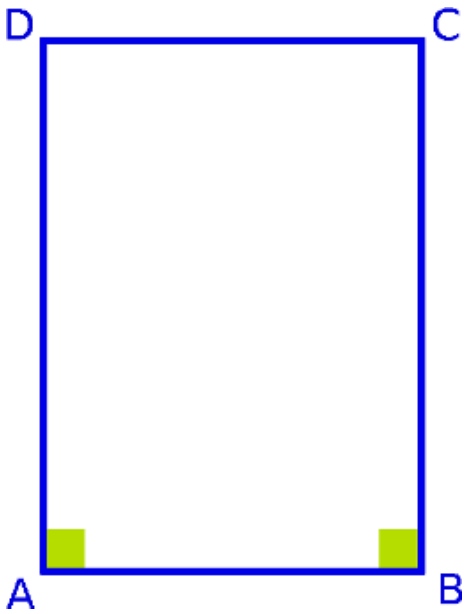
Geometria Elementar
gênese e desenvolvimento

Tomo II: Geometria Euclidiana Plana

2ª. edição



Roberto Ribeiro Paterlini

UFSCar

Roberto Ribeiro Paterlini

Geometria Elementar
gênese e desenvolvimento

Tomo II: Geometria Euclidiana Plana

um curso superior
para formação e atualização de
professores de Matemática



Data da primeira versão: 01 de março de 2010

2ª. edição, versão alpha do Tomo II: 31 de outubro de 2026

Departamento de Matemática

UFSCar

Copyright © março de 2010 by Roberto Ribeiro Paterlini
Departamento de Matemática, UFSCar.

A presente versão está disponível em um arquivo em formato .pdf que pode ser acessado a partir da minha página pessoal.

Trata-se da construção de uma proposta para o ensino da Geometria Elementar em escolas superiores. Imaginamos o uso deste livro como texto principal ou de apoio em cursos de formação de professores de Matemática para o ensino básico. Para sugestões ou perguntas favor se comunicar com o autor no endereço paterlini@ufscar.br

As figuras aqui utilizadas e que não foram construídas pelo autor são de domínio público ou livres para uso não comercial. As referências às figuras estão no Apêndice B. Caso tenha havido algum engano solicitamos que sejamos alertados. Favor usar o endereço paterlini@ufscar.br

O *Copyright* © deste texto pertence ao autor, na forma da lei. É permitido o *download* dos arquivos para uso pessoal, com transferência para ledores eletrônicos ou para impressão, na forma da lei, sem qualquer ônus. É proibido o uso comercial em todo ou em parte de qualquer material aqui disponibilizado, por qualquer meio. É vedada a modificação desse texto, sob qualquer forma. Solicitamos que se forem feitas impressões em escala por agente educacional, público ou privado, que o material seja distribuído gratuitamente, e não sejam cobradas taxas, nem mesmo a título de "preço de custo". É vedada a disponibilidade deste texto em outros endereços da internet, particularmente sítios que comercializam o acesso.

Gratos.

Figura da capa: Representação do quadrilátero de Giovanni G. Saccheri, que desempenha importante papel na geometria axiomática. As hipóteses são: $AD = BC$ e $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são retos. $ABCD$ é um retângulo? Figura construída pelo autor com o Inkscape.

Este texto foi editado em LaTeX 2ε pelo autor, que agradece à comunidade TeX pelos meios disponibilizados. Para dúvidas gramaticais, conferência de algumas fórmulas e construção de uma figura contei com o modelo de IA Gemini desenvolvido pelo Google, pelo que nos sentimos gratos.

Sumário

Sumário i

Apresentação v

8 A Geometria como Ciência 3
8.1 Introdução . . . 3
8.2 Como é construída a Matemática . . . 3
8.3 Examinar desde os princípios . . . 5
8.4 O que é um sistema axiomático . . . 6
8.5 Pequena História da Geometria Euclidiana . . . 7
8.6 Aspectos elementares de Conjuntos . . . 8
8.7 Um pouco de Lógica . . . 9
8.8 Construção de uma sequência dedutiva . . . 10
8.9 Problemas . . . 12

9 Início da Geometria Euclidiana Plana 15
9.1 Introdução . . . 15
9.2 Acepções iniciais . . . 15
9.3 Problemas . . . 16
9.4 Axiomas de existência e posição . . . 17
9.5 Problemas . . . 21
9.6 Axiomas de medida . . . 23
9.7 Problemas . . . 27
9.8 Axiomas de separação . . . 29
9.9 Problemas . . . 31
9.10 Axiomas sobre ângulos . . . 33
9.11 Problemas . . . 37
9.12 Congruência de triângulos . . . 39
9.13 Problemas . . . 47
9.14 Desigualdades geométricas . . . 52
9.15 Problemas . . . 57
9.16 Problemas adicionais . . . 62
9.17 Temas para investigação . . . 65

10 Retas paralelas e semelhança 69
10.1 Introdução . . . 69
10.2 Retas paralelas em um plano . . . 69
10.3 Problemas . . . 75
10.4 Semelhança e aplicações . . . 81

10.5 Problemas . . . 88
10.6 Problemas adicionais . . . 93
10.7 Temas para investigação . . . 97

11 A circunferência **103**
11.1 Introdução . . . 103
11.2 Retas e circunferências . . . 103
11.3 Problemas . . . 105
11.4 Posições relativas de duas circunferências . . . 108
11.5 Problemas . . . 113
11.6 Circunferências e ângulos . . . 114
11.7 Problemas . . . 116
11.8 Circunferências, pontos e retas . . . 120
11.9 Pontos notáveis do triângulo . . . 123
11.10 Quadriláteros e circunferências . . . 127
11.11 Construção do arco capaz . . . 129
11.12 Problemas finais . . . 130
11.13 Temas para investigação . . . 134

12 Área de regiões poligonais **139**
12.1 Introdução . . . 139
12.2 Conceitos iniciais de área . . . 139
12.3 Área das principais figuras . . . 141
12.4 Reduzindo o Axioma 20 . . . 148
12.5 Completando os axiomas de área . . . 149
12.6 Problemas . . . 150
12.7 Temas para investigação . . . 157

13 Polígonos **161**
13.1 Introdução . . . 161
13.2 Definição e nomenclatura de polígonos . . . 161
13.3 Polígonos convexos . . . 162
13.4 Polígonos regulares . . . 166
13.5 Sobre o comprimento da circunferência e a área do disco . . . 169
13.6 Polígonos não convexos . . . 174
13.7 Poligramas regulares . . . 176
13.8 Problemas . . . 178
13.9 Temas para investigação . . . 185

14 Construções com régua e compasso **189**
14.1 Introdução . . . 189
14.2 Algumas construções iniciais . . . 189
14.3 Problemas . . . 193
14.4 Aritmética das construções geométricas . . . 194
14.5 Problemas . . . 196
14.6 Construção de alguns polígonos regulares . . . 197
14.7 Números construtíveis . . . 198
14.8 Problemas finais . . . 199

A Respostas e sugestões **201**

B Créditos das figuras **215**

Referências Bibliográficas **217**

Índice de autores **223**

Índice de assuntos **225**

Apresentação

Há um caminho fácil para a Geometria ? [1]

Sobre este texto



Este texto foi inicialmente escrito como uma tentativa de orientação para os estudos de Geometria a serem realizados na disciplina *Geometria - Teoria e Experimentação* do Programa de pós-graduação em Ciências Exatas (PPGECE) da UFSCar. Foi aplicado para as turmas de 2010, 2011 e 2012. Estamos agora fazendo ampliações e incluindo mais detalhes com o objetivo de preparar um texto para ser usado também em cursos de formação e atualização de professores do ensino básico.

Nossa concepção fundamental

A interação entre o ensinar e o aprender no campo das formas, em todos os reinos da natureza, gera a Geometria como força criativa.

Agradecimentos

Agradeço aos colegas professores do PPGECE e demais colegas do Departamento de Matemática da UFSCar que têm contribuído com esse texto. Agradeço principalmente aos estudantes de mestrado do PPGECE das turmas de 2010, 2011 e 2012, e aos estudantes do curso de licenciatura em Matemática da UFSCar.

Tudo que está escrito aqui (bem, quase tudo) aprendi com meus professores ou em livros e outros textos, a todos minha gratidão. Esforcei-me em fazer as referências corretas na Bibliografia. Uma observação especial: inúmeras informações e imagens que aqui utilizei eu as obtive na Wikipedia, um belo projeto coletivo.

São Carlos, 23 de abril de 2015.

Prof. Roberto Ribeiro Paterlini.

Sobre a 2ª. edição

Para facilitar as atualizações assim como o uso docente e discente, repartimos o texto da 1ª. edição em Tomos. Realizamos correções e completamos partes faltantes.

São Carlos, 31 de outubro de 2026.

Prof. Roberto Ribeiro Paterlini.

[1] Pergunta que teria sido feita a Euclides pelo Rei do Egito Ptolomeu I.

Apresentação do Tomo II: Geometria Euclidiana Plana

A antiga civilização grega, particularmente a do Período Arcaico (776 a 323 a. C.), é considerada a origem da atual civilização ocidental. Desenvolveu os ideais filosóficos, científicos, políticos, sociais e artísticos que tiveram influência decisiva no mundo ocidental.

A Matemática, vista como ciência dedutiva, começou a ser desenvolvida nesse período. Antes dos gregos os estudiosos egípcios, sumérios, hindus e persas investigavam os números e as formas geométricas através de um senso prático e estético. Os matemáticos gregos transformaram completamente esse estudo, criando uma ciência dedutiva. Confira [81], página XI.

Distinguiram-se, dentre muitos estudiosos, os discípulos das Escolas Pitagórica e Platônica, que se dedicaram ao estudo das figuras e números usando métodos de análise e dedução. Sobre Pitágoras de Samos afirma Proclus Diadochus, filósofo e historiador da Matemática, que ele transformou o estudo da geometria em uma arte livre, examinando os princípios dessa ciência desde sua gênese. Os resultados matemáticos obtidos nesse período foram organizados na famosa coleção de livros *Os Elementos*, escrita por Euclides em Alexandria por volta de 300 a.C. Nessa coleção a Geometria é apresentada em uma forma sistematizada do ponto de vista dedutivo, com definições, axiomas e teoremas.

Essa forma de organização da Geometria, denominada "método axiomático", se mostrou muito produtiva. O exame detalhado dos princípios da Geometria permitiu distinguir caminhos alternativos em certos pontos da teoria. Essas acepções, que, num primeiro momento, pareciam desmentir o entendimento comum do mundo físico, deram origem a um conhecimento mais geral da Geometria.

Neste Tomo II de nosso texto nos propomos a estudar a Geometria Plana sob o ponto de vista do método axiomático. Após inúmeros contatos com professores do ensino básico, sempre solicitando deles uma posição, vimos que é importante para o professor estudar a Geometria de um ponto de vista que lhe confira segurança no fazer didático cotidiano. Esperamos prover essa demanda com o material exposto nos capítulos seguintes.

Capítulo 8

A Geometria como Ciência

8.1 Introdução

Explicamos, neste Capítulo, como a Geometria se transformou em uma ciência do campo da Matemática. Esclarecemos como o método dedutivo foi escolhido para a construção dessa ciência e tem fundamental importância na validação de seus resultados. Por outro lado, apenas o uso do método dedutivo não é suficiente. Os resultados das áreas fundamentais da Matemática são organizados em sistemas axiomáticos, que fornecem um substrato de apoio ao estudo e às investigações. E isso ocorre, em particular, com a Geometria.

8.2 Como é construída a Matemática

O homem, sabendo da falibilidade do pensamento e da observação, procura erigir princípios de conduta que possam nortear a construção de uma ciência da natureza. Surge o chamado *método científico*, que nos dias de hoje segue alguns passos que listamos resumidamente: observação sistemática de um fenômeno natural, construção de uma hipótese explicativa, predição de fenômenos a partir dessa hipótese, e verificação dessas predições através de experimentos e novas observações. Com isso a hipótese é confirmada ou se vê que precisa ser reformulada. Uma hipótese explicativa, quando confirmada, pode ganhar a denominação de lei. Um conjunto de leis relacionadas entre si pode dar origem a uma teoria científica.

Assim procedem os cientistas que procuram compreender a natureza e constroem as chamadas ciências naturais, como a Física, a Química e a Biologia. Nessas ciências, denominadas *experimentais*, existe uma regra universalmente aceita: toda hipótese deve ser confirmada com experimentos que podem ser repetidos com êxito por diferentes cientistas. Temos visto um exemplo disso nos noticiários recentes. Os físicos construíram um equipamento caríssimo, o *Large Hadron Collider*, para testar a hipótese da existência de uma partícula subatômica, o bóson de Higgs. Depois de confirmada sua existência, os experimentos foram repetidos nas mais diversas situações.

A Matemática é uma ciência que optou por um procedimento diferente. Tinha que ser, pois o objeto de estudo da Matemática não são, diretamente, os fenômenos naturais. A Matemática trabalha com as abstrações mentais provindas de nosso contato com a Natureza nos campos da quantidade e da forma. Para fazer esse estudo os matemáticos optaram, desde tempos antigos, pelo uso da dedução como forma de validar suas conclusões. A dedução consiste em constatar a veracidade de uma afirmação partindo de outra tida como verdadeira (possivelmente mais simples) e usando implicações lógicas. Assim se tem a esperança de construir um conhecimento duradouro, que não necessite ser refeito. Suas conclusões perduram desde os tempos antigos.

Vejamos um exemplo. Os matemáticos gregos do tempo de Euclides (300 a.C.) chamavam de *perfeito* a todo número natural igual à soma de seus divisores positivos exceto ele mesmo. Assim 6 é um número perfeito, pois seus divisores positivos são 1, 2, 3 e 6, e $6 = 1+2+3$. Aqueles matemáticos constataram que não é fácil encontrar números perfeitos. Percebe-se logo que são raros. Mas descobriram uma fórmula que resolve em parte esse problema. Tal fórmula, devido à sua importância, merece destaque como um Teorema.

Teorema 8.1. *Seja $j \geq 2$ um número inteiro. Se $2^j - 1$ é primo, então $2^{j-1}(2^j-1)$ é perfeito.*

Os livros de História da Matemática não contam como foi descoberta essa fórmula, mas deve ter sido simples. Basta examinar alguns exemplos. A decomposição canônica em primos dos três primeiros números perfeitos é:

$$\begin{aligned} 6 &= 2\cdot 3; \\ 28 &= 2^2\cdot 7; \\ 496 &= 2^4\cdot 31. \end{aligned}$$

Vemos que esses números consistem de uma potência de 2 seguida de um número primo, sendo ele o antecessor de uma potência de 2. Mais exatamente,

$$\begin{aligned} 6 &= 2^1\cdot(2^2-1); \\ 28 &= 2^2\cdot(2^3-1); \\ 496 &= 2^4\cdot(2^5-1). \end{aligned}$$

Essa lista sugere a fórmula $2^{j-1}(2^j-1)$, com 2^j-1 primo. Essa última condição deve ser importante, pois a lista acima não contém o número $2^3(2^4-1)$, com $2^4-1=15$, que não é primo.

Observamos essa fórmula para números perfeitos usando um processo denominado *indução*. Consiste em fazer uma afirmação com base em um certo número de casos observados. Os matemáticos chamam de *conjectura* a uma afirmação obtida dessa maneira. As conjecturas são importantes nas investigações, mas não podem fazer parte da teoria enquanto não forem confirmadas por um processo dedutivo.

Essa fórmula para números perfeitos foi observada por Euclides no Livro IX de *Os Elementos*. Mas Euclides só a considerou válida por que tinha uma demonstração.

Demonstração. Como 2^j-1 é primo, os divisores de $2^{j-1}(2^j-1)$, exceto ele mesmo, são

$$1, \quad 2, \quad 2^2, \quad \ldots \quad 2^{j-2}, \quad 2^{j-1},$$

e

$$1(2^j-1), \quad 2(2^j-1), \quad 2^2(2^j-1), \quad \ldots \quad 2^{j-2}(2^j-1).$$

Usando a fórmula da soma dos termos de uma progressão geométrica, vemos que a soma desses números resulta $2^{j-1}(2^j-1)$, provando que esse número é a soma de todos os seus divisores positivos exceto ele mesmo. Isso termina a demonstração. □

Temos assim um resultado com mais de 2300 anos de existência e que continua válido até hoje. Houve apenas uma modernização na notação. A durabilidade desse resultado se deve a que Euclides usou corretamente o método da dedução para verificá-lo.

Convém nesse ponto interrompermos nosso discurso e observar que a metodologia científica utilizada pelos matemáticos não é de aprendizado fácil e imediato. Assim, se a escola achar por bem ter esse objetivo, o de que os estudantes aprendam esse método, deve construir um caminho

de modo que eles possam percorrê-lo ao mesmo tempo em que amadurece o seu aparato pensante. Antes que o estudante adentre o método de Euclides, se é o que deve fazer, é bom que ele aprenda Geometria através de experimentos e faça suas argumentações usando métodos construtivos, como dobradura de papel, dissecções, desenhos, construções mecânicas, etc.

Consideremos um exemplo mais concreto. Vimos no Capítulo 5 do Tomo I [62], como se pode constatar, usando dobraduras de papel, que a soma dos ângulos de um triângulo é 180°. Esse método não é considerado dedutivo, e a Matemática não poderia agregar essa propriedade ao seu corpo teórico se existisse apenas essa justificativa. Mas podemos usar esse método na escola, desde que fique claro que se trata de uma argumentação que tem seu raio de alcance relacionado com o âmbito de validade do método. Para certos usos ela é suficiente. Por exemplo, um serralheiro, ao construir objetos planos, pode usar esse resultado com a certeza de que ele é correto, pois aprendeu uma justificativa válida para o seu campo de ação.

Chegamos assim à crucial questão: o que o professor deve saber sobre o assunto? Em nossa visão o professor do ensino básico deve saber aplicar métodos construtivos, deve ter clareza sobre o alcance desses métodos, e precisa conhecer o método dedutivo para praticar com segurança seu fazer pedagógico diário.

8.3 Examinar desde os princípios

Acredita-se que Tales de Mileto foi o primeiro estudioso que se ocupou em demonstrar teoremas da Geometria com o método dedutivo. Trabalhou com resultados simples e conhecidos em seu tempo, e fez para eles demonstrações usando raciocínio lógico. Dentre esses resultados citamos, a título de ilustração, que "os ângulos da base de um triângulo isósceles são congruentes", e "todo ângulo inscrito numa semicircunferência é reto".

O caminho apontado por Tales foi seguido por muitos. Distinguiram-se, naquela época, os matemáticos ligados à Escola Pitagórica. Diz-se que o resultado lógico de maior relevância conseguido por essa escola foi a demonstração de que $\sqrt{2}$ não é racional. Mas parece que Pitágoras não estava propondo apenas demonstrar teoremas. Como filósofo ele encaminhou a recomendação de que o estudo da Geometria deveria ser uma arte livre, e os estudiosos precisariam examinar os princípios dessa ciência desde sua gênese.

De fato o método dedutivo, por si mesmo, não é suficiente para a construção de uma ciência precisa. A Lógica, falando de forma bem simples, permite realizar a seguinte ação: se P e Q são afirmações, pode-se, se for o caso, provar que

$$P \quad \Rightarrow \quad Q.$$

Assim, se P é verdade, a Lógica garante que Q é verdade. Mas como saber se P é verdade? Pode-se ter uma afirmação falsa P, ser verdade que $P \Rightarrow Q$ e Q ser falsa. Portanto é necessário examinar a veracidade de P. Para isso precisamos encontrar uma afirmação P_1 que implique P, outra afirmação P_2 que implique P_1, e assim sucessivamente:

$$\ldots \quad P_2 \quad \Rightarrow \quad P_1 \quad \Rightarrow \quad P \quad \Rightarrow \quad Q.$$

Está claro que não podemos recuar indefinidamente nessa cadeia de implicações. Ela precisa ter um começo. Para lidar com esse problema os matemáticos utilizam o método axiomático.

8.4 O que é um sistema axiomático

Cientes de que uma teoria dedutiva requer um início, os matemáticos utilizam o *método axiomático*, que descrevemos brevemente em três passos.

1. conceitos primitivos. Estabelece-se qual é a coleção de noções que serão estudadas. São os objetos da teoria que vai ser construída. Na Geometria Euclidiana esses objetos são: o ponto, a reta, o plano e o espaço, sendo os três últimos conjuntos de pontos.

2. axiomas. Estabelece-se qual é a coleção das primeiras afirmações, isto é, aquelas que não serão demonstradas mas são consideradas verdadeiras. Na Geometria Euclidiana temos, dentre outras, "dados dois pontos diferentes existe exatamente uma reta que os contém", e "se dois pontos de uma reta estão em um plano então a reta está contida nesse plano". Essas duas afirmações, e outras, são admitidas como verdadeiras na Geometria Euclidiana e não são demonstradas. Essas "primeiras afirmações" são denominadas *axiomas* ou *postulados*.

3. dedução dos resultados. Os resultados da teoria são obtidos usando o recurso da dedução. Eles descrevem propriedades dos objetos da teoria. Por exemplo, a partir dos axiomas da Geometria Euclidiana podemos, usando uma sequência adequada de implicações lógicas, concluir que "em qualquer triângulo as medianas se encontram em um único ponto".

Um sistema axiomático pode versar sobre qualquer coisa. É possível inventar conceitos e axiomas e construir uma teoria sobre eles. Veja, por exemplo, o Problema 8.9.9. Mas naturalmente à Matemática interessa construir sistemas axiomáticos sobre os seus objetos de estudo, que são a quantidade e a forma. Assim, os sistemas axiomáticos mais importantes da Matemática são a Teoria dos Números e a Geometria. A Teoria dos Conjuntos serve de base para essas teorias e fornece uma linguagem técnica comum. Outras teorias importantes são a Topologia, os Espaços Métricos, a Teoria dos Anéis e dos Grupos, os Espaços Vetoriais, etc.

Na Geometria Elementar os sistemas axiomáticos mais importantes são: a Geometria Euclidiana, a Geometria Hiperbólica e a Geometria Elíptica. O que diferencia um sistema de outro é a escolha dos axiomas.

Na Geometria Euclidiana a coleção de axiomas sempre inclui uma específica afirmação sobre retas paralelas (ou afirmação equivalente): *dados uma reta e um ponto fora dela em um plano qualquer, existe nesse plano exatamente uma reta que contém o ponto dado e é paralela à reta dada.* Uma afirmação equivalente a essa é que a soma das medidas dos ângulos de qualquer triângulo é igual a 180°. Confira ilustração na Figura 8.1.

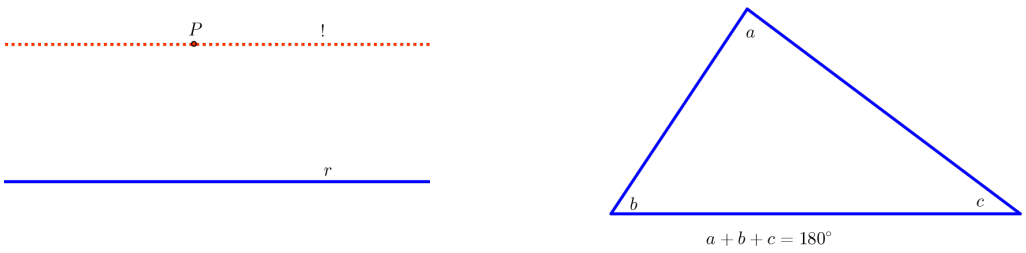


Figura 8.1. Duas condições equivalentes do axioma euclidiano das paralelas.

As *geometrias não euclidianas* são aquelas que negam a afirmação sobre retas paralelas mencionada acima. Em particular, nessas geometrias, a soma dos ângulos de um triângulo é diferente de 180°. Um exemplo é a denominada *Geometria da Superfície Esférica*. Nela o espaço é a superfície de uma esfera, e as retas são os seus círculos máximos (confira desenho da esquerda da Figura

8.2). Vemos que não existem retas paralelas nessa geometria, e é fácil desenhar triângulos para os quais a soma dos ângulos é $> 180°$ (confira o desenho da direita da Figura 8.2). Notemos também que na Geometria da Superfície Esférica nem sempre vale o seguinte axioma da Geometria Euclidiana: "dados dois pontos diferentes, existe exatamente uma reta que os contém". De fato, se os dois pontos dados forem antípodas, existem infinitos círculos máximos que os contêm. Vemos assim um exemplo de uma afirmação que é considerada verdadeira em um contexto mas não em outro.

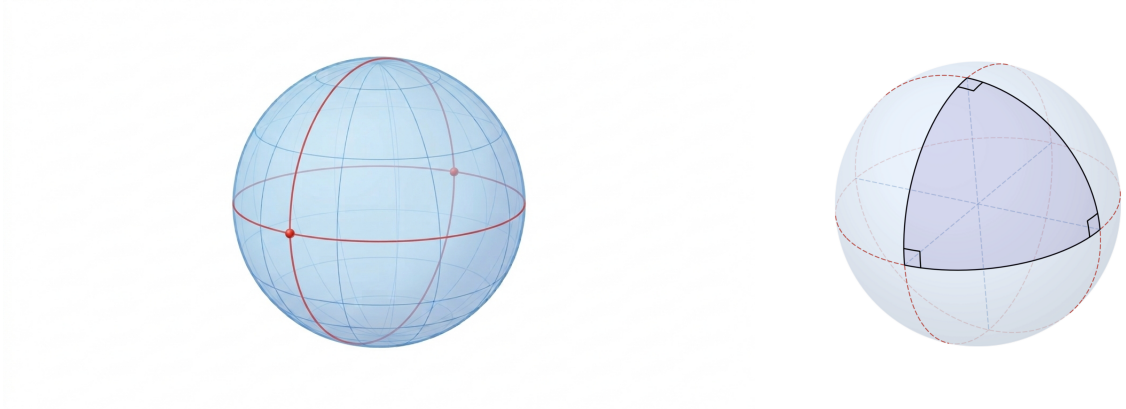


Figura 8.2. Geometria da Superfície Esférica: à esquerda, duas retas (círculos máximos) mostrando os dois pontos comuns; à direita, triângulo com três ângulos retos. Confira no Apêndice B os créditos das figuras.

8.5 Pequena História da Geometria Euclidiana

Conforme já comentamos, o sistema axiomático que determina a *Geometria Euclidiana* foi proposto pelo matemático grego Euclides de Alexandria em sua obra *Os Elementos*, escrita por volta de 300 a.C.

Euclides trabalhava na famosa Biblioteca de Alexandria, situada no norte do Egito, no litoral do Mar Mediterrâneo.

Registram os livros de História que, passando o inverno de 332-331 a.C. na região do delta do Nilo, Alexandre, o Grande, ordenou que fosse ali implantada a nova capital do Egito, com a intenção de servir de base naval e de ser o centro da cultura grega naquela região. Junto ao pequeno vilarejo denominado Rhakotis, em frente à ilha de Pharos, foi fundada a nova cidade, que recebeu inicialmente o nome de Neápolis. A construção da cidade foi deixada a cargo do vice-rei Cleomenes e do arquiteto rodhiano Deinócrates. Poucos meses depois Alexandre deixou o Egito, e nunca conheceu em vida a cidade que, em sua homenagem, veio a ser denominada Alexandria. Alexandre morreu em 323 a.C. com a idade de 33 anos, e seu corpo foi levado a Alexandria para ser sepultado.

Com a morte de Alexandre, o Grande, o império foi repartido entre seus generais, cabendo o Egito a Ptolomeu, parente de Alexandre. Ptolomeu se tornou faraó do Egito e expandiu seu império, iniciando a idade de ouro de Alexandria. Diz a História que Demétrio de Phaleron incentivou Ptolomeu a fundar em Alexandria uma academia similar à de Platão. Foram trazidos livros da cidade de Atenas, dando início à antiga biblioteca. Ela se distinguiu por ser um centro universal, aberto ao saber e à pesquisa sem fronteiras. A ideia de uma cultura universal, cosmopolita, cultivada na Grécia, foi assim trazida para o Egito.

Era nesse meio de efervescência cultural que trabalhavam na Biblioteca muitos cientistas, inclusive vários matemáticos. A biblioteca funcionava como uma Universidade. Os professores mais conhecidos eram Euclides, posteriormente chamado Euclides de Alexandria, e Eratóstenes de Cirene, que chegou a ser chefe da biblioteca por muitos anos. Esses matemáticos certamente tinham à sua disposição muitos livros contendo todo o conhecimento sobre Matemática desenvolvido até aquela época. Com isso escreveram um tratado, denominado *Os Elementos*. Nessa obra procuraram colocar o conhecimento matemático disponível de forma organizada, seguindo um sistema lógico, que hoje chamamos de sistema axiomático. Euclides não foi o primeiro a fazer isso, houve tentativas anteriores. Mas foi o mais bem sucedido nesse intento, e seu tratado serviu, por muito tempo, de referência para o estudo da Geometria.

No Século XIX o tratado de Euclides não era mais considerado suficientemente rigoroso. A Matemática passou por um reexame de seus fundamentos, e foram encontradas nos Elementos muitas definições imprecisas e propriedades não demonstradas e usadas tacitamente. No final do Século XIX e início do Século XX, depois de muitos estudos, surgiram propostas logicamente satisfatórias para a Geometria. Uma das mais conhecidas é o sistema axiomático proposto por David Hilbert. Esse sistema passou, ele mesmo, por modificações, mas é muito utilizado. Surgiram também sistemas mais simples para uso no ensino, como o que foi proposto por George D. Birkhoff, que adaptamos para nossa apresentação da Geometria Euclidiana.

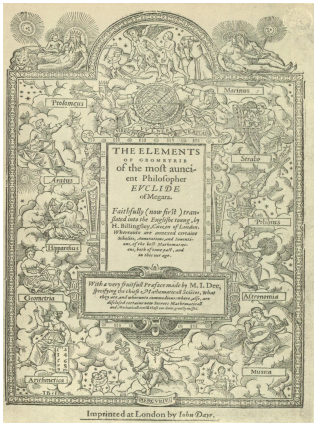


Figura 8.3. Digitalização da capa da primeira edição de Sir Henry Billingsley, em língua inglesa, de *Os Elementos* de Euclides de Alexandria, datada de 1570. Euclides escreveu esse tratado de Matemática por volta de 300 a.C. Contém seu famoso sistema axiomático da Geometria, com cinco volumes sobre Geometria Plana e três sobre Geometria Espacial. Seu axioma mais famoso é o da existência e unicidade da reta paralela. Outros volumes de Os Elementos abordam assuntos como Teoria dos Números e Teoria das Proporções de Eudoxo.

8.6 Aspectos elementares de Conjuntos

Um conjunto é uma coleção de objetos, chamados *elementos* do conjunto. Indicamos os conjuntos por letras como $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$, etc, e seus elementos por letras como a, b, c, etc. Se a é um elemento do conjunto $\mathscr{A}$, dizemos que a está em $\mathscr{A}$, ou que a *pertence* a $\mathscr{A}$. Sinteticamente podemos indicar isso por $a \in \mathscr{A}$ (lemos "a pertence a $\mathscr{A}$"). O símbolo $\in$ significa *pertence*, e sua negação é $\notin$ (não pertence). Por exemplo, seja $\mathscr{A}$ o conjunto dos números inteiros positivos pares. Temos $2 \in \mathscr{A}$ e $3 \notin \mathscr{A}$.

Os conjuntos também podem ser anotados nomeando-se todos os seus elementos entre parêntesis. Por exemplo, o conjunto $\mathscr{B}$ dos números primos menores do que 20 pode ser indicado por $\mathscr{B} = \{2,3,5,7,11,13,17,19\}$. O conjunto $\mathscr{A}$ dos números inteiros positivos pares também pode ser indicado por

$$\mathscr{A} = \{a \text{ tal que } a \text{ é inteiro positivo e par}\}.$$

É conveniente alocarmos um símbolo para o conjunto vazio, isto é, o conjunto que não tem elementos. Esse símbolo é $\emptyset$. Esse conjunto aparece quando ocorre uma contradição. Por exem-

plo, seja $\mathscr{A}$ o conjunto dos números pares maiores do que três e que são primos. Como não existem tais números, esse fato pode ser indicado por $\mathscr{A} = \emptyset$.

Um conjunto $\mathscr{A}$ se diz *subconjunto* de um conjunto $\mathscr{B}$ quando todos os elementos de $\mathscr{A}$ também pertencem a $\mathscr{B}$. Nesse caso anotamos sinteticamente $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}$.

A *união* de dois ou mais conjuntos é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a pelo menos um desses conjuntos. Se $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ são conjuntos, sua união é indicada por $\mathscr{A} \cup \mathscr{B}$.

A *interseção* de dois ou mais conjuntos é o conjunto formado pelos elementos que são comuns a todos esses conjuntos. Se $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ são conjuntos, sua interseção é indicada por $\mathscr{A} \cap \mathscr{B}$. Quando $\mathscr{A} \cap \mathscr{B} = \emptyset$ dizemos que $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ são *disjuntos*.

A *diferença* dos conjuntos $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ será indicada por $\mathscr{A} - \mathscr{B}$, e é o conjunto formado pelos elementos de $\mathscr{A}$ que não pertencem a $\mathscr{B}$.

A linguagem dos conjuntos é muito utilizada na Matemática, servindo de base unificadora entre seus diversos ramos. Por isso, no ensino superior, o estudo da Matemática está muito conectado com essa linguagem. No ensino fundamental pode-se usar a ideia de conjunto, pois se trata de uma noção espontânea. Mas entendemos que o uso de notação sintética deve, a princípio, ser evitado.

8.7 Um pouco de Lógica

A Matemática se propõe usar a Lógica para obter conclusões. Vejamos alguns aspectos básicos.

Uma *proposição* é uma afirmação na forma de uma frase. Por exemplo, "o número inteiro a é par". Outro exemplo: "a^2 é par". Uma *proposição condicional* ou *implicativa* é uma frase do tipo "se ... então ...". Por exemplo, "se o número inteiro a é par, então a^2 é par".

Se denominarmos a afirmação "o número inteiro a é par" de P e a afirmação "a^2 é par" de Q, a proposição implicativa pode ser indicada por "se P, então Q" ou, mais abreviadamente ainda, por $P \Rightarrow Q$ (lê-se P implica Q). Nesse formato P chama-se *hipótese* e Q, *tese*.

Dada uma proposição implicativa $P \Rightarrow Q$, existem outras três formas a ela associadas. Temos a forma *recíproca* correspondente, que é $Q \Rightarrow P$. Outro formato importante relacionado a $P \Rightarrow Q$ é a denominada *contrapositiva*, que vem a ser "não $Q \Rightarrow$ não P". Por outro lado, a implicação "não $P \Rightarrow$ não Q" denomina-se *contrária* correspondente a $P \Rightarrow Q$.

Dada uma proposição implicativa, sua veracidade ou falsidade independe de ser ou não verdadeira sua recíproca. Por outro lado, uma proposição afirmativa é verdadeira ou falsa quando sua contrapositiva correspondente é verdadeira ou falsa, respectivamente.

A Matemática lida, a princípio, com proposições condicionais que são supostas serem ou verdadeiras ou falsas, não existindo outra opção. Dada uma proposição condicional, procura-se, através de métodos dedutivos, mostrar que ela é verdadeira ou constatar sua falsidade.

Chamamos de *demonstração* a uma sequência de argumentos lógicos que permitem verificar que $P \Rightarrow Q$. Os métodos básicos de demonstração incluem o direto, por contraposição e por redução ao absurdo. Vejamos alguns exemplos.

Consideremos a afirmação: "Os únicos números reais que são iguais ao seu próprio quadrado são 0 e 1".

Para lidar melhor com essa afirmação podemos escrevê-la em forma sintética: "Seja a um número real. Se $a = a^2$ então $a = 0$ ou $a = 1$".

Uma *demonstração direta* consiste em começarmos com a hipótese "$a = a^2$" e, usando propriedades dos números reais, concluir a tese "$a = 0$ ou $a = 1$". Podemos assim proceder: $a = a^2 \Rightarrow a - a^2 = 0 \Rightarrow a(1-a) = 0 \Rightarrow a = 0$ ou $1 - a = 0 \Rightarrow a = 0$ ou $a = 1$. Fica demonstrada a afirmação.

Por outro lado, a *demonstração por contraposição* consiste em considerar a afirmação contrapositiva, que é: "Seja a um número real. Se não [$a = 0$ ou $a = 1$] então não [$a = a^2$]". Em outros termos, "Seja a um número real. Se $a \neq 0$ e $a \neq 1$ então $a \neq a^2$ ". Para a demonstração podemos argumentar da seguinte forma: $a \neq 0$ e $a \neq 1 \Rightarrow a \neq 0$ e $a-1 \neq 0 \Rightarrow a(a-1) \neq 0 \Rightarrow a^2 - a \neq 0 \Rightarrow a \neq a^2$, e terminamos.

Demonstrar uma implicação $P \Rightarrow Q$ *por redução ao absurdo* consiste em admitir que P vale e que Q não vale, e, usando argumentações lógicas, concluir uma outra afirmação sabidamente falsa. Com isso se reconhece que se P é verdadeira então Q também é verdadeira.

O resultado mais famoso da Matemática que utiliza a demonstração por redução ao absurdo é a afirmação de que "$\sqrt{2}$ não é racional". Em sua demonstração usamos a implicação "Seja a um número natural. Se a^2 é par então a é par". O argumento é devido ao filósofo Aristóteles.

Teorema 8.2 (Aristóteles)**.** *$\sqrt{2}$ não é racional.*

Demonstração. Procedemos por redução ao absurdo. Suponhamos que $\sqrt{2}$ seja racional. Então existem inteiros a e $b \neq 0$ tais que $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$. Simplificando a fração $\dfrac{a}{b}$ por 2 quantas vezes for necessário, podemos supor que a e b não são ambos pares.

Elevando $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$ ao quadrado temos $2 = \dfrac{a^2}{b^2}$, ou $2b^2 = a^2$. Vemos que a^2 é par, o que implica que a é par. Escrevemos $a = 2q$. Introduzindo essa informação em $2b^2 = a^2$ temos $2b^2 = (2q)^2$, ou $2b^2 = 4q^2$. Simplificando temos $b^2 = 2q^2$. Portanto b também é par, e chegamos a uma contradição. Concluímos que $\sqrt{2}$ não é racional. □

Para provar que uma determinada proposição implicativa é falsa, frequentemente basta apresentar um exemplo de um objeto que faz parte do contexto da afirmação mas para o qual ela não é verdadeira. Denominamos tal tipo de exemplo de *contraexemplo*. Consideremos a afirmação "Seja a um número real. Se $a \geq 0$ então $a^2 \geq a$." Para constatar que essa afirmação é falsa basta considerar $a = 1/2$ e ver que $a^2 = 1/4 < 1/2 = a$. Nesse contexto se diz que $a = 1/2$ é um contraexemplo, e fica estabelecido que a afirmação é falsa.

8.8 Construção de uma sequência dedutiva

A título de exemplo vamos construir uma pequena sequência dedutiva. Escolhemos fazer isso no âmbito da Aritmética por serem seus resultados de mais fácil entendimento.

Começamos com uma pequena investigação. Consideremos os quadrados dos números naturais com o objetivo de eventualmente obter alguma propriedade interessante:

$$0^2 = 0, \quad 1^2 = 1, \quad 2^2 = 4, \quad 3^2 = 9, \quad 4^2 = 16, \quad 5^2 = 25, \quad 6^2 = 36, \quad 7^2 = 49,$$

$$8^2 = 64, \quad 9^2 = 81, \quad 10^2 = 100, \quad 11^2 = 121, \quad 12^2 = 144, \quad 13^2 = 169.$$

Como $(-a)^2 = a^2$, podemos considerar quadrados de inteiros negativos e obter os mesmos resultados. Observando detidamente essa tabela notamos várias propriedades. Por exemplo, do ponto de vista da paridade, parece ocorrer que o quadrado de qualquer número par é par e o quadrado de qualquer ímpar é ímpar. Fazemos essas afirmações com base em uma quantidade finita de exemplos. Conforme já observamos, esse processo chama-se *indução*. Para que essas afirmações sejam consideradas válidas na Matemática é necessário demonstrá-las com um processo dedutivo, que leve em conta que os números inteiros são infinitos. Apelamos para a linguagem algébrica, e procedemos da seguinte forma:

Proposição O quadrado de qualquer número par é par e o quadrado de qualquer ímpar é ímpar.

Demonstração. Se n é par podemos escrever $n = 2q$ para algum número inteiro q. Então $n^2 = (2q)^2 = 4q^2 = 2(2q^2) = 2l$, sendo $l = 2q^2$ um número inteiro. Em consequência se n é par então n^2 é par.

Suponhamos agora que n seja ímpar. Escrevemos $n = 2q+1$. Então $n^2 = (2q+1)^2 = 4q^2+4q+1 = 2(2q^2+2q)+1 = 2l+1$, sendo $l = 2q^2+2q$ um número inteiro. Portanto, se n é ímpar então n^2 é ímpar. □

Encerramos a demonstração com o símbolo □ para indicar seu término. Notemos que fizemos uma demonstração válida para todos os números pares e todos os ímpares, considerando que são infinitos. Justificamos as afirmações da Proposição usando lógica dedutiva, de modo que essas afirmações podem fazer parte da Teoria dos Números.

Mas nossa investigação deve considerar detalhes que talvez passem despercebidos num primeiro momento. Fizemos afirmações sobre números inteiros pares e ímpares, mas existem números inteiros de outro tipo? Se existirem, como é o seu quadrado? Outra pergunta: são verdadeiras as afirmações recíprocas?

Vejamos. Para dividir um número natural $n > 0$ por 2 podemos agrupar duas a duas suas unidades. Apenas um dos dois casos seguintes pode ocorrer: 1º) todas as unidades de n são agrupadas duas a duas; 2º) todas as unidades menos uma são agrupadas duas a duas. Por exemplo,

$$8 = (1+1)+(1+1)+(1+1)+(1+1) \quad \text{e} \quad 9 = (1+1)+(1+1)+(1+1)+(1+1)+1.$$

Resumindo, $8 = 2\cdot 4+0$ e $9 = 2\cdot 4+1$.

Assim, dado um número natural $n > 0$ qualquer, temos $n = 2q+0$ ou $n = 2q+1$ para algum número natural q. O número natural q é a quantidade de grupos de duas unidades, e é chamado *quociente*. Se $n = 2q+0$, dizemos que 0 é o resto da divisão de n por 2, e se $n = 2q+1$, o resto é 1. No caso em que $n = 0$, temos $n = 2\cdot 0$, portanto 0 é da forma $0 = 2q+0$, e o resto da divisão de 0 por 2 é 0. Por outro lado, se n é inteiro negativo, temos $-n > 0$, e $-n = 2q+0$ ou $-n = 2q+1$, e assim $n = 2(-q)+0$ ou $n = 2(-q-1)+1$, para algum inteiro q.

Em síntese temos o

Teorema Todo número inteiro n se escreve em uma e apenas uma das formas

$$n = 2q \quad \text{ou} \quad n = 2q+1,$$

sendo q um número inteiro.

Se $n = 2q$ dizemos que n é par, e se $n = 2q+1$, que é ímpar. Assim o Teorema acima diz que todo número natural ou é par ou é ímpar.

