 2006. Licença: domínio público. 4º Origem: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Truncated_octahedron.png Criada por Tomruen em 25 de fevereiro de 2006. Licença: domínio público. 5º Origem: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Small_rhombicuboctahedron.png Criada por Tomruen em 25 de fevereiro de 2006. Licença: domínio público. 6º Origem: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Great_rhombicuboctahedron.png Criada por Tomruen em 25 de fevereiro de 2006. Licença: domínio público. 7º Origem: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Snub_hexahedron.png Criada por Tomruen em 25 de fevereiro de 2006. Licença: domínio público. 8º Origem: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Icosidodecahedron.png Criada por Tomruen em 25 de fevereiro de 2006. Licença: domínio público. 9º Origem: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Truncated_dodecahedron.png Criada por Tomruen em 25 de fevereiro de 2006. Licença: domínio público. 10º Origem: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Truncated_icosahedron.png Criada por Tomruen em 25 de fevereiro de 2006. Licença: domínio público. 11º Origem: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Small_rhombicosidodecahedron.png Criada por Tomruen em 25 de fevereiro de 2006. Licença: domínio público. 12º Origem: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Great_rhombicosidodecahedron.png Criada por Tomruen em 25 de fevereiro de 2006. Licença: domínio público. 13º Origem: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Snub_dodecahedron_ccw.png Criada por Tomruen em 25 de fevereiro de 2006. Licença: domínio público. Imagens produzidas em *Robert Webb's Stella software* em http://www.software3d.com/Stella.php Créditos: "This image may be used by anyone for any purpose, provided that acknowledgement is given to Robert Web". Páginas consultadas em março de 2018.

Figura 19.20: Origem: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Pentagonal_pyramid.png criada por Tomruen em 1 de agosto de 2013; licença: GNU Free Documentation License. Página consultada em março de 2018.

Referências Bibliográficas

[1] Alexandrov, A. D. *Convex Polyhedra.* Berlin: Springer, 2005.

[2] Bass, L. E. *et alii. Geometry.* Boston, Massachusetts: Pearson, 2004.

[3] Boyd, C. J. *et alii. Geometry.* New York: McGraw Hill, 2004.

[4] Boyer, C. B. *História da Matemática.* Tradução de Gomide, E. F. São Paulo: Editora Edgard Blücher LTDA, 1974.

[5] Braden, B. *The Surveyor's Area Formula.* The College Mathematics Journal, v. 17, n. 4, 1986, 326-337.

[6] Brasil-MEC. *Base Nacional Comum Curricular.* Brasil: Ministério da Educação, 2025. `https://basenacionalcomum.mec.gov.br/` Consultado em agosto de 2025.

[7] Cairns, S. S. *Peculiarities of Polyhedra.* The American Mathematical Monthly, v. 58, n. 10, 1951, 684-689.

[8] Caminha, A. M. N. *Geometria.* Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.

[9] Carvalho, P. C. P. *Introdução à Geomeria Espacial.* Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1993.

[10] Cederberg, J. N. *A Course in Modern Geometries.* New York: Springer Verlag, 2001.

[11] Cooke, R. *The History of Mathematics. A brief course.* New York: John Wiley & Sons, 1997.

[12] Croft, H. T. e Falconer, K. J. *Unsolved Problems in Geometry.* New York: Springer Verlag, 1991.

[13] Cromwell, P. R. *Polyhedra.* Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2004.

[14] Cundy, H. M. e Rollett, A. P. *Mathematical Models.* Oxford: Oxford University Press, 1961.

[15] Dolce, O. e Pompeo, J. N. *Geometria Espacial, posição e métrica.* São Paulo: Atual Editora, 1995.

[16] Eves, H. *Foundations and Fundamentals Concepts of Mathematics.* New York: Dover Publications, 1967.

[17] Eves, H. *Introdução à História da Matemática.* Tradução de Domingues, H. H. Campinas: Editora UNICAMP, 2004.

[18] Faber, R. L. *Foundations of Euclidean and Non-Euclidean Geometry.* New York: Marcel Dekker, 1983.

[19] Fowler, D. H. *The Mathematics of Plato's Academy. A new reconstruction*. Oxford: Clarendon Press, 1990.

[20] Greenberg, M. J. *Euclidean and Non-Euclidean Geometries*. Third Edition. New York: W. H. Freeman Company, 1993.

[21] Guidorizzi, H. L. *Um Curso de Cálculo*. volumes 1 e 3, 5ª. edição. Rio de Janeiro: LTC Editora, 2002.

[22] Henderson, D. W. e Taimina, D. *Experiencing Geometry*. Upper Saddle River: Pearson, 2005.