Essas observações poderiam, a princípio, encerrar nossas investigações sobre a paridade dos números naturais e seus quadrados. Mas, num exame mais detalhado, vemos que o Teorema não foi demonstrado com rigor. As afirmações "Para dividir um número natural n por 2 podemos agrupar duas a duas suas unidades. Apenas um dos dois casos seguintes pode ocorrer: 1º) todas as unidades de n são agrupadas duas a duas; 2º) todas as unidades menos uma são agrupadas duas a duas" podem convencer mas são apenas uma repetição mais explicativa do que se quer provar. Uma demonstração mais rigorosa, adaptada de [56], página 125, é:

Seja n um número inteiro. Consideremos o conjunto

$$S_n = \{n-2q \text{ tais que } n-2q \geq 0 \text{ e } q \text{ é número inteiro}\}.$$

Notemos que S_n é não vazio. De fato, se $n \geq 0$, basta tomar $q = 0$, e temos $n-2q \in S_n$. Se $n < 0$, basta tomar $q = -n$ e temos $n-2q = -n \in S_n$. Por outro lado, S_n é limitado inferiormente

por 0. Então, pelo Princípio do Menor Número Inteiro, S_n possui um menor elemento r, de modo que $r \geq 0$ e $r = n - 2q$ para algum número natural q. Se fosse $r \geq 2$ o número $s = n - 2(q+1) = n - 2q - 2 = r - 2 \geq 0$ seria um elemento de S_n com $s < r$, contrariando a propriedade de r ser mínimo. Logo $r < 2$, de modo que $r = 0$ ou $r = 1$. Portanto $n = 2q$ ou $n = 2q + 1$.

Para completar observemos que um número inteiro não pode ser par e ímpar ao mesmo tempo. Se isso ocorresse para algum número n, poderíamos escrever $n = 2q$ e $n = 2p + 1$ para números inteiros p e q. Igualando viria $2q = 2p + 1$, ou $2(q - p) = 1$. Não podemos ter $p = q$ pois isso implicaria $0 = 1$. Mas $q \neq p$ implicaria $q - p \geq 1$ ou $q - p \leq -1$, logo $2(q - p) \geq 2$ ou $2(q - p) \leq -2$, o que é uma contradição com $2(q - p) = 1$. Portanto não é possível para qualquer número natural ser par e ímpar ao mesmo tempo.

Esse raciocínio demonstra que todo número inteiro n se escreve em uma e apenas uma das formas $n = 2q$ ou $n = 2q + 1$, sendo q um número inteiro, constatando a validade do Teorema.

Notemos que na demonstração acima usamos que todo conjunto não vazio de números inteiros e limitado inferiormente tem um menor elemento. Essa propriedade é aqui considerada um postulado, que usamos como afirmação inicial em nossa pequena sequência dedutiva.

Desses estudos construímos a seguinte sequência dedutiva:

Axioma Todo conjunto não vazio e limitado inferiormente de números inteiros tem um menor elemento.

Tomamos essa afirmação como um ponto de partida, e a consideramos verdadeira mesmo sem demonstração.

Teorema Todo número inteiro n se escreve em uma e apenas uma das formas

$$n = 2q \quad \text{ou} \quad n = 2q + 1,$$

sendo q um número inteiro.

A demonstração do Teorema está feita acima.

Proposição Seja n um número inteiro qualquer. Então n e n^2 têm a mesma paridade.

Demonstração. Se n é par, podemos escrever $n = 2q$ para algum número inteiro q. Então $n^2 = (2q)^2 = 4q^2 = 2(2q^2) = 2l$, para $l = 2q^2$. Em consequência se n é par então n^2 é par.

Suponhamos agora que n seja ímpar. Escrevemos $n = 2q + 1$. Então $n^2 = (2q+1)^2 = 4q^2 + 4q + 1 = 2(2q^2 + 2q) + 1 = 2l + 1$, sendo $l = 2q^2 + 2q$ um número inteiro. Portanto se n é ímpar então n^2 é ímpar.

Reciprocamente, se n^2 é par, então n é par, pois, se n fosse ímpar, n^2 seria ímpar, pelo que foi demonstrado acima. Mas n^2 não pode ser par e ímpar, logo n é par. Do mesmo modo se demonstra que se n^2 é ímpar então n é ímpar. □

Para estudar uma sequência dedutiva completa para a Aritmética, incluindo construção dos números inteiros e as operações aritméticas, consulte [56] ou outros livros de Estruturas Algébricas.

8.9 Problemas

Problema 8.9.1. Considere as sentenças S e T e a proposição condicional P abaixo:

S: *Todo brasileiro é carioca.*

T: *o inventor brasileiro Alberto Santos Dumont é carioca.*

P: *S implica T*

Assinale a alternativa correta:

a) S é falsa, T é falsa e P é verdadeira.
b) S é falsa, T é falsa e P é falsa.
c) S é falsa, T é verdadeira e P é falsa.
d) Não existe a proposição P.
e) P é falsa, e Alberto Santos Dumont é um contraexemplo.

Informação: Alberto Santos Dumont nasceu na cidade de Palmira, Minas Gerais, em 20 de julho de 1873. Essa cidade chama-se hoje Santos Dumont, em sua homenagem.

Problema 8.9.2. Na afirmação do Teorema 8.1 distinga quais são as hipóteses e qual é a tese. Complete os detalhes da demonstração desse Teorema calculando as somas dos termos das duas progressões geométricas.

Problema 8.9.3. Um professor escreveu a seguinte afirmação para seus estudantes: "Duas retas que se intersectam, intersectam-se em exatamente um ponto". Pediu depois aos estudantes que transformassem essa afirmação em outra equivalente mas na forma de proposição condicional "se ... então". Um estudante escreveu: "Se P é um ponto, então as duas retas se intersectam exatamente em P". Está certo?

Problema 8.9.4. Consideremos a seguinte afirmação: "Sejam a e b números naturais. Se $ab = 0$ então $a = 0$ ou $b = 0$". Escreva a afirmação contrapositiva correspondente. Explique por que é mais fácil demonstrar a afirmação por contraposição do que usando o método direto.

Problema 8.9.5. Coloque a afirmação "$\sqrt{2}$ não é racional" do Teorema 8.2 no formato "Se P, então Q".

Problema 8.9.6. Dê exemplos de proposições implicativas matemáticas nas seguintes condições: **a)** a afirmação é verdadeira e sua recíproca também; **b)** a afirmação é falsa e sua recíproca também; **c)** a afirmação é verdadeira e sua recíproca é falsa; **d)** a afirmação é falsa e sua recíproca é verdadeira.

Problema 8.9.7. No texto, na página 10, foi feito um comentário sobre a afirmação "Seja a um número real. Se $a \geq 0$ então $a^2 \geq a$." Viu-se que ela é falsa e foi dado um contraexemplo. Examinando detidamente esse contraexemplo, e possivelmente tentando outros, veja se existe uma forma de ajustar a afirmação para obter uma outra versão que seja verdadeira. Tente construir uma versão o mais completa possível.

Problema 8.9.8. Considere as seguintes afirmações sobre um número natural qualquer n:

Afirmação 1: Se n é par, então n^2 é par.

Afirmação 2: Se n é ímpar, então n^2 é ímpar.

Explicite as afirmações recíprocas de cada uma, assim como as contrapositivas. O que você observa de interessante?

Problema 8.9.9. Considere o seguinte sistema axiomático. 1. conceitos primitivos: letras e palavras. 2. Axiomas: A_1: *toda palavra é um conjunto de letras*; A_2: *existem exatamente quatro palavras*; A_3: *duas palavras diferentes quaisquer têm exatamente uma letra em comum*; A_4: *toda letra pertence a exatamente duas palavras.* Descubra teoremas nessa teoria.

Problema 8.9.10. Foi pedido a um estudante que justificasse a seguinte proposição condicional: "Se os lados de um triângulo medem 3, 4 e 5, então ele é retângulo". O estudante argumentou da seguinte forma: "O Teorema de Pitágoras diz que dado um triângulo retângulo de hipotenusa a e catetos b e c, vale que $a^2 = b^2 + c^2$. Como $5^2 = 25$ e $3^3 + 4^2 = 9 + 16 = 25$, então o triângulo é retângulo". Está correto?

Problema 8.9.11. Um estudante observou que n^2+8 não é primo para $n = 1$ e é para $n = 3$. Decidiu investigar para quais números naturais $n^2 + 8$ pode ser primo. Percebeu logo que n não pode ser par. Para obter mais informações construiu a seguinte tabela:

$3^2 + 8 = 17$ é primo	$13^2 + 8 = 177 = 3 \cdot 59$ não é primo
$5^2 + 8 = 33 = 3 \cdot 11$ não é primo	$15^2 + 8 = 233$ é primo
$7^2 + 8 = 57 = 3 \cdot 19$ não é primo	$17^2 + 8 = 297 = 11 \cdot 27$ não é primo
$9^2 + 8 = 89$ é primo	$19^2 + 8 = 369 = 9 \cdot 41$ não é primo
$11^2 + 8 = 129 = 3 \cdot 43$ não é primo	$21^2 + 8 = 449$ é primo

Examinando cuidadosamente esse dados, o estudante fez as seguintes conjecturas:

Conjectura 1: se n é par, então $n^2 + 8$ não é primo (essa ele já sabia).

Conjectura 2: se n é ímpar e não é múltiplo de 3, então $n^2 + 8$ não é primo.

Conjectura 3: se n é ímpar e é múltiplo de 3, então $n^2 + 8$ é primo.

Complete a investigação do estudante. Todas as conjecturas são verdadeiras? Alguma outra conjectura? Justifique suas conclusões.



Figura 8.4. Euclides de Alexandria foi um dos mais importantes matemáticos da Antiga Grécia. Acredita-se que estudou na Academia de Platão. Viveu em Alexandria durante o reinado de Ptolomeu I Sóter (305 a.C a 282 a.C), e foi professor da famosa biblioteca dessa cidade. Compilou grande parte da Matemática de seu tempo em sua obra *Os Elementos*, procurando apresentá-la de forma rigorosa. Em particular, em Geometria, desenvolveu um sistema axiomático, posteriormente popularizado com o nome Geometria Euclidiana. Euclides também escreveu livros sobre óptica, seções cônicas, geometria esférica e astronomia.

Capítulo 9

Início da Geometria Euclidiana Plana

9.1 Introdução

Apresentamos, nos capítulos seguintes, um recorte da Geometria Euclidiana através de um sistema de axiomas bem simples, o mais próximo possível da forma com que a Geometria é estudada no ensino básico. Adaptamos as propostas de alguns autores, como [5], [16], [35], [53], [55] e [68].

A intenção é servir de guia para o estudo da Geometria Euclidiana através do método axiomático. Escolhemos um sistema de axiomas que acompanha de perto o trabalho cotidiano do professor. Não temos a intenção de fazer uma apresentação completa e nem de utilizar o melhor sistema axiomático disponível na literatura. Nosso propósito é o de prover ao professor a oportunidade de reconstruir seu conhecimento de Geometria sob um ponto de vista que proporciona maior precisão no pensamento e permite uma organização dos resultados básicos da Geometria Euclidiana em uma sequência dedutiva. Insistimos em dizer que não esperamos que o professor aplique o método axiomático no ensino básico, mas que, ao estudá-lo, se sinta mais seguro no ensino da Geometria.

Embora apresentemos neste Capítulo e no próximo a maior parte dos axiomas da Geometria Euclidiana, nos concentramos, inicialmente, nos resultados da Geometria Euclidiana Plana. A Geometria Euclidiana Espacial é abordada no Tomo III.

9.2 Acepções iniciais

A Geometria Euclidiana pressupõe a existência do *espaço* como o conjunto de todos os *pontos*, e admite que nesse espaço existem subconjuntos especiais, denominados *planos* e *retas*, caracterizados por certas propriedades que descrevemos através de uma coleção de regras. Essas entidades, pontos, retas, planos e espaço, assim como as propriedades iniciais que as descrevem, são assumidas como noções comuns. Provêm do aprendizado espontâneo que ocorre através de nosso contato biológico e anímico com o meio.

Neste texto as regras às quais nos referimos chamam-se *axiomas* e *definições*. Inspirados pelo nosso conhecimento espontâneo iniciamos o estudo da Geometria fazendo investigações sobre esses elementos básicos, o ponto, a reta e o plano, procurando determinar suas propriedades e relações recíprocas. Analisando e aplicando o método dedutivo, extraímos dessas regras afirmações, as quais constituem os resultados de nossos estudos. Esses resultados são expressos em frases que são distinguidas no texto com alguns nomes especiais. As afirmações mais importantes são denominadas *teoremas*, e as afirmações menos importantes ou auxiliares são denominadas *proposições*, *lemas*, *corolários* e *escólios*.

Seguimos o costume de representar os objetos geométricos através de letras. Geralmente os pontos são referidos pelas letras maiúsculas do alfabeto latino, como A, B, C, P, Q, as retas por letras minúsculas, como r, s e t, e os planos por letras do alfabeto grego, como α, β, γ. Essas regras de representação não são fixas, pois podem ocorrer variações. Observamos que, em geral, preferimos comunicar o conceito ou o raciocínio com palavras, evitando o uso excessivo de símbolos. Pensamos que dessa forma nos aproximamos melhor do trabalho do professor que desenvolve seu fazer pedagógico no ensino básico.

O método axiomático puro prescinde do uso de desenhos. Entretanto, essa concepção está distante do cotidiano do professor, de modo que aqui usamos esse recurso para facilitar a comunicação de ideias e como auxílio ao raciocínio. Alertamos que um desenho nada demonstra, apenas ilustra uma situação. Devemos ter o cuidado de não usar propriedades observadas em desenhos como recurso de dedução. Esse procedimento pode ser adotado num contexto de "dedução informal", mas no método axiomático a proposta é que todas as propriedades sejam deduzidas dos axiomas ou de suas consequências.

A representação de objetos geométricos abstratos através de figuras depende de convenções que devem estar claras. Na Figura 9.1 vemos representações usuais de pontos, retas e planos conforme são aplicadas neste texto.



Figura 9.1. Representações de pontos, retas e plano com nomes.

Exemplo 9.1. Não há nada que impeça considerar geometrias finitas, constituídas por uma coleção finita de elementos. Consideremos o espaço $\mathscr{E} = \{A, B, C\}$ formado por três elementos, que chamamos de pontos. Definimos nesse espaço três retas, a saber: $r_1 = \{A, B\}$, $r_2 = \{A, C\}$ e $r_3 = \{B, C\}$, e um plano, $\alpha = \{A, B, C\}$, que é o próprio espaço. É uma Geometria bem simples, não tem axiomas, só definições, e parece que tem apenas dois teoremas: *Dois pontos diferentes determinam uma e uma única reta* e *Duas retas quaisquer se intersectam em um único ponto.* Para demonstrar esses teoremas basta examinar todos os casos possíveis e verificar que a afirmação em foco é verdadeira para cada um deles. Essa Geometria deve ser o sonho de muitos estudantes, pois para fazer uma prova avaliativa não é necessário estudar muito. Mas, para que serve essa Geometria além de algumas poucas aplicações? Ela não tem a capacidade de descrever o entorno em que vivemos.

9.3 Problemas

Problema 9.3.1. Comente as representações de pontos retas e planos apresentadas na Figura 9.1. Essas representações condizem com suas concepções pessoais sobre esses elementos geométricos? Quais são as limitações dessas representações? Você tem outras representações preferidas? Descreva-as e, se prefere adotá-las, justifique por que.

Problema 9.3.2. Demonstre os dois teoremas enunciados no Exemplo 9.1.

Problema 9.3.3. Construa uma Geometria com quatro pontos que seja a mais rica possível. Descubra teoremas nessa Geometria.

Problema 9.3.4. Na Geometria finita do Exemplo 9.1 as retas estão definidas. Na Geometria Euclidiana as retas não são definidas, mas assumidas como noção espontânea. Um estudante não se conformou com isso e propôs a seguinte afirmação como definição de reta: "reta é uma linha contínua que não entorta e prossegue sempre tanto de um lado como de outro". Analise essa proposta.

Problema 9.3.5. Verifique se a seguinte afirmação é uma definição de ponto: "ponto é a parte indivisível da matéria".

Problema 9.3.6. Verifique se a seguinte descrição é adequada para uma definição de plano: "um plano é a figura que se obtém conduzindo-se uma reta perpendicularmente a outra reta que serve de suporte".

Problema 9.3.7. Descreva como é a sua noção espontânea de ponto. Ela é comum a todos os seres humanos? Se não for, quais os problemas que isso acarreta à teoria da Geometria Euclidiana?

9.4 Axiomas de existência e posição

Iniciamos a construção de um modelo axiomático da Geometria Euclidiana. Consideramos noções espontâneas o conceito de conjunto ou coleção, assim como os termos usados em seu campo conceitual, por exemplo, elemento de um conjunto, pertencer, conter, contido, reunião e interseção de conjuntos, etc. Nesse contexto costuma-se empregar expressões de sabor mais geométrico. Por exemplo, dizemos que dois conjuntos *se intersectam* ou *incidem* se sua interseção é não vazia. Dizemos que um ponto *está* em um conjunto quando ele é um elemento desse conjunto, e, caso contrário, dizemos que o ponto *está fora* do conjunto.

Consideramos também como noção espontânea o conceito de ponto, e chamamos de espaço à coleção de todos os pontos. No espaço consideramos subconjuntos especiais, as retas e os planos, determinados, conforme já explicamos, por propriedades que descrevemos a seguir.

Nosso primeiro axioma estabelece que temos uma quantidade suficiente de pontos no espaço, nos planos e nas retas para iniciarmos a construção da Geometria Euclidiana.

Um conjunto de pontos se diz *colinear* se todos os seus pontos estiverem contidos numa mesma reta, e se diz *coplanar* se todos os seus pontos estiverem contidos num mesmo plano.

Axioma 1. *(não trivialidade)*

O espaço contém pelo menos quatro pontos não coplanares.

O Axioma 1 nos diz que o espaço não se reduz a um plano. Observe que esse Axioma não afirma que existem planos. Isso será estabelecido mais adiante. O Axioma 1 afirma que existem pelo menos quatro pontos e não existe um plano que contenha todos eles.

O axioma seguinte estabelece uma escolha a respeito da relação entre retas e pontos, e determina uma direção de percurso no sistema dedutivo.

Axioma 2. *(da reta)*
(a) Dados dois pontos diferentes, existe uma e uma única reta que os contém. (b) Toda reta contém pelo menos dois pontos.

Dados dois pontos A e B, a reta que eles determinam é indicada por $\overleftrightarrow{AB}$. Dizemos que $\overleftrightarrow{AB}$ é a reta determinada por A e B, ou que é a reta que passa por A e B. A Figura 9.2 ilustra essas ideias.

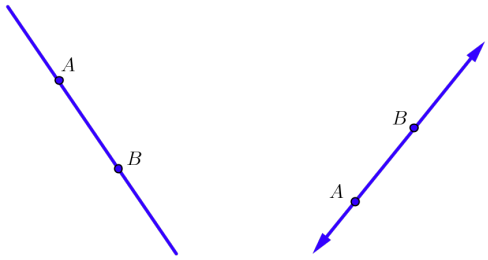


Figura 9.2. Representações usuais de reta determinada por dois pontos.

O Axioma 2 nos permite demonstrar nosso primeiro resultado. Duas retas (diferentes) que se intersectam se dizem *concorrentes*.

Teorema 9.2. *Se duas retas (diferentes) são concorrentes, então sua interseção contém um único ponto.*

Demonstração. Argumentamos por contradição. Suponhamos que existam duas retas diferentes que se intersectam em mais de um ponto. Então existem dois pontos diferentes determinando duas retas diferentes, o que contraria o Axioma 2, parte (a). Portanto, se duas retas são concorrentes, a interseção contém um único ponto. □

Se dois pontos determinam uma reta, quantos pontos são necessários para definir um plano? Fica estabelecido que

Axioma 3. *(incidência entre pontos e planos)*
(a) Dados três pontos quaisquer, existe um plano que os contém. (b) Dados três pontos não colineares quaisquer, existe um único plano que os contém. (c) Todo plano contém pelo menos três pontos não colineares.

Precisamos de uma constatação mais exata sobre a relação entre reta e plano: como sabemos se uma reta está contida em um plano? Para isso observamos o

Axioma 4. *(incidência entre reta e plano)*
Se dois pontos de uma reta estão em um plano, então a reta está contida nesse plano.

Confira ilustração na Figura 9.3.
Nosso segundo resultado, assim como o primeiro, também estabelece uma propriedade de unicidade.

Teorema 9.3. *Se uma reta intersecta um plano que não a contém, a interseção contém um único ponto.*

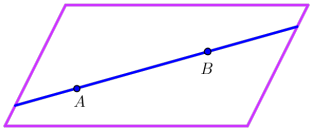


Figura 9.3. Ilustração do Axioma 4 da incidência entre reta e plano.

Demonstração. Argumentamos por contradição. Suponhamos que existam uma reta e um plano que não a contém, e que sua interseção contenha mais de um ponto. Então existem dois pontos da reta no plano. Pelo Axioma 4 a reta deveria estar contida no plano, mas não está. Isso é uma contradição. Portanto, se uma reta intersecta um plano que não a contém, a interseção contém um único ponto. Essa ideia está ilustrada na Figura 9.4. □

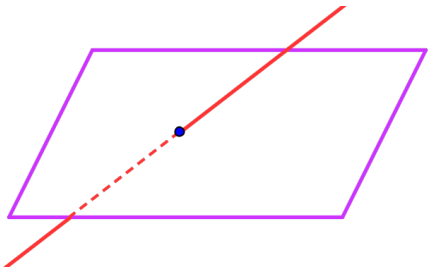


Figura 9.4. Ilustração do Teorema 9.3.

Seguem dois teoremas, cada um com duas afirmações, uma sobre existência e outra sobre unicidade.

Teorema 9.4. *Dados uma reta e um ponto fora da reta, existe um único plano que os contém.*

Demonstração. Seja r uma reta e P um ponto que não esteja nela contido. Em virtude do Axioma 2, parte (b), r tem pelo menos dois pontos A e B.

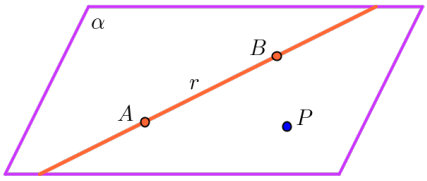


Figura 9.5. Ilustração do Teorema 9.4.

Vejamos primeiro que existe um plano que contém r e P. Em virtude do Axioma 3, parte (a), existe um plano α que contém os pontos A, B e P. Pelo Axioma 4, r está contida em α, pois essa reta tem dois pontos em α. Portanto α contém r e P.

Vejamos agora que o plano que contém r e P é único. De fato, qualquer plano nessas condições contém os pontos não colineares A, B e P, e, portanto, só existe um, pelo Axioma 3, parte (b). Essa demonstração está ilustrada na Figura 9.5. □

Teorema 9.5. *Dadas duas retas (diferentes) que se intersectam, existe um único plano que as contém.*

Demonstração. Sejam r e s retas (diferentes) que se intersectam em um ponto P. Usando o Axioma 2, parte (b), podemos escolher um ponto A em r diferente de P e um ponto B em s diferente de P. Observemos que $A \neq B$, pois se fossem iguais as retas r e s teriam em comum dois pontos, e seriam a mesma reta pelo Axioma 2, parte (a). Portanto A, B e P são três pontos não colineares. Pelo Axioma 3, parte (a), existe um plano α que os contém. Como A e P estão em α, o Axioma 4 afirma que r está contido em α. Como B e P estão em α, o Axioma 4 afirma que s está contido em α. Encontramos um plano que contém as duas retas.

Para ver que esse plano é único, basta observar que se dois planos contêm r e s, então eles contêm os três pontos não colineares A, B e P, logo, pelo Axioma 3, parte (b), eles são o mesmo plano. □

Terminamos essa lista inicial de Axiomas com um que estabelece uma propriedade fundamental da relação entre planos:

Axioma 5. *(incidência entre planos)*
Se dois planos diferentes se intersectam, a interseção é uma reta.

Esse Axioma está ilustrado na Figura 9.6, em que vemos os planos α e β se intersectando na reta r.

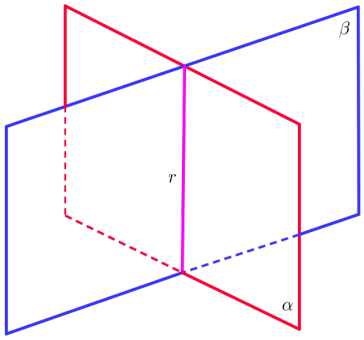


Figura 9.6. Ilustração do Axioma 5 da incidência entre planos.

Iniciamos dessa forma nosso estudo da Geometria Euclidiana, enunciando cinco princípios que estabelecem relações básicas entre pontos, retas e planos. Você se sentiu incomodado com alguma das propriedades? Provavelmente não, pois são propriedades que são percebidas naturalmente pelos seres humanos. Ocorre apenas que estamos fazendo agora uma abordagem axiomática dessas noções com o intuito de construir uma organização da Geometria que parte de seus elementos mais simples e, através da dedução, obtém resultados mais complexos.

Existem muitos outros resultados que podemos demonstrar usando os axiomas desta seção. Às vezes usamos essas propriedades sem muito questionamento, por nos parecerem óbvias. Por exemplo, o Teorema 9.2 diz que "Se duas retas (diferentes) são concorrentes, então a interseção contém um único ponto". Mas, podemos perguntar, existem retas concorrentes? O enunciado do teorema não depende dessa resposta, pois é possível reler esse enunciado da seguinte forma: "Se existirem duas retas (diferentes) concorrentes, então sua interseção contém um único ponto". Para ver que realmente existem retas concorrentes, observemos que o espaço tem pelo menos quatro pontos não coplanares. Isso significa que existem três pontos não colineares (por quê?). Sejam então A, B e C três pontos não colineares. Seja r a reta determinada por A e B, e seja s a reta determinada por B e C. Essas retas são diferentes, pois os pontos A, B e C não são colineares. Então r e s são retas concorrentes (concorrem no ponto B).

Por outro lado, devemos ficar atentos, pois existem propriedades que nos parecem óbvias mas que não podemos provar com esses cinco primeiros axiomas apenas. Por exemplo, costumamos aceitar que toda reta tem infinitos pontos. De fato, a Geometria Euclidiana contém essa afirmação, mas para estabelecê-la precisamos de mais axiomas.

Observamos que pode não ser fácil constatar que uma determinada propriedade não pode ser provada com um certo conjunto de axiomas. Mesmo se muitas pessoas tentarem uma demonstração e não conseguirem, ainda assim não podemos afirmar que não é possível encontrar a tão procurada justificativa. O caminho para isso, já conhecido dos matemáticos, consiste em construir um modelo de geometria para o qual sejam verdadeiros os axiomas considerados, mas nele não seja verdade a afirmação investigada.

Assim, para constatar a afirmação *os cinco axiomas 1 a 5 não implicam que toda reta tem infinitos pontos*, precisamos de um modelo de geometria que obedece a esses cinco axiomas mas no qual existem retas com uma quantidade finita de pontos. O estudante pode ver que o modelo apresentado no Problema 9.5.19 satisfaz a essas condições.

Apresentamos na lista de problemas a seguir várias propriedades, a maioria muito simples, de modo que o estudante possa testar sua atenção.

9.5 Problemas

Para as demonstrações dos problemas desta seção, devem ser usados exclusivamente os axiomas e resultados da Seção 9.4.

Problema 9.5.1. Faça seus próprios desenhos ilustrando o Axioma 1 e os Teoremas 9.2 e 9.5.

Problema 9.5.2. Examine nossos desenhos da Seção 9.4, utilizados para ilustrar algumas propriedades. Eles mostram todas as situações possíveis relativas a essas propriedades?

Problema 9.5.3. A partir de que ponto de nossa sequência dedutiva podemos afirmar que existe pelo menos uma reta? E quanto a planos?

Problema 9.5.4. Podemos afirmar que, dados dois pontos, existe um plano que os contém? Por quê?

Problema 9.5.5. Considere quatro pontos nas condições do Axioma 1. Demonstre que três quaisquer desses pontos não são colineares. Explicite todos os axiomas que você usou.

Problema 9.5.6. **a)** Em uma Geometria Euclidiana são dados dois pontos A e B em uma reta r e um ponto C fora de r. Explique por que A, B e C não são colineares. **b)** Dê um exemplo para mostrar que essa propriedade não é válida em geral em geometrias não euclidianas.

Solução de a). Se A, B e C fossem colineares existiria uma reta s contendo os três pontos, e essa reta s e a reta r teriam dois pontos em comum, a saber, A e B. Em virtude do Axioma 2, parte a), teríamos $r = s$. Mas então C pertenceria a r, e isso seria uma contradição. Portanto A, B e C não são colineares.

Solução de b). Consideremos a *Geometria da Superfície Esférica (GSE)*, em que o espaço é a superfície de uma esfera, e as retas são os seus círculos máximos. Tomemos dois pontos antípodas A e B e um outro ponto C. Existe um círculo máximo r que contém A e B mas não contém C. Logo os pontos A, B e C satisfazem às condições dadas. Mas existe outro círculo máximo s que contém A, B e C, e assim esses três pontos são colineares. Portanto a afirmação não vale na GSE.

Outro exemplo: considere o conjunto $\{A,B,C\}$ no qual definimos as retas $r = \{A,B\}$ e $s = \{A,B,C\}$. Assim os pontos A, B e C satisfazem às condições dadas mas são colineares.

Essas duas geometrias não são euclidianas, em particular por que não satisfazem o Axioma 2 parte (a).

Problema 9.5.7. Usando apenas os axiomas e teoremas da Seção 9.4, explique por que: **a)** dado qualquer plano, sempre existe pelo menos um ponto fora dele; **b)** dada qualquer reta, sempre existem pelo menos dois pontos fora dela.

Solução de a). Seja α um plano qualquer. Pelo Axioma 1 existem pelo menos quatro pontos não coplanares. Logo pelo menos um desses pontos está fora do plano α.

Solução de b). Seja r uma reta qualquer. Pelo Axioma 1, existem pelo menos quatro pontos não coplanares A, B, C e D. Se nenhum ou apenas um desses pontos estiverem em r, terminamos. Suponhamos que dois desses pontos estejam em r, digamos A e B. Suponhamos que C também está em r. Pelo Axioma 3, parte a), existe um plano que contém A, B e D. Pelo Axioma 4, esse plano contém a reta r (pois contém dois pontos de r). Logo esse plano contém o ponto C, e assim contém todos os quatro pontos, o que é uma contradição. Portanto C não está em r. Da mesma forma se prova que D não está em r. Provamos que pelo menos dois dos quatro pontos não estão em r.

Problema 9.5.8. Explique por que no espaço existem pelo menos três retas que se intersectam no mesmo ponto.

Problema 9.5.9. **a)** Explique por que em qualquer plano existem pelo menos três retas que se intersectam duas a duas em três pontos diferentes. **b)** Justifique: se três retas se intersectam duas a duas em três pontos diferentes, então elas estão no mesmo plano. **c)** Desenhe três retas diferentes que se intersectam duas a duas e não estão no mesmo plano.

Problema 9.5.10. Usando apenas os axiomas e resultados da Seção 9.4, prove que: **a)** dado um ponto, existem pelo menos três retas que o contêm; **b)** dada uma reta, existem pelo menos dois planos que a contêm; **c)** dado um ponto em um plano, existem pelo menos duas retas contidas no plano e que contêm o ponto; **d)** dado um ponto, existe pelo menos um plano que não o contém; **e)** dada uma reta, existe pelo menos um plano que não a contém.

Solução de d). Seja A um ponto dado. Existem pelo menos mais três pontos B, C e D de modo que esses quatro pontos não sejam coplanares (a negação disso contrariaria o Axioma 1). Seja α o plano que contém B, C e D (existe pelo Axioma 3). Esse plano não contém A, pois se isso ocorresse, os quatro pontos seriam coplanares.

Problema 9.5.11. Veja se, usando apenas os axiomas e resultados da Seção 9.4, é possível provar que: **a)** Dado um plano, existem duas retas, nele contidas, que não se intersectam; **b)** existem uma reta e um plano que não se intersectam; **c)** existem dois planos que não se intersectam.

Problema 9.5.12. Prove que dado um ponto fora de uma reta existe uma reta que o contém e que não intersecta a reta dada. Faça um desenho ilustrando essa situação.

Problema 9.5.13. Verifique se, usando apenas os axiomas da Seção 9.4, dá para provar que todo plano tem infinitos pontos.

Problema 9.5.14. Uma mesa de quatro pernas pode oscilar às vezes, e uma mesa de três pernas está sempre firme. Explique por que isso ocorre à luz dos axiomas da Seção 9.4.

Problema 9.5.15. Dados quatro pontos do espaço, quantas retas eles determinam?

Problema 9.5.16. Dados n pontos do espaço tais que não existem três colineares, quantas retas eles determinam?

Problema 9.5.17. Levando-se em conta apenas os axiomas da Seção 9.4, quantos planos há no espaço, no mínimo?

Problema 9.5.18. Nosso sistema de axiomas não é o mais econômico possível. Por exemplo, o Axioma 5 pode ser substituído pela seguinte afirmação: "Se dois planos diferentes se intersectam, a interseção contém pelo menos dois pontos". Prove que isso implica que a interseção é uma única reta.

Problema 9.5.19. Considere a seguinte Geometria Finita: o espaço $\mathscr{E} = \{A, B, C, D\}$ é formado por quatro elementos, que chamaremos de pontos. Os planos são todos os subconjuntos com três pontos, e as retas são todos os subconjuntos com dois pontos. Mostre que essa geometria satisfaz os Axiomas 1 a 5.

Problema 9.5.20. Vemos na Figura 9.7 um esboço inicial de um mapa dedutivo da Seção 9.4. Ele mostra que o Teorema 9.2 depende do Axioma 2 e o Teorema 9.3, do Axioma 4. Complete o mapa assinalando de quais axiomas dependem os Teoremas 9.4 e 9.5. Localize no mapa as definições desta Seção. Inclua ainda alguns problemas da Seção 9.5, como 9.5.7 a) e 9.5.12.

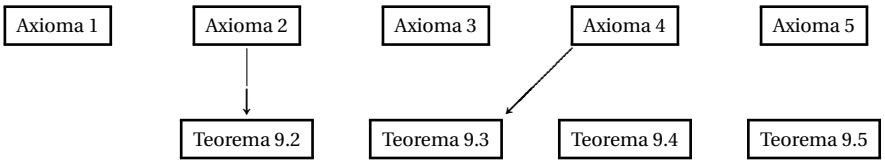


Figura 9.7. Esboço de mapa dedutivo da Seção 9.4.

9.6 Axiomas de medida

Os objetos geométricos podem ser comparados entre si quanto à sua extensão. A extensão dos objetos é expressa por números, pelo que necessitamos de métodos para relacionar as formas com os números. Os números também permitem determinar a localização de objetos relativamente a outros objetos. No momento vamos nos ocupar apenas das medidas lineares, que dizem respeito às distâncias entre pontos. A técnica mais comum que utilizamos para medir distâncias é o uso de uma régua metrizada, ou outro instrumento similar. Observando atentamente essa técnica e abstraindo suas propriedades, obtemos um conjunto de afirmações que organizamos em três axiomas, denominados "axiomas de medida".

Antes de apresentá-los observamos que o sistema axiomático que aqui adotamos, em busca de simplicidade, lança mão, o mais cedo possível, do conjunto dos números reais. Dessa forma supomos que o estudante tem conhecimento desse conjunto e de suas propriedades básicas.

Iniciamos reconhecendo que, dados dois pontos quaisquer no espaço, podemos medir a distância entre eles. Esse primeiro axioma afirma também que o método de medir está estabelecido, de modo que a distância entre dois pontos é uma só.

Axioma 6. *(da distância)*
A todo par de pontos diferentes corresponde um único número real positivo.

Definição 9.6. A *distância entre dois pontos* é o número dado pelo Axioma 6. Convém definir a distância de um ponto a ele mesmo como zero. Se A e B são dois pontos, a distância entre eles será anotada por AB ou BA, ou ainda por $d(A,B)$.

Continuamos com o

Axioma 7. *(da régua)*
Os pontos de qualquer reta podem ser postos em correspondência com os números reais de modo que:
1) a cada ponto da reta corresponde um único número real;
2) a cada número real corresponde um único ponto da reta;
3) a distância entre dois pontos quaisquer da reta é o valor absoluto da diferença dos números correspondentes.

Definição 9.7. Uma correspondência do tipo descrito pelo Axioma 7 é chamada *sistema de coordenadas*. Dado um ponto da reta, o número que lhe corresponde nesse sistema de coordenadas é chamado *coordenada* desse ponto.



Figura 9.8. Dois pontos em uma reta e suas coordenadas.

Vemos na Figura 9.8 ilustração de uma reta r com destaque de dois pontos A e B e suas respectivas coordenadas a e b. Combinando a parte 3) do Axioma 7 e a Definição acima temos $AB = |a-b|$. Notemos que $|a-b| = |b-a|$, o que condiz com o fato de que os números AB e BA são iguais, isto é, a distância entre dois pontos não depende da ordem segundo a qual eles são considerados. Notemos ainda que um sistema de coordenadas é uma função bijetiva $\sigma : r \to \mathbb{R}$ que satisfaz à condição 3) do Axioma 7.

Observamos que, dada uma reta, podemos associar a ela inúmeros sistemas de coordenadas, "deslocando" a régua na direção da reta ou trocando o sentido de direção. Para fixar um sistema podemos usar o

Axioma 8. *(da colocação da régua)*
Dados dois pontos A e B em uma reta, o sistema de coordenadas pode ser escolhido de tal modo que a coordenada de A seja zero e a de B seja positiva.

O Axioma 8 está ilustrado na Figura 9.9. Dada uma reta r e dois pontos A e B dessa reta, imaginamos que "encostamos" nela uma régua de forma conveniente para que a coordenada de A seja zero e a de B seja positiva. Imaginamos uma régua infinita com todos os números reais.

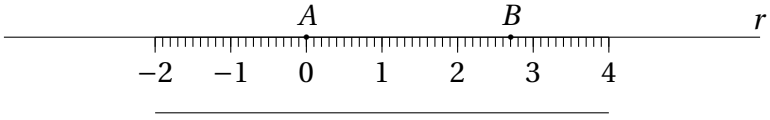


Figura 9.9. Ilustração do Axioma da colocação da régua.

Segue a importante definição do conceito de "estar entre". Ela prepara a definição de segmento, feita logo depois.

Definição 9.8. Dados três pontos diferentes A, B e C em uma reta, dizemos que B *está entre* A e C quando $AB + BC = AC$. Se isso ocorrer anotamos $A - B - C$.

Observamos que a noção de *está entre* só existe para pontos de uma mesma reta. Assim, se dissermos: "B está entre A e C", isso significa automaticamente que esses três pontos estão na mesma reta. Notemos também que $AB + BC = AC$ se e somente se $CB + BA = CA$, portanto $A - B - C$ é o mesmo que $C - B - A$.

Definições 9.9. Dados dois pontos diferentes A e B, o *segmento de reta* (ou, simplesmente, *segmento*) AB é o conjunto dos pontos A e B e de todos os pontos C que estão entre A e B. Os pontos A e B são chamados *extremidades* do segmento AB. Os pontos que estão entre A e B formam o *interior* de AB. Os pontos da reta $\overleftrightarrow{AB}$ que não pertencem ao segmento AB constituem o *exterior do segmento na reta*. O *comprimento* ou *medida* do segmento AB é o número AB definido pelo Axioma 6. A reta $\overleftrightarrow{AB}$ pode ser chamada de *reta suporte* de AB.

Observe que, da definição de estar entre, AB e BA indicam o mesmo conjunto.

Os segmentos AB e CD podem ser diferentes como conjuntos de pontos. Entretanto, podem ter a mesma medida. Nesse caso dizemos que eles são *congruentes*, e anotamos $AB \cong CD$.

Dados pontos diferentes A e B, a *semirreta* $\overrightarrow{AB}$ é o conjunto dos pontos de AB e dos pontos C tais que B está entre A e C. O ponto A chama-se *origem* de $\overrightarrow{AB}$. Se A está entre B e C então $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são chamadas *semirretas opostas*.

Dados três pontos A, B e C não colineares, o *triângulo* ABC é o conjunto $AB \cup BC \cup AC$. Os pontos A, B e C são chamados *vértices* do triângulo, e os segmentos AB, BC e AC são seus *lados*. Os comprimentos desses segmentos também são chamados lados. A soma dos lados de um triângulo é o seu *perímetro*, e a metade desse valor chama-se *semiperímetro*.

Se os três lados de um triângulo são diferentes dois a dois, ele se chama *escaleno*. Se dois lados de um triângulo são iguais, ele se chama *isósceles*.

Confira, na Figura 9.10, desenhos de segmento, semirreta e triângulo.

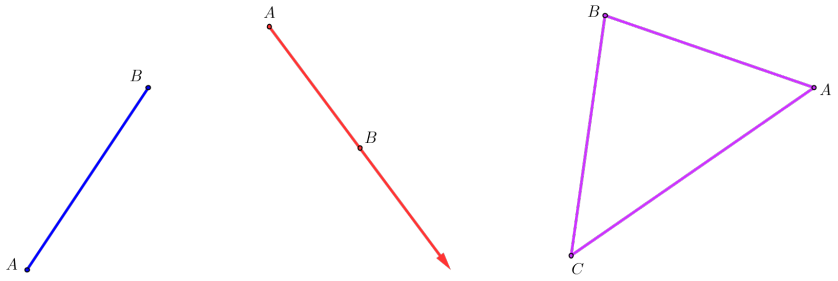


Figura 9.10. Desenhos de segmento, semirreta e triângulo.

Observamos que temos usado a mesma notação AB para indicar segmento (que é um conjunto de pontos) e seu comprimento (que é um número). Em geral o contexto deixa claro do que se trata. Quando houver possibilidade de confusão devemos antecipar esse símbolo com uma das palavras "segmento" ou "comprimento" (ou "medida").

Aproveitamos a oportunidade para definir mais uma importante figura da Geometria, a circunferência:

Definições 9.10. Dado um ponto O em um plano α e dado um número real positivo ρ, a *circunferência* em α de centro O e raio ρ é o conjunto dos pontos de α cuja distância a O é igual a ρ. O ponto O chama-se *centro* da circunferência, e o número ρ chama-se *raio*. Um segmento com uma

extremidade no centro de uma circunferência e outra nela própria também se chama *raio*. Um segmento cujas extremidades estão em uma circunferência chama-se *corda*. Se a corda contém o centro da circunferência, ela se chama *diâmetro*.

Dada uma circunferência de raio ρ, todos os seus diâmetros têm a mesma medida, igual a 2ρ. Essa medida também é chamada de *diâmetro*. Confira desenhos de circunferências na Figura 9.11.

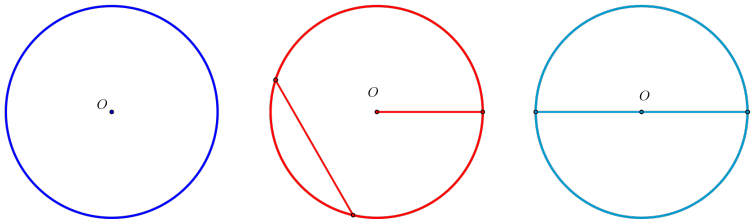


Figura 9.11. Desenhos de uma circunferência e seu centro, uma circunferência com um raio e uma corda, e uma circunferência com um diâmetro.

Na Seção 9.8 estudamos os axiomas de separação. Esse conceito exige a compreensão do que é denominado *conjunto convexo*. Vamos adiantar agora sua definição de modo que o estudante possa refletir sobre ela.

Definição 9.11. Um subconjunto do espaço com dois pontos ou mais se diz *convexo* se, dados dois pontos quaisquer desse conjunto, o segmento determinado por eles está inteiramente nele contido. O conjunto vazio e o conjunto unitário (isto é, que tem apenas um ponto) também são ditos serem convexos.

Na coleção de problemas da Seção seguinte apresentamos vários pequenos desafios sobre conjuntos convexos, e assim estaremos nos preparando para prosseguir nossos estudos. No momento observamos apenas que é fácil desenhar conjuntos convexos e não convexos. A Figura 9.12 apresenta vários deles.