[23] Hvidsten, M. *Geometry*. Boston: McGrawHill, 2006.

[24] Jacobs, H. R. *Geometry*. Third Edition. New York: W. H. Freeman Company, 2003.

[25] Karpinski, L. C. *The History of Mathematics*. New York: Russel & Russel, 1965.

[26] Kline, M. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. Oxford: Oxford University, 1972.

[27] Lang, S. e Murrow, G. *Geometry*. New York: Springer-Verlag, 1988.

[28] Larson, R. E., Boswell, L. e Stiff, L. *Geometry*. Evanston, Illinois: McDougal Littell, 1998.

[29] Kin Y Li, *Vector Geometry*. Mathematical Excalibur, v6, n5, 2002. `www.math.ust.hk/excalibur/v6_n5.pdf`

[30] Legendre, A. M. *Elementos de Geometria*. Trad. Guimarães, M. F. A. Org. Guimarães L. C. Rio de Janeiro: Editora LIMC-UFRJ, 2009.

[31] Lima, E. L. *Áreas e Volumes*. Coleção Fundamentos da Matemática Elementar. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1985.

[32] Lima, E. L. *et alii. A Matemática do Ensino Médio*. Volumes 1, 2 e 3. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1996.

[33] Mancini, N. H. *Conexões da Geometria Analítica e Vetorial com a Geometria Espacial de Posição e Métrica*. Trabalho de Conclusão de curso de graduação. DM/UFSCar, 2018. `https://www.dm.ufscar.br/~ptlini/TCC_Nycolas_Hendrigo_Mancini.pdf` Consultado em 20 de junho de 2019.

[34] Meyer, W. *Geometry and its Applications*. Second Edition. Amsterdan: Elsevier, 2006.

[35] Moise, E. E. *Elementary Geometry from an advanced standpoint*. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, 1974.

[36] Moise, E. E. e Downs, F. L. *Geometria Moderna*. Volumes 1 e 2. Tradução de Watanabe, R. e Mello. D. A. Brasília: Editora Universidade de Brasília e Editora Edgard Blücher, 1971.

[37] Obmep. *Banco de Questões 2010 e banco de provas*. `https://www.obmep.org.br/`

[38] Oliveira, L. A. T. *Poliedros*. In: Sá, C. C. e Rocha, J. (Ed.) Treze Viagens pelo Mundo da Matemática. 2ª. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012, 161-194.

[39] Paterlini, R. R. *Aritmética dos números inteiros.* 3ª. ed. http://www.dm.ufscar.br/~ptlini/livros/ Consultado em 30 de março de 2026.

[40] Paterlini, R. R. *Aritmética dos números reais.* 2ª. ed. http://www.dm.ufscar.br/~ptlini/livros/ Consultado em 30 de março de 2026.

[41] Paterlini, R. R. *Geometria Elementar gênese e desenvolvimento. Tomo I: A Geometria na Sociedade e na Escola.* 2ª. ed. http://www.dm.ufscar.br/~ptlini/livros/ Consultado em 30 de março de 2026.

[42] Paterlini, R. R. *Geometria Elementar gênese e desenvolvimento. Tomo II: Geometria Euclidiana Plana.* 2ª. ed. http://www.dm.ufscar.br/~ptlini/livros/ Consultado em 31 de outubro de 2026.

[43] Paterlini, R. R. *Geometria Elementar gênese e desenvolvimento. Tomo IV: Tópicos de Geometria Elementar.* 2ª. ed. http://www.dm.ufscar.br/~ptlini/livros/ Consultado em 31 de outubro de 2026.

[44] Paterlini, R. R. *Os "Teoremas" de Cavalieri.* Revista do Professor de Matemática, n. 72, 2010, 43-47.

[45] Paterlini, R. R. *Sobre a soma dos ângulos planos de ângulos poliédricos convexos.* Revista do Professor de Matemática Online (PMO), v.8, n.2, 2020, 156-169.

[46] Pogorelov, A. V., *Geometria elemental.* Tradução de Vega, C. Moscou: Editora Mir, 1974.

[47] Polking, J. C. *The Geometry of the Sphere.* http://math.rice.edu/~pcmi/sphere/ Consultado em abril de 2011.

[48] PROFMAT - Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional. *Provas e Exames.* Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática. https://profmat-sbm.org.br/ Consultado em 2020-2026.

[49] Rangel, A. P. *Poliedros.* Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos S. A., 1982.

[50] Rocha, L. F. C. *Introdução à Geometria Hiperbólica Plana.* Rio de Janeiro: IMPA, 1987.