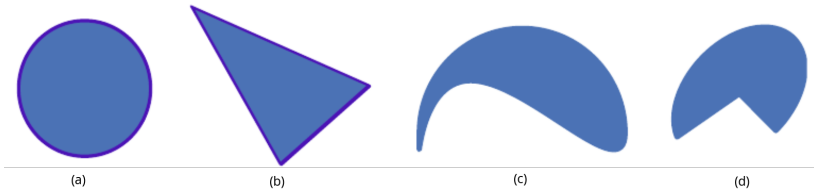


Figura 9.12. Figuras do plano convexas e não convexas.

Um exame visual da Figura 9.12 nos mostra que os conjuntos (a) e (b) são convexos e (c) e (d) não são. Lembramos, entretanto, que a proposta do método axiomático, que ora estamos estudando, é que as afirmações necessitam serem demonstradas dentro da sequência argumentativa adotada. Vejamos, como exemplo, o conjunto (a) da Figura 9.12. Se nos for dito que ele representa uma circunferência e seu interior, é necessário que antes tenha sido definido o que é o interior de uma circunferência. Essa definição é solicitada do estudante no Problema 9.7.13. Em seguida é preciso demonstrar que o conjunto formado por uma circunferência e seu interior satisfaz à condição da Definição 9.11. Tratamento semelhante deve ser dado ao conjunto (b) da Figura 9.12, que representa um triângulo e seu interior.

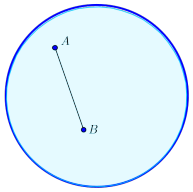
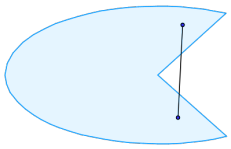


Figura 9.13

Para provar que um conjunto é convexo é preciso considerar dois quaisquer de seus pontos, e argumentar que todo o segmento por eles determinado está contido no conjunto. O argumento deve ser geral, e servir para quaisquer pontos do conjunto. Confira a Figura 9.13.

Para provar que um conjunto não é convexo é preciso mostrar que ele não satisfaz a definição de convexidade. Assim, basta encontrar dois pontos convenientes A e B no conjunto e argumentar que o segmento AB tem pontos fora do conjunto. Confira a Figura 9.14.


Figura 9.14

9.7 Problemas

Para as demonstrações dos problemas desta seção, devem ser usados exclusivamente os axiomas e resultados das Seções 9.4, 9.5 e 9.6.

Problema 9.7.1. Explique por que todo triângulo está contido em um único plano, mas o mesmo não acontece com um segmento qualquer.

Problema 9.7.2. Considere uma reta r munida de um sistema de coordenadas. Mostre que existe em r outro sistema de coordenadas de modo que se a é a coordenada de um ponto qualquer $A \in r$ no primeiro sistema, no segundo sistema sua coordenada é $-a$. Ainda, a distância entre dois pontos de r é a mesma nos dois sistemas.

Problema 9.7.3. **a)** Sejam A, B e C três pontos de uma reta com coodenadas a, b e c, respectivamente. Prove que se $a < b < c$ então B está entre A e C. **b)** Enuncie a recíproca dessa afirmação, e explique por que ela não é verdadeira. **c)** Prove que se acrescentarmos a condição $a < c$ então a recíproca é verdadeira.

Solução de a). Temos $AB + BC = |b-a| + |c-b| = (b-a) + (c-b) = c-a = |c-a| = AC$. Da Definição 9.8 de "estar entre" podemos escrever $A - B - C$.

Problema 9.7.4. Seja $\overrightarrow{AB}$ uma semirreta e x um número positivo, isto é, $x > 0$. Então existe um e um único ponto P de $\overrightarrow{AB} - \{A\}$ tal que $AP = x$.

Problema 9.7.5. Seja AB um segmento qualquer de uma reta r. Um ponto M de r se diz *ponto médio* de AB quando $AM = MB$. **a)** Demonstre que se M é ponto médio de AB, então $A - M - B$. **b)** Sejam a e b as coordenadas de A e B, respectivamente, em um sistema de coordenadas de r. Demonstre que o ponto M de r de coordenada $\frac{a+b}{2}$ é um ponto médio de AB. **c)** Demonstre que todo segmento tem um único ponto médio.

Problema 9.7.6. Explique por que todo segmento tem infinitos pontos. Isso implica que toda reta tem infinitos pontos.

Problema 9.7.7. Prove que se A, B e C são três pontos diferentes de uma reta, então exatamente um deles está entre os outros dois.

Problema 9.7.8. **a)** Sejam A, B e C três pontos de uma reta tais que B está entre A e C. Prove que $AB \cup BC = AC$. **b)** Prove que se $B-A-C$, então $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{AC} = \{A\}$. **c)** Prove que se $A-B-C$ e $A-D-B$, então $A-D-C$. **d)** Prove que se P e Q são pontos de AB, então $PQ \subset AB$.

Enuncie e demonstre outras propriedades similares às anteriores.

Solução. Uma outra propriedade é: se $B-A-C-D$, então $BC \cap AD = AC$.

Demonstração: Os pontos B, A, C e D estão em uma mesma reta. Consideremos um sistema de coordenadas nessa reta, e sejam b, a, c e d as coordenadas desses pontos, respectivamente. Suponhamos $b < d$ (caso contrário a demonstração é análoga). O Problema 9.7.3, parte c), implica $b < a < c < d$.

Vamos provar primeiro que $BC \cap AD \subset AC$. Seja $X \in BC \cap AD$ um ponto qualquer e indiquemos por x sua coordenada. Como $X \in BC$, o resultado do Problema 9.7.3, parte c), implica $b < x < c$. Da mesma forma $X \in AD$ implica $a < x < d$. Combinando essas desigualdades temos $a < x < c$. Do Problema 9.7.3, parte a), vem $X \in AC$. Portanto $BC \cap AD \subset AC$.

Vamos provar agora que $AC \subset BC \cap AD$. Seja $X \in AC$ e seja x a coordenada de X. Do Problema 9.7.3, parte c), vem $a < x < c$. Logo $b < x < c$ e $a < x < d$, o que implica $X \in BC$ e $X \in AD$. Portanto $X \in BC \cap AD$, e $AC \subset BC \cap AD$. Concluímos que $BC \cap AD = AC$.

Problema 9.7.9. Demonstre que por um ponto dado em um plano dado, existem infinitas retas nesse plano que contêm o ponto.

Problema 9.7.10. Demonstre que por um ponto dado do espaço, existem infinitos planos que o contêm.

Solução. Seja A o ponto dado, e sejam B, C e D pontos tais que esses quatro pontos são não coplanares (existem pelo Axioma 1). Em virtude do resultado do Problema 9.5.5 eles são três a três não colineares . Assim a reta r determinada por B e C não contém nem A e nem D. Aplicando o Axioma 3 vemos que, dado um ponto $X \in r$ qualquer, existe um único plano α_X determinado por A, X e D. Observe que, se X e Y são pontos diferentes em r, então α_X e α_Y são diferentes (se um plano contivesse A, X, Y e D conteria A, B, C e D, e teríamos uma contradição). Como r tem infinitos pontos, segue que existem infinitos planos que contêm A.

Problema 9.7.11. Prove que, dada uma reta, existem infinitos planos que a contêm.

Problema 9.7.12. **a)** Demonstre que, se uma reta contém o centro de uma circunferência (e estão no mesmo plano), então ela a intersecta em exatamente dois pontos. **b)** Explique por que todos os diâmetros de uma circunferência têm a mesma medida, igual ao dobro do seu raio. **c)** Prove que toda circunferência tem infinitos pontos e infinitos diâmetros.

Problema 9.7.13. Defina interior e exterior de uma circunferência. Explique por que cada um desses conjuntos tem infinitos pontos.

Problema 9.7.14. Mostre que o desenho da direita da Figura 9.11 condiz com os resultados da teoria vistos até agora. Isto é, se AB é um diâmetro de uma circunferência então o interior do segmento AB está contido no interior da circunferência.

Problema 9.7.15. O desenho central da Figura 9.11 condiz com os resultados da teoria vistos até agora?

Problema 9.7.16. Em Definições 9.9 explicamos o que são triângulos isósceles. Em Matemática, quando damos nome a algum objeto, é importante nos certificarmos de que esse objeto realmente existe (dentro da teoria que estamos construindo). Assim perguntamos: existem triângulos isósceles? No nível da dedução informal não temos dúvida sobre isso, pois construímos muitos triângulos isósceles com varetas e canudos, e desenhamos muitos deles. Mas podemos construir triângulos isósceles com as ferramentas teóricas que desenvolvemos até esse ponto de nosso sistema axiomático? Examine esse problema.

Segue uma pequena coleção de problemas sobre convexidade.

Problema 9.7.17. **a)** Prove que toda reta é convexa. **b)** Mostre que todo segmento é convexo. **c)** Explique por que qualquer circunferência não é convexa. **d)** Demonstre que qualquer triângulo não é convexo.

Problema 9.7.18. **a)** Todo plano é convexo? Por quê? **b)** De um plano retiramos um ponto. O conjunto resultante é convexo? Por quê? **c)** De um plano retiramos uma reta. Explique por que o conjunto resultante não é convexo. **d)** De um plano retiramos uma semirreta. O conjunto resultante é convexo? Por quê?

Problema 9.7.19. O conjunto formado por uma reta menos um ponto (dessa reta) é convexo?

Solução. Não. Seja r uma reta e A um ponto nela contido. Consideremos o conjunto $\mathscr{S} = r - A$. Mostremos que $\mathscr{S}$ não é convexo. Sejam P e Q pontos dessa reta, um de cada lado de A. Isto é, se colocarmos em r um sistema de coordenadas no qual A tenha coordenada zero, então P e Q têm coordenadas não nulas e de sinais opostos. Dessa forma P e Q são pontos de $\mathscr{S}$. Mas PQ contém A, logo $PQ \not\subseteq \mathscr{S}$. Portanto $\mathscr{S}$ não é convexo.

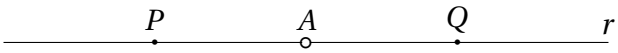


Figura 9.15. Uma reta menos um ponto: ilustração do Problema 9.7.19.

Problema 9.7.20. **a)** Prove que o exterior de uma circunferência qualquer não é convexo. **b)** Verifique se é possível provar que o interior de uma circunferência é convexo com os axiomas vistos até agora. Se não for, identifique o que está faltando.

Problema 9.7.21. **a)** Demonstre que a interseção de conjuntos convexos é um conjunto convexo. **b)** A reunião de conjuntos convexos quaisquer é um conjunto convexo?

9.8 Axiomas de separação

O primeiro axioma desta Seção descreve a percepção que temos quando imaginamos o que ocorre se de um plano retiramos os pontos de uma reta nele contida. Entendemos que ficamos com dois conjuntos "separados". Um ponto pode se mover sem problemas em cada um deles. Mas, para ir de um conjunto para o outro, tem que "atravessar" a reta, intersectando-a.

Axioma 9. *(da separação do plano)*
Dados uma reta e um plano que a contém, os pontos do plano que não pertencem à reta formam dois conjuntos não vazios tais que:
(i) cada um dos conjuntos é convexo; e
(ii) se A pertence a um dos conjuntos e B ao outro, então AB intersecta a reta.

O segundo axioma da separação descreve situação similar no espaço, quando retiramos dele os pontos de um plano.

Axioma 10. *(da separação do espaço)*
Dado um plano, os pontos do espaço que não pertencem ao plano formam dois conjuntos não vazios tais que:
(i) cada um dos conjuntos é convexo; e
(ii) se A pertence a um dos conjuntos e B ao outro, então AB intersecta o plano.

Esses dois axiomas estão ilustrados na Figura 9.16.

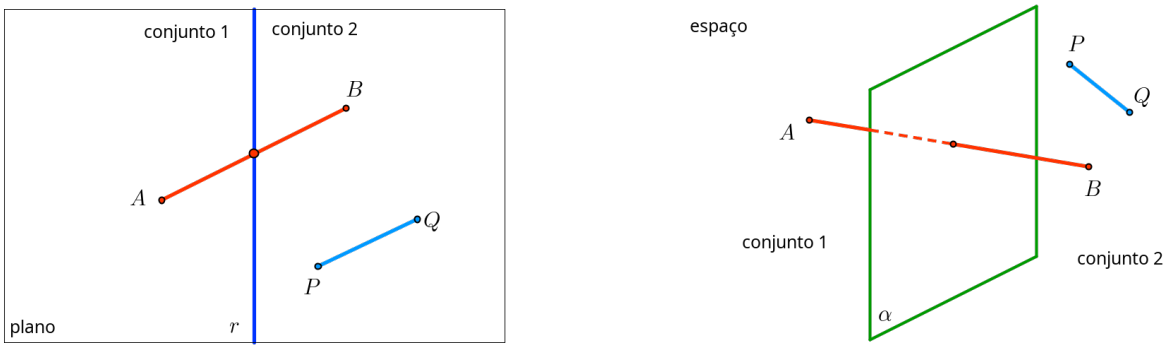


Figura 9.16. À esquerda, separação do plano por uma reta: ilustração do Axioma 9. À direita, separação do espaço por um plano: ilustração do Axioma 10.

Definições 9.12. Dados um plano α e uma reta r nele contida, os dois conjuntos descritos pelo Axioma 9 chamam-se *semiplanos* ou *lados* de α determinados por r, e essa reta chama-se *origem* de cada um. Se o ponto A está em um semiplano e B no outro, dizemos que estão em semiplanos opostos.

Dado um plano α, os dois conjuntos descritos pelo Axioma 10 chamam-se *semiespaços* ou *lados* do espaço determinados por α, e esse plano chama-se *origem* de cada um. Se o ponto A está em um semiespaço e B no outro, dizemos que estão em semiespaços opostos.

Observamos que toda reta é separada em dois conjuntos se retiramos dela um ponto que lhe pertence. Entretanto não descrevemos essa propriedade como um axioma, pois podemos demonstrá-la facilmente, e preferimos colocá-la na forma de um teorema.

Teorema 9.13. *[Teorema da separação da reta] Dados uma reta r e um ponto O nela contido, os pontos de r diferentes de O formam dois conjuntos não vazios tais que: (i) cada um dos conjuntos é convexo; (ii) se A pertence a um dos conjuntos e B ao outro, então O pertence a AB.*

Demonstração. Consideremos um sistema de coordenadas em r de modo que a coordenada de O seja zero. Definimos $\mathscr{A}$ como o conjunto dos pontos de r com coordenada positiva, e $\mathscr{B}$ como o conjunto dos pontos de r com coordenada negativa. Como existem infinitos números positivos e infinitos números negativos, e a eles correspondem diferentes pontos da reta, cada um desses conjuntos tem infinitos elementos. Em particular, são não vazios.

(i) Provemos que $\mathscr{A}$ é convexo. Sejam P e Q pontos quaisquer de $\mathscr{A}$, e indiquemos por p e q suas respectivas coordenadas. Temos $p > 0$ e $q > 0$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $p < q$. Se $X \in PQ$ é um ponto qualquer, então a coordenada x de X satisfaz $p \leq x \leq q$, de modo

que $x > 0$, e $X \in \mathscr{A}$. Logo $PQ \subset \mathscr{A}$, e assim $\mathscr{A}$ é convexo. De forma análoga se prova que $\mathscr{B}$ é convexo.

(ii) Sejam $A \in \mathscr{A}$ e $B \in \mathscr{B}$. Então a coordenada a de A é positiva e a coordenada b de B é negativa. Dessa forma $b < 0 < a$, e temos $B - O - A$. Logo $O \in AB$.

Terminamos. □

9.9 Problemas

Todas as justificativas deverão ter como base os axiomas de 1 a 10 e as definições dadas até agora. Ao resolver um determinado problema pode ser mais fácil, eventualmente, utilizar resultados de problemas anteriores a ele.

Problema 9.9.1. Explique por que, se duas retas se intersectam, então qualquer uma delas tem pontos nos dois semiplanos determinados pela outra.

Problema 9.9.2. Se o ponto B está entre os pontos A e C em uma reta, então A e B estão do mesmo lado de qualquer outra reta que passa por C.

Problema 9.9.3. Se o ponto B está entre os pontos A e C em uma reta, então A e C estão em lados diferentes de qualquer outra reta que passa por B.

Solução. Seja r a reta determinada pelos pontos A, B e C, e seja s outra reta qualquer que passa pelo ponto B. Essas retas determinam um plano α. Sejam $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ os lados da reta s em α. Notemos que $B \in AC$ e $B \in s$, de modo que AC intersecta s. Assim A e C não estão ambos em $\mathscr{A}$, e também não estão ambos em $\mathscr{B}$, pois esses conjuntos são convexos. Assim só resta o caso em os pontos A e C estão em lados diferentes de s.

Problema 9.9.4. Em um plano são dados uma reta e uma semirreta não contida nessa reta mas com origem contida na reta. Mostre que os pontos da semirreta, exceto a origem, estão do mesmo lado da reta dada.

Problema 9.9.5. Prove que é convexo o conjunto formado por um semiplano e a reta que é a sua origem.

Problema 9.9.6. Sejam r e s retas em um plano. Suponha que r está na reunião de s com um dos semiplanos determinados por s. Prove que $r = s$ ou $r \cap s = \emptyset$.

Problema 9.9.7. Explique por que duas retas que se intersectam em um ponto separam o plano que as contém em quatro conjuntos convexos não vazios, de modo que se um ponto está em um conjunto e outro ponto em outro, o segmento por eles determinado intersecta pelo menos uma das duas retas. Faça um desenho elucidativo.

Problema 9.9.8. Verifique se, no Axioma 9, a condição (ii) pode ser substituída por: "o plano menos a reta não é convexo".

Problema 9.9.9. **a)** No Axioma 9 (da separação do plano) é dispensável enunciar que os dois semiplanos são ambos não vazios. Mostre que essa propriedade pode ser provada a partir das outras propriedades enunciadas no Axioma 9 (e usando eventualmente propriedades anteriores). **b)** Explique por que, na verdade, cada um dos semiplanos têm infinitos pontos. **c)** Explique por que afirmações análogas valem para o Axioma 10.

Problema 9.9.10. Verifique que, no Axioma 9, os lados que uma reta determina em um plano são disjuntos. Afirmação análoga vale para o Axioma 10.

Problema 9.9.11. Dê outra demonstração do Teorema 9.13 (Teorema da separação da reta) usando o Axioma 9.

Problema 9.9.12. Defina, à luz do Axioma 9, interior de um triângulo. Isto é, as retas suportes dos lados do triângulo determinam semiplanos que, convenientemente escolhidos, definem o interior do triângulo. Usando essa definição prove que o interior de qualquer triângulo é convexo.

Problema 9.9.13. Demonstre que se um segmento tem extremos nos interiores de dois lados de um triângulo, então o interior do segmento está contido no interior do triângulo, conforme definido no Problema 9.9.12. Confira ilustração na Figura 9.17, desenho da esquerda.

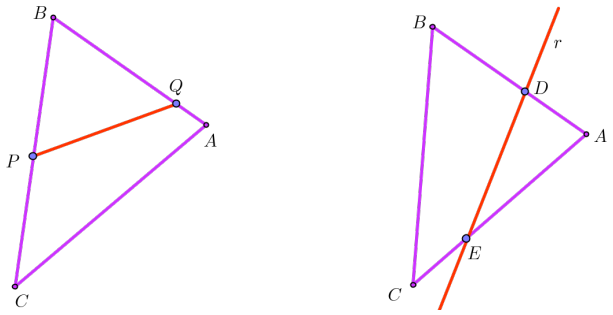


Figura 9.17. À esquerda, ilustração para o Problema 9.9.13. À direita, ilustração para o Problema 9.9.14.

Problema 9.9.14. Demonstre o seguinte: dado um triângulo ABC, se uma reta r contém um ponto D de AB diferente de A e de B, e também contém um ponto E de AC diferente de A e de C, então a reta r não intersecta o segmento BC. Confira ilustração na Figura 9.17, desenho da direita.

Solução. Consideramos as notações da Figura 9.17 e do enunciado, e definimos que $\mathscr{C}$ é o lado da reta $\overleftrightarrow{AB}$ que contém o ponto C, $\mathscr{B}$ é o lado da reta $\overleftrightarrow{AC}$ que contém o ponto B e $\mathscr{A}$ é o lado da reta $\overleftrightarrow{BC}$ que contém o ponto A.

Notemos primeiro que, em virtude do resultado do Problema 9.9.4, D está do mesmo lado que A em relação à reta $\overleftrightarrow{BC}$, logo $D \in \mathscr{A}$. Da mesma forma $E \in \mathscr{A}$. Como $\mathscr{A}$ é convexo, segue que $DE \subset \mathscr{A}$, e DE não intersecta BC. Seja agora um ponto qualquer F de r tal que $E - D - F$. Temos $F \neq B$, pois as retas r e $\overleftrightarrow{AB}$ são diferentes. Ainda, F e C estão em lados diferentes em relação à reta $\overleftrightarrow{AB}$, de modo que $F \notin BC$. Da mesma forma se prova que qualquer ponto G de r tal que $G - E - D$ não está em BC. Segue que r não intersecta BC.

Problema 9.9.15. Dois planos diferentes se intersectam em uma reta. Em quantas regiões convexas esses planos separam o espaço? Por que são convexas essas regiões?

Problema 9.9.16. Dados quatro pontos não coplanares, o *tetraedro* determinado por eles é a reunião de todos os segmentos que têm as duas extremidades em dois desses quatro pontos. Defina interior de um tetraedro e prove que ele é convexo.

Problema 9.9.17. Prove o denominado **Teorema de Pasch**: em um plano, se uma reta r intersecta o lado AB do triângulo ABC em um ponto diferente de A e de B e se r não contém C, então r intersecta exatamente um dos outros dois lados do triângulo. Confira ilustração na Figura 9.18.

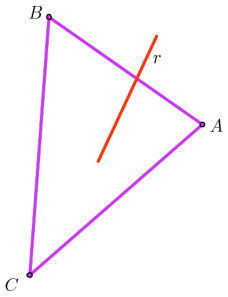


Figura 9.18. Ilustração do Teorema de Pasch.

9.10 Axiomas sobre ângulos

O conceito de ângulo tem papel importante na Geometria. Construído espontaneamente pelo ser humano, pode ser abordado de várias maneiras. A forma que adotamos aqui é a mais comum em textos didáticos que apresentam a Geometria sob o método axiomático.

Definição 9.14. Chamamos de *ângulo* à reunião de duas semirretas de mesma origem e não colineares. Confira a Figura 9.19.



Figura 9.19. Desenhos de dois ângulos.

Portanto, ângulo é um determinado tipo de conjunto de pontos. As duas semirretas são chamadas *lados* do ângulo, e a origem comum das semirretas é chamada *vértice*. Se as semirretas forem $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ então o ângulo por elas determinado é anotado por $\angle BAC$ ou por $\angle CAB$. Pode-se também usar $\hat{A}$ se estiver claro de que ângulo se trata. O *interior* do ângulo $\angle BAC$ é constituído pelos pontos D tais que D está do mesmo lado que B em relação à reta $\overleftrightarrow{AC}$ e do mesmo lado que C em relação à reta $\overleftrightarrow{AB}$. Seja α o plano que contém um ângulo. O *exterior* do ângulo é o conjunto dos pontos de α que não estão nem no ângulo e nem em seu interior. Um símbolo colocado próximo do vértice no desenho de um ângulo também pode ser usado para indicá-lo. Por exemplo, na Figura 9.20, podemos chamar $\angle BAC$ simplesmente de $\hat{a}$ ou a se estiver claro no contexto quais são os seus lados.

Um triângulo ABC determina os três ângulos $\angle BAC$, $\angle ABC$ e $\angle ACB$, que são chamados *ângulos internos* do triângulo, ou simplesmente ângulos do triângulo. O ângulo $\angle BAC$ do triângulo ABC também pode ser indicado por $\hat{A}$ se estiver claro de que ângulo se trata. O ângulo $\angle BAC$ se diz *oposto* ao lado BC, e vice-versa. Os lados do triângulo estão contidos nos lados dos ângulos, mas frequentemente, por simplicidade, dizemos que os lados do triângulo são os lados dos ângulos.

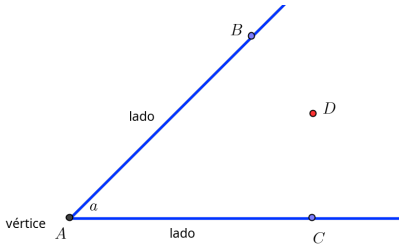


Figura 9.20. Desenho de um ângulo com seus elementos e anotações. O ponto D está em seu interior.

Nas aplicações práticas da Geometria medimos ângulos usando um instrumento denominado *transferidor*. Na Figura 9.21 vemos um transferidor que mede ângulos em *graus*. Observamos atentamente as propriedades da relação entre ângulos e esse instrumento, e as sintetizamos em quatro axiomas, que passamos a enunciar.

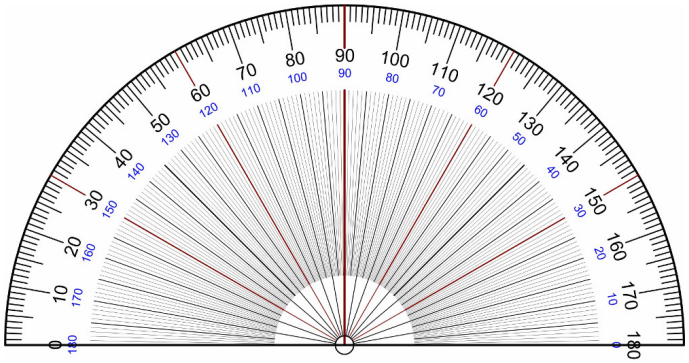


Figura 9.21. Transferidor com unidade de medida em graus.

Axioma 11. *(da medida de ângulos em graus)*
A todo ângulo corresponde um único número real entre 0 e 180.

No enunciado do Axioma 11, por "número real entre 0 e 180" se entende um número x tal que $0 < x < 180$.

Definição 9.15. Dado um ângulo $\angle BAC$, o número que lhe corresponde em virtude do Axioma 11 é chamado *medida em graus*, ou simplesmente *medida* de $\angle BAC$, e anotado por $m(\angle BAC)$. Anotamos x° para indicar que um ângulo mede x graus, ou usamos simplesmente x se estiver claro que se trata de graus. Se um ângulo se chama a, sua medida pode ser indicada por $m(a)$ ou simplesmente por a.

Axioma 12. *(da construção de ângulos)*
Seja $\overrightarrow{AB}$ uma semirreta contida na origem de um semiplano $\mathscr{H}$. Para todo número real x tal que $0 < x < 180$, existe uma única semirreta $\overrightarrow{AC}$, com C em $\mathscr{H}$, tal que $m(\angle BAC) = x^\circ$.

O Axioma 12 está ilustrado no desenho da esquerda da Figura 9.22. O Axioma 13, por sua vez, enunciado a seguir, está ilustrado no desenho da direita da mesma Figura.

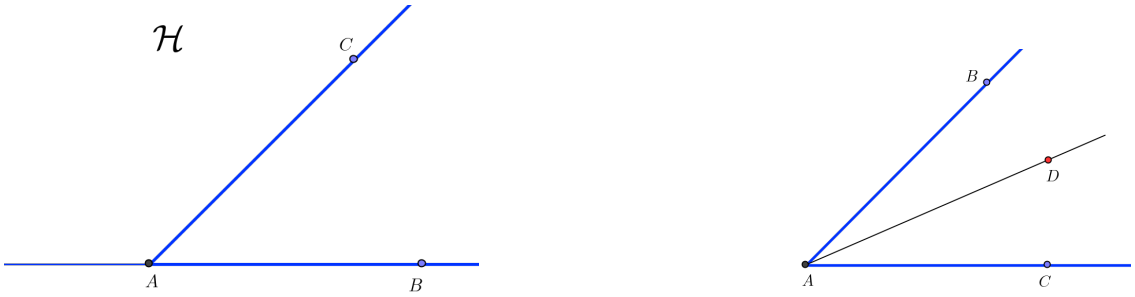


Figura 9.22. Ilustração dos axiomas 12 e 13.

Axioma 13. *(da adição de ângulos)*
Se o ponto D está no interior de $\angle BAC$*, então* $m(\angle BAC) = m(\angle BAD) + m(\angle DAC)$.

Seguem as definições de par linear e de ângulos suplementares.

Definições 9.16. Os ângulos $\angle BAD$ e $\angle CAD$ formam um *par linear* quando $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são semirretas opostas e D não pertence a elas. Dois ângulos se dizem *suplementares* se a soma de suas medidas for 180°. Nesse caso se diz que um é *suplemento* do outro.

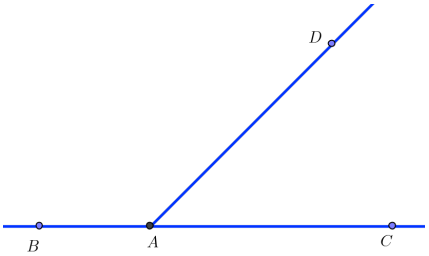


Figura 9.23. Um par linear.

A Figura 9.23 ilustra essa definição. Nela vemos que os ângulos $\angle BAD$ e $\angle CAD$ formam um par linear.

Para encerrar nossa lista de axiomas sobre ângulos precisamos estabelecer a soma de dois ângulos que formam um par linear. Assim temos o

Axioma 14. *(do suplemento)*
Dois ângulos quaisquer que formam um par linear são suplementares.

Assim, na Figura 9.23, temos $m(\angle BAD) + m(\angle CAD) = 180°$.

Dentre todos os ângulos, talvez o que mais se distingue é o ângulo reto, devido às suas aplicações e, em particular, à importância dos triângulos retângulos.

Definições 9.17. Um ângulo de medida 90° chama-se *ângulo reto*. Se as semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ formam um ângulo reto, elas se dizem *perpendiculares*, e anotamos $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$. Nesse caso dizemos também que as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$ são perpendiculares. Da mesma forma se definem segmentos perpendiculares, segmento perpendicular a uma reta, etc. Dois ângulos chamam-se *complementares* se a soma de suas medidas for igual a 90°. Um ângulo se diz *agudo* se sua medida for menor do que 90°, e *obtuso* se maior. Dois ângulos $\angle BAC$ e $\angle DEF$ de mesma medida se dizem *congruentes*, e anotamos $\angle BAC \cong \angle DEF$. Dois ângulos se dizem *opostos pelo vértice* se seus lados formam dois pares de semirretas opostas. Se o ponto D está no interior de $\angle BAC$ e se $m(\angle BAD) = m(\angle CAD)$, a semirreta $\overrightarrow{AD}$ chama-se *bissetriz* de $\angle BAC$. Se um triângulo tem um ângulo reto ele se chama *triângulo retângulo*. Os lados do triângulo retângulo que estão nos lados do ângulo reto chamam-se *catetos*, e o terceiro lado chama-se *hipotenusa*. Um triângulo se diz *acutângulo* quando todos os seus ângulos são agudos, e *obtusângulo* quando tem um ângulo obtuso.

Seguem três resultados básicos sobre ângulos.

Proposição 9.18. *Ângulos opostos pelo vértice são congruentes.*

Demonstração. Acompanhando as anotações ilustradas na Figura 9.24, à esquerda, sejam $A-O-B$ e $C-O-D$. Os ângulos $\angle AOD$ e $\angle BOC$ são opostos pelo vértice. Como $\angle AOD$ e $\angle BOD$ formam um par linear, temos, do Axioma 14, $m(\angle AOD)+m(\angle BOD)=180°$. Da mesma forma vale $m(\angle BOC)+m(\angle BOD)=180°$. Igualando vem $m(\angle AOD)=m(\angle BOC)$. Isso prova o resultado. □

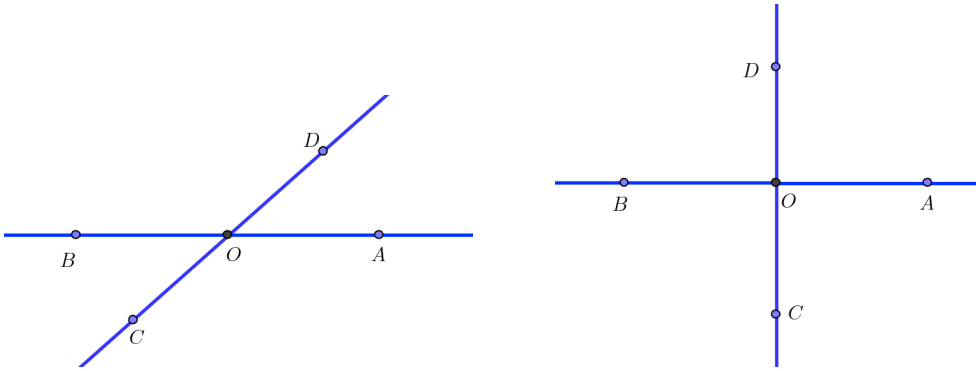


Figura 9.24. À esquerda, ângulos opostos pelo vértice. À direita, ângulos retos formados por duas retas.

Proposição 9.19. *Se duas retas que se intersectam formam um ângulo reto, estão elas formam quatro ângulos retos.*

Demonstração. Com as notações da Figura 9.24, à direita, temos $A-O-B$ e $C-O-D$, e suponhamos que $m(\angle AOD)=90°$. Como $\angle BOC$ é a ele oposto pelo vértice, em virtude da Proposição 9.18 temos $m(\angle BOC)=90°$. Ainda, $\angle AOD$ e $\angle BOD$ formam um par linear, e temos $m(\angle AOD)+m(\angle BOD)=180° \Rightarrow 90°+m(\angle BOD)=180° \Rightarrow m(\angle BOD)=90°$. De mesma forma se vê que $m(\angle AOC)=90°$. □

É importante a seguinte propriedade, de fácil demonstração.

Teorema 9.20. *Em um plano, por qualquer ponto de uma reta passa uma única reta perpendicular à reta dada.*

Demonstração. A demonstração está ilustrada na Figura 9.25. Sejam r a reta e P o ponto dados. Consideremos outro ponto dessa reta, digamos Q, e um dos semiplanos determinados por r, digamos $\mathscr{H}$. Como 90 é um número entre 0 e 180 existe, em virtude do Axioma 12, uma única semirreta $\overrightarrow{PT}$, com T em $\mathscr{H}$, tal que $m(\angle QPT)=90°$. Portanto a reta $\overleftrightarrow{PT}$ é perpendicular a r por P. Essa perpendicular é única em virtude do mesmo axioma. □

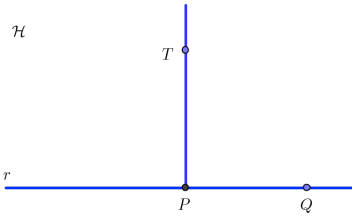


Figura 9.25. Existência e unicidade da perpendicular.

O Teorema 9.20 nos permite definir o importante conceito de mediatriz, muito útil na Geometria Plana:

Definição 9.21. Dado um plano e um segmento nele contido, a *mediatriz* do segmento nesse plano é a reta desse plano que é perpendicular ao segmento e passa pelo seu ponto médio.

9.11 Problemas

Todas as justificativas deverão ter como base os axiomas de 1 a 14 e as definições dadas até agora. Use desenhos para esclarecer os enunciados e ajudar a antecipar as justificativas.

Problema 9.11.1. Seja $\angle BAC$ um ângulo, e sejam D um ponto de $\overrightarrow{AB}$ e E um ponto de $\overrightarrow{AC}$, ambos diferentes de A. Explique por que $\angle BAC = \angle DAE$.

Problema 9.11.2. Desenhe, numa folha de papel, três pontos não colineares A, B e C. Desenhe os ângulos $\angle ABC$ e $\angle BAC$. Diga o que é (e justifique) $\angle ABC \cap \angle BAC$.

Problema 9.11.3. Considere uma reta r em um plano α, e tome em r três pontos $A - B - C$. Explique por que existem pontos D e E do mesmo lado de r tais que $m(\angle CBD) = m(\angle CAE)$. Quais outras propriedades têm os elementos dessa configuração?

Problema 9.11.4. Demonstre que se um segmento tem extremos cada um em um lado de um ângulo, e nenhum desses extremos é o vértice desse ângulo, então seu interior está contido no interior do ângulo.

Solução. Seja AB um segmento com extremos nos lados de um ângulo de vértice O, com $A \neq O$ e $B \neq O$. Seja C um ponto tal que $A - C - B$. Nosso intento é provar que C está no interior do ângulo. Confira a Figura 9.26. Sejam $\mathscr{R}$ o lado de $\overleftrightarrow{OA}$ em que se situa B e $\mathscr{S}$ o lado de $\overleftrightarrow{OB}$ em que se situa A. Usando o resultado do Problema 9.9.2 vemos que C está nesses semiplanos. Logo $C \in \mathscr{R} \cap \mathscr{S}$. Mas essa interseção é justamente o interior do ângulo. Segue que o interior de AB está contido no interior do ângulo.

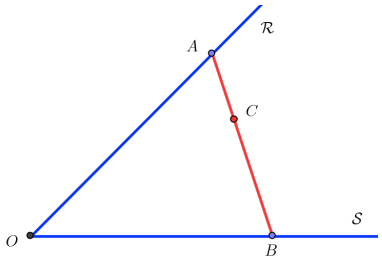


Figura 9.26. Ilustração do Problema 9.11.4.

Problema 9.11.5. Explique por que o interior de qualquer ângulo é não vazio e convexo.

Problema 9.11.6. Demonstre que o interior de qualquer triângulo é a interseção dos interiores de dois quaisquer de seus ângulos. Igualmente é a interseção dos interiores de seus três ângulos.

Problema 9.11.7. Explique por que, em um plano dado, todo segmento tem uma e uma única mediatriz.

Problema 9.11.8. Dada a soma das medidas de dois ângulos, existe um ângulo cuja medida é essa soma?

Problema 9.11.9. Um estudante, aficcionado do sistema de numeração decimal, pensou: "vou inventar outra geometria". Substituiu então o Axioma 11 pelo seguinte: *A todo ângulo corresponde um número real entre 0 e 200.* O que realmente muda?

Problema 9.11.10. Sejam $A-O-B$ em uma reta r, e C e D pontos em semiplanos opostos em relação a r tais que $m(\angle AOD) = m(\angle BOC)$. Prove que C, O e D são colineares. Portanto existem dois pares de ângulos opostos pelo vértice. Confira ilustração na Figura 9.27.

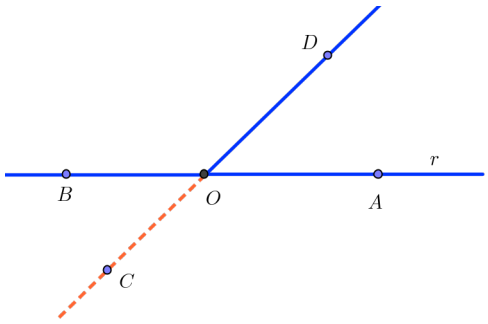


Figura 9.27. Ilustração do Problema 9.11.10.

Solução. Seja $x = m(\angle AOD)$. Seja $\mathscr{H}$ o semiplano de r que contém D. Portanto C está no semiplano oposto. Seja E um ponto tal que $C-O-E$. Como C e E estão em semiplanos opostos, então $E \in \mathscr{H}$. Temos $m(\angle AOE) = m(\angle BOC) = m(\angle AOD) = x$. Logo no semiplano $\mathscr{H}$ existem dois pontos E e D determinando ângulos $\angle AOE$ e $\angle AOD$ de mesma medida. Pelo Axioma 12 as semirretas $\overrightarrow{OD}$ e $\overrightarrow{OE}$ são as mesmas de modo que C, O e D são colineares.

Problema 9.11.11. Essa afirmação é conhecida como **Teorema crossbar**. Seja D um ponto do interior do ângulo $\angle BAC$. Mostre que a semirreta $\overrightarrow{AD}$ intersecta BC. Confira ilustração na Figura 9.28.

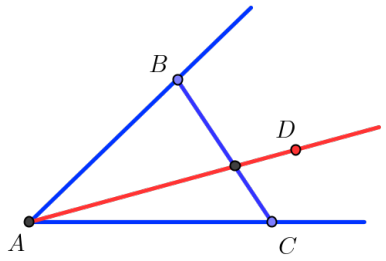


Figura 9.28. Figura referente ao Problema 9.11.11.

Problema 9.11.12. Demonstre que qualquer ângulo tem uma bissetriz. A unicidade poderá ser feita na próxima seção.

Problema 9.11.13. Mostre que, em um triângulo qualquer, as bissetrizes de dois ângulos quaisquer se intersectam em um ponto do interior do triângulo.

Problema 9.11.14. Prove que se dois ângulos formam um par linear, suas bissetrizes são perpendiculares.

9.12 Congruência de triângulos

A Geometria estuda as propriedades das figuras. Uma situação importante é a seguinte. Se temos informações sobre as propriedades de uma determinada figura, então essas mesmas informações são válidas para todas as figuras que, de certo modo, são cópias da primeira. Isso nos traz grande economia de esforço. Basta estudar uma figura de uma determinada classe e temos informações sobre todas as figuras dessa classe.

Mas como determinar quando duas figuras são da mesma classe? Geralmente usamos as medidas de alguns de seus elementos, justamente aquelas de que necessitamos para fazer cópias. Assim, para que duas figuras estejam na mesma classe, essas medidas devem coincidir.

Um caso bem simples é o da circunferência. Dada uma circunferência, para fazer uma cópia necessitamos apenas do seu raio. Na Figura 9.29 vemos duas circunferências de mesmo raio. Elas são diferentes, pois são conjuntos diferentes de pontos. Mas se tivermos uma propriedade da primeira circunferência que só depende do valor do raio (por exemplo, o valor de sua área), então essa propriedade também é válida para a segunda circunferência, e não é válida para uma terceira circunferência que tem raio diferente.

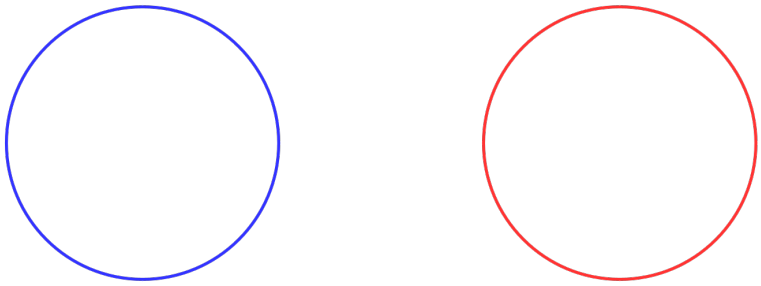


Figura 9.29. Circunferências congruentes.

Isso nos leva a considerar que duas circunferências de mesmo raio estão na mesma classe. Em Geometria temos um nome para expressar o fato de que duas figuras coincidem em um conjunto determinante de medidas: dizemos que são *congruentes*. Com isso estabelecemos que duas circunferências são congruentes quando têm raios de mesma medida.

Um caso importante certamente é o do triângulo. Essa figura é uma peça chave para o estudo das formas geométricas que são composições ou ajuntamentos de triângulos.

Todo triângulo tem seis medidas básicas: são as medidas de seus três lados e de seus três ângulos. Para que dois triângulos sejam considerados congruentes exigimos que essas seis medidas coincidam.

Definições 9.22. Dados os triângulos ABC e DEF, indicamos por $ABC \leftrightarrow DEF$ a seguinte correspondência entre os seus elementos:

$$\begin{array}{ll} AB \leftrightarrow DE, & \hat{A} \leftrightarrow \hat{D}, \\ AC \leftrightarrow DF, & \hat{B} \leftrightarrow \hat{E}, \\ BC \leftrightarrow EF, & \hat{C} \leftrightarrow \hat{F}. \end{array}$$

Observamos que na notação $ABC \leftrightarrow DEF$ a ordem dos pontos é importante, embora não seja única. Note que $ABC \leftrightarrow DEF$ é o mesmo que $BCA \leftrightarrow EFD$ e o mesmo que $CAB \leftrightarrow FDE$, mas diferente de $BAC \leftrightarrow DEF$, etc.

Dizemos que os triângulos ABC e DEF são *congruentes*, e escrevemos $ABC \cong DEF$, quando todos os pares de elementos determinados pela correspondência $ABC \leftrightarrow DEF$ têm a mesma medida (equivalentemente, são congruentes). Em outros termos,

$$\begin{aligned} AB \cong DE, \qquad & \hat{A} \cong \hat{D}, \\ AC \cong DF, \qquad & \hat{B} \cong \hat{E}, \\ BC \cong EF, \qquad & \hat{C} \cong \hat{F}. \end{aligned}$$

Vemos, na Figura 9.30, um exemplo de congruência $ABC \cong DEF$. Essa figura traz sugestões de marcações para identificar os elementos congruentes dos dois triângulos. Neste texto usamos essas marcações quando isso contribuir para maior clareza.

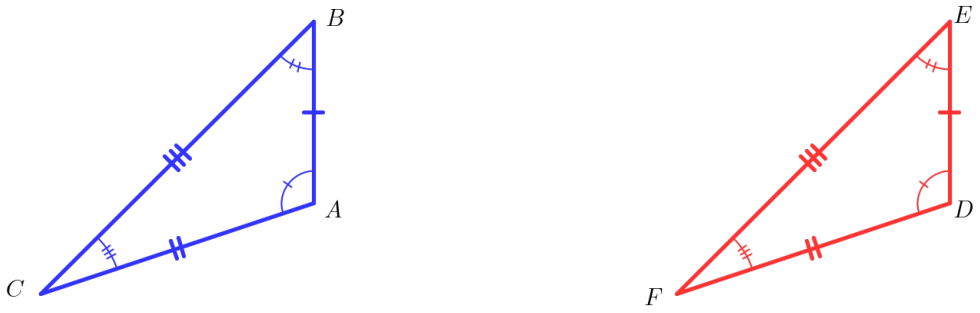


Figura 9.30. Triângulos congruentes com marcações.

Ao estudarmos congruência entre triângulos nos deparamos com o fato de que para fazermos uma cópia de um triângulo usando régua e compasso, por exemplo, não é necessário medir todos os seus elementos. Vemos, na Figura 9.31, que para copiar PQR podemos construir $XY \cong PQ$, $XZ \cong PR$ e $\angle YXZ \cong \angle QPR$. Depois disso desenhamos o lado YZ. Nosso conhecimento espontâneo nos diz que obtemos $PQR \cong XYZ$. Na Figura 9.31 o símbolo ! indica os elementos que resultam serem congruentes após a construção proposta.

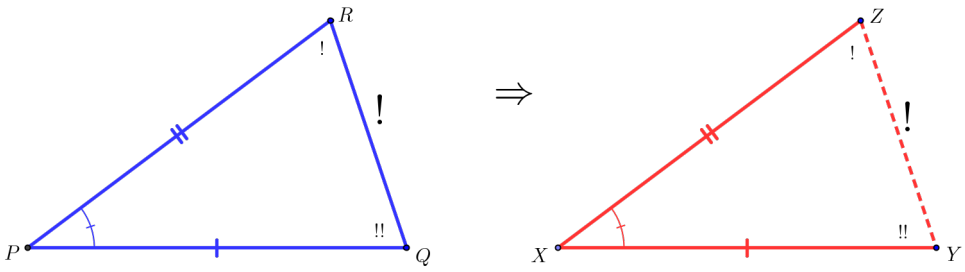


Figura 9.31. Reduzindo as exigências para congruência.

Portanto, para que dois triângulos sejam declarados congruentes, parece ser suficiente que saibamos que eles têm dois pares de lados congruentes e que também sejam congruentes os ângulos formados por esses lados. A percepção dessa propriedade pode ocorrer através de experimentos realizados com desenhos ou com a manufatura de figuras com canudos ou varetas. Para medir ângulos e distâncias podemos usar transferidor e régua. Aceitamos assim que para transferir um triângulo de um lugar para outro usando régua e compasso basta transferir o ângulo e as medidas dos lados adjacentes. Consideramos essa informação uma noção espontânea.

Outras combinações podem ser experimentadas. Por exemplo, se dois triângulos têm três pares de lados congruentes, não há como achar que não são congruentes. Outra situação similar é o caso em que dois pares de ângulos são congruentes, assim como o par de lados comuns desses ângulos.

Ao fazer desenhos fica evidente que certas reduções não resultam necessariamente em congruência. Na Figura 9.32 vemos dois triângulos claramente não congruentes, mas que têm dois pares de lados congruentes e um par de ângulos congruentes: $AC = DF$, $AB = DE$ e $\hat{B} \cong \hat{E}$. Observemos que o ângulo congruente não é o determinado pelos pares de lados congruentes.

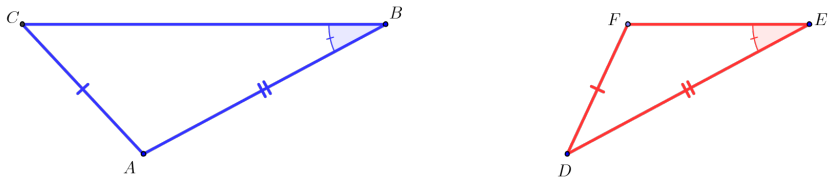


Figura 9.32. Correspondência que não resulta necessariamente em congruência.

Na Geometria utilizamos bastante o fato de que certas correspondências reduzidas resultam em congruência. Para examiná-las com mais facilidade precisamos sistematizar a notação.

Definições 9.23. Uma correspondência $ABC \leftrightarrow DEF$ entre os triângulos ABC e DEF é chamada *LAL* se estiverem satisfeitas as três condições seguintes:

$$AB \cong DE \qquad \text{e} \qquad \angle ABC \cong \angle DEF \qquad \text{e} \qquad BC \cong EF.$$

Isto é, os triângulos ABC e DEF têm uma correspondência *LAL* se tiverem dois pares de lados congruentes e se também forem congruentes os ângulos formados por esses lados. A sigla *LAL* significa: lado ângulo lado. Observamos que a ordem em que são colocadas as letras *L*, *A* e *L* é importante. Assim, em *LAL* a letra *A* está entre as letras *L*'s, indicando que o ângulo tomado é aquele que é formado pelos lados considerados.

De modo análogo definimos outras correspondências, como *LLL*, *ALA*, *LAA*, *LL*, etc.

Como exemplos, na Figura 9.31 temos uma correspondência *LAL* e na Figura 9.32 temos uma correspondência *LLA*.

No desenvolvimento axiomático da Geometria Euclidiana é costume, usado por muitos autores, admitir como noção espontânea que a correspondência *LAL* é uma congruência, colocando essa afirmação na forma de axioma. As outras correspondências reduzidas que são positivas para congruência são demonstradas na forma de teoremas. Neste texto adotamos esse método. Começamos com o

Axioma 15. *(da congruência LAL)*
Toda correspondência LAL é uma congruência.

Uma consequência imediata é o

Teorema 9.24. *Toda correspondência ALA é uma congruência.*

Demonstração. Precisamos imaginar um argumento que utilize o Axioma 15. Primeiro vamos estabelecer a notação. Sejam ABC e DEF com uma correspondência *ALA* tal que $\hat{A} \cong \hat{D}$, $AB = DE$ e $\hat{B} \cong \hat{E}$. A Figura 9.33 ilustra essas condições.

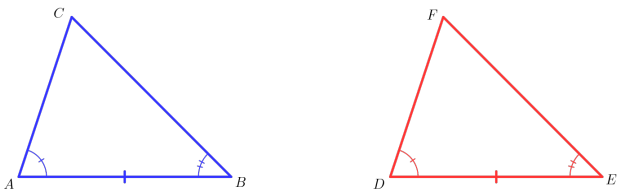


Figura 9.33. Estudo da correspondência *ALA*.

Para mostrar que existe uma correspondência LAL entre os triângulos ABC e DEF, precisamos concluir que $AC = DF$ ou então que $BC = EF$. Escolhemos mostrar que $BC = EF$. Consideremos na semirreta $\overrightarrow{BC}$ um ponto G tal que $BG = EF$. Então ABG e DEF obedecem a uma correspondência tipo LAL, com $AB = DE$, $m(\angle ABG) = m(\angle DEF)$ e $BG = EF$. Em virtude do Axioma 15 temos $ABG \cong DEF$. Portanto os seis elementos correspondentes desses triângulos são congruentes. Em particular, $m(\angle BAG) = m(\angle EDF)$. Como já tínhamos inicialmente $m(\angle BAC) = m(\angle EDF)$, segue que $m(\angle BAC) = m(\angle BAG)$. Portanto, devido ao Axioma 12, as semirretas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{AG}$ coincidem. Isso implica $C = G$. De $ABG \cong DEF$ temos agora $ABC \cong DEF$, e terminamos a demonstração. O argumento está ilustrado na Figura 9.34. □

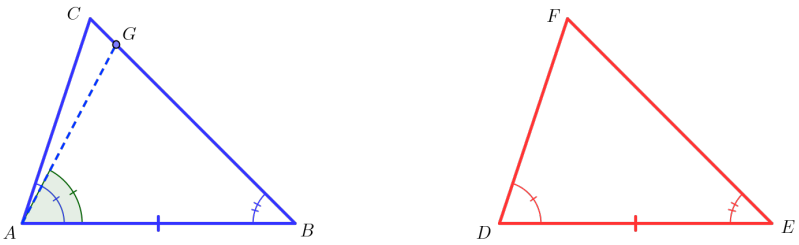


Figura 9.34. Ilustração do argumento da demonstração do Teorema 9.24.

A demonstração do Teorema 9.24 expõe a principal estratégia desta Seção. Para concluir que $ABG \cong DEF$ usamos três informações sobre seus elementos correspondentes, que possibilitaram aplicar a correspondência LAL. Disso resulta outras três correspondências congruentes, que podem ser usadas em seguida. Tomamos uma delas, a saber, $\angle BAG \cong \angle EDF$, e a aplicamos para obter o resultado desejado.

Nosso objetivo seguinte é provar que toda correspondência LLL é uma congruência. Para isso necessitamos de alguns resultados preliminares, que têm seu próprio valor.

Lembremo-nos de que um triângulo é denominado *isósceles* quando tem dois lados congruentes.

Definições 9.25. Os dois lados congruentes de um triângulo isósceles chamam-se *lados laterais* do triângulo, e o terceiro lado chama-se *base*. Os ângulos formados por um lado lateral e a base chamam-se *ângulos da base*.

Seja ABC um triângulo, e seja D um ponto da reta $\overleftrightarrow{BC}$. Se D pertence ao interior de BC o segmento AD chama-se *ceviana* relativa a A. O segmento AD chama-se *mediana* relativa ao lado BC quando D for o ponto médio de BC. O segmento AD chama-se *bissetriz* interna relativa ao ângulo $\hat{A}$ se a semirreta $\overrightarrow{AD}$ for a bissetriz desse ângulo. O segmento AD chama-se *altura* relativa ao lado BC, ou *altura relativa* ao vértice A, se AD for perpendicular a $\overleftrightarrow{BC}$. Nesse caso o comprimento AD também é chamado de altura.

Proposição 9.26. *Os ângulos da base de qualquer triângulo isósceles são congruentes.*

Demonstração. Seja ABC um triângulo isósceles, sendo BC a base. Comparamos esse triângulo com ele mesmo, mas com os lados laterais trocados. A Figura 9.35 pode ilustrar essa ideia. Consideramos assim a correspondência $BAC \leftrightarrow CAB$, que é uma correspondência LAL, pois $BA = CA$, $\hat{A} = \hat{A}$ e $AC = AB$. Do Axioma 15 sabemos que essa correspondência é uma congruência, e dela resulta $\hat{B} = \hat{C}$. □

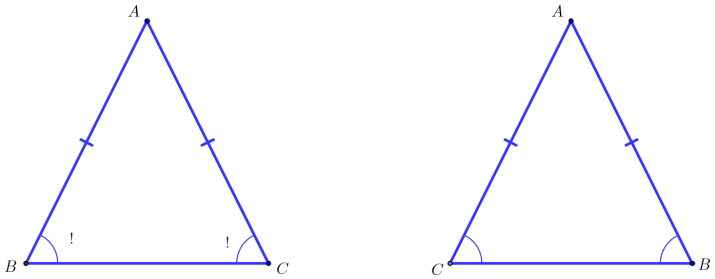


Figura 9.35. Ilustração do argumento da demonstração da Proposição 9.26.

Proposição 9.27. *Se um triângulo tem dois ângulos congruentes então ele é isósceles, e o lado comum a eles é a sua base.*

Demonstração. Seja ABC um triângulo tal que $\hat{B} = \hat{C}$. Vamos provar que $AB = AC$. Assim como na Proposição 9.26 acima, comparamos esse triângulo com ele mesmo, mas com os lados AB e AC trocados. Consideramos assim a correspondência $BAC \leftrightarrow CAB$, que agora é uma correspondência ALA, pois $\hat{B} = \hat{C}$ (dado), $BC = CB$ (lado comum) e novamente $\hat{C} = \hat{B}$. Em virtude do Teorema 9.24 essa correspondência é uma congruência, e dela resulta que $AB = AC$. Logo ABC é isósceles com base BC. □

Proposição 9.28. *Em todo triângulo isósceles a mediana relativa à base é também bissetriz e altura.*

Demonstração. Seja ABC um triângulo isósceles com base BC. Sejam M o ponto médio da base e AM a mediana relativa à base. Confira a Figura 9.36.

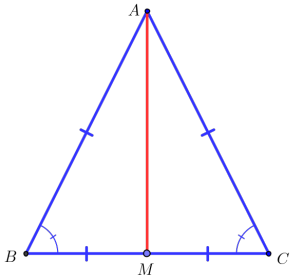


Figura 9.36. Ilustração do argumento da demonstração da Proposição 9.28.

Notemos que $ABM \cong ACM$ pelo Axioma 15, pois essa é uma correspondência LAL ($AB = AC$ por hipótese, $\hat{B} \cong \hat{C}$ pela Proposição 9.26 e $BM = CM$ pois M é ponto médio). Dessa congruência segue que $\angle BAM \cong \angle CAM$ (logo AM é bissetriz) e $\angle BMA \cong \angle CMA$ (logo AM é altura). □

Estamos agora preparados para examinar a correspondência LLL entre triângulos.

Teorema 9.29. *Toda correspondência LLL é uma congruência.*

Demonstração. Vamos primeiro estabelecer a notação. Sejam ABC e DEF com uma correspondência LLL tal que $AB = DE$, $AC = DF$ e $BC = EF$. Confira a Figura 9.37.

Seja $\mathscr{H}$ o semiplano determinado pela reta $\overleftrightarrow{AB}$ e oposto ao semiplano em que está C. Em virtude do Axioma 12 existe nele uma semirreta $\overrightarrow{AG}$ tal que $m(\angle BAG) = m(\angle EDF)$, e o ponto G pode ser escolhido de forma que $AG = DF$. Então $ABG \cong DEF$ por LAL. Disso segue $BG = EF$, e, como já temos $EF = BC$, vem $BG = BC$. Notemos também que, por construção, $AG = DF$, e como já temos $AC = DF$, vem $AC = AG$.

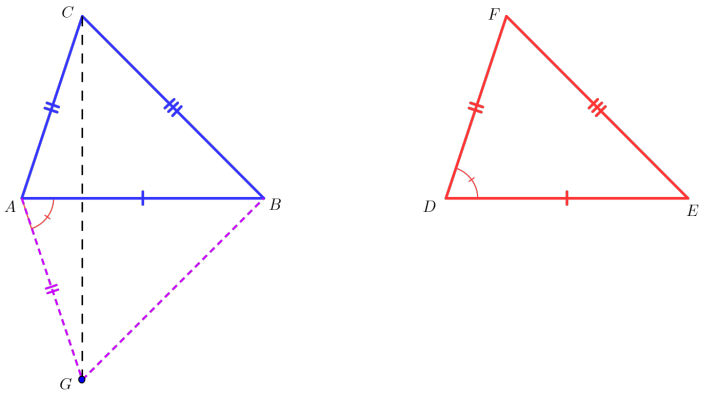


Figura 9.37. Ilustração do argumento da demonstração do Teorema 9.29.

De $AC = AG$ e de $BG = BC$ vem que ACG e BCG são triângulos isósceles de base comum CG. Portanto os ângulos da base desses triângulos são congruentes, isto é, $m(\angle ACG) = m(\angle AGC)$ e $m(\angle BCG) = m(\angle BGC)$. Somando membro a membro essas identidades e usando o Axioma 13 obtemos $m(\angle ACB) = m(\angle AGB)$. Segue que os triângulos ABC e ABG têm uma correspondência LAL. Em virtude do Axioma 15, temos $ABC \cong ABG$. Como já verificamos que $ABG \cong DEF$ segue $ABC \cong DEF$. Isso termina a demonstração. □

As correspondências LAL, ALA e LLL são frequentemente denominadas "casos de congruência". Entretanto existem também o caso LAA, válido para quaisquer triângulos, e o caso LLA válido para triângulos retângulos, esse último também denominado caso hipotenusa-cateto. A correspondência LLA nem sempre leva à congruência, conforme exemplo apresentado na Figura 9.32. Completamos esse estudo mais adiante.

As congruências entre triângulos têm inúmeras aplicações. Uma das mais importantes está enunciada e demonstrada a seguir.

Teorema 9.30. *Em um plano, dados uma reta e um ponto fora dela, existe uma e uma única reta perpendicular à reta dada.*

Demonstração. Começamos demonstrando a existência da reta perpendicular. Sejam r uma reta e P um ponto fora dela. Sejam $B - A - C$ pontos de r. Se $m(\angle BAP) = 90°$, já temos a perpendicular. Suponhamos que isso não ocorra. Seja $\mathscr{H}$ o semiplano determinado pela reta r e oposto ao semiplano em que está P. Em virtude do Axioma 12 existe uma semirreta $\overrightarrow{AQ}$ em $\mathscr{H}$ tal que $m(\angle BAQ) = m(\angle BAP)$, e o ponto Q pode ser escolhido de forma que $AQ = AP$. Na Figura 9.38, à esquerda, está ilustrada uma situação possível, e o estudante pode desenhar outros casos.

Notemos primeiro que P, A e Q não são colineares. Se o fossem, teríamos $\angle BAP \cong \angle CAQ$, pois esses ângulos seriam opostos pelo vértice. Como já temos $\angle BAQ \cong \angle BAP$, teríamos $\angle BAQ \cong \angle CAQ$, e PQ seria perpendicular a r, o que não é o caso.

Portanto PAQ é um triângulo e é isósceles. Seja R a interseção de PQ com r (R existe pois P e Q estão em lados opostos em relação a r). Então AR é bissetriz de $\hat{A}$ e, em virtude da Proposição 9.28, é também sua altura. Logo PQ é perpendicular a r. Portanto existe uma perpendicular a r por P.

Vamos provar agora que a perpendicular é única. Suponhamos que existam duas perpendiculares por P, digamos PA e PB, com A e B em r. Confira ilustração na Figura 9.38, à direita. Seja Q o ponto da semirreta oposta a $\overrightarrow{AP}$ tal que $AQ = AP$. Temos $PAB \cong QAB$ pelo caso LAL. Logo $\angle QBA \cong \angle PBA$. Como $\angle PBA$ é reto, segue que $\angle QBA$ também é reto. Notemos que P, B e Q

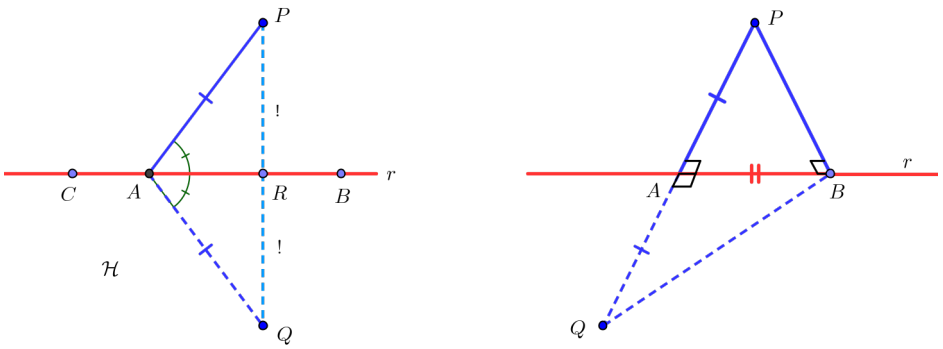


Figura 9.38. Existência e unicidade da perpendicular: Teorema 9.30.

não são colineares, pois $A \neq B$. Mas então existem duas retas perpendiculares a r por B, o que contraria o Teorema 9.20, da página 36. □

Uma consequência do Teorema 9.30 é que, em todo triângulo, qualquer vértice tem uma e uma única altura a ele correspondente.

A seguinte definição é bastante útil:

Definição 9.31. Dada uma reta e um ponto A fora dela, dizemos que o segmento AB *liga* o ponto à reta se B está na reta. Se o segmento AB é perpendicular à reta, dizemos que ele é o *segmento perpendicular que liga* o ponto à reta. Nesse caso o ponto B chama-se *pé* da perpendicular do ponto à reta.

Definimos agora a projeção de um ponto e de um conjunto sobre uma reta em um plano dado.

Definição 9.32. Dada uma reta r e um ponto P fora dela, a *projeção* de P sobre r é o pé da perpendicular do ponto à reta. Se o ponto P está na reta, ele mesmo é a sua projeção sobre a reta. Dados uma reta r e um conjunto $\mathscr{F}$ em um plano, a *projeção* de $\mathscr{F}$ sobre r é o conjunto das projeções de seus pontos sobre r.

A Figura 9.39 ilustra essa definição, e o Problema 9.16.9 a complementa.

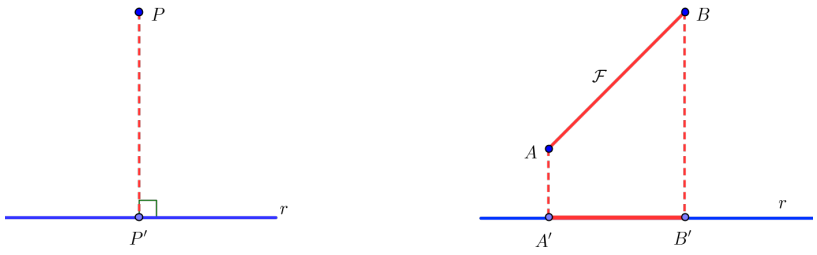


Figura 9.39. Ilustração da definição 9.32, em que o conjunto $\mathscr{F}$ é um segmento.

Vejamos agora o que é o simétrico de um ponto em relação a uma reta.

Definições 9.33. Seja A um ponto e r uma reta que não o contém. O *simétrico de A em relação a r* é o ponto A' tal que: (i) A' está na perpendicular a r por A e no semiplano oposto a A em relação à reta; (ii) a distância de A' a r é igual à distância de A a r.

Se o ponto A está na reta r, dizemos que ele mesmo é seu simétrico em relação à reta r.

Dados uma reta r e um conjunto $\mathscr{F}$ em um plano, o simétrico de $\mathscr{F}$ em relação a r é o conjunto dos simétricos dos seus pontos em relação à reta.

Confira ilustração na Figura 9.40 em que A' é o simétrico de A em relação à reta r e P é o pé da perpendicular de A a r. Usando o Teorema 9.30 se vê que, dado um ponto A e uma reta r, existe e é único o simétrico de A em relação a r.

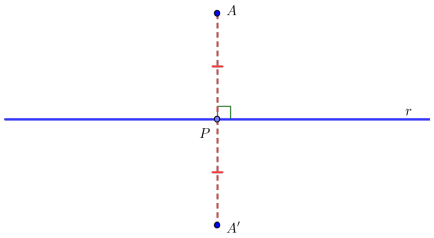


Figura 9.40. Ilustração da definição 9.33 de ponto simétrico.

Estivemos estudando o triângulo, que é a figura geométrica mais importante do plano. Está na hora de iniciar o estudo de outra figura também importante, o quadrilátero.

Definições 9.34. Sejam A, B, C e D quatro pontos coplanares tais que três quaisquer desses pontos não são colineares e tais que os segmentos AB, BC, CD e DA se intersectam apenas em suas extremidades. A reunião desses quatro segmentos chama-se *quadrilátero plano*, ou simplesmente *quadrilátero*. Os quatro segmentos são chamados *lados* do quadrilátero, e os pontos A, B, C e D, *vértices*. Os ângulos $\angle BAD$, $\angle ABC$, $\angle BCD$ e $\angle CDA$ são chamados *ângulos do quadrilátero*, e podem ser anotados por $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ e $\hat{D}$, respectivamente, quando estiver claro de qual ângulo se trata. Dois vértices se dizem consecutivos quando são extremos de um mesmo lado. Dois lados se dizem consecutivos quando têm um vértice em comum, e dois ângulos se dizem consecutivos quando têm lados que se intersectam em um mesmo lado. Dois vértices ou dois lados ou dois ângulos não consecutivos de um quadrilátero se dizem *opostos*. Os segmentos que ligam vértices não consecutivos do quadrilátero chamam-se *diagonais*. Uma reta que contém um lado do quadrilátero se diz ser uma *reta suporte*. Um quadrilátero se diz *convexo* quando, para cada um de seus lados, o restante dele está contido em um semiplano determinado pela reta suporte daquele lado. Caso contrário, o quadrilátero se diz *não convexo* ou *côncavo*.

O quadrilátero $AB \cup BC \cup CD \cup DA$ é indicado por $ABCD$.

Na Figura 9.41 vemos: (a) um quadrilátero convexo; (b) um quadrilátero não convexo.

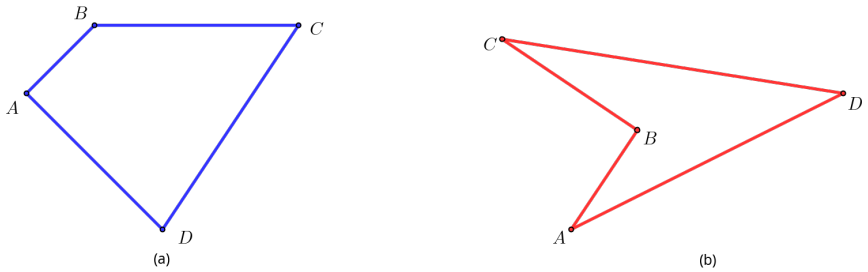


Figura 9.41. Ilustração com dois tipos de quadriláteros.

Observamos que se indicamos um quadrilátero por $ABCD$, a ordem dos pontos nessa notação é importante. Se mudamos a ordem cíclica, invertendo algumas letras, por exemplo $BACD$, podemos ter outro quadrilátero, ou pode ocorrer que $BACD$ não seja quadrilátero. O estudante é convidado a refletir sobre essas ideias no Problema 9.13.19.

Ao chamar de convexo algum quadrilátero, cometemos um abuso de linguagem. O fato de um quadrilátero ser convexo não é o mesmo que ser convexo como conjunto de pontos no sentido da Definição 9.11. Seguimos a tradição, e esperamos que o contexto deixe claro de que definição se trata.

Nesta seção definimos quadrilátero plano, mas existem também quadriláteros não contidos em um plano. Confira o Problema 9.13.20.

Em geral, quando lidamos com quadriláteros na Geometria Euclidiana, usamos muito suas propriedades conforme as percebemos através de desenhos. Por exemplo, fazendo várias tentativas em desenhar quadriláteros, percebemos que essencialmente só existem os dois tipos da Figura 9.41. Vemos que no quadrilátero convexo cada vértice está no interior do ângulo do quadrilátero formado pelos outros três vértices. Vemos que no quadrilátero não convexo exatamente um vértice está no interior do ângulo formado pelos outros três vértices. Outra propriedade muito usada, geralmente sem demonstração, é que, num quadrilátero convexo, as diagonais se intersectam, e, em um quadrilátero não convexo, ocorre o contrário. Penso que o uso dessas propriedades, obtidas por desenhos, é válido num contexto de ensino sem muita "burocracia". Mas, para quem quiser ser exato em suas conclusões, essas propriedades podem ser formalizadas no sistema axiomático que adotamos. Os Problemas 9.13.18 a 9.13.27 propõem ao estudante os detalhes.

Os últimos problemas da lista apresentada a seguir consistem de um breve estudo do denominado *quadrilátero de Saccheri*. Vejamos agora sua definição.

Definição 9.35. O quadrilátero $ABCD$, ilustrado na Figura 9.42, chama-se *quadrilátero de Saccheri* se $AD = BC$ e se $\hat{A} = \hat{B} = 90°$. A medida de AD chama-se *lado lateral*, AB chama-se *base*, CD chama-se *cume*, $\hat{A}$ e $\hat{B}$ chamam-se *ângulos da base*, e $\hat{C}$ e $\hat{D}$ chamam-se *ângulos do cume*.

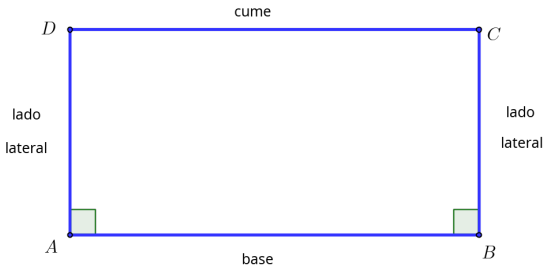


Figura 9.42. O quadrilátero de Saccheri.

Um desenho do quadrilátero de Sacheri está na capa desse Tomo II de nosso texto de Geometria. O desafio posto por ele é demonstrar que é um retângulo. Isso é possível com os axiomas e resultados obtidos até esse ponto do nosso desenvolvimento axiomático? Esse problema tem grande importância na história do desenvolvimento da Geometria Euclidiana axiomática.

9.13 Problemas

Ao resolver os problemas desta lista, todas as justificativas devem ter como base os axiomas de 1 a 15 e as definições e resultados obtidos até agora.

Problema 9.13.1. Sabe-se, na Figura 9.49, que RST é isósceles de base ST e $QS = PT$. Demonstre que RQP é isósceles de base QP.

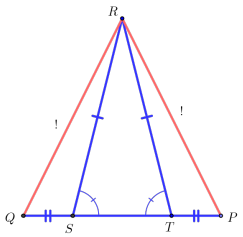


Figura 9.43. Dois triângulos isósceles.

Problema 9.13.2. **a)** Escreva uma correspondência entre os vértices das figuras de 9.44 que seja uma possível congruência. Escreva as dez condições que definem essa possível congruência. **b)** Mostre que se essa correspondência for do tipo *LALLLAL* essa condição é suficiente para afiançar a congruência entre as figuras.

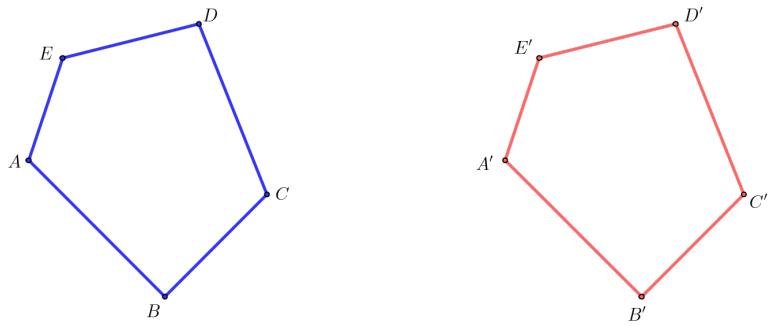


Figura 9.44. Duas figuras congruentes.

Problema 9.13.3. **a)** Imagine uma maneira de provar que qualquer ângulo tem bissetriz usando congruências. **b)** Com a mesma ideia mostre que a bissetriz de qualquer ângulo é única.

Problema 9.13.4. Mostre que a correspondência *LL* entre triângulos não implica necessariamente na congruência entre eles. Em uma situação de dedução informal, isso pode ser visto com desenhos ou com modelos feitos com varetas. Faça também uma dedução formal. Isto é, usando os Axiomas e suas consequências, construa dois triângulos não congruentes mas que têm uma correspondência *LL*.

Solução. Tomando duas varetas de mesmo comprimento, as unimos em um vértice, de forma que possamos movimentá-las como uma dobradiça. Na Figura 9.45 essas varetas estão representadas pelos segmentos AB e AC, e vemos duas posições com ângulos de medidas diferentes: ABC e $A'B'C'$. Os dois triângulos ABC e $A'B'C'$ têm uma correspondência *LL*, pois $AB = A'B'$ e $AC = A'C'$. Em um contexto de dedução informal vemos que esses triângulos não são congruentes pois, levando um sobre o outro em todas as posições possíveis, constatamos que não podemos corresponder seus lados de modo que sejam congruentes aos pares.

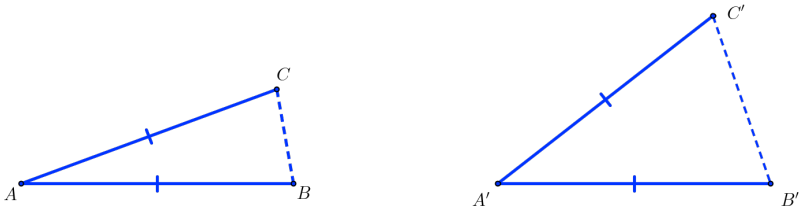


Figura 9.45. Estudo 1 sobre a correspondência *LL*.

Num contexto de dedução formal esses triângulos precisam ser construídos através dos instrumentos fornecidos pela teoria. Começamos com um triângulo isósceles ABC com base BC (triângulos isósceles foram construídos no Problema 9.7.16). Logo $AB = AC$. Na semirreta $\overrightarrow{BC}$ tomamos o ponto D tal que $B - C - D$ (confira ilustração na Figura 9.46). Os triângulos ABD e ACD têm uma correspondência *LL*, pois $AB = AC$ e $AD = AD$ (lado comum). Mas esses triângulos não

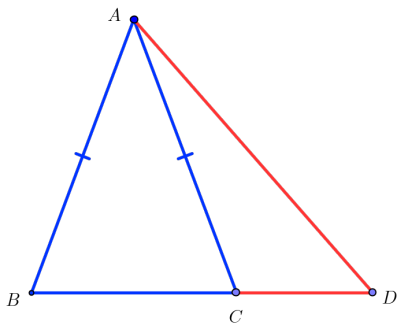


Figura 9.46. Estudo 2 sobre a correspondência *LL*.

são congruentes, pois, conforme está verificado abaixo, todas as seis possíveis correspondências não conduzem a congruência alguma.

Correspondência 1: $ABD \leftrightarrow ACD$ se fosse congruência implicaria $BD = CD$, mas $BD > CD$.

Correspondência 2: $ABD \leftrightarrow ADC$ se fosse congruência implicaria $BD = CD$, mas $BD > CD$.

Correspondência 3: $ABD \leftrightarrow CAD$ se fosse congruência implicaria $BD = AD$ e $AD = CD$, logo $BD = CD$, mas $BD > CD$.

Correspondência 4: $ABD \leftrightarrow CDA$ se fosse congruência implicaria $AB = CD$ e $BD = AD$ e $AD = AC$. Usando que $AB = AC$ isso implicaria $BD = CD$, mas $BD > CD$.

Correspondência 5: $ABD \leftrightarrow DAC$ se fosse congruência implicaria $AB = AD$ e $BD = AC$ e $AD = CD$. Usando que $AB = AC$ isso implicaria $BD = CD$, mas $BD > CD$.

Correspondência 6: $ABD \leftrightarrow DCA$ se fosse congruência implicaria $AB = CD$ e $BD = AC$ e $AD = AD$. Usando que $AB = AC$ isso implicaria $BD = CD$, mas $BD > CD$.

Portanto ABD e ACD não são congruentes.

Problema 9.13.5. Na Figura 9.32 vimos desenhos de dois triângulos que têm uma correspondência *LLA* mas que não são congruentes. Como foram construídos aqueles triângulos?

Problema 9.13.6. Dois triângulos obedecem a uma correspondência *LLAL*. Eles são congruentes? Justifique.

Problema 9.13.7. Dois triângulos obedecem a uma correspondência *AAAL*. Eles são congruentes? Justifique.

Problema 9.13.8. Usando desenhos ou construções com varetas ou canudos, estude a correspondência *LAA* entre triângulos.

Problema 9.13.9. Prove que, em um plano dado, a mediatriz de um segmento é o conjunto dos pontos desse plano que são equidistantes dos extremos do segmento.

Solução. Em um plano α, sejam PQ um segmento e r sua mediatriz. Seja $\mathscr{C}$ o conjunto dos pontos de α que equidistam de P e Q. Queremos provar que $r = \mathscr{C}$. Anotamos por M o ponto médio de PQ. Sabemos que r é perpendicular a PQ por M.

Provamos primeiro que $r \subset \mathscr{C}$. Seja $X \in r$. Se $X = M$ então $X \in \mathscr{C}$, pois M equidista de P e Q. Suponhamos $X \neq M$. Temos $PMX \cong QMX$ por correspondência *LAL* ($PM = QM$ pois M é ponto médio, $\angle PMX \cong \angle QMX$ pois são retos e MX é comum). Logo $PX = QX$ do que segue $X \in \mathscr{C}$. Provamos que $r \subset \mathscr{C}$. Confira ilustração na Figura 9.47.

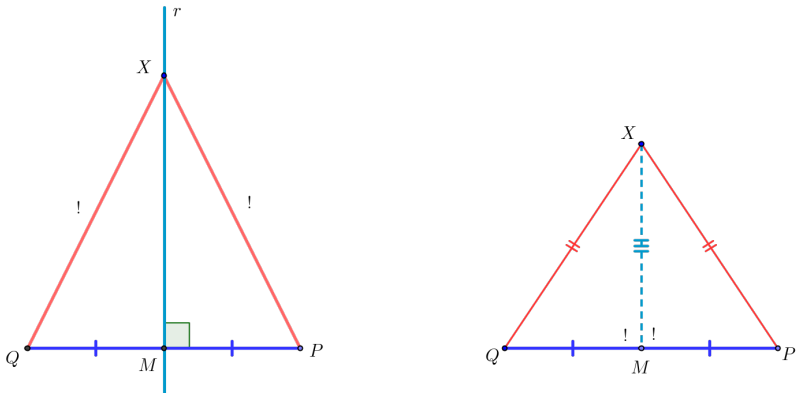


Figura 9.47. Caracterização da mediatriz de um segmento.

Mostremos agora que $\mathscr{C} \subset r$. Seja $X \in \mathscr{C}$. Se $X = M$ então $X \in r$. Suponhamos $X \neq M$. Novamente temos $PMX \cong QMX$ mas agora por correspondência LLL ($PM = QM$ pois M é ponto médio, MX é comum e $PX = QX$ por definição de $\mathscr{C}$). Isso implica $\angle PMX \cong \angle QMX$ e esses ângulos são retos. Segue que MX está na mediatriz de PQ, isto é, $X \in r$. Provamos que $\mathscr{C} \subset r$, o que termina a demonstração de que $r = \mathscr{C}$.

Problema 9.13.10. Demonstre que, dados um segmento e uma reta em um plano, se essa reta tem dois pontos equidistantes dos extremos do segmento, então a reta é a mediatriz do segmento.

Problema 9.13.11. É dada uma circunferência e uma corda que não é um diâmetro. Prove que se um raio intersecta a corda, então a interseção é o ponto médio da corda se e somente se o raio é perpendicular a ela.

Problema 9.13.12. Explique por que nenhum triângulo tem dois ângulos retos.

Problema 9.13.13. Prove que os pontos médios dos lados de um triângulo isósceles formam outro triângulo isósceles com vértice na base do primeiro.

Problema 9.13.14. Verifique que as medianas relativas aos lados congruentes de um triângulo isósceles são congruentes.

Problema 9.13.15. Demonstre que se a mediana relativa a um lado de um triângulo é também altura, então esse triângulo é isósceles e aquele lado é a base.

Problema 9.13.16. Demonstre que se uma mediana de um triângulo não é perpendicular ao lado correspondente, então os outros dois lados são diferentes.

Problema 9.13.17. Seja ABC um triângulo isósceles tal que $AC = BC$. **a)** Explique por que as bissetrizes dos ângulos da base se encontram em um ponto D contido no interior do triângulo. **b)** Demonstre que $\overleftrightarrow{CD}$ é perpendicular a AB.

Solução de a). Confira ilustração na Figura 9.48. Seja ABC um triângulo isósceles de base AB, e sejam AE e BF as bissetrizes relativas as A e B, respectivamente, com $E \in BC$ e $F \in AC$ (esses pontos existem pelo Teorema Crossbar, Problema 9.11.11). Vejamos por que existe a interseção D de AE e BF e D está no interior do triângulo. De fato, todos os pontos de $\overrightarrow{AB} - \{A\}$ estão em um semiplano oposto àquele dos pontos de $\overrightarrow{AC} - \{A\}$ em relação à reta $\overleftrightarrow{AE}$, logo B e F estão em semiplanos opostos em relação à reta $\overleftrightarrow{AE}$. Portanto existe $D \in BF \cap \overleftrightarrow{AE}$. Do mesmo modo se vê

que existe $D' \in AE \cap \overleftrightarrow{BF}$. Mas existe no máximo um ponto de interseção entre duas retas, e temos $D = D'$. Assim $D \in AE \cap BF$ e, pelo Problema 9.11.4, D está no interior do triângulo.

Solução de b). Pelo Teorema Crossbar, já usado acima, temos que $\overrightarrow{CD}$ intersecta AB em um ponto M interior a AB. Vamos provar que CM é altura.

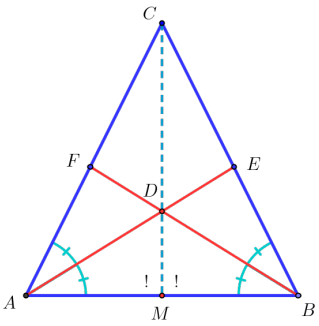


Figura 9.48. Uma propriedade do triângulo isósceles.

Começamos observando que $ACE \cong BCF$ pois esses triângulos guardam uma correspondência *ALA*. De fato, como ACB é isósceles de base AB, os âgulos da base $\angle BAC$ e $\angle ABC$ são congruentes, logo suas "metades" $\angle CAE$ e $\angle CBF$ são congruentes. Ainda $AC = BC$ (lados laterais de triâgulo isósceles) e $\angle ACE \cong \angle BCF$ por ser o mesmo ângulo. Assim vale $ACE \cong BCF$.

Da congruência $ACE \cong BCF$ tiramos que $AE = BF$, $CE = CF$ o que implica $AF = BE$, e $\angle AEC \cong \angle BFC$, o que implica $\angle AFD \cong \angle BED$, por serem suplementares.

Observamos agora que $AFD \cong BED$ pois esses triângulos guardam uma correspondência *ALA*. De fato $\angle FAD \cong \angle EBD$ como já foi observado, $AF = BE$, já obtido acima, e $\angle AFD \cong \angle BED$, também já obtido acima. Assim vale que $AFD \cong BED$.

Da congruência $AFD \cong BED$ tiramos que $AD = BD$ e $FD = ED$.

Do que foi obtido acima vemos que $FCD \cong ECD$ por *LLL*. Segue que $\angle FDC \cong \angle EDC$, o que implica $\angle ADM \cong \angle BDM$, por serem opostos pelo vértice.

Temos agora que $ADM \cong BDM$ por *LAL*. Disso segue que $\angle AMD \cong \angle BMD$, e, como são suplementares, são retos. Portanto CM é altura, e terminamos.

Segue uma lista de problemas sobre quadriláteros. Se o estudante quiser postergar as demonstrações formais, pode fixar os resultados mediante o estudo de desenhos.