[51] Rosado, F. B. *Geometría del Tetraedro.* Revista Escolar de la Olimpíada Ibero americana de Matemática. www.oei.es/historico/oim/revistaoim/numero32/Tetraedro.pdf Consultado em janeiro de 2018.

[52] Royster, D. C. *Spherical Geometry.* http://www.math.uncc.edu/~droyster/math3181/notes/hyprgeom/node5.html Consultado em abril de 2011.

[53] Revista do Professor de Matemática. *Seção de Problemas.* Diversos números. Rio de Janeiro e São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática e Universidade de São Paulo.

[54] Sampaio, J. C. V., Rosa, M. B., Dias, C. e Barros, T. E., *Geometria Espacial.* Módulo II, Curso de Especialização Matemática na Prática. Cuiabá: Central de Texto, 2013.

[55] Saraiva, J. C. V. *O volume do elipsóide no ensino médio.* Revista do Professor de Matemática, n. 52, 2003, 21-24.

[56] Schwartzman, S. *The Circle and Sphere as Great Equalizers* The Mathematics Teacher, Vol. 84, n. 8, 1991, 666-672.

[57] Severi, F. *Elementos de Geometría*. Tomos primeiro e segundo. Tradução para o espanhol por Escobar, T. M. Barcelona/Buenos Aires, Editorial Labor, 1929.

[58] Smith, D. E. *History of Mathematics*. volumes I e II. New York: Dover Publications, 1958.

[59] Stillwell, J. *Numbers and Geometry*. New York: Springer-Verlag, 1998.

[60] Struik, D. J. *A Concise History of Mathematics*. 3ª. edição. New York: Dover Publications, 1967.

[61] Truffault, B. *Géométrie Élémentaire*. Paris: Ellipses Éditions, 2001.

[62] Vinberg, E. B. (ed.) *Geometry II*. Encyclopaedia of Mathematical Sciences, volume 29. Berlin: Springer Verlag, 1993.

[63] Waerden, B. L. van der. *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations*. Berlin: Springer Verlag, 1983.

[64] Wagner, E. *V-A+F=2: existe o poliedro?* Revista do Professor de Matemática, n. 47, 2001, 5-11.

[65] Weisstein, Eric W. *MathWorld–A Wolfram Web Resource*. Itens consultados: *Net; Solid of Revolution*. Endereço geral: `https://mathworld.wolfram.com/` Consulta no período 2016-2026.

[66] Wikipedia. Informações e figuras. Itens consultados: *Archimedean solid; Archimedes; Catalan solid; Cone; Cube; Cylinder; Deltahedron; Hexaedro; Hexahedron; Icosidodecahedron; Johnson solid; Parallelepiped; Pirâmide; Platonic solid; Polyhedron; Prism (geometry); Pyramid (geometry); Regular dodecahedron; Regular icosahedron; Regular octahedron; Regular tetrahedron; Rhombic triacontahedron; Semiregular polyhedron; Solid of revolution; Sphere; Spherical polyhedron; Steinmetz solid; Torus; Trapezoedro; Tycho Brahe; Ungula; Uniform polyhedron*. Endereço geral: `https://en.wikipedia.org/wiki/` Consultas no período 2007-2026.

[67] Williams, R. *The Geometrical Foundation of Natural Structure*. New York, Dover Publication, 1979.

Índice de autores

Antiga Grécia, 123
Arquimedes (287-212 a. C.), 87, 92, 123
Arquimedes (287-212 a.C.), 99

Brahe, T. (1546-1601), 103

Cavalieri, B. F. (1598-1647), 87
Copenhague, 103

Demócrito (460-370 a.C.), 87
Dinamarca, 103

Euclides (c. 300 a.C.), iii
Euler, L. (1707-1783), 118

Gua de Malves, J. P. (1712-1785), 46

Norman W. Johnson (1930-2017), 123

Platão (c. 428-427 a. C.), 121
Ptolomeu I Sóter (c. 367-283 a.C.), iii

Índice de assuntos

$[APQB]$, 16
$\angle APQB$, 16
$\hat{O}A_1A_2\ldots A_n$, 19
n-edro
  aresta, 19
  convexo, 19
  definição, 19
  face ou ângulo plano, 19
  superfície, 19
  vértice, 19