Problema 9.13.18. Explique por que existem quadriláteros convexos e não convexos na Geometria Euclidiana. Isto é, usando apenas os Axiomas e resultados vistos até esse ponto de nosso sistema dedutivo, construa quadriláteros convexos e não convexos.

Problema 9.13.19. **a)** Se $ABCD$ é um quadrilátero plano, então $ACBD$ pode ser um quadrilátero ou não. Desenhe os dois casos. **b)** Dado um quadrilátero $ABCD$, é $BCDA$ um quadrilátero? **c)** Seja $ABCD$ um quadrilátero. Estabeleça uma regra geral que permita garantir que um anagrama de $ABCD$ seja o mesmo quadrilátero.

Problema 9.13.20. Conforme já observamos, nesta seção definimos quadrilátero plano, mas podemos ter também quadriláteros não contidos em um plano. Construa alguns desses quadriláteros com varetas ou canudos, e os desenhe. Explique por que quaisquer quatro pontos não coplanares geram, em qualquer ordem, um quadrilátero.

Problema 9.13.21. Prove que, dado um quadrilátero qualquer, pelo menos um de seus vértices está no interior do ângulo formado pelos outros três vértices.

Problema 9.13.22. Prove que, em um quadrilátero convexo, qualquer vértice está no interior do ângulo do quadrilátero formado pelos outros três vértices.

Problema 9.13.23. Seja $ABCD$ um quadrilátero e suponhamos que C está no interior do ângulo $\angle BAD$. Então o quadrilátero é convexo se, e somente se, A e C estão em semiplanos opostos em relação a $\overleftrightarrow{BD}$.

Problema 9.13.24. Demonstre que um quadrilátero é não convexo se, e somente se, apenas um de seus vértices está no interior de algum ângulo do quadrilátero. Esse vértice é denominado *reentrante*, e os outros, *salientes*.

Problema 9.13.25. Um quadrilátero é convexo se, e somente se, para cada par de vértices opostos eles estão em semiplanos opostos em relação à reta suporte da diagonal determinada pelo outro par de vértices opostos.

Problema 9.13.26. Um quadrilátero é convexo se, e somente se, suas diagonais se intersectam.

Problema 9.13.27. Se a reta que contém uma diagonal de um quadrilátero é bissetriz dos ângulos determinados pelos seus extremos, então essa reta divide ao meio a outra diagonal.

9.14 Desigualdades geométricas

Prosseguimos nossas investigações sobre as propriedades dos triângulos. Na seção anterior vimos como usar identidades ou congruências para obter resultados. Dessa vez vamos usar desigualdades. A comparação entre ângulos através de suas medidas, e também de lados, pode ser muito proveitosa. Iniciamos definindo o que são os ângulos externos de um triângulo.

Definições 9.36. Dado o triângulo ABC, se D é um ponto tal que C está entre A e D, então o ângulo $\angle BCD$ chama-se *ângulo externo* do triângulo. O ângulo $\angle BCA$ chama-se *ângulo adjacente* a $\angle BCD$, e os outros dois ângulos do triângulo chamam-se *ângulos não adjacentes*. Notemos que todo triângulo tem seis ângulos externos, constituídos por três pares de ângulos opostos pelo vértice.

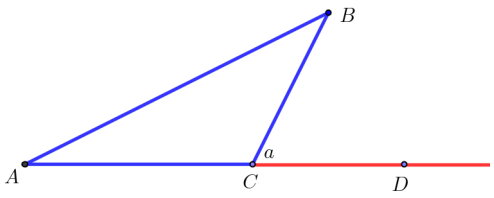


Figura 9.49. $\hat{a}$ é um ângulo externo.

Dados os segmentos AB e CD, escrevemos $AB < CD$ quando a medida de AB for menor do que a de CD. Dados os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$, escrevemos $\hat{A} < \hat{B}$ quando $m(\hat{A}) < m(\hat{B})$, e dizemos que $\hat{A}$ é menor do que $\hat{B}$. Os símbolos $>$ e $\leq$ e $\geq$ também podem ser usados com os significados costumeiros.

Examinando desenhos de triângulos podemos perceber a seguinte propriedade:

Teorema 9.37. *[do Ângulo Externo] Qualquer ângulo externo de um triângulo é maior do que qualquer um de seus ângulos internos não adjacentes.*

Demonstração. O único jeito que temos no momento de provar que um ângulo $\hat{x}$ de medida x é maior do que um ângulo $\hat{y}$ de medida y é arrumar um ângulo $\hat{z}$ de medida z de modo que $x = y+z$.

Vejamos o caso ilustrado na Figura 9.50, provando que $\angle BCD > \angle ABC$. Primeiro desenhamos o segmento AF que intersecta BC no seu ponto médio E, de modo que E seja também o ponto médio de AF. Pelo caso de congruência LAL temos $ABE \cong FCE$ o que implica $\angle ABE \cong \angle FCE$,

ou $\angle ABC \cong \angle BCF$. Por outro lado, em virtude do Problema 9.16.7, F é um ponto do interior de $\angle BCD$, de modo que, pelo Axioma 13, temos $m(\angle BCD) = m(\angle BCF) + m(\angle FCD)$. Juntando as informações obtidas até agora vem $m(\angle BCD) = m(\angle ABC) + m(\angle FCD)$. Segue que $\angle BCD > \angle ABC$.

De modo análogo se prova que $\angle BCD > \angle BAC$. □

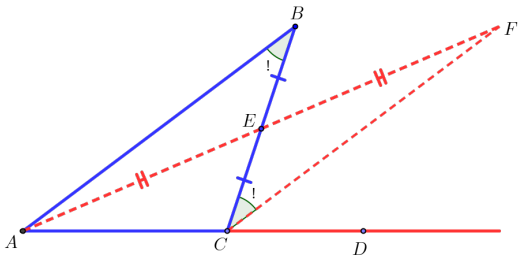


Figura 9.50. Um caso do Teorema 9.37.

O Teorema do Ângulo Externo tem muitas consequências. Começamos com três propriedades que podem ser obtidas do Teorema de forma quase imediata. Denominamos esse tipo de afirmação de Corolário.

Corolário 9.38. *Em todo triângulo a soma das medidas de quaisquer dois ângulos internos é menor do que* $180°$.

Demonstração. Seja ABC um triângulo, e consideremos dois quaisquer de seus ângulos, digamos $\hat{B}$ e $\hat{C}$, e provemos que $m(\hat{B}) + m(\hat{C}) < 180°$. Consideremos o ponto médio E de BC. Pela demonstração do Teorema 9.37 e usando a Figura 9.50 vemos que $\angle ABC \cong \angle BCF$, logo $m(\hat{C}) + m(\hat{B}) = m(\angle ACB) + m(\angle BCF) = m(\angle ACF) < 180°$. □

Corolário 9.39. *Qualquer triângulo tem pelo menos dois ângulos agudos.*

Demonstração. Dado um triângulo, se todos os seus ângulos são agudos, terminamos. Suponhamos que esse triângulo tenha um ângulo obtuso. Então seu suplementar é um ângulo externo e é agudo. Os dois ângulos internos não adjacentes são menores do que ele, logo são agudos. □

Corolário 9.40. *Se um triângulo tem um ângulo reto, então os outros dois ângulos são agudos.*

Demonstração. Se um ângulo de um triângulo é reto, seu suplementar é também reto, é um ângulo externo e é maior do que os outros ângulos internos, que assim são agudos. □

Uma consequência importante do Teorema do Ângulo Externo 9.37 é o chamado caso de congruência *LAA*. Já foi solicitado do estudante, no Problema 9.13.8, que investigue a correspondência *LAA* entre triângulos usando desenhos ou construções com varetas ou canudos. O estudante deve ter percebido que essa correspondência implica em congruência. Vejamos agora uma demonstração formal.

Teorema 9.41. *Toda correspondência LAA entre triângulos é uma congruência.*

Demonstração. Suponhamos que os triângulos ABC e DEF têm uma correspondência LAA de forma que $AB = DE$, $\hat{B} \cong \hat{E}$ e $\hat{C} \cong \hat{F}$. Confira a Figura 9.51.

Comparando os números BC e EF, temos três possibilidades:

$$(1) BC > EF; \qquad (2) BC < EF; \qquad (3) BC = EF.$$

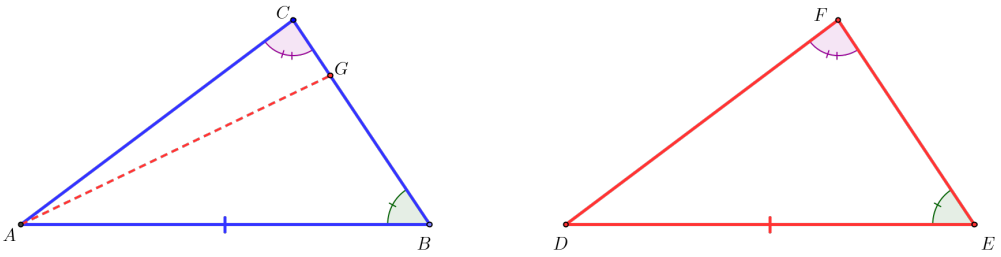


Figura 9.51. Ilustração do argumento da demonstração do Teorema 9.41.

Se ocorrer a possibilidade (3), segue que $ABC \cong DEF$ pelo caso *ALA*. Vamos eliminar as possibilidades (1) e (2).

Suponhamos que ocorra (1). Então existe no segmento BC um ponto G tal que $BG = EF$. Agora, pelo caso *LAL*, temos $ABG \cong DEF$. Isso implica $\angle AGB \cong \angle DFE$. Como já tínhamos $\angle ACB \cong \angle DFE$, segue $\angle ACB \cong \angle AGB$. Mas isso contraria o Teorema do ângulo externo, pois no triângulo ACG o ângulo $\angle AGB$ é externo e o ângulo $\angle ACB$ é interno não adjacente. Portanto não ocorre (1). Da mesma forma mostramos que não ocorre (2). Então vale (3), e terminamos. □

Esse é o quarto e último caso de congruência entre triângulos quaisquer. Mas existe mais um caso, que é específico para triângulos retângulos, e é muito útil.

Teorema 9.42. *Se dois triângulos retângulos têm hipotenusas congruentes e se um cateto de um é congruente a um cateto do outro, então eles são congruentes.*

Esse é o denominado caso de congruência *HC* para triângulos retângulos. Essa correspondência está ilustrada na Figura 9.52, em que $\hat{B}$ e $\hat{E}$ são ângulos retos, $AC = DF$ e $BC = EF$.

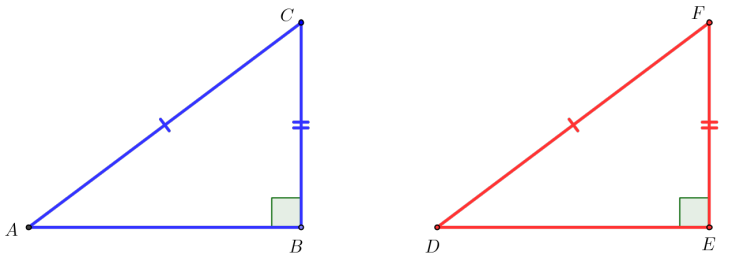


Figura 9.52. Correspondência *HC* entre triângulos retângulos.

Observemos que a correspondência *HC* é, na verdade, uma correspondência do tipo *LLA*, e sabemos que, em geral, ela não implica em congruência. Mas, segundo esse teorema, vale para triângulos retângulos.

Demonstração. Consideremos, na semirreta oposta a $\overrightarrow{ED}$, um ponto G tal que $EG = AB$. Em virtude do caso *LAL* temos $ABC \cong GEF$. Confira a Figura 9.53.

Dessa congruência resulta $GF = AC$. Como já temos $AC = DF$, vem $GF = DF$. Logo DGF é um triângulo isósceles de base DG. Como FE é sua altura relativa ao vértice, E é ponto médio, e $DE = EG$. Então $AB = DE$, e temos agora uma correspondência *LAL* entre ABC e DEF, que são assim congruentes. □

Estivemos considerando desigualdades entre ângulos de um triângulo, e vimos que esse estudo nos trouxe importantes propriedades. A ideia agora é considerar desigualdades entre lados de um triângulo.

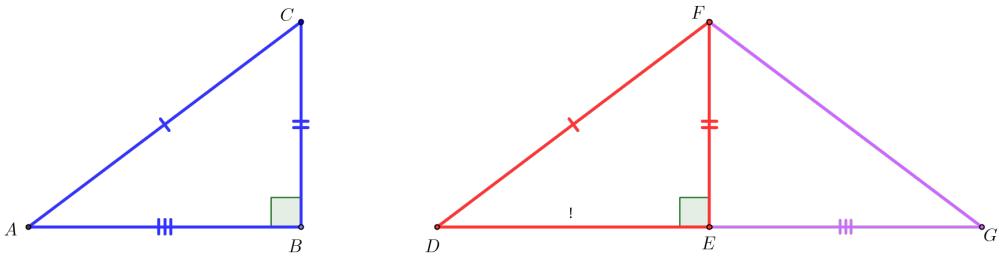


Figura 9.53. Ilustração do argumento da demonstração do Teorema 9.42.

Alguma coisa já sabemos. Vimos, na Proposição 9.26, que "em todo triângulo isósceles, os ângulos da base são congruentes". E da Proposição 9.27 temos que "se um triângulo tem dois ângulos congruentes, então ele é isósceles".

Podemos expressar essas afirmações de outro modo: "se dois lados de um triângulo não são congruentes, então os ângulos opostos não são congruentes, e vice-versa".

Dado um triângulo com um lado maior que outro, o que se pode dizer dos ângulos opostos correspondentes? Fazendo alguns desenhos vemos que o ângulo maior tem que estar oposto ao lado maior.

Teorema 9.43. *Se dois lados de um triângulo não são congruentes, então os ângulos opostos a eles não são congruentes, e ao maior lado se opõe o maior ângulo.*

Demonstração. Seja ABC um triângulo qualquer e suponhamos que $AB > AC$. Precisamos provar que $\angle ACB > \angle ABC$. Consideremos na semirreta $\overrightarrow{AC}$ o ponto D tal que $AD = AB$. Como $AC < AB$ temos $AC < AD$, portanto $A - C - D$ e C é um ponto do interior de $\angle ABD$. Do Axioma 13 temos $m(\angle ABD) = m(\angle ABC) + m(\angle DBC)$. Logo $\angle ABD > m(\angle ABC)$. Mas ABD é um triângulo isósceles de base BD, de modo que $\angle ABD = \angle ADB$. Portanto $\angle ADB > m(\angle ABC)$. Por outro lado $\angle ACB$ é ângulo externo de BCD, e, pelo Teorema do Ângulo Externo temos $\angle ACB > \angle ADB$. Segue que $\angle ACB > \angle ABC$, como queríamos demonstrar. Confira ilustração na Figura 9.54. □

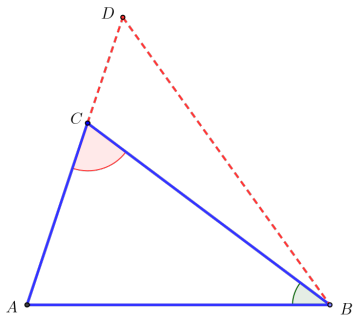


Figura 9.54. Ilustração do argumento da demonstração do Teorema 9.43.

De forma equivalente temos o

Teorema 9.44. *Se dois ângulos de um triângulo não são congruentes, então os lados opostos a eles não são congruentes, e ao maior ângulo se opõe o maior lado.*

Demonstração. Seja ABC um triângulo e suponhamos que $\hat{A} > \hat{B}$. Queremos provar que $BC > AC$. Se isso não ocorrer temos $BC = AC$ ou $BC < AC$. Se $BC = AC$ então o triângulo é isósceles de base AB, e os ângulos da base $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são congruentes, o que contraria a hipótese. Se $BC < AC$ o Teorema 9.43 implica que $\hat{A} < \hat{B}$, o que também contraria a hipótese. Logo $BC > AC$, e terminamos. □

Aproveitamos esses resultados para definir distância entre um ponto e uma reta. Precisamos primeiro do

Teorema 9.45. *O menor segmento ligando um ponto a uma reta que não o contém é o segmento perpendicular à reta.*

Demonstração. Seja r uma reta e P um ponto fora dela. Seja PA o segmento perpendicular a r por P, com $A \in r$. Seja B outro ponto qualquer de r. Queremos provar que $PB > PA$. Ora, no triângulo PAB, temos $m(\angle PAB) = 90°$, e, pelo Corolário 9.40, $\angle PBA$ é agudo. Logo $\angle PBA < \angle PAB$. Usando agora o resultado do Teorema 9.44, temos $PB > PA$. Confira ilustração na Figura 9.55. □

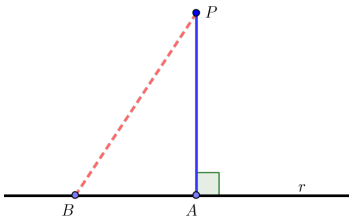


Figura 9.55. Ilustração do argumento da demonstração do Teorema 9.45.

Esse resultado nos permite definir distância entre ponto e reta.

Definição 9.46. A *distância entre uma reta e um ponto fora dela* é o comprimento do segmento perpendicular que liga o ponto à reta. Se o ponto está na reta, essa distância é definida como zero.

Finalmente, para encerrar esta seção, observamos que o estudo das desigualdades de lados em um triângulo implicam na seguinte propriedade, uma forma da "desigualdade triangular". Certamente que o estudante já vivenciou essa propriedade através de experimentos com varetas ou desenhos. Apresentamos agora uma demonstração formal.

Teorema 9.47. *[desigualdade triangular] Em todo triângulo a soma de dois lados quaisquer é maior do que o terceiro lado.*

Demonstração. Dado um triângulo ABC, marcamos na semirreta $\overrightarrow{AB}$ o ponto D tal que $BD = BC$. Confira desenho na Figura 9.56.

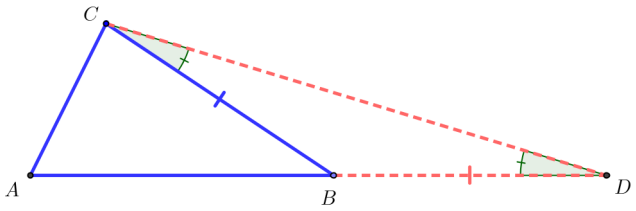


Figura 9.56. Ilustração do argumento da demonstração do Teorema 9.47.

O triângulo BCD é isósceles de base CD, logo $\angle BCD \cong \angle BDC$. Portanto no triângulo ACD temos $\angle ACD > \angle ADC$. Em virtude do Teorema 9.44 temos $AD > AC$. Mas $AD = AB + BD = AB + BC$. Portanto $AB + BC > AC$.

Por simetria da argumentação temos as outras desigualdades: $AB + AC > BC$ e $AC + BC > AB$. □

9.15 Problemas

Problema 9.15.1. Desenhe um triângulo e nomeie os seus três pares de ângulos externos opostos pelo vértice. Para cada um diga quem são os ângulos internos adjacentes e não adjacentes.

Problema 9.15.2. Usando como referência a Figura 9.50, termine a demonstração do Teorema 9.37, provando que $\angle BCD > \angle BAC$. Essas demonstrações dependem do formato da figura, ou servem para qualquer triângulo?

Problema 9.15.3. Existe um "teorema do ângulo externo" para quadriláteros?

Problema 9.15.4. Explique por que, em qualquer triângulo isósceles, os ângulos da base são agudos.

Problema 9.15.5. Construa um triângulo no qual a soma dos ângulos internos é $< 180,0001°$. Use apenas os axiomas e resultados vistos até agora.

Problema 9.15.6. Se D está no interior de BAC, então $\angle BDC > \angle BAC$. Confira Figura 9.57.

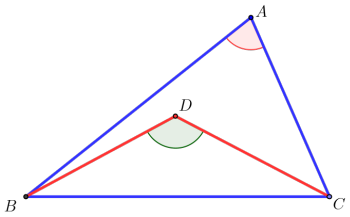


Figura 9.57.

Problema 9.15.7. É dado um quadrilátero convexo $ABCD$. Dentre seus quatro lados, AB é o maior e CD é o menor. Explique por que $m(\hat{A}) < m(\hat{C})$. O que ocorre se o quadrilátero não for convexo?

Problema 9.15.8. Se no triângulo ABC a altura relativa ao vértice A não tem pé no lado BC, qual é o maior lado de ABC? Justifique.

Problema 9.15.9. Explique por que todo triângulo tem pelo menos uma altura com pé no interior do lado correspondente. Mais exatamente, prove que isso necessariamente ocorre com a altura relativa ao vértice que se opõe ao maior lado.

Solução. Seja ABC um triângulo. Dentre os números AB, AC e BC existe um valor máximo. Sem perda de generalidade suponhamos que $BC \geq AB$ e $BC \geq AC$. Seja P o pé da perpendicular de A à reta $\overleftrightarrow{BC}$. Logo AP é a altura relativa ao lado BC. Provemos que P está no interior do segmento BC. Para isso eliminamos os casos não desejados.

Caso 1. $P = B$. Como $m(\hat{B}) = 90°$, pelo Corolário 9.40 temos que $\hat{A}$ e $\hat{C}$ são agudos. Logo $m(\hat{A}) < m(\hat{B})$. Pelo Teorema 9.44 temos $BC < AC$, o que é uma contradição, pois $BC \geq AC$. Portanto esse caso não é possível.

Caso 2. $P = C$. Também não é possível, com a mesma demonstração do caso 1 (usa que $BC \geq AB$).

Caso 3. $B - C - P$. Confira ilustração na Figura 9.58, desenho da direita. Notemos que $\angle ACB$ é externo a APC, logo $m(\angle ACB) > m(\angle APC) = 90°$ (Teorema do Ângulo Externo). Pelo Corolário 9.39 aplicado a ABC temos que $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são agudos. Logo $m(\hat{A}) < m(\angle ACB)$. Pelo Teorema 9.44 temos $BC < AB$, o que é uma contradição, pois $BC \geq AB$. Portanto esse caso não é possível.

Caso 4. $P - B - C$. Também não é possível, com a mesma demonstração do caso 3 (usa que $BC \geq AC$).

Portanto P pertence ao interior de BC.

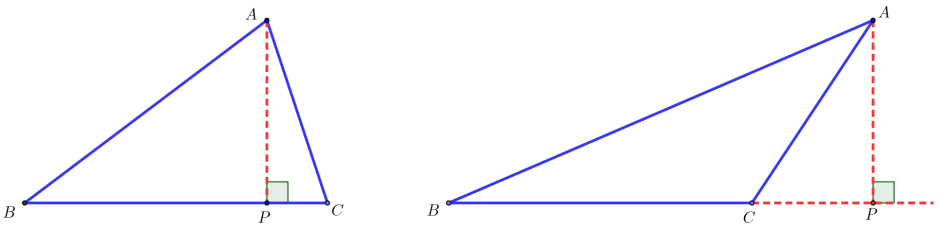


Figura 9.58. Ilustração da solução do Problema 9.15.9.

Problema 9.15.10. Demonstre que se AM é a mediana do triângulo ABC, então os segmentos perpendiculares a $\overleftrightarrow{AM}$ por B e C são congruentes.

Problema 9.15.11. Demonstre o chamado "Teorema da Dobradiça": Se dois lados de um triângulo são congruentes, respectivamente, a dois lados de um segundo triângulo, e se o ângulo determinado por eles no primeiro triângulo é maior que o ângulo correspondente no segundo, então o terceiro lado do primeiro triângulo é maior do que o terceiro lado do segundo.

Solução. Podemos acompanhar a demonstração com a Figura 9.59.

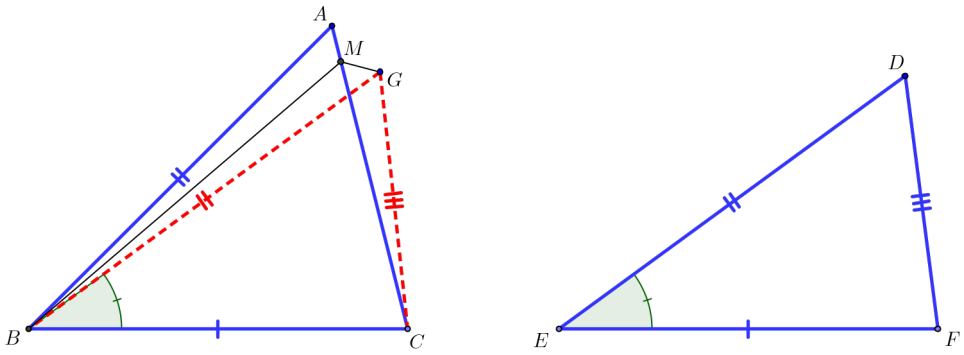


Figura 9.59. Ilustração da solução do Problema 9.15.11.

Sejam ABC e DEF triângulos tais que $AB = DE$, $BC = EF$ e $\hat{B} > \hat{E}$. Queremos provar que $AC > DF$. Consideremos, no plano em que está ABC, o ponto G tal que G e A estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{BC}$, $BG = ED$ e $\angle CBG \cong \angle FED$. Logo, $BA = BG$ e, por LAL, temos $BCG \cong EFD$ o que implica $CG = DF$. Ainda, como $\angle ABC > \hat{E}$, temos que G é um ponto interior de $\angle ABC$. Se $G \in AC$ temos $AC > CG = DF$, e terminamos. Suponhamos que $G \notin AC$. Note que $\angle ABG$ está bem definido e tem uma bissetriz que intersecta AC no ponto M. Os triângulos BAM e BGM estão bem definidos e são congruentes pelo caso LAL. Dessa congruência vem $GM = AM$. Aplicando a desigualdade triangular em CGM temos $CG < CM + GM = CM + AM = AC$. Como $CG = DF$ segue que $DF < AC$, e terminamos.

Problema 9.15.12. Demonstre a recíproca do Teorema da Dobradiça: Se dois lados de um triângulo são congruentes, respectivamente, a dois lados de um segundo triângulo, e se o terceiro lado do primeiro triângulo é maior que o terceiro lado do segundo, então o ângulo determinado pelos dois lados no primeiro triângulo é maior que o ângulo determinado pelos lados correspondentes no segundo.

Problema 9.15.13. **a)** Se duas retas diferentes são perpendiculares a uma terceira, então elas não se intersectam. **b)** Usando esse resultado, dê outra demonstração da parte da unicidade do Teorema 9.30.

Problema 9.15.14. Suponha que na Figura 9.60 vale $m(\hat{a}) = m(\hat{b})$. Explique por que as retas m e n não se intersectam.

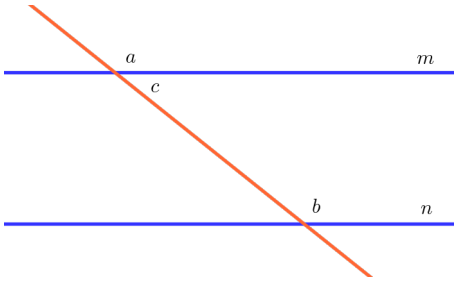


Figura 9.60. Figura dos Problemas 9.15.14 e 9.15.15.

Problema 9.15.15. Suponha que na Figura 9.60 vale $m(\hat{b}) + m(\hat{c}) = 180°$. Explique por que as retas m e n não se intersectam.

Problema 9.15.16. É dado um quadrilátero $ABCD$ em que os lados opostos são congruentes, isto é, $AB = CD$ e $BC = DA$. **a)** Prove que $ABCD$ é convexo. **b)** Mostre que as retas suporte de quaisquer dois lados opostos não se intersectam.

Problema 9.15.17. No Teorema 9.42 vimos que a correspondência HC (hipotenusa e um cateto) entre dois triângulos retângulos implica em congruência. Verifique que também são congruências as seguintes correspondências entre dois triângulos retângulos: (i) CA_o (um cateto e o ângulo oposto); (ii) HA (hipotenusa e um ângulo agudo).

Problema 9.15.18. Sejam $\angle BAC$ um ângulo e $\overrightarrow{AD}$ sua bissetriz. Seja $X \in \overrightarrow{AD} - A$. Explique por que o pé da perpendicular de X a $\overleftrightarrow{AB}$ está em $\overrightarrow{AB} - A$.

Solução. Seja P o pé da perpendicular de X a $\overleftrightarrow{AB}$. Precisamos provar que $P \in \overrightarrow{AB} - A$.

Seja $\mathscr{H}$ o lado de $\overleftrightarrow{AB}$ em que se encontram C e D. Seja r a reta perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$ por A, e seja $E \in r$ em $\mathscr{H}$. Seja $\mathscr{G}$ o lado de r em que se encontra B. Seja $x = m(\angle BAC)$, portanto $0 < x < 180$. Logo $m(\angle BAX) = x/2 < 90$. Como $m(\angle EAB) = 90°$ segue que $X \in \mathscr{G}$. Assim X e B estão do mesmo lado de r. Confira a Figura 9.61.

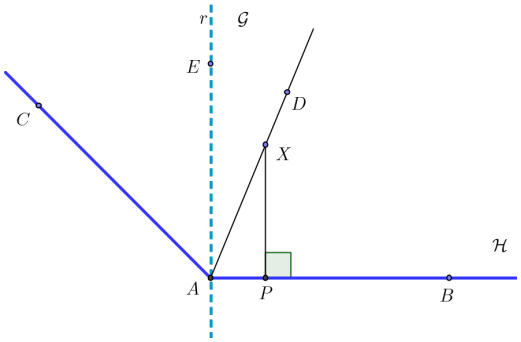


Figura 9.61. Figura do Problema 9.15.18.

Observemos agora que $XP \perp \overleftrightarrow{AB}$ e $r \perp \overleftrightarrow{AB}$ implicam que r e $\overleftrightarrow{XP}$ não se intersectam (por causa da unicidade da perpendicular). Assim P e B estão do mesmo lado de r, o que implica que $P \in \overrightarrow{AB} - A$.

Problema 9.15.19. Prove que se num triângulo ABC as alturas BD e CE relativas respectivamente aos lados AC e AB são congruentes, então o triângulo é isósceles de base BC. E reciprocamente, num triângulo isósceles ABC de base BC, as alturas BD e CE relativas respectivamente aos lados AC e AB são congruentes.

Problema 9.15.20. Dados uma reta e um ponto fora dela, prove que se dois segmentos são traçados do ponto até a reta, então é maior o segmento cuja extremidade na reta estiver mais afastada do pé da perpendicular do ponto à reta.

Problema 9.15.21. Complemente agora o Problema 9.7.15. Seja AB uma corda de uma circunferência e seja s sua reta suporte. Prove que os pontos do interior do segmento AB estão no interior da circunferência, e os pontos de s no exterior de AB estão no exterior da circunferência.

Problema 9.15.22. Complete agora o Problema 9.7.20, parte b), demonstrando que o interior de qualquer circunferência é um conjunto convexo.

Solução. Seja $\mathscr{C}$ uma circunferência de centro O e raio r. Sejam P e Q pontos de seu interior. Isso significa que $d(P,O) < r$ e $d(Q,O) < r$. Precisamos demonstrar que $PQ \subset \mathscr{C}$, ou que, para todo ponto $X \in PQ$, se tem $d(X,O) < r$, isto é, X está no interior de $\mathscr{C}$.

Seja $t = \overleftrightarrow{PQ}$. Se $O \in t$, então PQ está contido em um diâmetro, e sabemos que o interior de um diâmetro qualquer está contido no interior de $\mathscr{C}$ (Problema 9.7.14). Portanto a afirmação vale nesse caso.

Suponhamos agora que $O \notin t$, e seja T o pé da perpendicular de O a t. Temos essencialmente os casos $P-T-Q$, $P-Q-T$ ou $T-P-Q$. Esses casos estão ilustrados na Figura 9.62. Em qualquer caso, para todo $X \in PQ$, se tem que X está menos distante de T do que P ou Q. Logo $d(X,O) \leq d(P,O)$ ou $d(X,O) \leq d(Q,O)$ em virtude do Problema 9.15.20. Portanto $d(X,O) < r$, e terminamos.

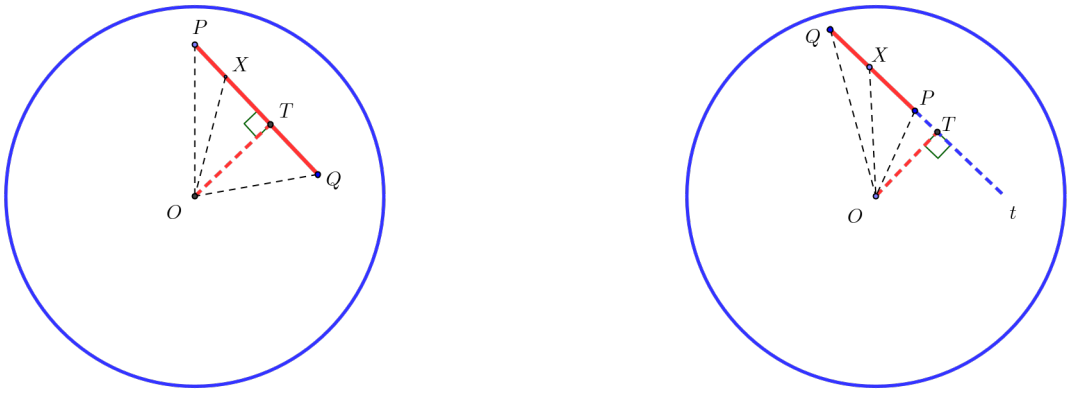


Figura 9.62. Ilustração da solução do Problema 9.15.22.

Problema 9.15.23. Verifique (e explique) se é possível ou não construir um triângulo que tenham lados com as medidas: **(i)** 1, 2 e 4; **(ii)** 2, 2 e 4; **(iii)** 2, 3 e 4.

Problema 9.15.24. Na Figura 9.63 temos $PT = TR = RQ$. **a)** Demonstre que $PR > RQ$. **b)** Compare PQ com PR.

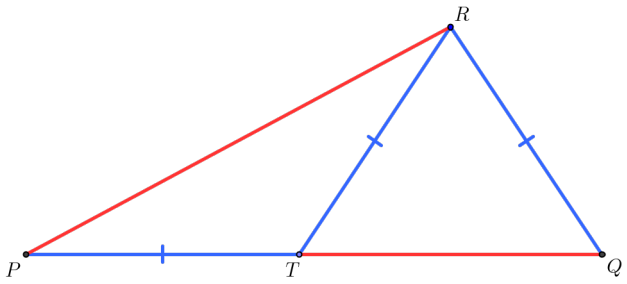


Figura 9.63. Figura do Problema 9.15.24.

Problema 9.15.25. Dada a Figura 9.64 com $AD = BC$, demonstre que $AC > BD$.

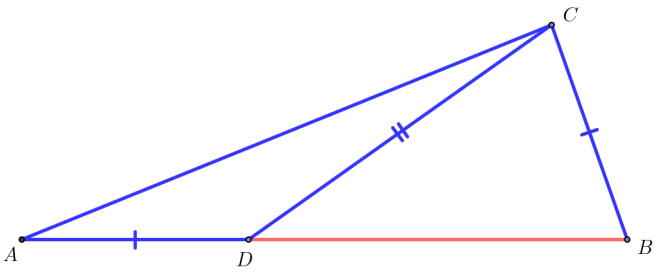


Figura 9.64. Figura do Problema 9.15.25.

Problema 9.15.26. Num triângulo ABC temos $A - F - C$, $A - D - B$, $FC = DB$ e $AB > AC$. Prove que $FB > CD$.

Problema 9.15.27. A soma das distâncias de um ponto do interior de um triângulo às extremidades de um lado é menor do que a soma dos outros dois lados.

Problema 9.15.28. Seja $\hat{C}$ o ângulo reto do triângulo retângulo ABC. **a)** Se $m(\hat{B}) = 2m(\hat{A})$, então $AB = 2BC$. **b)** Vale a afirmação recíproca de a)?

Problema 9.15.29. Sejam A, B, C e D quatro pontos coplanares tais que $AC = BC$, $AB < AC$ e $A - C - D$. Prove que o triângulo ABD é escaleno.

Problema 9.15.30. Na Figura 9.65 $\hat{B}$ e $\hat{D}$ são ângulos retos e $AB = DC$. Mostre que $AD = BC$.

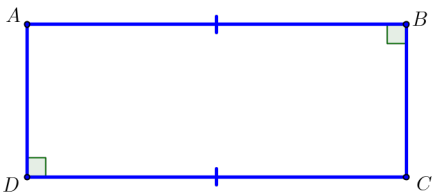


Figura 9.65. Desenho do Problema 9.15.30.

Problema 9.15.31. É dado um quadrilátero convexo $ABCD$ tal que $AD = BC$ e $\hat{A} \cong \hat{B}$. **a)** Faça desenhos desse quadrilátero. **b)** Se E é o ponto médio de AB e F o de CD, prove que EF é perpendicular a AB e a CD. **c)** Conclua que as retas suportes de AB e CD não se intersectam.

Problema 9.15.32. O seguinte resultado é também denominado *desigualdade triangular*. Sejam A, B e C três pontos. Então $AC \leq AB+BC$, e a igualdade ocorre se e somente se B está no segmento AC.

Problema 9.15.33. Dados n pontos A_1, A_2, A_3, ..., A_n ($n \geq 2$), a *linha poligonal* por eles determinada é a reunião dos segmentos A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$. Mostre que a menor linha poligonal que une um ponto dado a outro é o segmento que os une. Em outros termos, sejam A_1, A_2, A_3, ..., A_n ($n \geq 2$) n pontos coplanares. Então

$$A_1A_2 + A_2A_3 + \cdots + A_{n-1}A_n \geq A_1A_n$$

e a igualdade ocorre se e somente se $A_1 - A_2 - A_3 - \ldots - A_n$.

Solução. Considerando o resultado do Problema 9.15.32 aplicado aos pontos A_1, A_2 e A_3 temos $A_1A_3 \leq A_1A_2 + A_2A_3$ e a igualdade ocorre se e somente se $A_1 - A_2 - A_3$. Considerando agora A_1, A_3 e A_4 temos $A_1A_4 \leq A_1A_3 + A_3A_4$ e a igualdade ocorre se e somente se $A_1 - A_3 - A_4$. Combinando as duas desigualdades vem $A_1A_4 \leq A_1A_3 + A_3A_4 \leq A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_4$ e a igualdade ocorre se e somente se $A_1 - A_2 - A_3 - A_4$. Em seguida consideramos A_1, A_4 e A_5, e temos $A_1A_5 \leq A_1A_4 + A_4A_5 \leq A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_4 + A_4A_5$ e a igualdade ocorre se e somente se $A_1 - A_2 - A_3 - A_4 - A_5$. E assim por diante.

9.16 Problemas adicionais

Vários dos problemas seguintes têm demonstração mais delicada, e o estudante pode postergar, se achar adequado. Pode fixar os resultados mediante o estudo de desenhos. Convém ainda estudá-los com o aplicativo Geogebra, pois ele possibilita movimentar as figuras e assim facilita o estudo com os elementos geométricos em diferentes posicionamentos.

Problema 9.16.1. Descreva como é a sua noção espontânea de reta. Ela é comum a todos os seres humanos? Se não for, quais os problemas que isso acarreta à teoria da Geometria Euclidiana?

Problema 9.16.2. São dadas três ou mais retas que se intersectam duas a duas. Qual é a menor exigência que se deve fazer sobre suas intersecções para garantir que todas estejam em um mesmo plano?

Problema 9.16.3. Explique por que, se $C \in \overrightarrow{AB} - \{A\}$, então $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.

Problema 9.16.4. Se os três lados de um triângulo são iguais, esse triângulo chama-se *equilátero*. **a)** No nível de dedução informal podemos construir triângulos equiláteros usando varetas. Explique como isso pode ser feito. **b)** Podemos também construir triângulos equiláteros usando régua e compasso. Explique. **c)** Ao construir triângulos equiláteros com régua e compasso usamos uma propriedade que ainda não demonstramos. Descreva qual é.

Problema 9.16.5. No Problema 9.9.12 foi definido interior de um triângulo como a interseção dos semiplanos determinados pelas retas suportes dos seus lados contendo o outro vértice. Outra definição de interior de triângulo: reunião dos interiores dos segmentos com extremos nos interiores do lados. Essas duas definições são equivalentes? Justifique.

Problema 9.16.6. Mostre que nosso sistema axiomático pode ser mais econômico, pois podemos provar o Axioma 10 como consequência dos axiomas 1 a 9.

Problema 9.16.7. Dados os pontos coplanares A, B, C, D, E e H tais que A, B e C são não colineares, $B-C-D$, $A-E-C$ e $B-E-H$, demonstre que H está no interior do ângulo $\angle ACD$.

Problema 9.16.8. São dadas três semirretas diferentes $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC}$ tais que $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OC}$ são não colineares, e $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC}$ são não colineares. Prove que se $m(\angle AOC)+m(\angle BOC)=180°$, então O, A e B são colineares. Se acrescentarmos a hipótese $m(\angle AOC)\neq 90°$, temos também $A-O-B$, e os ângulos formam um par linear. Confira ilustração na Figura 9.66.

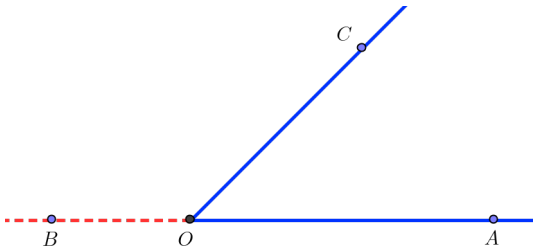


Figura 9.66. Ilustração do Problema 9.16.8.

Problema 9.16.9. Em um plano dado, sejam r uma reta e AB um segmento tal que $\overleftrightarrow{AB}$ não é perpendicular a r. Mostre que a projeção de AB sobre r é o segmento $A'B'$, em que A' é a projeção de A sobre a reta, e B' a de B. O que ocorre se $\overleftrightarrow{AB}$ é perpendicular a r?

Seguem alguns problemas sobre o quadrilátero de Saccheri (confira Definição 9.35).

Problema 9.16.10. Explique por que existem quadriláteros de Saccheri. Isto é, usando os Axiomas e resultados vistos até agora, construa quadriláteros de Saccheri.

Problema 9.16.11. Prove que todo quadrilátero de Saccheri é convexo.

Problema 9.16.12. Seja $ABCD$ um quadrilátero de Saccheri. Usando apenas os resultados vistos até agora prove que o segmento que liga os pontos médios da base e do cume é perpendicular a ambos.

Problema 9.16.13. Seja $ABCD$ um quadrilátero de Saccheri. Usando apenas os axiomas de 1 a 15 estudados até agora, prove que: **a)** $AC=BD$; **b)** os ângulos do cume são congruentes.

Problema 9.16.14. Demonstre que, dado um ângulo qualquer, sua bissetriz menos a sua origem é o conjunto dos pontos do interior do ângulo que são equidistantes dos seus lados.

Solução. Sejam $\angle BAC$ um ângulo e $\overrightarrow{AD}$ sua bissetriz. Seja $X\in\overrightarrow{AD}-A$. Sejam P o pé da perpendicular de X a $\overleftrightarrow{AB}$ e Q o pé da perpendicular de X a $\overleftrightarrow{AC}$. Em virtude do resultado do Problema 9.15.18 temos $P\in\overrightarrow{AB}-A$ e $Q\in\overrightarrow{AC}-A$. Notemos que $AXP\cong AXQ$ pelo caso *LAA*. Segue que $XP=XQ$, e assim X é equidistante dos lados do ângulo. Confira ilustração na Figura 9.67, desenho da esquerda.

Reciprocamente, seja X um ponto do interior de $\angle BAC$ e equidistante dos lados do ângulo. Sejam P o pé da perpendicular de X a $\overleftrightarrow{AC}$ e Q o pé da perpendicular de X a $\overleftrightarrow{AB}$. Vamos provar a seguir que $P\in\overrightarrow{AB}-A$ e $Q\in\overrightarrow{AC}-A$. Assim AXP e AXQ são triângulos e $AXP\cong AXQ$ pelo caso HC de triângulos retângulos. Segue que $\angle PAX\cong\angle QAX$ e X está na bissetriz.

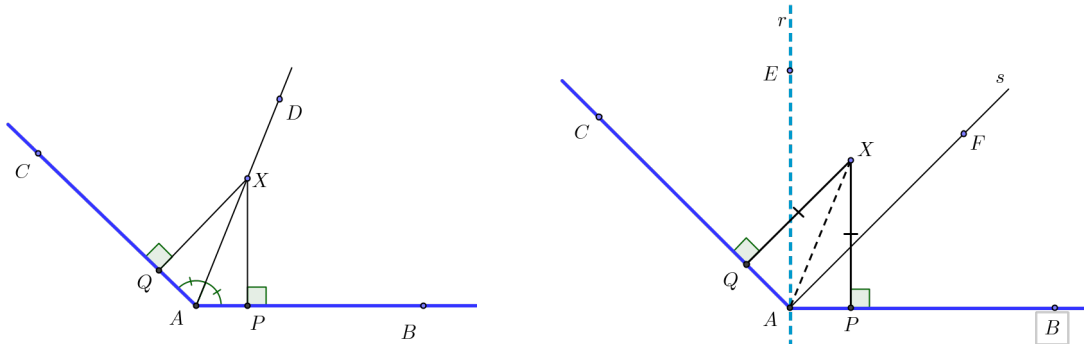


Figura 9.67. Figura do Problema 9.16.14.

Para provar que $P \in \overrightarrow{AB} - A$ observemos primeiro que se $\angle BAC$ é agudo ou reto um argumento similar ao usado na solução do Problema 9.15.18 mostra o que queremos. Suponhamos que $\angle BAC$ seja obtuso. Seja r a reta perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$ por A, e seja s a reta perpendicular a $\overleftrightarrow{AC}$ por A. Como $m(\angle BAC) > 90^\circ$ tanto r como s têm pontos no interior desse ângulo. Sejam $E \in r$ e $F \in s$ dois desses pontos. O posicionamento desses elementos estão ilustrados na Figura 9.67, desenho da direita.

Se $X \in r$ ou se X está no interior de $\angle EAC$ então XQ é o cateto de um triângulo retângulo e XP é maior do que a hipotenusa desse triângulo. Logo $XP > XQ$, contrariando a hipótese. Se $X \in s$ ou se X está no interior de $\angle FAB$ então XP é o cateto de um triângulo retângulo e XQ é maior do que a hipotenusa desse triângulo. Logo $XQ > XP$, novamente contrariando a hipótese. Segue que X está no interior de $\angle EAF$. Como $XP \perp \overleftrightarrow{AB}$ e $XP \perp \overleftrightarrow{AB}$, sabemos que XP e r não se intersectam. Ainda, X está do mesmo lado que B em relação a r. Então P está do mesmo lado que B em relação a r, do que segue que $P \in \overrightarrow{AB} - A$.

Do mesmo modo se prova que $Q \in \overrightarrow{AC} - A$, e terminamos.

Problema 9.16.15. Demonstre que, em um triângulo qualquer, suas bissetrizes internas se encontram em um único ponto situado no seu interior. Esse ponto chama-se *incentro*. Descubra o motivo desse nome.

Problema 9.16.16. **a)** Sejam $ABC \cong DEF$ e AH e DG alturas, sendo que $H \in \overleftrightarrow{BC}$ e $G \in \overleftrightarrow{EF}$. Mostre que se H está no interior de BC então G está no interior de EF. **b)** Demonstre que são congruentes quaisquer alturas correspondentes de triângulos congruentes. **c)** Explique cuidadosamente por que, antes de provar b) é necessário obter o resultado a).

Problema 9.16.17. Dado um triângulo qualquer, tome três cevianas, cada uma relativa a um dos lados. Mostre que a soma das cevianas é maior do que o semiperímetro do triângulo, e menor do que 3/2 do perímetro.

Problema 9.16.18. Vamos admitir a noção comum de que o menor caminho que une dois pontos é o segmento de reta que os une. **a)** Usando essa ideia resolva o seguinte problema: Na Figura 9.68 investigue como se pode descobrir a localização do ponto $C \in s$ de modo que $AC+CB$ é o caminho mais curto para ir do ponto A ao ponto B tocando a reta. Justifique.

b) Ainda com referência à Figura 9.68, suponha que em A se localiza uma fonte de luz. Usando a hipótese de que um raio de luz segue o menor caminho, explique por que o raio que sai de A e atinge B depois de refletir na reta é o único que tem ângulo de incidência i de mesma medida que o ângulo de reflexão r.

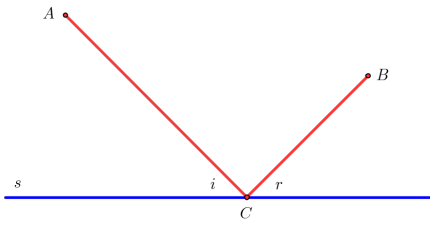


Figura 9.68. Figura do Problema 9.16.18.

Problema 9.16.19. Na Figura 9.69 r e s são retas perpendiculares. Investigue como se pode descobrir a localização dos pontos $C \in s$ e $D \in r$ de modo que $AC + CD + DB$ é o caminho mais curto para se ir do ponto A ao ponto B tocando as retas como na Figura. Justifique.

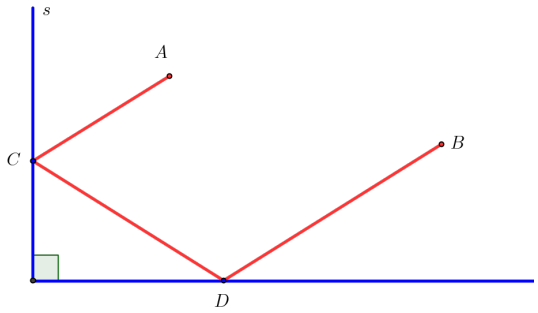


Figura 9.69. Figura do Problema 9.16.19.

Problema 9.16.20. Na mesa de bilhar $ABCD$, desenhada na Figura 9.70, uma bola, ao ser lançada contra uma lateral, reflete-se de modo que o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão. Uma bola é lançada da posição 1 em direção à lateral CD e em seguida passa pela posição 2. Determine, usando apenas uma régua e um esquadro, o ponto da lateral AB que será tocado pela bola pela primeira vez (supondo que a bola seja impulsionada com energia suficiente).

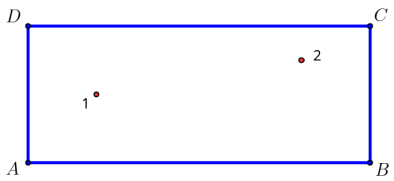


Figura 9.70. Figura do Problema 9.16.20.

9.17 Temas para investigação

Tema 9.17.1. Investigue como é a noção espontânea que pessoas com pouca escolaridade têm sobre a reta e o plano. Converse com pessoas de diferentes profissões. Prepare perguntas que lhe permitam verificar se essa noção espontânea coincide com as afirmações básicas da Geometria Euclidiana sobre retas e planos consideradas na Seção 9.4. Procure utilizar os referenciais mais

próximos da pessoa. Por exemplo, para um pedreiro uma reta pode ser um "fio de nylon bem esticado", e um plano pode ser um "terreno bem nivelado". Confira se, para muitas pessoas, o termo segmento não é muito usado, ou é mesmo desconhecido, e é substituído por reta.

Tema 9.17.2. No texto definimos ângulo como a reunião de duas semirretas de mesma origem e não contidas na mesma reta. Considere a definição alternativa, em que um ângulo é a reunião de duas semirretas, nas mesmas condições anteriores, e de seu interior. Confira ilustração na Figura 9.71. O que muda na teoria se for adotada essa definição?

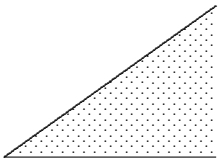


Figura 9.71. Outra definição de ângulo

Tema 9.17.3. Em textos didáticos do Ensino Fundamental é frequente que os autores adotem uma definição de ângulo que inclui os denominados "ângulo raso" e "ângulo de 180°". Consulte esses textos e faça uma coleção dessas definições, analisando as formas com que os autores as apresentam. Investigue os motivos de adotarem essa definição e por que isso não é feito no sistema axiomático aqui descrito.

Tema 9.17.4. Um estudante conjecturou que, com relação ao fato de que as correspondências *LAL*, *ALA* e *LLL* entre triângulos são na verdade congruências, sempre se pode tomar um desses fatos como Axioma e demonstrar os outros dois. Verifique se isso é verdade dentro do contexto de nosso sistema axiomático, isto é, inserindo as afirmações na Seção 9.12.

Tema 9.17.5. Investigue condições sob as quais se pode garantir que um triângulo tem os pés de todas as suas alturas no interior dos respectivos lados.

Tema 9.17.6. Investigue se as alturas de um triângulo qualquer admitem pontos de encontro.

Tema 9.17.7. Defina interior de quadriláteros e investigue propriedades desse conjunto.

Tema 9.17.8. Defina correspondência entre quadriláteros usando seus elementos básicos. Em seguida defina congruência. Estude casos de correspondência reduzida que conduzem à congruência de quadriláteros.

Tema 9.17.9. Se os quatro ângulos de um quadrilátero (plano) são retos, então ele é chamado de *retângulo*. Verifique se, usando apenas os axiomas de 1 a 15 estudados até agora, é possível provar que todo quadrilátero de Saccheri é um retângulo.

Tema 9.17.10. Uma reta reparte um plano que a contém em duas regiões convexas. Duas retas em quatro ou três regiões, dependendo se se intersectam ou não. Investigue o que ocorre com n retas em um plano.

Tema 9.17.11. Examinando o sistema axiomático apresentado neste Capítulo, que definições e axiomas garantem que o espaço tem pelo menos três dimensões? O que deveria ser acrescentado para termos um espaço de pelo menos quatro dimensões? Num espaço de quatro dimensões como seriam as interseções de planos? E de dois subespaços de dimensão três?

Tema 9.17.12. Na Figura 9.32 assim como no Problema 9.13.5, vimos que a correspondência *LLA* não implica necessariamente congruência. Mas, quem sabe se agregarmos alguma condição adicional passe a valer.

Ao lado vemos um desenho de um ângulo α. P é o pé da perpendicular de A ao outro lado do ângulo. Nesse lado escolhemos pontos C e D igualmente afastados de P, e assim temos $AC = AD$. Portanto os triângulos CAB e DAB têm uma correspondência *LLA* mas não são congruentes, pois $BC \neq BD$.

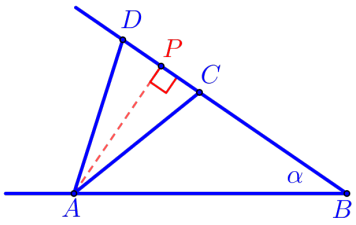


Figura 9.72. Correspondência *LLA*.

Observando bem esse contraexemplo vemos que ele funciona por que é possível traçar uma circunferência com centro em A e que encontra o outro lado do ângulo em dois pontos. Para impedir isso podemos aumentar a medida do ângulo α, fazendo-o obtuso ou reto. Vemos que na verdade é suficiente que $AC > AB$. Confira os desenhos da Figura 9.73.

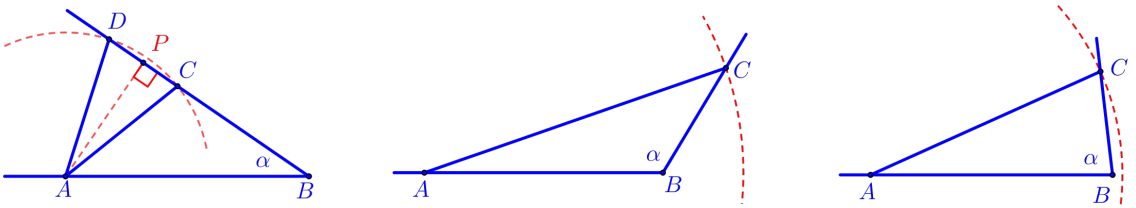


Figura 9.73. Investigações sobre a correspondência *LLA*.

Tendo em vista essas considerações veja como deve ser uma proposição sobre a congruência *LLA*. Enuncie um teorema a respeito e o demonstre.

Tema 9.17.13. Examine a mesma questão do Problema 9.13.4, mas agora considerando a correspondência *AAA*.

Tema 9.17.14. Considere um ângulo $\angle BAC$ com $AB = AC$. Sejam T e S pontos de BC que o repartem em três segmentos congruentes. Confira a Figura 9.74. **a)** Estude as propriedades dessa Figura. **b)** Os três ângulos de vértice A são sempre congruentes? Se forem, temos um método de obtenção da trissetriz?

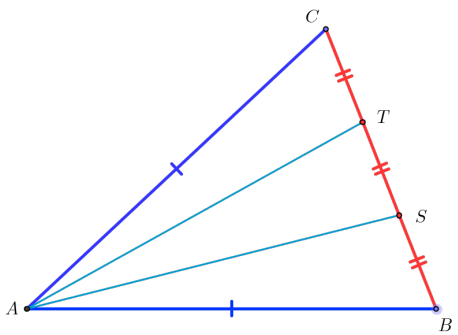


Figura 9.74. Tentativa de construção da trissetriz.

Tema 9.17.15. Considere a seguinte procedimento para construção de um triângulo equilátero de lado ℓ. Acompanhe pela Figura 9.75. Iniciamos com um segmento AB de medida ℓ e sua mediatriz

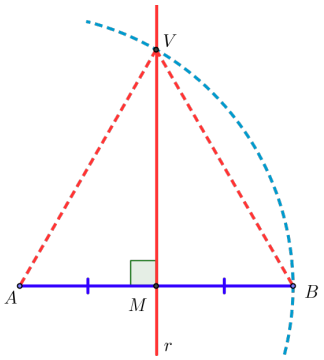


Figura 9.75. Procedimento para construção de triângulo equilátero.

r. Tomamos a circunferência com centro em A e raio ℓ, e seja V um dos pontos de sua interseção com r.
a) Demonstre que ABV é um triângulo equilátero de lado ℓ. **b)** Examine cuidadosamente os argumentos e verifique se todos são válidos a partir dos axiomas e resultados obtidos até agora.

Tema 9.17.16. Reexaminando os resultados obtidos até esse ponto da teoria axiomática, podemos afirmar que em um plano qualquer existem retas paralelas, isto é, retas que não se intersectam?

Tema 9.17.17. Nas últimas seções deste Capítulo não citamos mais os primeiros axiomas, de 1 a 5. Não precisamos mais deles? Se sim, por que motivo não nos referimos mais a eles?

Tema 9.17.18. Explique por que o Teorema de Pasch, enunciado no Problema 9.9.17, é equivalente ao Axioma 9.

Capítulo 10

Retas paralelas e semelhança

10.1 Introdução

Continuamos neste Capítulo nossa apresentação de um sistema axiomático para a Geometria Euclidiana Plana. Chegamos agora no âmago desse estudo: o axioma sobre retas paralelas. Um dos objetivos próximos é provar que a soma dos ângulos de um triângulo qualquer é 180°. Mas esse estudo tem muitos outros resultados importantes, como a Teoria de Semelhança.

10.2 Retas paralelas em um plano

Começamos com

Definições 10.1. Duas retas são ditas *paralelas* quando são coplanares e não se intersectam. Os segmentos AB e CD se dizem paralelos se as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ são paralelas. Analogamente para segmentos e retas, segmentos e semirretas, e semirretas. Se r é paralela a s, anotamos $r \parallel s$. O mesmo símbolo pode ser usado para segmentos e semirretas. Em um plano, uma reta que intersecta duas outras retas em pontos diferentes se diz *transversal* a elas. Confira ilustrações na Figura 10.1. Duas retas não coplanares são ditas *reversas*.

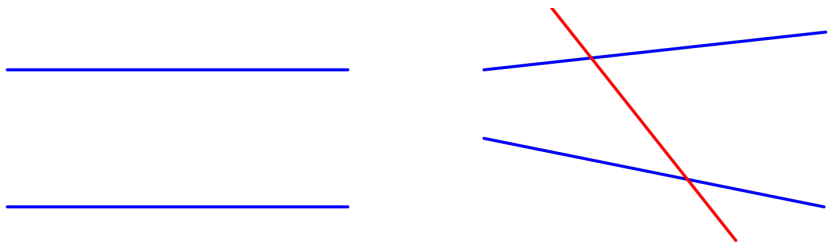


Figura 10.1. À esquerda, desenho usual de duas retas paralelas; à direita, uma reta transversal a outras duas em um plano.

Dadas duas retas paralelas, da definição sabemos que existe um plano que as contém. Observamos que esse plano é único. Essa propriedade é uma consequência imediata do Teorema 9.4, que diz que "dados uma reta e um ponto fora da reta, existe um único plano que os contém". Assim, dadas duas retas paralelas, consideramos uma delas, digamos que seja r, e um ponto na outra, digamos que seja P. Então existe um único plano α que contém r e P. Assim qualquer plano que contém as duas retas contém r e P, logo é o próprio plano α. Obtivemos o

Teorema 10.2. *Duas retas paralelas estão em exatamente um plano.*

Duas retas paralelas não se intersectam, de modo que não definem ângulo algum. Isso traz uma dificuldade no seu estudo. Uma maneira de obter propriedades de duas retas paralelas é considerar uma terceira reta que intersecta ambas. As três retas formam oito ângulos, que são muito importantes no estudo do paralelismo.

Definição 10.3. Consideremos duas retas intersectadas por uma terceira em pontos diferentes. Seguindo a notação definida na Figura 10.2 para os oito ângulos por elas formados, dizemos que são correspondentes os ângulos dos seguintes pares: $\hat{a} \longleftrightarrow \hat{b}$; $\hat{c} \longleftrightarrow \hat{d}$; $\hat{e} \longleftrightarrow \hat{f}$; $\hat{g} \longleftrightarrow \hat{h}$. São alternos internos: $\hat{c} \longleftrightarrow \hat{f}$; $\hat{b} \longleftrightarrow \hat{g}$. São alternos externos: $\hat{a} \longleftrightarrow \hat{h}$; $\hat{e} \longleftrightarrow \hat{d}$.

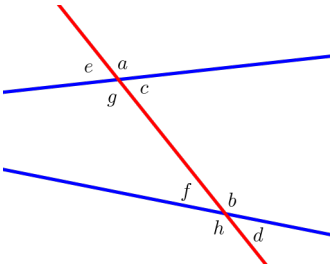


Figura 10.2. Ângulos determinados por uma transversal a duas retas.

Observe que se dois ângulos de qualquer par são congruentes então os ângulos de todos os outros pares também são.

No Problema 9.15.14 o estudante foi convidado a provar a afirmação que destacamos agora no

Teorema 10.4. *Se duas retas coplanares são cortadas por uma transversal formando um par de ângulos correspondentes congruentes, então as retas são paralelas.*

Um caso particular desse resultado também já foi visto no Problema 9.15.13:

Corolário 10.5. *Se duas retas coplanares são perpendiculares a uma terceira, então são paralelas.*

A afirmações do Teorema 10.4 e, em particular, a do Corolário acima, nos fornecem condições sob as quais podemos afirmar que duas retas coplanares são paralelas. Um primero resultado é o seguinte:

Teorema 10.6. *Em um plano, por um ponto fora de uma reta passa uma paralela à reta dada.*

Demonstração. De fato, sejam r uma reta e P um ponto fora dela em um plano. O Teorema 9.30 nos diz que "Em um plano, dados uma reta e um ponto fora dela, existe uma e uma única reta perpendicular à reta dada.". Seja s a reta que contém P e é perpendicular a r. Aplicamos agora o Teorema 9.20, que afirma: "Em um plano, por qualquer ponto de uma reta passa uma única reta perpendicular à reta dada.". Seja t a reta perpendicular a s e que contém P. Confira a Figura 10.3. Em resumo, temos duas retas r e t que são perpendiculares à mesma reta s. Pelo Corolário 10.5, r e t são paralelas. Assim t é uma reta que satisfaz a condição do enunciado do Teorema. □

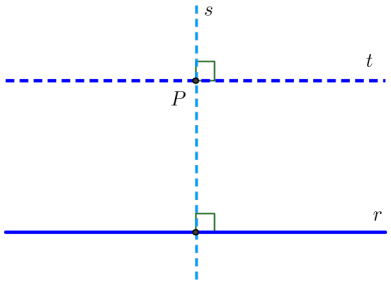


Figura 10.3. Ilustração do Teorema 10.6.

É importante observar que o Teorema 10.6 tem uma demonstração mais geral. De fato, seja r uma reta e P um ponto fora dela. Fixemos pontos A e B em r, e seja s a reta por A e P. Escolhemos o lado de s em que está B. Pelo Axioma 12 existe um ponto C nesse semiplano tal que $m(\angle APC) = 180^\circ - m(\angle BAP)$. Em virtude do resultado do Problema 9.15.15 as retas r e $\overleftrightarrow{PC}$ não se intersectam. Confira a Figura 10.4.

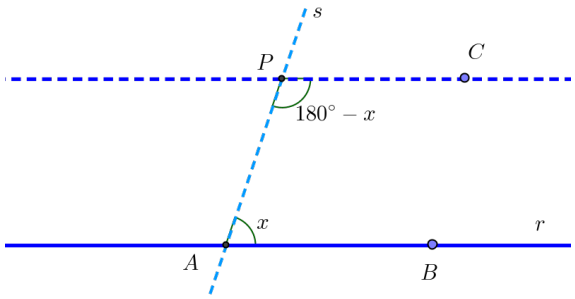


Figura 10.4. Argumento geral para obtenção de reta paralela.

Atingimos um ponto crucial de nosso sistema axiomático da Geometria. Gostaríamos de demonstrar a afirmação recíproca do Teorema 10.4. Ela tem muitas consequências importantes, e pode ser enunciada assim:

? "Se duas retas paralelas são cortadas por uma transversal então os ângulos dos pares correspondentes são congruentes."

Mas, por mais que tentemos, não conseguimos demonstrá-la usando apenas os axiomas e resultados de que dispomos até o momento. O estudante pode fazer suas tentativas, assim como muitos o fizeram.

Devido a esse impasse somos levados a assumir a afirmação acima como um novo axioma. Na verdade, assumimos uma afirmação um pouco diferente tendo em vista a seguinte ideia. Dados uma reta e um ponto fora dela podemos, a princípio, considerar as seguintes possibilidades:

(i) não existe uma reta paralela à reta dada contendo o ponto dado;

(ii) existe uma única reta paralela à reta dada contendo o ponto dado;

(iii) existe mais de uma reta paralela à reta dada contendo o ponto dado.

Em virtude do Teorema 10.6 sabemos que a possibilidade (i) não condiz com a Geometria Euclidiana. Lembramos que não podemos desprezar essa possibilidade, pois já vimos que existe uma Geometria onde ela ocorre. Trata-se da Geometria na Superfície Esférica, comentada no Capítulo 8. Nessa Geometria as retas são os círculos máximos da esfera, e dois quaisquer desses círculos sempre se intersectam.

Portanto na Geometria Euclidiana vale (ii) ou (iii). Como essas possibilidades são excludentes, precisamos decidir por uma delas. Decidimos pela possibilidade (ii) pois, a princípio, nos parece ser a verdadeira.

Axioma 16. *(da unicidade da reta paralela)*
Em um plano, por um ponto fora de uma reta, passa uma única paralela à reta dada.

Esse Axioma é muitas vezes chamado de "Axioma das paralelas". Assumindo-o, nos decidimos sobre uma propriedade fundamental que caracteriza a Geometria Euclidiana.

Vejamos agora algumas consequências. A primeira é a já desejada afirmação recíproca do Teorema 10.4.

Proposição 10.7. *Se duas retas paralelas são cortadas por uma transversal então os ângulos dos pares correspondentes são congruentes.*

Demonstração. Sejam r e s retas paralelas e seja t uma reta transversal a ambas. Queremos provar que são congruentes os ângulos correspondentes formados por t e pelas duas retas paralelas.

Seja P o ponto de encontro de s e t. Tracemos por P a reta m que forma com t os mesmos ângulos que r forma com t (estamos usando o Axioma 12 da construção de ângulos). Portanto t é uma reta transversal que forma sobre r e m ângulos correspondentes congruentes. Em virtude do Teorema 10.4 r e m são paralelas. Usando o Axioma 16 temos $m = s$. Segue que os pares de ângulos correspondentes formados por r e s com t são congruentes. Confira ilustração na Figura 10.5. □

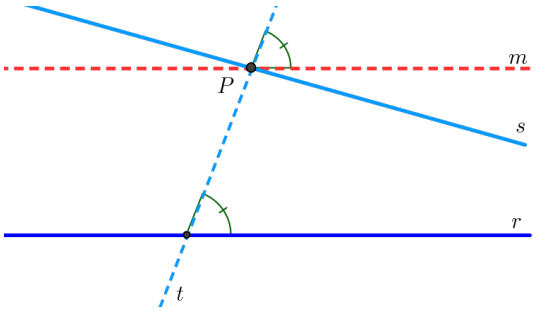


Figura 10.5. Demonstração da Proposição 10.7.

Demonstramos agora o tão esperado resultado sobre a soma dos ângulos de um triângulo.

Teorema 10.8. *A soma das medidas dos ângulos de um triângulo qualquer é* 180°.

Demonstração. Seja ABC um triângulo. Queremos provar que $m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 180°$. Consideremos a reta paralela ao lado AB contendo o vértice C (essa reta existe pelo Teorema 10.6). Com as anotações da Figura 10.6, a Proposição 10.7 nos diz que $\hat{a} \cong \hat{A}$ e $\hat{b} \cong \hat{B}$. Portanto $m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = a + b + c = 180°$, pois $\hat{a}$, $\hat{b}$ e $\hat{c}$ são suplementares. □

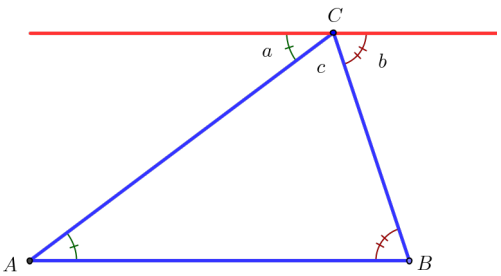


Figura 10.6. Soma dos ângulos de um triângulo qualquer.

Seguem outras consequências importantes do Axioma 16 das Paralelas.

Proposição 10.9. *Os dois ângulos não retos de um triângulo retângulo são complementares.*

Demonstração. Como a soma dos três ângulos é 180°, a soma dos dois não retos é 90°, que assim são complementares. □

Proposição 10.10 (Versão exata do Teorema do Ângulo Externo)**.** *Em qualquer triângulo a medida de todo ângulo externo é igual à soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes.*

Demonstração. Em um triângulo ABC, seja $\hat{D}$ um ângulo externo adjacente a $\hat{C}$. Então $m(\hat{C}) + m(\hat{D}) = 180°$. Como $m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 180°$, segue que $m(\hat{D}) = m(\hat{A}) + m(\hat{B})$. □

Proposição 10.11. *Se uma correspondência entre dois triângulos for do tipo AA, então a correspondência é AAA.*

Demonstração. Se na correspondência dois pares de ângulos são congruentes, o terceiro par também é, pois a soma da medidas dos ângulos internos de um triângulo é fixa. □

Proposição 10.12. *Se r e s são retas paralelas, então todos os pontos de r estão à mesma distância de s.*

Demonstração. Sejam r e s retas paralelas e sejam A e B pontos de r. Sejam P_A e P_B os pés dos segmentos perpendiculares de A e B a s, respectivamente. Queremos provar que $AP_A = BP_B$. Confira a Figura 10.7.

Aplicando a Proposição 10.7 vemos que esses segmentos também são perpendiculares a r. Considerando $\overleftrightarrow{P_AB}$ como uma transversal a r e s, vemos que a mesma Proposição garante que $\angle ABP_A$ e $\angle P_BP_AB$ são congruentes. Assim os triângulos ABP_A e P_BP_AB têm uma correspondência LAA e, portanto, são congruentes. Em consequência $AP_A = BP_B$. □

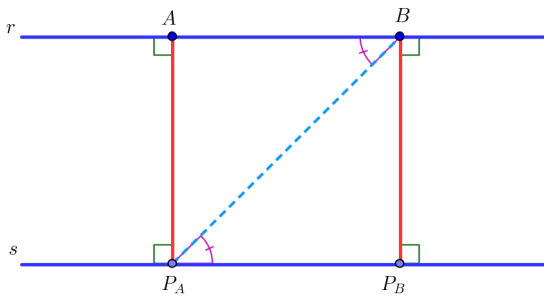


Figura 10.7. Ilustração da Proposição 10.12.

Esse resultado nos permite fazer a seguinte

Definição 10.13. A *distância entre duas retas paralelas* é a distância de um ponto qualquer de uma delas à outra reta.

Já vimos o que é quadrilátero na Definição 9.34, na pág. 46. Os resultados sobre paralelas vistos acima nos dá a oportunidade de estudar um tipo especial de quadrilátero.

Definição 10.14. Um *paralelogramo* é um quadrilátero cujos lados opostos são paralelos.

Podemos facilmente fazer desenhos de paralelogramos e ver que eles são quadriláteros convexos. No Problema 10.3.11 o estudante poderá refletir melhor sobre isso.

Precisamos agora de algumas propriedades dos paralelogramos.

Teorema 10.15. *Em qualquer paralelogramo lados opostos são congruentes, assim como ângulos opostos.*

Demonstração. Consideremos um paralelogramo $ABCD$, em que AB e CD são paralelos, e BC e AD também (veja desenho ilustrativo na Figura 10.8).

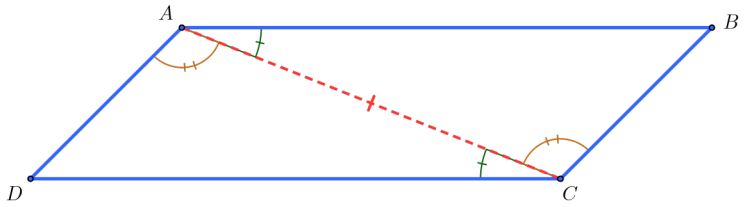


Figura 10.8. Ilustração da demonstração do Teorema 10.15.

Tomemos a diagonal AC. Considerando que ela é transversal a AB e a CD, a Proposição 10.7 nos diz que $\angle BAC \cong \angle DCA$, e considerando que ela é transversal a AD e a BC, a mesma Proposição nos diz que $\angle DAC \cong \angle BCA$. Somando esses ângulos vem $\hat{A} \cong \hat{C}$. Ainda os triângulos BAC e DCA têm uma correspondência ALA, e portanto são congruentes. Disto vem $\hat{B} \cong \hat{D}$, $AD = BC$ e $AB = CD$. Terminamos a demonstração. □

Note que para provar o Teorema 10.15 necessitamos da Proposição 10.7. Portanto esse Teorema depende do Axioma 16 das Paralelas. O mesmo acontece com o resultado seguinte.

Teorema 10.16. *Se dois lados opostos de um quadrilátero são congruentes e paralelos, então ele é um paralelogramo.*

Demonstração. Consideremos um quadrilátero $ABCD$, em que $AD = BC$ e são paralelos (confira a Figura 10.9). Em virtude do resultado do Problema 10.3.11, $ABCD$ é um quadrilátero convexo. Consideremos a diagonal BD. A Proposição 10.7 nos diz que $\angle ADB \cong \angle CBD$. Temos assim uma correspondência LAL entre ADB e CBD, de modo que $ADB \cong CBD$. Isso implica $\angle ABD \cong \angle CDB$, e o Teorema 10.4 permite afirmar que AB é paralela a CD. Provamos que $ABCD$ é um paralelogramo. □

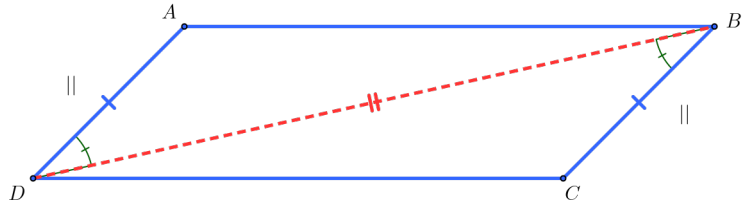


Figura 10.9. Ilustração da demonstração do Teorema 10.16.

Usamos isso para obter o importante

Teorema 10.17. *O segmento que liga os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e tem a metade de seu comprimento.*

Demonstração. Consideremos um triângulo ABC, e sejam D e E os pontos médios dos lados AB e AC, respectivamente. Queremos provar que DE é paralelo a BC e $DE = \frac{1}{2}BC$. Uma forma de fazer isso é construir um paralelogramo. Consideremos na semirreta $\overrightarrow{DE}$ o ponto F tal que $D - E - F$ e $DE = EF$. Se provarmos que $BCFD$ é um paralelogramo teremos tudo o que queremos. Confira desenho ilustrativo na Figura 10.10.

Temos $EFC \cong EDA$ pelo caso LAL. Uma primeira consequência é que $CF = AD$, e como já tínhamos $AD = BD$, segue que $BD = CF$. Uma segunda consequência de $EFC \cong EDA$ é que $\angle FCE \cong \angle DAE$. Olhando AC como uma transversal de AB e CF, o Teorema 10.4 garante que

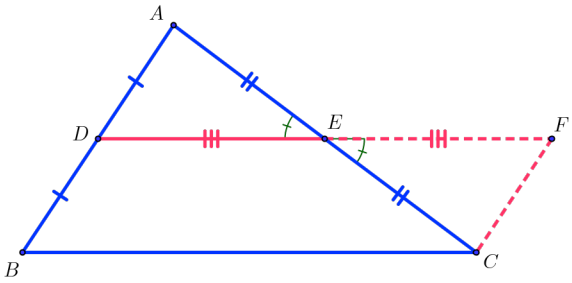


Figura 10.10. Ilustração da demonstração do Teorema 10.17.

esses segmentos são paralelos, pois $\hat{A} \cong \angle ACF$. Portanto o quadrilátero $BCFD$ tem dois lados opostos congruentes e paralelos. Em virtude do Teorema 10.16 ele é um paralelogramo. Disso já temos que DE é paralelo a BC. Ainda, em virtude do Teorema 10.15, temos $DF = BC$, do que segue $BC = 2DE$. Com isso terminamos. Note que usamos o Axioma 16. □

10.3 Problemas

Todas as justificativas deverão ter como base os axiomas e resultados das seções anteriores.

Problema 10.3.1. Está claro que, se duas retas se intersectam, então elas não são paralelas. Elas são reversas?

Problema 10.3.2. Examine a Geometria finita de quatro pontos definida no Problema 9.5.19, e veja se ela satisfaz o Axioma 16. Essa Geometria tem retas reversas?

Problema 10.3.3. Explique por que, em um plano, se duas retas são paralelas a uma terceira, então elas são paralelas entre si.

Problema 10.3.4. Explique por que, em um plano, se uma reta intersecta uma de duas retas paralelas, então ela intersecta a outra.

Problema 10.3.5. Explique por que, em um plano, se uma reta é perpendicular a uma de duas retas paralelas, então ela é perpendicular à outra. Você usou o Axioma 16 das Paralelas?

Problema 10.3.6. Demonstre a seguinte recíproca do Teorema 10.17. Considere um triângulo ABC e seja D o ponto médio de AB. Então a reta paralela a BC por D encontra AC no seu ponto médio. (Sugestão: Primero mostre que a paralela a BC por D intersecta AC. Depois considere o ponto médio E de AC e o segmento DE.)

Problema 10.3.7. Seja α um plano contendo uma reta r e um ponto P fora dela. Está claro, pelo Axioma 16, que existe uma única reta s em α que contém P e é paralela a r. Não poderia haver uma outra reta t, paralela a r e contendo P, mas fora do plano α? Faça um desenho ilustrativo.

Problema 10.3.8. Demonstre que, se a bissetriz de um ângulo externo de um triângulo é paralela a um dos seus lados, então ele é isósceles.

Problema 10.3.9. Construa dois triângulos não congruentes mas que obedecem a uma correspondência *AAA*. Com isso fica provado que a correspondência *AAA* entre triângulos não implica em sua congruência.

Problema 10.3.10. Use a sugestão dada pela Figura 10.11 para fazer uma demonstração do Teorema 10.8 um pouco diferente daquela dada no texto.

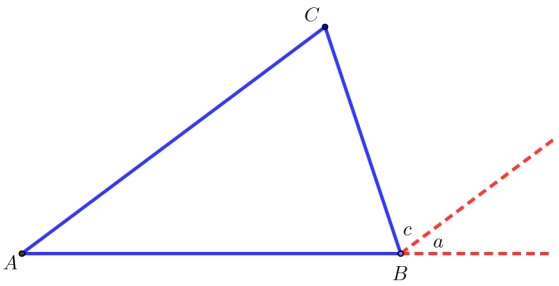


Figura 10.11. Sugestão para o Problema 10.3.10.

Problema 10.3.11. Explique por que, se um quadrilátero tem um par de lados opostos paralelos, então é convexo. Em particular, todo paralelogramo é convexo.

Problema 10.3.12. Mostre que, tomando uma diagonal qualquer de um quadrilátero convexo arbitrário, criamos dois triângulos de modo que a soma das medidas dos ângulos do quadrilátero é igual à soma das medidas dos ângulos dos dois triângulos. Conclua que a soma dos ângulos de um quadrilátero convexo qualquer é 360°. Investigue o que se pode afirmar para o caso em que o quadrilátero não é convexo.

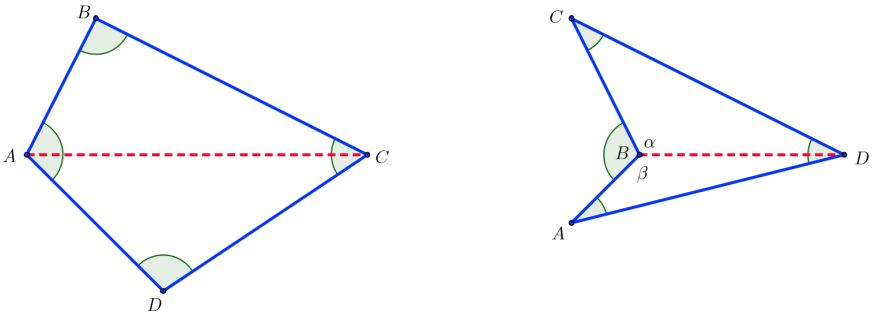


Figura 10.12. Desenhos relativos à solução do Problema 10.3.12.

Solução. Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo qualquer, e consideremos uma de suas diagonais, digamos AC. Pelo resultado do Problema 9.13.22 C é um ponto interior de $\angle BAD$, de modo que $m(\angle BAD) = m(\angle BAC) + m(\angle CAD)$. Da mesma forma se vê que $m(\angle BCD) = m(\angle BCA) + m(\angle ACD)$. Segue que a soma dos ângulos dos triângulos ABC e ACD é igual à soma dos ângulos do quadrilátero. Portanto a soma dos ângulos de um quadrilátero convexo qualquer é 360°. Confira ilustração na Figura 10.12, desenho da esquerda.

Por outro lado, seja $ABCD$ um quadrilátero não convexo, e, sem perda de generalidade, suponhamos que B seja o vértice reentrante, isto é, B e D estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{AC}$. Confira a Figura 10.12, desenho da direita, e o Problema 9.13.24.

A diagonal BD reparte $ABCD$ em dois triângulos CBD e ABD, mas agora a soma dos ângulos desses triângulos não é a soma dos ângulos do quadrilátero. Examinemos a situação em busca de outra propriedade.

Indicando $\alpha = m(\angle CBD)$ e $\beta = m(\angle ABD)$, temos $m(\hat{A}) + m(\hat{C}) + m(\hat{D}) + \alpha + \beta = 360°$. Vendo agora que $m(\hat{B}) + \alpha + \beta = 360°$ e combinando essa relação com a anterior vem

$$m(\hat{A}) + m(\hat{C}) + m(\hat{D}) = m(\hat{B})$$

Isto é, num quadrilátero não convexo, a medida do ângulo do vértice reentrante é igual à soma das medidas dos outros três ângulos.

Problema 10.3.13. Foi visto na página 66 que um retângulo é um quadrilátero plano com todos os ângulos retos. Prove que todo quadrilátero de Saccheri é um retângulo. Você usou o Axioma das paralelas? A "existência" de retângulos depende do Axioma 16?

Problema 10.3.14. Explique por que todo retângulo é um paralelogramo.

Problema 10.3.15. Explique por que se um paralelogramo tem um ângulo reto então todos são retos.

Problema 10.3.16. Se os quatro lados de um retângulo são congruentes, então ele é chamado de *quadrado*. Prove que existem quadrados na Geometria Euclidiana. Você usou o Axioma 16 das paralelas? A "existência" de quadrados depende do Axioma 16?

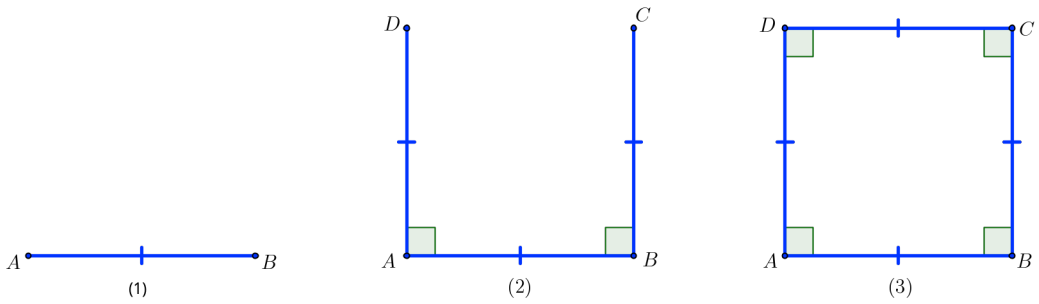


Figura 10.13. Construção de um quadrado.

Solução. Em um plano, tomamos um segmento AB de qualquer medida. Na reta perpendicular a AB por A tomamos um ponto D tal que $AD = AB$. Na reta perpendicular a AB por B tomamos um ponto C tal que C esteja no mesmo lado que D em relação a $\overleftrightarrow{AB}$ e tal que $BC = AB$. Notemos que $AD||BC$, por serem coplanares e perpendiculares à mesma reta. Portanto $ABCD$ é um quadrilátero com um par de lados paralelos e congruentes. Do resultado do Teorema 10.16 segue que $ABCD$ é um paralelogramo. Usando agora o Teorema 10.15 vemos que seus quatro lados são congruentes e todos os seus ângulos são retos. Portanto $ABCD$ é um retângulo com todos os lados congruentes, e assim é um quadrado. Confira na Figura 10.13 os passos dessa construção.

O Axioma das paralelas foi usado nas demonstrações dos Teoremas 10.15 e 10.16. Mesmo assim não podemos afirmar no momento que "existência" de quadrados depende do Axioma 16. Poderia haver uma forma diferente de construir quadrados que não dependa desse axioma.

Problema 10.3.17. Seja $ABCD$ um paralelogramo. Sejam M e N os pontos médios de AB e CD, respectivamente. Prove que MD é paralelo a BN.

Problema 10.3.18. Demonstre que, se são congruentes os lados dos dois pares opostos de um quadrilátero, então ele é um paralelogramo.

Solução. Suponhamos primeiro que o quadrilátero é convexo. Temos então a situação ilustrada na Figura 10.14, à esquerda. O quadrilátero é $ABCD$ com $AB = CD$ e $BC = DA$. Por LLL temos $ABC \cong CDA$. Disso segue $\angle BAC \cong \angle DCA$. Olhando $\overleftrightarrow{AC}$ como uma transversal de AB e de CD vemos que ela forma ângulos correspondentes congruentes, e assim $AB \parallel CD$. Do mesmo modo se vê que $AD \parallel BC$, e $ABCD$ é um paralelogramo.