área de superfície, 85
Axioma 21 (da definição de volume), 86
Axioma 22 (do Princípio de Cavalieri), 86

característica de Euler, 59, 118
cilindro, 61
  altura, 68
  área, 69
  base, 68
  definiç ao, 68
  definiç ao geral, 68
  diretriz, 68
  equilátero, 70
  fechado, 68
  geratriz, 68
  interior, 68
  oblíquo, 68
  planificação, 69
  reto, 68
  sólido, 68
  seção paralela, 68
  superfície lateral, 68
  superfície total, 68
círculo máximo, 73
cone, 61
  área, 64
  área, 64
  área do tronco, 66
  definição geral, 62
  equilátero, 65
  planificação, 64
  tronco de, 65, 102
cone circular
  altura, 61
  definição, 61
  eixo, 61
  fechado, 61
  geratriz, 61
  interior, 61
  oblíquo, 61
  sólido, 61
  seção paralela, 62
  superfície lateral, 61
  superfície total, 61
conjunto
  interior não vazio, 85
  interior vazio, 85
  limitado, 115
  mensurável, 85
cubo, 31
  área de superfície, 32
  arestas, 31
  centro, 32
  definição, 31
  diagonal, 32
  faces, 32
  faces opostas, 32
  interior, 32
  planificação, 33
  sólido, 32
  superfície, 32
  vértices, 32

diedro
  aresta ou origem, 16
  definição, 16
  face, 16
  interior, 16, 23
  medida, 17
  plano bissetor, 18
  seção normal, 16
  trissetriz, 23

esfera, 61, 72
  área, 95
  área da calota, 95, 100
  área do fuso, 95, 101
  calota, 95
  capa, 93
  círculo máximo, 73
  corda, 72
  cunha, 94
  diâmetro, 72

exterior, 74
fuso, 94
interior, 72, 74
plano tangente, 73
pontos antípodas, 72
região esférica, 72
reta tangente, 73
sólida, 72
secante, 73
segmento de uma base, 93, 94
semiesfera, 72
setor, 94
volume, 92
volume do fuso, 94, 100
volume do setor, 95, 100, 101
volume segmento, 93, 94, 99, 100

hemisfério, 72

interior não vazio, 85
interior vazio, 85

medial
definição, 26

paralela
planos, 11
reta e plano, 11
retas, 11
paralelepípedo, 56
paralelismo no espaço, 3
pé da perpendicular, 10
perpendicular
pé, 4
pé, 10
reta e plano, 4
perpendicularismo no espaço, 3
perspectiva
cavaleira, 34
isométrica, 35
pirâmide, 31
altura, 49
área de seções paralelas, 51
área lateral, 49
área total, 49
aresta da base, 49
aresta lateral, 49
côncava, 49
convexa, 49
definição, 49
face lateral, 49
fechada, 49
interior, 49
isósceles, 52
nomenclatura, 49
oblíqua, 49
regular, 49
reta, 49
sólida, 49
superfície lateral, 49
superfície total, 49
triângulo lateral, 49
tronco, 52, 103
plano
mediador, 6
plano bissetor, 18
planos perpendiculares, 17
poliedro
aglutinação, 109
aresta, 107
arquimediano, 123
configuração cíclica, 122
de Johnson, 123
definição, 115
definição inicial, 107
diagonal, 116
dual topológico, 124, 125
esférico, 116
face, 107
faces contíguas, 107
interior, 115
mensurável, 116
polígono constituinte, 107
prismatóide, 125
regular, 121
série antiprismas, 123
série prismas, 123
sólido, 108
semirregular, 122
snubficação, 111
superfície poliédrica, 107
truncamento, 110
vértice, 107
poliedros, 107
de Platão, 121
fórmula de Euler, 118
ponto
simétrico, 21
prisma, 31
altura, 55
área da seção paralela, 56
área lateral, 55
área total, 55
arestas das bases, 55
arestas laterais, 55
base, 55
definição, 54
diagonal, 57
diretriz, 55
faces das bases, 55
faces laterais, 55
fechado, 55
interior, 55, 57
nomenclatura, 55
oblíquo, 55
regular, 55
reto, 55

sólido, 55
superfície lateral, 55
superfície total, 55
tronco, 103
vértice, 55
prismatóide, 125
projeção
ponto sobre plano, 20

retas
ângulos entre retas, 13
ortogonais, 13
paralelas, 11
reversas, 11

circunscrição, 78
inscrição, 78
seção plana, 37
segmento
plano mediador, 6
simétrico, 21
superfície esférica, 72

tetraedro
ângulo tetraédrico, 46
altura, 41
área de superfície, 41
definição, 41
diedro, 46
disfenóide, 41, 101
escaleno, 41, 45
face oposta, 41
isósceles, 41
ortocêntrico, 44
regular, 41
trirretângulo, 41, 46
tetraedro regular
centro, 41
esfera circunscrita, 43
esfera inscrita, 43
triângulo
reta medial, 26
triedro
definição, 20

volume, 85
cilindro, 91, 92
paralelepípedo reto retângulo, 88
pirâmide, 91
prisma, 89