Mostremos agora que não é possível que o quadrilátero seja não convexo. Suponhamos que o seja, e consideremos C como o vértice reentrante. Confira na Figura 10.14, à direita, essa situação (impossível). Por LLL temos $ABC \cong CDA$. Isso implica $\alpha = \delta$ e $\beta = \gamma$. Como BCD é um triângulo, temos $m(\hat{C}) < 180°$, logo $\gamma + \delta > 180°$. Como ABD é um triângulo, temos $m(\hat{A}) < 180°$, logo $\alpha + \beta < 180°$. Obtivemos um contradição, e o quadrilátero é convexo.

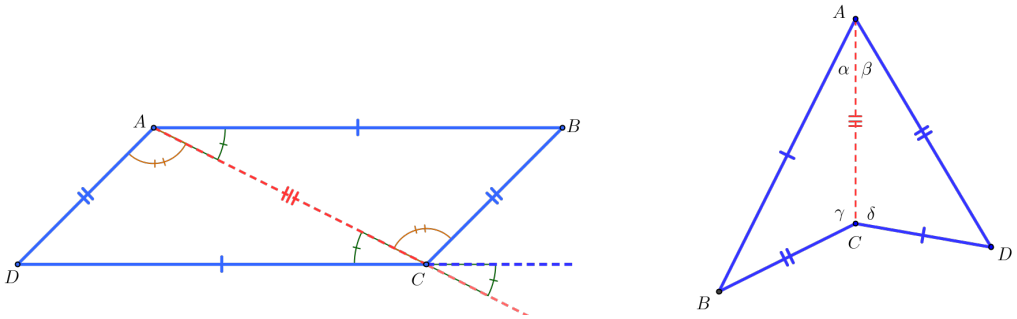


Figura 10.14. Os dois casos do Problema 10.3.18.

Problema 10.3.19. Demonstre que, se são congruentes os ângulos dos dois pares opostos de um quadrilátero, então ele é um paralelogramo.

Problema 10.3.20. Um *losango* é um quadrilátero cujos quatro lados são congruentes. Explique por que todo losango é um paralelogramo.

Problema 10.3.21. Explique por que na Geometria Euclidiana é possível construir retângulos não quadrados, paralelogramos não retângulos e losangos não quadrados.

Problema 10.3.22. Verifique a veracidade ou a falsidade da seguinte afirmação: "Se um quadrilátero tem um par de lados opostos paralelos e o outro par com lados congruentes, então ele é um paralelogramo".

Problema 10.3.23. Prove que as diagonais de um paralelogramo se dividem ao meio. Reciprocamente, se as diagonais de um quadrilátero se dividem ao meio, então ele é um paralelogramo.

Problema 10.3.24. **a)** Explique por que as diagonais de um quadrado são congruentes e perpendiculares. **b)** Verifique a veracidade ou a falsidade da recíproca. A afirmação recíproca pode ser: "Se as diagonais de um quadrilátero são congruentes e perpendiculares, então ele é um quadrado".

Problema 10.3.25. **a)** Explique por que as diagonais de um quadrado são bissetrizes dos ângulos correspondentes. **b)** Verifique a veracidade ou a falsidade da recíproca. A afirmação recíproca pode ser: "Se as diagonais de um quadrilátero são bissetrizes dos ângulos correspondentes, então ele é um quadrado".

Problema 10.3.26. Seja $ABCD$ um paralelogramo com $AD > AB$. Prove que a bissetriz de $\hat{A}$ encontra o interior de BC em um ponto G, e a bissetriz de $\hat{B}$ encontra o interior de AD em um ponto H. Ainda, $ABGH$ é um losango.

Problema 10.3.27. De um quadrilátero sabe-se que suas diagonais se dividem ao meio e são congruentes. O que se pode afirmar sobre ele?

Problema 10.3.28. Demonstre que em um losango as diagonais são perpendiculares e se dividem ao meio. Enuncie a recíproca dessa afirmação. Ela é verdadeira?

Problema 10.3.29. Explique por que o segmento que une os pontos médios de dois lados opostos quaisquer de um paralelogramo contém o ponto de encontro de suas diagonais, e esse ponto é o ponto médio daquele segmento.

Problema 10.3.30. Prove que a mediana em relação à hipotenusa de um triângulo retângulo tem metade do seu comprimento.

Problema 10.3.31. Explique por que existem triângulos retângulos com um ângulo de medida x, para qualquer número real dado x entre 0 e 90.

Problema 10.3.32. Prove que, se um ângulo de um triângulo retângulo mede 30°, então a medida do lado oposto é metade do comprimento da hipotenusa. Enuncie a recíproca. Ela é verdadeira?

Problema 10.3.33. Demonstre que os pontos médios dos lados de um quadrilátero qualquer são vértices de um paralelogramo. E se o quadrilátero não for coplanar?

Problema 10.3.34. **a)** Mostre que, em um triângulo qualquer, as mediatrizes de dois lados quaisquer se intersectam em um ponto. Caracterize esse ponto com uma frase. **b)** Explique por que as três mediatrizes de um triângulo qualquer se encontram em um único ponto. Esse ponto é denominado *circuncentro*. Qual é o motivo desse nome?

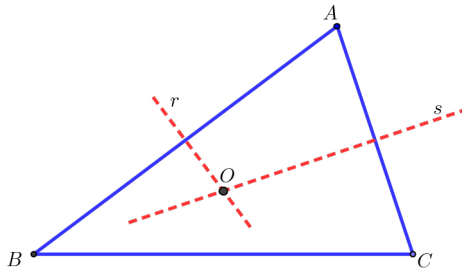


Figura 10.15. Triângulo e duas mediatrizes.

Solução parcial de a) Seja ABC um triângulo, e sejam r e s as mediatrizes de dois de seus lados, digamos, de AB e AC, respectivamente. Confira ilustração na Figura 10.15.

Se $r \cap s = \emptyset$ então $r||s$. Como $\overleftrightarrow{AC} \perp s$ vem, pelo Problema 10.3.5, que $\overleftrightarrow{AC} \perp r$. Portanto $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$ são perpendiculares a r pelo mesmo ponto A, de modo que são a mesma reta. Mas isso contraria o fato de que os pontos A, B e C não são colineares. Segue que r e s se intersectam.

Problema 10.3.35. Dado um triângulo qualquer, a soma das medianas é menor do que o seu perímetro. Sugestão: dado um triângulo ABC, faça uma cópia $A'BC$ conveniente. Confira a Figura 10.16.

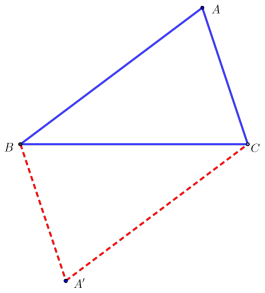


Figura 10.16. Propriedade das medianas.

Problema 10.3.36. Considere um triângulo isósceles ABC de base BC e um ponto P em BC diferente de B e de C. Sejam D o ponto de AB tal que PD é paralelo a AC, e E o ponto de AC tal que PE é paralelo a AB. Prove que o perímetro do paralelogramo $ADPE$ é $AB + AC$.

Problema 10.3.37. Considere um triângulo isósceles ABC de base BC e um ponto P em BC diferente de B e de C. Sejam D o ponto de AB tal que PD é perpendicular a AB, e E o ponto de AC tal que PE é perpendicular a AC. Prove que $PD + PE$ é igual à altura correspondente a qualquer um dos lados laterais de ABC.

Problema 10.3.38. Considere o quadrado $ABCD$. Sejam E, F, G e H os pontos médios de AB, BC, CD e DA, respecticamente. Prove que é um quadrado o quadrilátero cujos vértices são as interseções de AF, BG, CH e DE.

Problema 10.3.39. Explique por que as afirmações sobre unicidade contidas nos Teoremas 9.30 e 9.20 não implicam o Axioma 16 das Paralelas. Mais exatamente, considere a seguinte "demonstração" do axioma das paralelas: *Sejam r uma reta e P um ponto fora dela. Seja s a* ***única*** *reta perpendicular a r por P. Então também é* ***única*** *reta t perpendicular a s por P. Como t é paralela a r, segue que a paralela é única.* O que está errado?

Problema 10.3.40. Suponha que o Axioma 16 foi substituído pela seguinte afirmação "Se um segmento liga os pontos médios de dois lados de um triângulo, então sua medida é a metade do terceiro lado". Mostre como se poderia usar essa afirmação para provar que a soma dos ângulos de um triângulo qualquer é 180°.

Problema 10.3.41. Talvez possamos encontrar outras demonstrações de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°. Quem sabe existe alguma demonstração que não depende do axioma das paralelas, e que escapou da atenção dos excelentes matemáticos que estudaram o problema. Examine a demonstração abaixo, e veja se ela utiliza o axioma das paralelas.

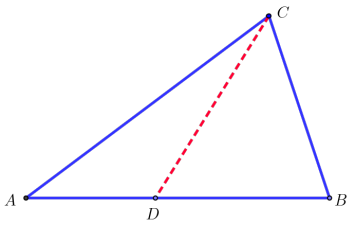


Figura 10.17. Problema 10.3.41.

Vamos chamar de S a soma dos ângulos de um triângulo qualquer. Queremos provar que $S = 180°$. Seja ABC um triângulo, e seja D um ponto do lado AB diferente de A e de B. Consideremos a ceviana CD. Confira a Figura 10.17.

Temos $\hat{A}+\hat{B}+\angle ACB = S$, $\hat{A}+\angle ACD+\angle ADC = S$ e $\hat{B}+\angle BCD+\angle BDC = S$. Somando membro a membro as duas últimas relações vem

$$\hat{A}+\hat{B}+\angle ACD+\angle BCD+\angle ADC+\angle BDC = 2S.$$

Em virtude do Axioma 13 da adição de ângulos temos $\angle ACD+\angle BCD = \angle ACB$. Em virtude do Axioma 14 do suplemento temos $\angle ADC+\angle BDC = 180°$, pois esses ângulos formam um par linear. Segue que

$$\hat{A}+\hat{B}+\angle ACB+180° = 2S \Rightarrow S+180° = 2S \Rightarrow S = 180°.$$

Problema 10.3.42. Um rio tem margens paralelas AB e CD. Deseja-se ligar a cidade 1 com a cidade 2, situadas em lados opostos do rio, construindo uma ponte (perpendicular às margens do rio) e ligando as cidades à ponte com estradas retilíneas. Determine geometricamente em que ponto da margem do rio deve ser construída a ponte de modo que a ligação entre as duas cidades seja a de menor distância possível. Confira a Figura 10.18.

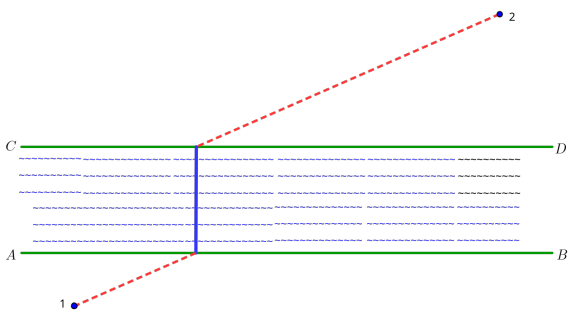


Figura 10.18. Figura do Problema 10.3.42.

10.4 Semelhança e aplicações

Iniciamos com alguns resultados que permitem a construção da Teoria das Semelhanças, uma das mais importantes consequências do conceito de paralelelismo de retas.

Proposição 10.18. *Sejam r, s e t três retas paralelas que intersectam outras duas retas m e n nos pontos A, B, C, e nos pontos A', B', C', respectivamente. Se B está entre A e C, então B' está entre A' e C'. Ainda, se $AB = BC$, então $A'B' = B'C'$.*

Demonstração. A Figura 10.19 ilustra a demonstração. Começamos provando que B' está entre A' e C'. De fato, como B está entre A e C, ocorre que A e C estão em lados opostos da reta s. Como A' está do mesmo lado que A e C' está do mesmo lado que C, vem que A' e C' estão em lados opostos da reta s. Assim o segmento $A'C'$ intersecta s, e já sabemos que isso ocorre em B'. Segue que B' está entre A' e C'.

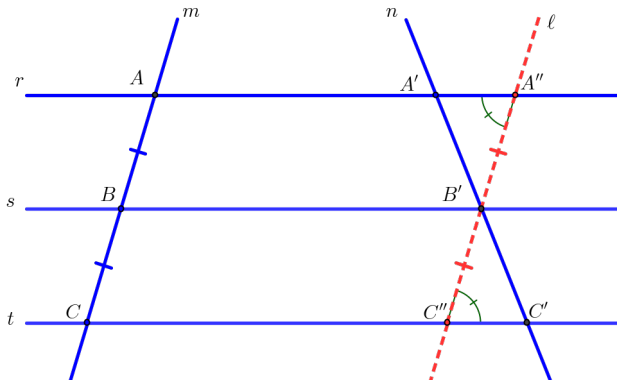


Figura 10.19. Ilustração da Proposição 10.18.

Suponhamos agora que $AB = BC$. Se m é paralela a n então $ABB'A'$ e $BCC'B'$ são paralelogramos e $A'B' = AB$ e $B'C' = BC$, o que implica $A'B' = B'C'$.

Suponhamos que m não é paralela a n. Consideremos a reta l paralela a m por B', e sejam A'' e C'' os pontos em que l intersecta r e t, respectivamente. Como $ABB'A''$ é um paralelogramo, temos $AB = A''B'$. Do mesmo modo $BC = C''B'$. Da hipótese segue que $A''B' = C''B'$. Temos ainda $m(\angle A'B'A'') = m(\angle C'B'C'')$ por serem opostos pelo vértice e $m(\angle A'A''B') = m(\angle C'C''B')$ por serem ângulos alternos internos determinados por duas paralelas e uma transversal. Assim os triângulos $A'B'A''$ e $C'B'C''$ guardam uma correspondência ALA, portanto são congruentes. Disso resulta $A'B' = B'C'$, como queríamos demonstrar. □

Observe que essa demonstração utiliza o Axioma 16 das Paralelas. Segue uma generalização:

Corolário 10.19. *Sejam r_1, r_2, ..., r_k k retas paralelas que intersectam outras duas retas m e n nos pontos A_1, A_2, ..., A_k e nos pontos A'_1, A'_2, ..., A'_k, respectivamente. Se A_i está entre A_{i-1} e A_{i+1}, então A'_i está entre A'_{i-1} e A'_{i+1}, para todo $1 < i < k$. Ainda, se $A_1A_2 = A_2A_3 = \cdots = A_{k-1}A_k$, então $A'_1A'_2 = A'_2A'_3 = \cdots = A'_{k-1}A'_k$.*

Demonstração. Assumindo todas as hipóteses, aplicamos primeiro a Proposição 10.18 às retas paralelas r_1, r_2 e r_3, e concluímos que A'_2 está entre A'_1 e A'_3, e que $A'_1A'_2 = A'_2A'_3$. Em seguida fazemos o mesmo com as retas r_2, r_3 e r_4, e assim por diante, até r_{k-2}, r_{k-1} e r_k, e obtemos todas as propriedades requeridas. □

Vejamos agora a

Definição 10.20. Seja ABC um triângulo e consideremos uma reta que intersecta AB e AC nos pontos interiores D e E, respectivamente. Dizemos que essa reta (ou o segmento DE) *divide AB e AC na mesma razão* quando

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}.$$

Confira ilustração na Figura 10.20.

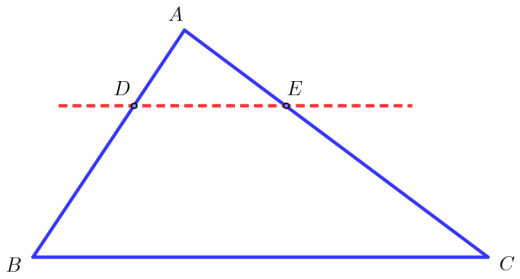


Figura 10.20. Ilustração da Definição 10.20.

O seguinte resultado tem importância central na Teoria das Semelhanças. Sua demonstração utiliza propriedades fundamentais dos números reais. Confira [5], página 95, ou [68], página 66. Seguiremos de perto a demonstração deste último.

Teorema 10.21 (Teorema Fundamental da Proporcionalidade)**.** *Se uma reta, paralela a um dos lados de um triângulo, corta os outros dois lados em pontos interiores, então ela os divide na mesma razão.*

Demonstração. Seja ABC um triângulo e consideremos uma reta paralela a BC e que intersecta AB e AC nos pontos interiores D e E, respectivamente. Queremos provar que $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$.

Tomemos um inteiro positivo m. Seja $d = AD/m$. Consideremos na semirreta $\overrightarrow{AB}$ pontos $A_0 = A$, A_1, A_2, ..., A_m, A_{m+1}, ..., tais que $A_iA_{i+1} = d$ para todo $i \geq 0$ e A_i está entre A_{i-1} e A_{i+1} para todo $0 < i$. Notemos que $A_m = D$ e que $AD = md$. Seja n o inteiro positivo tal que $nd \leq AB < (n+1)d$. Como $AD < AB$ temos $m \leq n$. Confira a Figura 10.21.

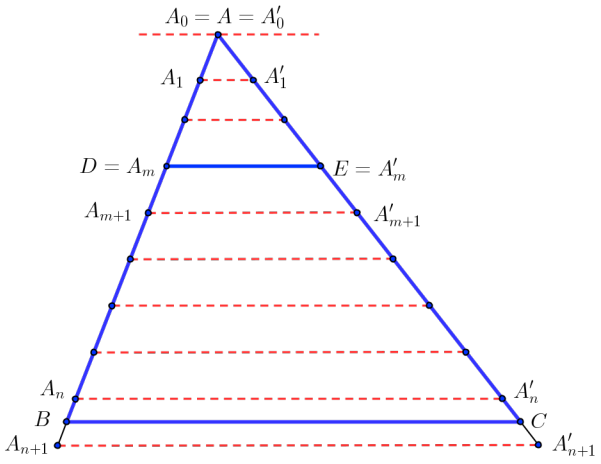


Figura 10.21. Ilustração da demonstração de 10.21.

Tracemos paralelas a BC por A_0, A_1, A_2, ..., que encontram a semirreta $\overrightarrow{AC}$ nos pontos $A'_0 = A$, A'_1, A'_2, ... respectivamente. Sabemos, do Colário 10.19 que A'_i está entre A'_{i-1} e A'_{i+1}, para todo $1 < i$, e que $A'_iA'_{i+1} = c$ para todo $i \geq 0$, para algum número positivo c. Em particular $nc \leq AC < (n+1)c$, $E = A'_m$ e $AE = mc$.

Dividindo as expressões $nd \leq AB < (n+1)d$ e $nc \leq AC < (n+1)c$ por $md = AD$ e $mc = AE$, respectivamente, obtemos

$$\frac{n}{m} \leq \frac{AB}{AD} < \frac{n+1}{m} \quad \text{e} \quad \frac{n}{m} \leq \frac{AC}{AE} < \frac{n+1}{m}. \quad (*)$$

De $(*)$ temos

$$\frac{AB}{AD} < \frac{n+1}{m} \text{ e } \frac{n}{m} \leq \frac{AC}{AE} \Rightarrow \frac{AB}{AD} < \frac{n+1}{m} \text{ e } -\frac{AC}{AE} \leq -\frac{n}{m} \Rightarrow \frac{AB}{AD} - \frac{AC}{AE} < \frac{n+1}{m} - \frac{n}{m} = \frac{1}{m}.$$

Usando $(*)$ novamente temos

$$\frac{n}{m} \leq \frac{AB}{AD} \quad \text{e} \quad \frac{AC}{AE} < \frac{n+1}{m} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{m} = \frac{n}{m} - \frac{n+1}{m} < \frac{AB}{AD} - \frac{AC}{AE}.$$

Disto segue

$$\left| \frac{AB}{AD} - \frac{AC}{AE} \right| < \frac{1}{m}.$$

Isso vale para todo m inteiro positivo. Mas isso só ocorre se

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE},$$

e terminamos. □

Fazendo certas manipulações conseguimos outras relações. Por exemplo:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} \Rightarrow \frac{AB}{AD} - 1 = \frac{AC}{AE} - 1 \Rightarrow \frac{AB - AD}{AD} = \frac{AC - AE}{AE} \Rightarrow \frac{BD}{AD} = \frac{EC}{AE} \Rightarrow \frac{AD}{BD} = \frac{AE}{CE}.$$

O resultado desenvolvido a seguir é uma generalização do anterior.

Teorema 10.22 (Teorema de Tales)**.** *Se duas retas são transversais a três ou mais retas paralelas, então a razão entre os comprimentos de dois segmentos quaisquer determinados sobre uma delas é igual à razão entre os comprimentos dos segmentos correspondentes determinados sobre a outra.*

Demonstração. Sejam m e n retas transversais a retas paralelas r, s, t, ... Se m e n são paralelas, então dois segmentos quaisquer determinados sobre m e n por duas das retas paralelas são lados opostos de um paralelogramo, de modo que são congruentes. Com isso obtemos o resultado do Teorema.

Suponhamos que m e n não são paralelas. A Figura 10.22 ilustra a situação. Por $m \cap r$, $m \cap s$, etc. tomamos a reta l paralela a n. Pelo que foi observado são congruentes segmentos correspondentes determinados sobre l e n, de modo que para provar a afirmação basta considerar as retas m e l. Usando o Teorema Fundamental da Proporcionalidade 10.21 obtemos que a razão entre os comprimentos de dois segmentos quaisquer determinados sobre m é igual à razão entre os comprimentos dos segmentos correspondentes determinados sobre l. Com isso segue o resultado. □

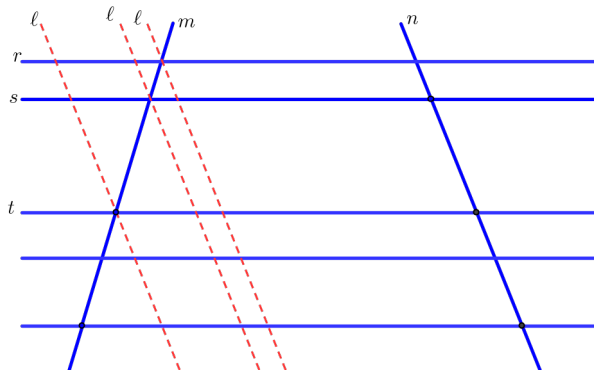


Figura 10.22. Ilustração do Teorema de Tales 10.22.

Precisamos também da recíproca do Teorema 10.21:

Teorema 10.23. *Se uma reta divide dois lados de um triângulo na mesma razão então ela é paralela ao terceiro lado.*

Demonstração. Seja ABC um triângulo qualquer e consideremos uma reta que intersecta os lados AB e AC nos pontos interiores D e E, respectivamente, e divide esses lados na mesma razão, isto é, $AB/AD = AC/AE$. Seja DE' o segmento paralelo a BC com E' entre A e C. Em virtude do Teorema 10.21 temos $AB/AD = AC/AE'$. Das duas relações acima vemos que $AE = AC \cdot AD/AB$ e $AE' = AC \cdot AD/AB$, portanto $AE = AE'$. Considerando que E e E' são pontos de AC concluímos que $E = E'$. Logo DE é paralelo a BC. Veja ilustração dessa demonstração na Figura 10.23. □

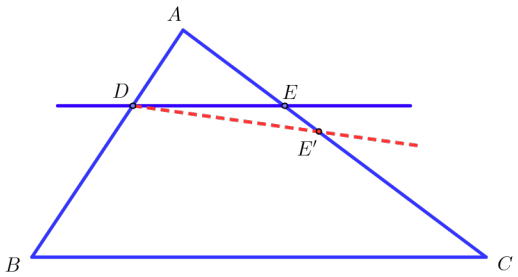


Figura 10.23. Ilustração da demonstração do Teorema 10.23.

Vejamos agora os fundamentos da Teoria de Semelhança de triângulos.

Definições 10.24. Dizemos que os triângulos ABC e DEF são *semelhantes*, e escrevemos $ABC \sim DEF$, quando existir uma correspondência $ABC \leftrightarrow DEF$ entre seus lados e ângulos satisfazendo as seis condições seguintes:

$$\hat{A} \cong \hat{D}, \qquad \hat{B} \cong \hat{E}, \qquad \hat{C} \cong \hat{F},$$

e

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}.$$

Se dois triângulos são semelhantes, o quociente comum entre as medidas dos lados correspondentes é chamado *razão de semelhança* entre eles.

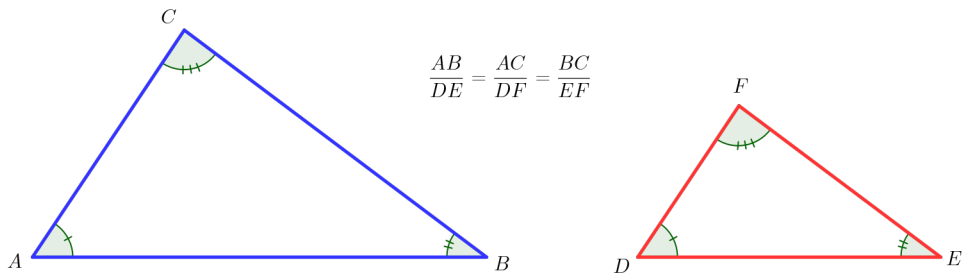


Figura 10.24. Ilustração da definição 10.24.

Procedemos agora ao estudo das condições reduzidas para semelhança de triângulos.

Teorema 10.25. *Cada uma das seguintes condições é suficiente para que os triângulos ABC e DEF sejam semelhantes:*

i) $\hat{A} \cong \hat{D}$ *e* $\hat{B} \cong \hat{E}$ *(caso de semelhança AA);*

ii) $\hat{A} \cong \hat{D}$ *e* $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ *(caso de semelhança LAL);*

iii) $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$ *(caso de semelhança LLL).*

Demonstração. Começamos demonstrando i). Sejam ABC e DEF triângulos tais que $\hat{A} \cong \hat{D}$ e $\hat{B} \cong \hat{E}$. Primeiro observamos que $\hat{C} \cong \hat{F}$, pois a soma dos ângulos de qualquer triângulo é 180°. Consideremos em $\overrightarrow{AB}$ um ponto E' tal que $AE' = DE$, e em $\overrightarrow{AC}$ um ponto F' tal que $AF' = DF$. Note que os triângulos DEF e $AE'F'$ têm uma correspondência LAL, portanto são congruentes. Observamos que se $E' = B$ ou $F' = C$ então $ABC \cong DEF$ do que segue $ABC \sim DEF$, e terminamos. Suponhamos que $E' \neq B$ e $F' \neq C$ (a Figura 10.25 ilustra o caso em que E' e F' são pontos interiores dos segmentos AB e AC, respectivamente).

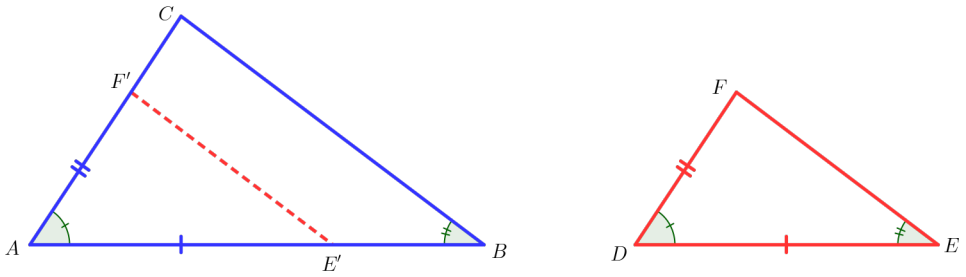


Figura 10.25. Ilustração da demonstração do Teorema 10.25 parte i).

De $AE'F' \cong DEF$ segue que $m(\angle AE'F') = m(\angle DEF)$. Por hipótese temos $m(\angle DEF) = m(\angle ABC)$, logo $m(\angle AE'F') = m(\angle ABC)$. Mas esses são ângulos correspondentes de BC e $E'F'$ em relação à transversal AB, de modo que BC e $E'F'$ são paralelas. Usando agora o Teorema 10.21, temos $AB/AE' = AC/AF'$. Mas da congruência $DEF \cong AE'F'$, já observada, temos $AE' = DE$ e $AF' = DF$, e fica provado que $AB/DE = AC/DF$.

De modo inteiramente análogo se demonstra que $AB/DE = BC/EF$. Com isso obtemos todas as condições para que $ABC \sim DEF$. □

Demonstração da parte ii) do Teorema 10.25:

Sejam ABC e DEF triângulos tais que $\hat{A} \cong \hat{D}$ e $AB/DE = AC/DF$. Consideremos em $\overrightarrow{AB}$ um ponto E' tal que $AE' = DE$, e em $\overrightarrow{AC}$ um ponto F' tal que $AF' = DF$. Da hipótese $AB/DE = AC/DF$

temos $AB/AE' = AC/AF'$. Usando agora 10.23 temos que BC e $E'F'$ são paralelas, do que segue $m(\angle AE'F') = m(\angle ABC)$. Aplicando a parte i) aos triângulos ABC e $AE'F'$ vemos que eles são semelhantes. Como $AE'F' \cong DEF$ segue que $ABC \sim DEF$.

Demonstração da parte iii) do Teorema 10.25:

Sejam ABC e DEF triângulos tais que $AB/DE = AC/DF = BC/EF$. Consideremos em $\overrightarrow{AB}$ um ponto E' tal que $AE' = DE$, e em $\overrightarrow{AC}$ um ponto F' tal que $AF' = DF$. Substituindo em $AB/DE = AC/DF$ vem que $AB/AE' = AC/AF'$. Usando isso e mais o fato de que $\hat{A} \cong \hat{A}$ temos, pelo caso de semelhança LAL, que $ABC \sim AE'F'$. Dessa semelhança segue que $E'F'/BC = AE'/AB$, ou $E'F' = BC \cdot AE'/AB$. Por outro lado, da hipótese $AB/DE = BC/EF$ vem que $EF = BC \cdot DE/AB$. Assim $E'F' = EF$. Obtemos $AE'F' \cong DEF$ pelo caso de congruência LLL. Como já temos $ABC \sim AE'F'$ resulta $ABC \sim DEF$. □

A Teoria de Semelhança de Triângulos tem inúmeras aplicações. Vejamos algumas, iniciando com propriedades do triângulo retângulo.

Proposição 10.26. *Usamos as notações da Figura 10.26, em que ABC é um triângulo retângulo com hipotenusa $BC = a$, $AB = c$ e $AC = b$ são os catetos, $AD = h$ é altura, $BD = m$ e $CD = n$. Então*

$$h^2 = mn, \qquad b^2 = na, \qquad c^2 = ma \qquad e \qquad ah = bc.$$

Demonstração. Observando os triângulos ADB, CDA e CAB, vemos que $CDA \sim CAB$ pelo caso AA, pois têm $\hat{C}$ como ângulo comum e cada um tem um ângulo reto. Da mesma forma se tem $ADB \sim CAB$. Por transitividade segue também que $ADB \sim CDA$.

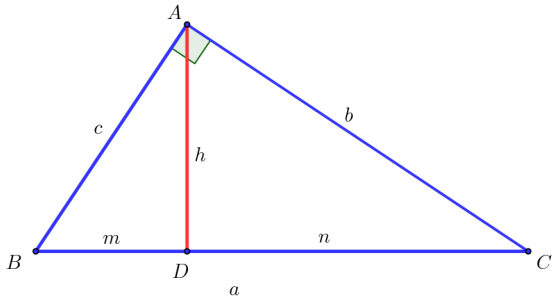


Figura 10.26. Relações métricas no triângulo retângulo.

Várias relações podem ser obtidas, sendo as mais importantes:

$$ADB \sim CDA \Rightarrow \frac{AD}{CD} = \frac{BD}{AD} = \frac{AB}{AC} \qquad \Rightarrow \frac{h}{n} = \frac{m}{h} = \frac{c}{b} \Rightarrow h^2 = mn; \tag{10.1}$$

$$CDA \sim CAB \Rightarrow \frac{CD}{AC} = \frac{AD}{AB} = \frac{AC}{BC} \qquad \Rightarrow \frac{n}{b} = \frac{h}{c} = \frac{b}{a} \Rightarrow b^2 = na; \tag{10.2}$$

$$ADB \sim CAB \Rightarrow \frac{AD}{BC} = \frac{BD}{AB} = \frac{AB}{BC} \qquad \Rightarrow \frac{h}{b} = \frac{m}{c} = \frac{c}{a} \Rightarrow c^2 = ma \quad \text{e} \quad ah = bc. \tag{10.3}$$

□

Em particular, em todo triângulo retângulo a altura do vértice do ângulo reto é a média geométrica das projeções dos catetos sobre a hipotenusa.

De imediato temos o celebrado

Teorema 10.27. *[Teorema de Pitágoras] Em qualquer triângulo retângulo o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.*

Demonstração. Tomando como referência as notações da Figura 10.26, da Proposição 10.26 temos $b^2 = na$ e $c^2 = ma$. Somando esses relações termo a termo vem $b^2 + c^2 = na + ma = (n+m)a = a^2$. Confira ilustração na Figura 10.27. □

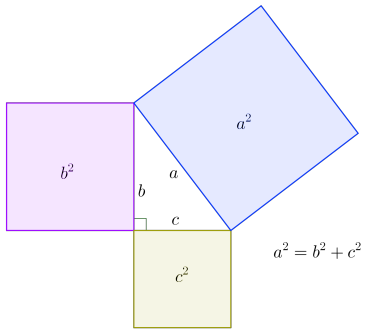


Figura 10.27. Ilustração do Teorema de Pitágoras.

A teoria de semelhanças de triângulos nos dá ensejo à construção da trigonometria. A observação inicial é a seguinte. Consideremos duas semirretas de mesma origem O formando um ângulo agudo. Marcamos em uma das semirretas pontos A_1, A_2, A_3, ... e tomamos as perpendiculares a ela por esses pontos. Essas perpendiculares encontram a outra semirreta em pontos B_1, B_2, B_3, ... obtendo os triângulos OA_1B_1, OA_2B_2, OA_3B_3, ... que são semelhantes pelo caso AA. Confira a Figura 10.28.

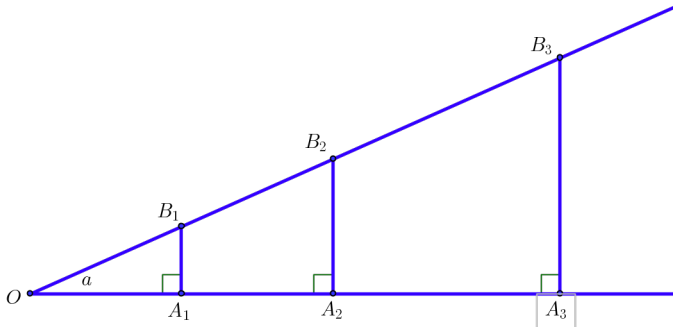


Figura 10.28. Origem da trigonometria.

Uma implicação é

$$\frac{A_1B_1}{OB_1} = \frac{A_2B_2}{OB_2} = \frac{A_3B_3}{OB_3} = \dots$$

A essa constante comum denominamos seno do ângulo dado inicialmente. Considerando as outras razões temos outras constantes, que também recebem nomes específicos. O conhecimento dessas constantes nos permite obter informações sobre distâncias inacessíveis, pelo que essa ideia é muito aplicada na astronomia e em outras ciências.

A definição formal dessas razões é melhor situada como segue. Dada uma circunferência e um diâmetro AB, os seus pontos que estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{AB}$ juntamente com os pontos A e B formam uma *semicircunferência*.

Definições 10.28. Consideremos uma circunferência de centro O e um diâmetro AB, e consideremos uma das semicircunferências determinadas por AB. Seja C um ponto arbitrário dessa semicircunferência, com $C \neq A$ e $C \neq B$. Indicamos por a o ângulo $\angle BOC$. Seja D o pé da perpendicular de C a $\overline{AB}$ (confira a Figura 10.29). Definimos os seguintes valores, chamados *arcos trigonométricos* de a:

$\operatorname{sen}(a) = \frac{\overline{CD}}{\overline{OC}}$, denominado *seno* de a;

$\cos(a) = \frac{\overline{OD}}{\overline{OC}}$, denominado *cosseno* de a, se a é agudo, e

$\cos(a) = -\frac{\overline{OD}}{\overline{OC}}$ se a é obtuso, e

$\cos(a) = 0$ se a é reto;

$\operatorname{tg}(a) = \frac{\operatorname{sen}(a)}{\cos(a)}$, denominado *tangente* de a, definida para a não reto.

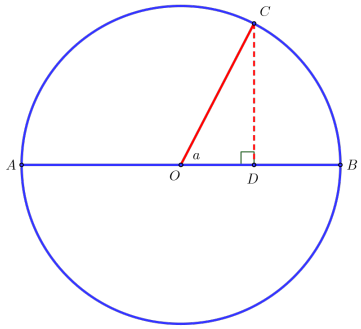


Figura 10.29. Definição dos arcos trigonométricos.

Os três teoremas seguintes resumem as principais relações entre os arcos trigonométricos e entre esses e outros elementos do triângulo.

Teorema 10.29. *Qualquer que seja o ângulo a valem as fórmulas:*

$$\operatorname{sen}(a)^2 + \cos(a)^2 = 1; \quad \operatorname{sen}(90^\circ - a) = \cos(a); \quad \cos(90^\circ - a) = \operatorname{sen}(a);$$

$$\operatorname{tg}(90^\circ - a) = 1/tg(a); \quad \operatorname{sen}(180^\circ - a) = \operatorname{sen}(a); \quad \cos(180^\circ - a) = -\cos(a).$$

Teorema 10.30. *Quaisquer que sejam os ângulos agudos a e b valem as fórmulas:*

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b);$$

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen}(a)\cos(b) - \cos(a)\operatorname{sen}(b).$$

Teorema 10.31 (Lei dos cossenos)**.** *Qualquer que seja o triângulo ABC vale a fórmula*

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos(\hat{C}).$$

Demonstração. Solicitada no Problema 10.5.16. Uma aplicação do Teorema de Pitágoras. □

10.5 Problemas

Todas as justificativas deverão ter como base os axiomas e resultados das seções anteriores.

Problema 10.5.1. Demonstre que se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h}$ então

$$\frac{a}{b} = \frac{a+c+e+g}{b+d+f+h} = \frac{c+e+g}{d+f+h} = \frac{e+g}{f+h} = \frac{a+g}{b+h} = \ldots$$

Problema 10.5.2. Os lados de um triângulo têm medidas 5, 8 e 11. Um triângulo semelhante a ele tem perímetro 48. Calcule a razão de semelhança e as medidas dos lados desse segundo triângulo.

Problema 10.5.3. Dado um triângulo, considere um segundo triângulo cujos vértices são os pontos médios dos lados do primeiro. Explique por que os dois triângulos são semelhantes.

Problema 10.5.4. Demonstre o seguinte caso particular do Teorema 10.22. Na Figura 10.30 as retas r, s, t e u são paralelas, e m e n são transversais a elas. Os números a, b, etc. são as medidas dos segmentos determinados sobre as transversais por duas paralelas consecutivas. Então $a/c = d/f$.

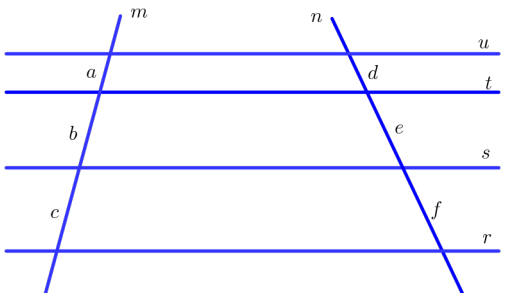


Figura 10.30. Desenho para o Problema 10.5.4.

Problema 10.5.5. Dado um triângulo ABC, sejam D um ponto do interior de AB e E um ponto do interior de AC, de modo que $DE||BC$. Do Teorema Fundamental da Proporcionalidade 10.21 segue que $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$. O que ocorre com o terceiro lado? Vale que $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$? Confira a Figura 10.31.

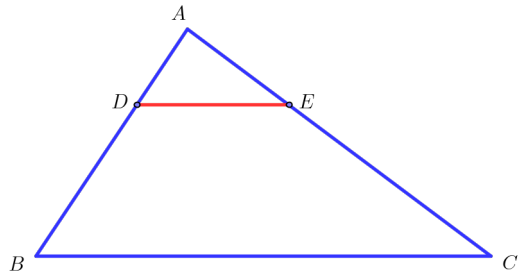


Figura 10.31. Ilustração do Problema 10.5.5.

Problema 10.5.6. Dado um triângulo ABC, sejam D, E e F pontos de AC, AB e BC, respectivamente, tais que $ADFE$ é um paralelogramo. Prove que $AE \cdot AD = BE \cdot CD$. Confira a Figura 10.32.

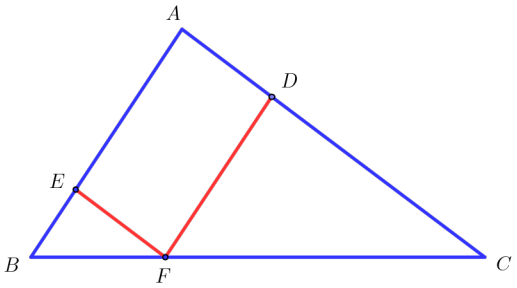


Figura 10.32. Ilustração do Problema 10.5.6.

Solução. Como $DF||AB$ vem $ABC \sim DFC$ e como $EF||AC$ vem $BAC \sim BEF$. Segue, respectivamente,

$$\frac{AC}{CD} = \frac{BC}{FC} \Rightarrow \frac{AC}{CD} - 1 = \frac{BC}{FC} - 1 \Rightarrow \frac{AD}{CD} = \frac{BF}{FC}$$

e

$$\frac{AB}{BE} = \frac{BC}{BF} \Rightarrow \frac{AB}{BE} - 1 = \frac{BC}{BF} - 1 \Rightarrow \frac{AE}{BE} = \frac{CF}{BF}$$

Com isso provamos que

$$\frac{AE \cdot AD}{BE \cdot CD} = \frac{AE}{BE}\,\frac{AD}{CD} = \frac{FC}{BF}\,\frac{BF}{FC} = 1$$

e disso segue o resultado. □

Problema 10.5.7. Dado um triângulo isósceles ABC de base BC, sejam D um ponto do interior de BC e $E \in \overrightarrow{CA}$ e $F \in \overrightarrow{BA}$ tais que $DE \perp \overrightarrow{CA}$ e $DF \perp \overrightarrow{BA}$. Mostre que DE e DF estão na mesma proporção que os segmentos de BC determinados por D. Confira a Figura 10.33.

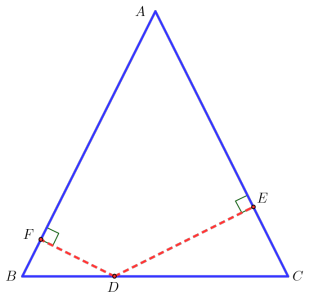


Figura 10.33. Ilustração do Problema 10.5.7.

Problema 10.5.8. No quadrilátero $ABCD$ da Figura 10.34 temos $AB||CD$ e $A-M-N-B$ e $C-P-Q-D$. Seja O o ponto de encontro de MP e QN. Explique por que $OM \cdot OQ = ON \cdot OP$.

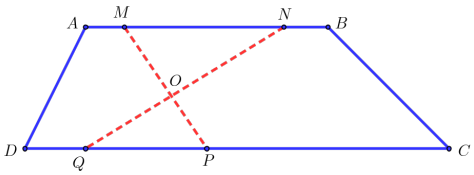


Figura 10.34. Um quadrilátero especial.

Problema 10.5.9. Na Figura 10.35 temos $AD \perp AB$, $BC \perp AB$, AC e BD se intersectam em O e P é o pé da perpendicular de O a AB. **a)** Ache x/y em função de a e b. **b)** Ache x e y em função de a, b e $d = AB$. **c)** Prove que $\frac{1}{h} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

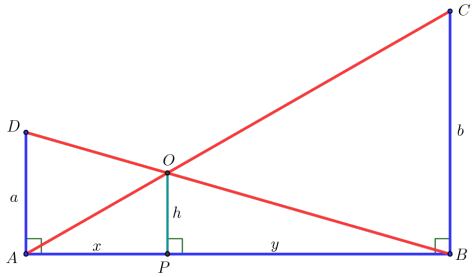


Figura 10.35. Ilustração do Problema 10.5.9.

Problema 10.5.10. Encontre uma fórmula para: **a)** o comprimento da diagonal de um quadrado em função de seu lado; **b)** o comprimento da diagonal de um retângulo em função de seus lados; **c)** o comprimento das alturas de um triângulo equilátero em função de seu lado; **d)** o comprimento das alturas de um triângulo isósceles em função de seus lados.

Problema 10.5.11. **a)** Usando um quadrado e sua diagonal calcule sen(45°) e cos(45°). **b)** Usando um triângulo equilátero calcule sen(60°) e cos(60°). **c)** Calcule sen(30°) e cos(30°).

Problema 10.5.12. Na Figura 10.36 AB é um diâmetro de uma circunferência de raio ρ e centro O, TB é tangente à circunferência em B (portanto perpendicular ao diâmetro AB), e $a = m(\angle BOT)$. Explique por que $\text{tg}(a) = TB/\rho$.

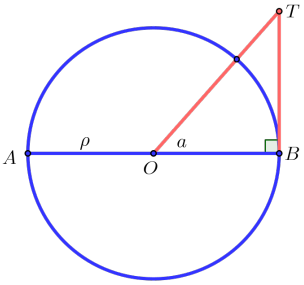


Figura 10.36. Ilustração do Problema 10.5.12.

Problema 10.5.13. É dado um quadrado $ABCD$ de lado a e sua diagonal AC. De seu desenho conservamos apenas AB e AC e desenhamos o paralelogramo $ABEC$. Calcule os seus lados e sua diagonal AE. Confira a Figura 10.37.

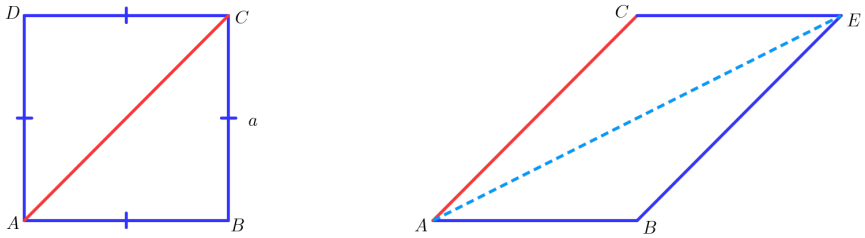


Figura 10.37. Desenho para o Problema 10.5.13.

Problema 10.5.14. Num triângulo retângulo os catetos medem b e c e a altura relativa à hipotenusa mede h. Prove que

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

Problema 10.5.15. É dado um triângulo com lados a, b e c. Calcule, em função desses valores, as medidas das projeções de dois lados sobre a reta suporte do terceiro lado. A Figura 10.38 apresenta um caso, em que o pé da altura está no interior do lado. Estude os outros dois casos.

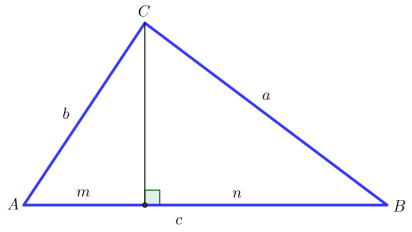


Figura 10.38. Projeções de dois lados de um triângulo.

Problema 10.5.16 (Lei dos cossenos)**.** Demonstre que num triângulo qualquer o quadrado de um lado é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados menos o dobro do produto desses lados e do cosseno do ângulo determinado por eles.

Problema 10.5.17. É dado um triângulo cujos lados a, b e c satisfazem à relação $a^2 = b^2 + c^2$. Demonstre que o triângulo é retângulo e a hipotenusa é o lado que mede a.

Problema 10.5.18. Seja $a > 0$ um número dado. Encontre, dentre todos os triângulos retângulos de hipotenusa a, o de maior perímetro.

Problema 10.5.19. Mostre que, num triângulo retângulo qualquer, a altura relativa à hipotenusa é menor ou igual à metade dela, e a igualdade ocorre se e somente se o triângulo é isósceles.

Solução. Seja ABC um triângulo retângulo com hipotenusa $BC = a$ e catetos $AC = b$ e $AB = c$. Seja $AD = h$ a altura relativa à hipotenusa com $BD = m$ e $CD = n$. De acordo com a Proposição 10.26 temos $h^2 = mn$, $b^2 = na$ e $c^2 = ma$. Aplicando a desigualdade da média geométrica e da média aritmética aos números m e n temos

$$\sqrt{mn} \leq \frac{m+n}{2} \iff h \leq \frac{a}{2}$$

e vale a igualdade $\iff m = n \iff ma = na \iff c^2 = b^2 \iff b = c$. Terminamos.

Problema 10.5.20. Calcule as medianas de um triângulo qualquer em função dos lados. Sugestão: escolha uma mediana e considere a altura correspondente. Use o Teorema de Pitágoras nos triângulos retângulos assim formados. Considere os três casos determinados pela posição do pé da altura.

Problema 10.5.21. **a)** Sejam $ABC \sim DEF$ e AH e DG alturas, sendo que $H \in \overleftrightarrow{BC}$ e $G \in \overleftrightarrow{EF}$. Mostre que se H está no interior de BC então G está no interior de EF. **b)** Demonstre que as alturas correspondentes em triângulos semelhantes estão na mesma razão que os lados correspondentes.

Problema 10.5.22. Demonstre que medianas correspondentes em triângulos semelhantes estão na mesma razão que os lados correspondentes.

Problema 10.5.23. Dado um retângulo de lados com medidas a e b, com $b \leq a$, sua *razão* é o número a/b. Dois retângulos se dizem *semelhantes* se tiverem a mesma razão. Investigue as seguintes questões. **a)** Um retângulo é dobrado ao meio no sentido do lado maior, formando outro retângulo. Calcule sua razão supondo que eles são semelhantes. **b)** Uma folha de papel A4 mede 210×297 mm. Verifique que ela tem a propriedade a), a menos de um pequeno erro.

Problema 10.5.24. Um retângulo $ABCD$, com $AB < BC$, chama-se *áureo* se tiver a seguinte propriedade: marcando o quadrado $ABEF$, com $E \in BC$ e $F \in AD$, o retângulo remanescente $DFEC$ é semelhante ao inicial. Confira a Figura 10.39. **a)** Pondo $a = AB$ e $b = EC$, mostre que $(a+b)/a = a/b$. **b)** Prove que o retângulo remanescente $DFEC$ também é áureo. **c)** Mostre que a razão $(a+b)/a$ do retângulo inicial é constante, e calcule seu valor exato e aproximado. Esse é o chamado *número áureo*, geralmente indicado pelo símbolo ϕ. **d)** Argumente pela validade da seguinte recíproca: se um retângulo tem como razão o número áureo, então ele é um retângulo é áureo.

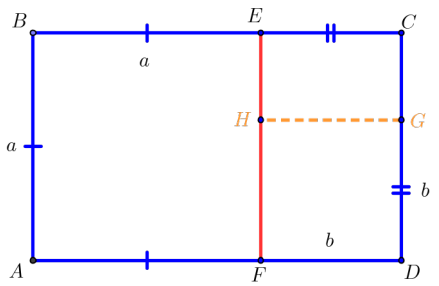


Figura 10.39. O retângulo áureo.

Problema 10.5.25. Considere um triângulo equilátero de lado a. Mostre que existe um quadrado nele inscrito, calcule seu lado e sua posição dentro desse triângulo. Um retângulo está inscrito em um triângulo quando tem dois vértices em um lado do triângulo e os outros dois vértices nos outros dois lados do triângulo.

Problema 10.5.26. Demonstre o chamado **Teorema da Bissetriz Interna**: A bissetriz de um ângulo qualquer de um triângulo arbitrário divide o lado oposto em segmentos proporcionais aos outros dois lados correspondentes. Confira a Figura 10.40.

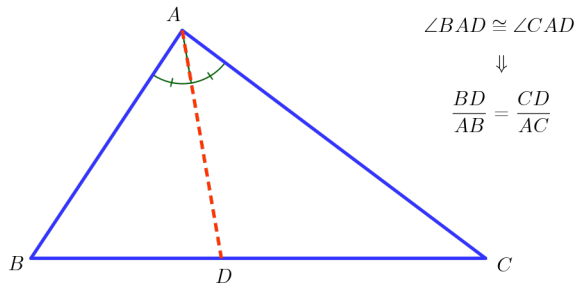


Figura 10.40. O Teorema da bissetriz interna.

Problema 10.5.27. Prove o chamado **Teorema da Bissetriz Externa**: A reta que contém a bissetriz de um ângulo externo qualquer de um triângulo escaleno arbitrário encontra a reta suporte do lado oposto em um ponto que forma com os outros dois vértices segmentos proporcionais aos outros dois lados correspondentes do triângulo. Confira ilustração na Figura 10.41.

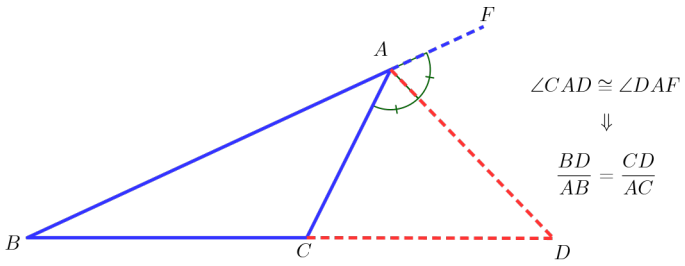


Figura 10.41. O Teorema da bissetriz externa.

10.6 Problemas adicionais

Problema 10.6.1. Em um plano dado, sejam r uma reta e AB um segmento. Mostre que o simétrico de AB em relação a r é o segmento $A'B'$, em que A' é simétrico de A e B' o de B.

Problema 10.6.2. Em um plano dado, como é a projeção de uma reta sobre outra? E o simétrico de uma reta em relação a outra?

Problema 10.6.3. Mostre que se a afirmação da Proposição 10.7 for considerada um axioma, então o Axioma 16 das Paralelas pode ser demonstrado como um teorema.

Problema 10.6.4. Mostre que se a afirmação do Problema 10.3.5 for considerada um axioma, então o Axioma 16 das Paralelas pode ser demonstrado como um teorema.

Problema 10.6.5. D é o ponto médio do lado AB do triângulo ABC e E é um ponto de AC tal que $E \neq C$ e $AE > EC$. **a)** Explique por que $\overrightarrow{DE}$ encontra $\overrightarrow{BC}$ em um ponto F tal que $B - C - F$. **b)** Prove que $FB/FC = AE/CE$. Confira a Figura 10.42.

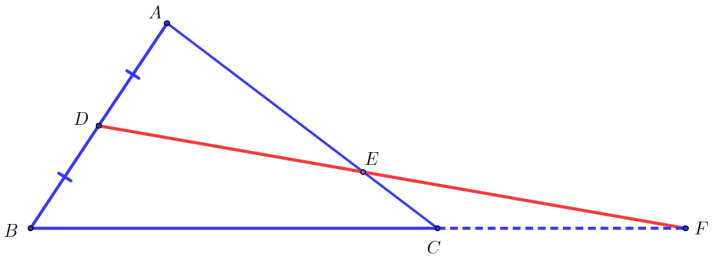


Figura 10.42. Ilustração do Problema 10.6.5.

Solução de a). Seja r a reta paralela a BC por D, que encontra AC em seu ponto médio M. Em virtude do resultado do Problema 10.3.4 temos que $\overleftrightarrow{DE}$ encontra $\overleftrightarrow{BC}$ em um ponto F. Como $AE > EC$ temos $A - M - E - C$, logo E e C estão do mesmo lado de r, e assim o mesmo ocorre com E e F. Dessa forma $F \in \overrightarrow{DE}$. Como DE e $\overleftrightarrow{BC}$ não se intersectam, temos $D - E - F$. Portanto D e F estão em lados opostos de $\overleftrightarrow{AC}$, e isso implica que o mesmo ocorre com B e F. Portanto $B - C - F$. Confira a Figura 10.43.

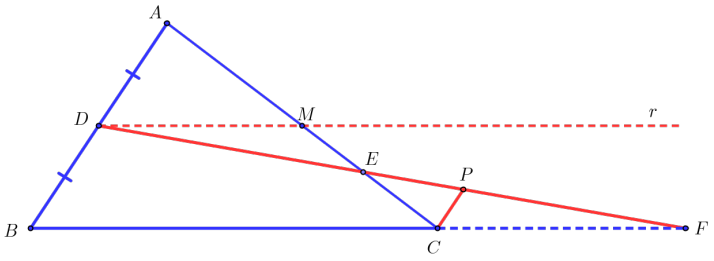


Figura 10.43. Ilustração da solução do Problema 10.6.5.

Solução de b). Seja $CP||AB$ tal que $P \in \overrightarrow{DE}$. Note que $m(\angle ECF) > m(\angle DBF) = m(\angle PCF)$, logo $E - P - F$. Por AA temos $FBD \sim FCP$ do que segue

$$\frac{FB}{FC} = \frac{BD}{CP} \iff \frac{FB}{FC} = \frac{AD}{CP},$$

pois $BD = AD$. Por outro lado, ainda por AA temos $PCE \sim DAE$ o que implica

$$\frac{PC}{AD} = \frac{CE}{AE} \Rightarrow \frac{AD}{PC} = \frac{AE}{CE} \Rightarrow \frac{FB}{FC} = \frac{AE}{CE}.$$

Problema 10.6.6. Sejam a, b e c números positivos tais que qualquer um deles é menor do que a soma dos outros dois. Mostre que existe um triângulo cujos lados medem a, b e c. Sugestão: suponha, sem perda de generalidade, que $a \leq b \leq c$. Construa um segmento AB de medida c. Usando o Teorema de Pitágoras encontre o ponto D nesse segmento tal que existe um ponto C na reta perpendicular a AB por D de modo que $AC = b$ e $BC = a$.

Problema 10.6.7. Seja ABC um triângulo, e fixemos dois de seus lados, digamos AB e BC. Determine o lugar geométrico formado pelos pontos médios dos segmentos com extremos em AB e em BC e que são paralelos a AC.

Solução. Seja $\mathscr{C}$ o conjunto dos pontos médios dos segmentos com extremos em AB e em BC e que são paralelos a BC. Seja BL a mediana relativa ao lado AC. Queremos provar que $\mathscr{C} = BL - \{B, L\}$. Confira a Figura 10.44, desenho da esquerda.

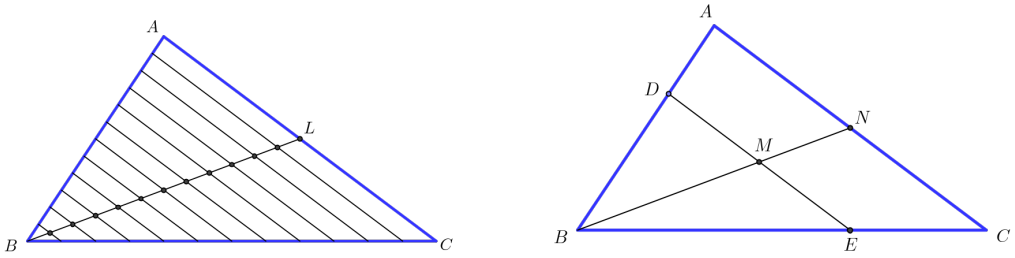


Figura 10.44. Ilustração da solução do Problema 10.6.7.

Seja $M \in \mathscr{C}$. Então existem pontos $D \in AB$ e $E \in BC$ nos interiores desses segmentos tais que M é ponto médio de DE e $DE||AC$. Pelo Teorema Crossbar (Problema 9.11.11) $\overrightarrow{BM}$ intersecta AC em N. Vamos mostrar que $N = L$, ponto médio de AC. Confira a Figura 10.44, desenho da direita.

Consideremos o triângulo ABN. Como $DM||AN$ vem que $ABN \sim DBM$, logo $AN/DM = BN/BM$. Consideremos agora o triângulo CBN. Como $EM||CN$ vem que $CBN \sim EBM$, logo $CN/EM = BN/BM$. Juntando as duas relações vem $AN/DM = CN/EM$. De $DM = EM$ segue que $AN = CN$. Portanto N é o ponto médio de AC, de modo que $N = L$. Segue que M está em BL. Como $M \neq B$ e $M \neq L$, provamos que $\mathscr{C} \subset BL - \{B, L\}$.

Seja agora $M \in BL - \{B, L\}$. Seja $r||AC$ por M. Como B e L estão em lados opostos em relação à reta r e A e L estão do mesmo lado, então A e B estão em lados opostos em relação à reta r. Assim existe $D \in AB \cap r$. Da mesma forma se vê que existe $E \in BC \cap r$. Temos $D - M - E$ pois M está no interior do triângulo. Como $r||AC$ temos $D \neq A$ e $E \neq C$. Como $B \notin r$ temos $D \neq B$ e $E \neq B$.

Consideremos o triângulo ABL. Como $DM||AL$ vem que $ABL \sim DBM$, logo $AL/DM = BL/BM$. Consideremos agora o triângulo CBL. Como $EM||CL$ vem que $CBL \sim EBM$, logo $CL/EM = BL/BM$. Juntando as duas relações vem $AL/DM = CL/EM$. De $AL = CL$ segue que $DM = EM$. Portanto M é o ponto médio de DE, de modo que $M \in \mathscr{C}$. Provamos que $BL - \{B, L\} \subset \mathscr{C}$.

Reunindo os dois resultados obtemos $\mathscr{C} = BL - \{B, L\}$, e terminamos.

Problema 10.6.8. Demonstre que em um triângulo qualquer as três medianas se encontram em um único ponto. Esse ponto é denominado *contróide* ou *baricentro*. Localize esse ponto na mediana. Qual é o motivo desses nomes? Sugestão: Dado ABC, tome as medianas AM e BN, e seja P seu ponto de encontro. Seja T o ponto médio de AP. Considere paralelas a BN por T e por M. Consulte a Figura 10.45.

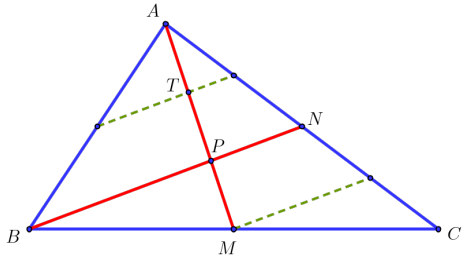


Figura 10.45. Problema 10.6.8.

Problema 10.6.9. O triângulo ABC da Figura 10.46 é retângulo em A e o ponto $P \in BC$ é o pé da bissetriz interna do ângulo $\angle BAC$. Calcule a distância de P ao lado AC em função de $AB = c$ e $AC = b$.

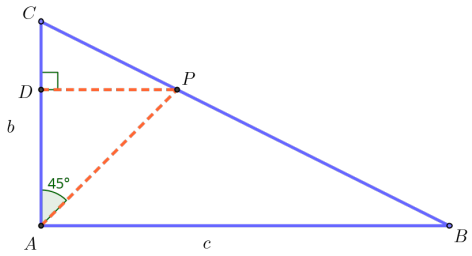


Figura 10.46. Problema 10.6.9.

Problema 10.6.10. Dado um triângulo ABC, sejam D e E os pontos respectivos em que as bissetrizes interna e externa de A encontram $\overleftrightarrow{BC}$. Prove que $BD/CD = BE/CE$. Ainda mais, se $AB > AC$, então

$$\frac{\sqrt{AD^2+AE^2}}{CD} - \frac{\sqrt{AD^2+AE^2}}{BD} = 2.$$

Problema 10.6.11. Use a Figura 10.47 para expressar a bissetriz b_a em função dos lados do triângulo. Sugestão: pelo Teorema da Bissetriz Interna 10.5.26 temos $x/c = y/b$. Como $x + y = c$, elimine y. Aplicando a Lei dos Cossenos nos triângulos ABD e ABC elimine x e $\cos\hat{B}$.

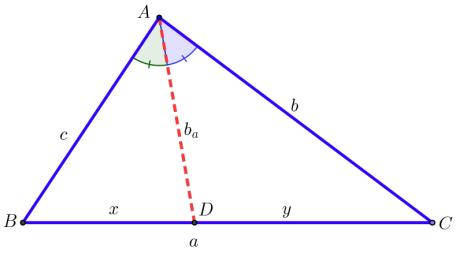


Figura 10.47. Problema 10.6.11.

Problema 10.6.12. Um campo quadrangular está cercado por um fosso de bordo quadrado simetricamente disposto, como ilustrado na Figura 10.48. Um indivíduo dispõe de duas vigotas de madeira, cada uma de comprimento igual à largura do fosso. Considerando apenas propriedades geométricas, verifique se o indivíduo pode atravessar o fosso usando as duas vigotas.

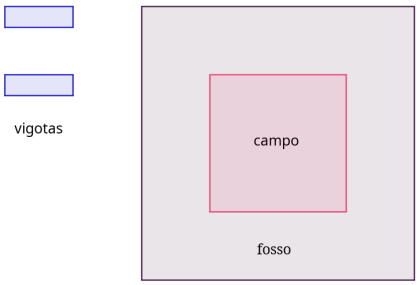


Figura 10.48. Problema do fosso.

10.7 Temas para investigação

Tema 10.7.1. Na Seção 10.2 vimos que a afirmação "Por um ponto dado fora de uma reta passa uma única paralela à reta dada" foi tomada como um axioma (Axioma 16). Será esta uma noção espontânea na humanidade? Conversando com pessoas de várias profissões, idade e nível de escolaridade, tente perceber isso. Elabore cuidadosamente as perguntas que faria para essas pessoas, e as descreva aqui.

Tema 10.7.2. Fixada uma reta r em um plano, estude o que são os simétricos em relação a r de ângulos, triângulos, quadrados, retângulos, paralelogramos, losangos, e quadriláteros em geral.

Tema 10.7.3. Tendo em vista os resultados do Problema 10.3.34, investigue as circunstâncias segundo as quais o circuncentro de um triângulo se localiza: (i) em um lado; (ii) no interior do triângulo; (iii) no exterior do triângulo.

Tema 10.7.4. Chamamos de *triângulo equilátero* ao triângulo que tem os três lados congruentes. **a)** Na Geometria construída com dedução informal vimos que é fácil obter um triângulo equilátero: basta unir pelas pontas três varetas de mesmo comprimento. Na Geometria construída como sistema axiomático, ao definir um objeto, precisamos verificar se ele pode ser obtido com os recursos teóricos propostos. Mostre que triângulos equiláteros existem no nosso sistema. Você usou o Axioma 16? **b)** Investigue propriedades desses triângulos. **c)** Que instrumentos e resultados você precisa para desenhar triângulos equiláteros?

Tema 10.7.5. Na Geometria Elementar é muito utilizado um tipo de quadrilátero denominado *trapézio*. Aqui o definimos como qualquer quadrilátero convexo com um par de lados opostos paralelos e os lados do outro par não são paralelos. **a)** Explique como construir trapézios no nosso sistema axiomático. **b)** Defina *trapézio isósceles* e construa esses quadriláteros. **c)** Investigue propriedades dos trapézios, em particular dos trapézios isósceles.

Tema 10.7.6. A Figura 10.49 apresenta, à esquerda, um trapézio isósceles, e, à direita, uma composição com quatro cópias desse trapézio. Estude as condições sobre o trapézio para que o mosaico seja também um trapézio isósceles.

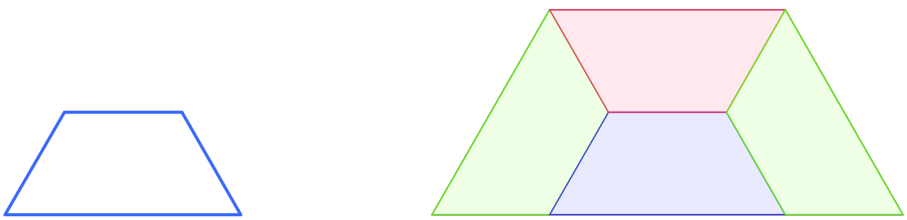


Figura 10.49. Mosaico com quatro trapézios congruentes.

Tema 10.7.7. Investigue propriedades da Figura 10.50, em que $AB \| CD$ com medidas a e b dadas, respectivamente, e M, N, E e F são pontos médios. **a)** Os pontos M, E, F e N são colineares, como o desenho sugere? **b)** Ache os valores ME, EF, FN e MN.

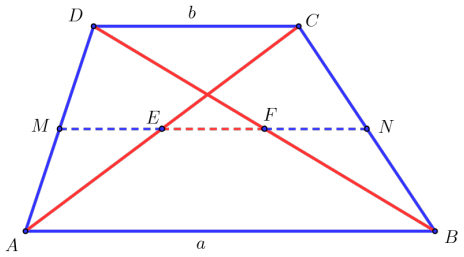


Figura 10.50. Problema do trapézio.

Tema 10.7.8. **a)** Desenhe vários tipos de triângulos com retângulos inscritos. Com base nesses exemplos defina o que é um retângulo inscrito em um triângulo dado. Investigue propriedades dessa relação. **b)** Dado um triângulo que possua retângulos inscritos, como é o retângulo inscrito de maior área? **c)** Dado um triângulo qualquer, sempre existe um quadrado nele inscrito? Investigue propriedades dessa relação.

Tema 10.7.9. Defina quadriláteros semelhantes. Investigue propriedades dessa relação. Em particular, encontre condições para a semelhança entre quadrados, retângulos, paralelogramos e losangos.

Tema 10.7.10. *Os Elementos* de Euclides representam o trabalho de um grupo de estudiosos que faziam parte da Escola de Alexandria, e que procuraram sistematizar o conhecimento matemático da época. Com essa obra iniciaram o método axiomático, hoje muito usado na Matemática. Pesquise esse assunto nos livros de história. Mais recentemente Bourbaki fez o mesmo papel. Pesquise isso também.

Tema 10.7.11. m retas paralelas no plano são interceptadas por outras n retas paralelas no mesmo plano. **a)** Quantos paralelogramos simples (que não contém nenhum outro) aparecem nessa rede? **b)** Quantos paralelogramos aparecem na rede?

Tema 10.7.12. Examine as afirmações recíprocas dos Teoremas da bissetriz interna e externa (Problemas 10.5.26 e 10.5.27).

Tema 10.7.13. Vimos, na Atividade 4.7.14 do Tomo I [62], na página 58, uma descrição do pantógrafo, um instrumento que permite ampliar desenhos. Dois esquemas desse instrumento estão representados na Figura 10.51. Ele consiste de quatro varetas OC, CG, PL e PK. As varetas OC e CG têm o mesmo comprimento e se articulam em C, e PL e PK se articulam em P. A vareta PL é presa à vareta OC em A por um pino que permite movimento de rotação, e a vareta PK é presa à vareta CG em B por um pino que também permite movimento de rotação. Os comprimentos de PA e PB podem variar mas devem obedecer às condições $OA = AP = BC$ e $AC = PB = BG$. O ponto O é fixado à mesa de desenho, o ponto P é uma ponta seca e em G é colocado um grafite. Se fizermos a ponta P seguir os traços de um desenho, o grafite G repete esse desenho mas ampliado na escala OG/OP.

Vamos agora completar o estudo desse instrumento. Demonstre que: **a)** os pontos O, P e G são colineares. **b)** Depois que os pinos em A e B forem fixados, o número $r = OG/OP$ é constante,

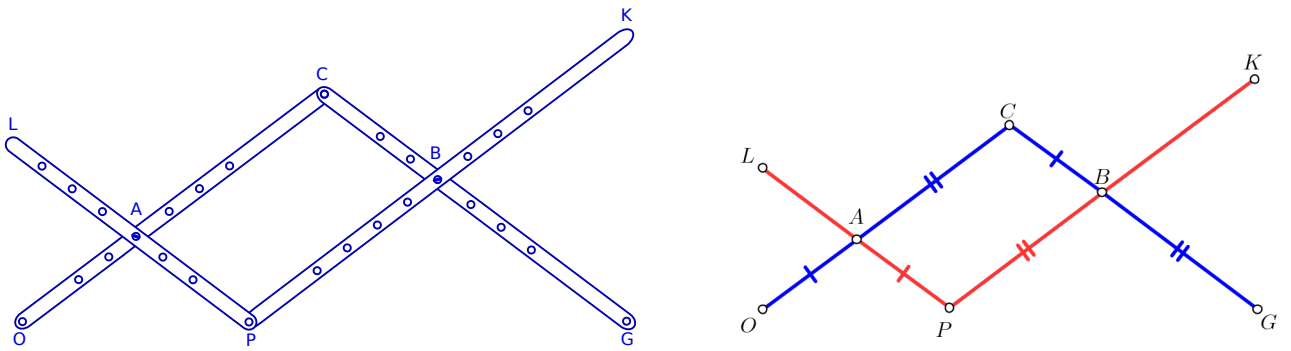


Figura 10.51. Esquemas de um pantógrafo.

e não se modifica com a movimentação do instrumento. **c)** se o instrumento é movimentado de modo que o ponto O permaneça fixo e o ponto P se movimenta até o ponto P', então o ponto G se movimenta até o ponto G' tal que GG' é paralelo a PP' e $GG' = rPP'$.

Tema 10.7.14. O seguinte mecanismo também foi apresentado no Tomo I [62], Problema 4.5.15, pág. 52. Um esquema geométrico está descrito na Figura 10.52. Uma coisa que ele consegue fazer é dividir segmentos em quatro partes de mesma medida. Ele também funciona como um pantógrafo que quadruplica figuras. As hastes e conexões são dispostos de modo que $AJ = BJ = JI = BK = IK = CK = CL = DL = GL = FG = DF = EF$ e $HI = CI = CG = GH$. Demonstre que: **a)** os pontos A, B, C, D e E são colineares; **b)** $AB = BC = CD = DE$; **c)** se o instrumento é movimentado de modo que o ponto A permaneça fixo e o ponto B se movimenta até o ponto B', então o ponto E se movimenta até o ponto E' tal que EE' é paralelo a BB' e $EE' = 4BB'$.

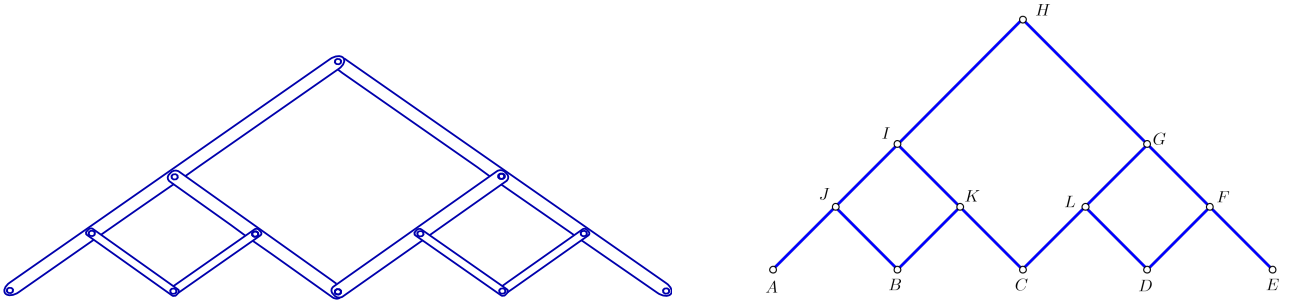


Figura 10.52. Esquemas de um mecanismo de desenho.

Tema 10.7.15. Na Figura 10.53 vemos um esquema simplificado da balança de G. de Roberval. O paralegramo $ABCD$ é articulado nos quatro vértices, e também se articula nos pontos médios de AD e BC com uma haste vertical fixa OP. Explique por que, ao movimentar o paralelogramo, os lados AB e CD permanecem paralelos à haste vertical.

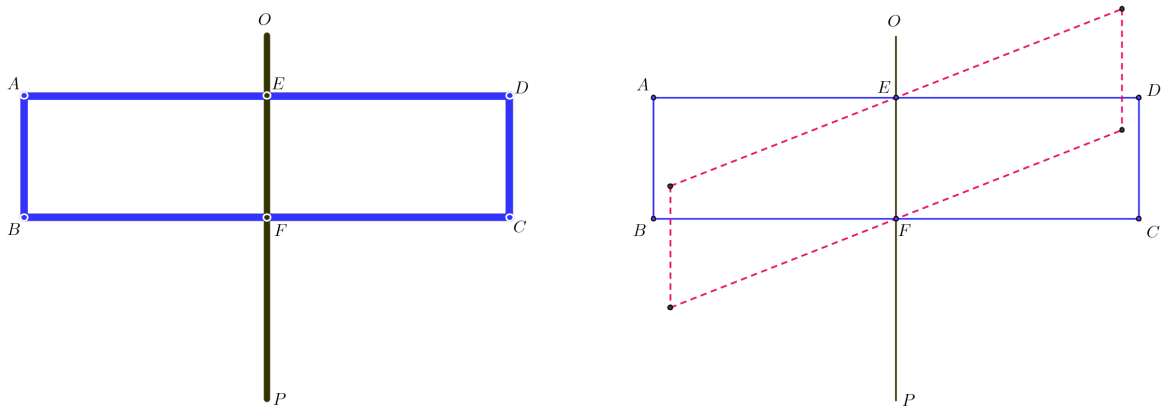


Figura 10.53. O paralelogramo de G. Roberval.

Tema 10.7.16. Estude a Figura 10.54 e descubra um teorema.

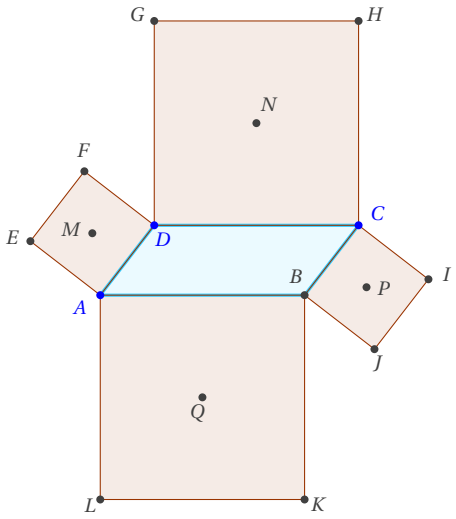


Figura 10.54. Descubra o teorema.

Tema 10.7.17. **a)** É dado um triângulo retângulo com catetos medindo a e b e hipotenusa medindo c. Demonstre que $a+b \leq \sqrt{2}\,c$. Identifique em que situação vale a igualdade. **b)** Descubra e justifique uma identidade equivalente para qualquer triângulo.

O método de dobradura de folhas de papel é muito usado no estudo da Geometria. Esse método tem seu próprio sistema axiomático. Destacamos, para nosso uso imediato: 1: *dada uma linha em uma folha de papel com pontos A e B marcados, dobrando A sobre B, o vinco é perpendicular à linha pelo ponto médio de AB*. 2: *dada uma linha em uma folha de papel e um ponto fora dela, podemos dobrar a linha sobre si mesma de modo que o vinco contenha o ponto dado.* Usando essas propriedades (e eventualmente outras mais simples), estude os seguintes procedimentos de dobradura.

Tema 10.7.18. **a)** Na Seção 5.5 de [62] vê-se um método de dobradura para mostrar que a soma dos ângulos agudos de qualquer triângulo retângulo é 90°, como está ilustrado na Figura 10.55. Supondo que a dobradura funciona de forma exata, justifique que o método realmente demonstra essa propriedade. Verifique cuidadosamente se você está usando ou não o Axioma 16 das Paralelas. **b)** O "método da dobradura" nos inspira uma demonstração diferente do Teorema 10.8 para o triângulo retângulo?

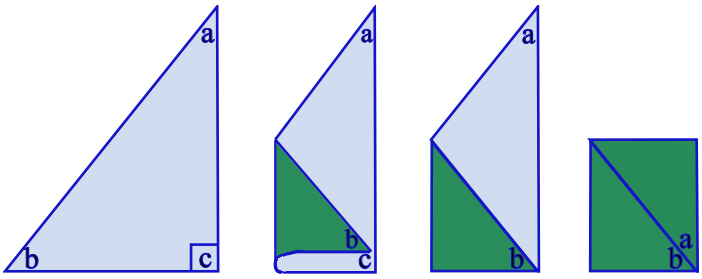


Figura 10.55. Uma sequência de dobraduras em um triângulo retângulo.

Tema 10.7.19. Na Seção 5.5 de [62] vê-se outro método de dobradura, desta feita para mostrar que a soma dos ângulos de qualquer triângulo é 180°. Esse método está ilustrado nas Figuras 10.56 e 10.57 em dois passos. O primeiro passo é vincar a altura do triângulo relativa ao maior lado.

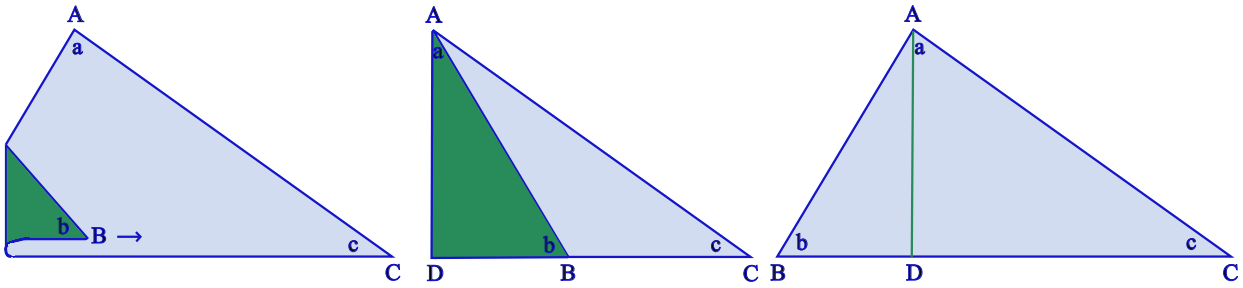


Figura 10.56. Primeiro passo da dobradura.

O segundo passo consiste em dobrar os três vértices sobre o ponto D.

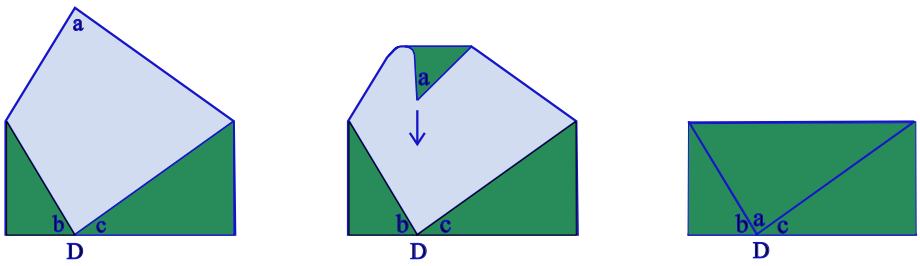


Figura 10.57. Segundo passo da dobradura.

Construa um procedimento equivalente para provar que a soma dos ângulos de um triângulo qualquer é 180°, mas agora usando os recursos de nosso sistema axiomático. Verifique cuidadosamente se está sendo usado ou não o Axioma 16 das Paralelas.

Tema 10.7.20. Na Seção 5.6 de [62] foram usados recortes de folhas de papel para mostrar que a soma dos ângulos agudos de um triângulo retângulo é 90°. Confira a Figura 10.58. Refaça o argumento mas agora à luz do nosso sistema axiomático. Verifique cuidadosamente se está usando o Axioma 16 das Paralelas.

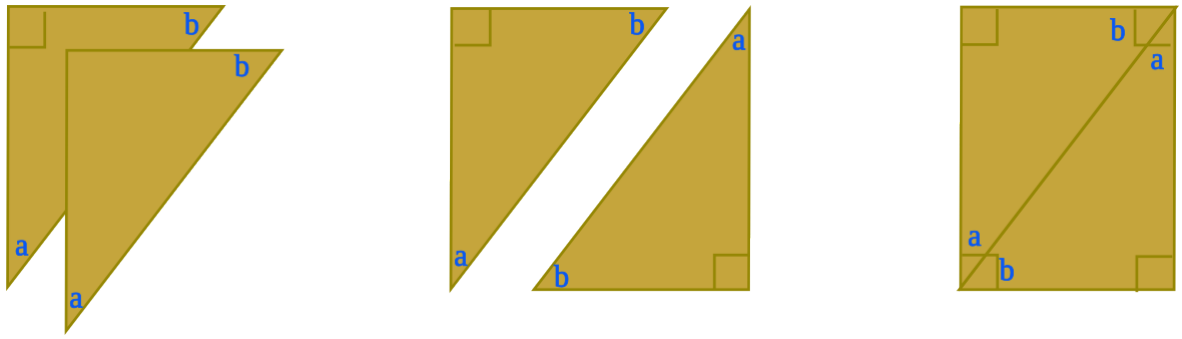


Figura 10.58. Outro argumento para o triângulo retângulo.

Seguem três temas para estudantes com mente inquieta.

Tema 10.7.21. Demonstre agora a recíproca da afirmação do Problema 9.11.4: dado um ponto do interior de um ângulo, ele está em um segmento com extremos nos lados do ângulo. Você precisou do Axioma 16?

Tema 10.7.22. Na Seção 10.2 vimos que o Axioma das Paralelas (Axioma 16) implica na validade do Teorema 10.8. Investigue se vale a recíproca, isto é, se podemos substituir o Axioma das Paralelas pela afirmação: "A soma dos ângulos de qualquer triângulo é 180°" e, em seguida, obter todos os outros resultados.

Tema 10.7.23. Uma forma de verificar se o Teorema de Pitágoras vale em outras Geometrias que não a Euclidiana é ver se ele implica no Axioma 16. Investigue isso.

Capítulo 11

A circunferência

11.1 Introdução

Já definimos circunferência em 9.10, assim como alguns de seus elementos, como centro, raio, diâmetro e corda. Vimos também várias propriedades comentadas em Problemas. Por exemplo, em um plano dado, se uma reta contém o centro de uma circunferência, então ela a intersecta em exatamente dois pontos (Problema 9.7.12). Por outro lado, o Problema 9.13.11 afirma que se um raio intersecta uma corda que não é um diâmetro, então a intersecção é o ponto médio da corda se, e somente se, o raio é perpendicular a ela. Confira a Figura 11.1.

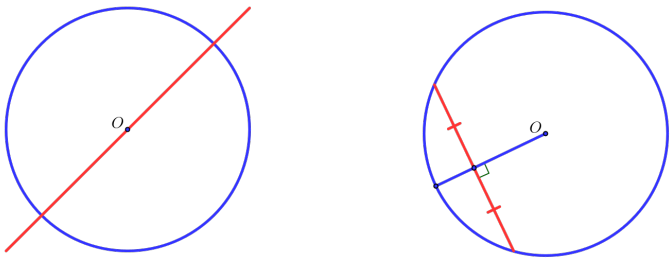


Figura 11.1. Ilustração de reta passando pelo centro de uma circunferência (desenho da esquerda) e de raio perpendicular a uma corda (desenho da direita).

Outra definição importante é a de interior e exterior de circunferência. Dada uma circunferência de centro O e raio ρ em um plano, seu *interior* é o conjunto dos pontos do plano cuja distância a O é $< \rho$, e seu *exterior* é o conjunto dos pontos do plano cuja distância a O é $> \rho$.

Acrescentamos, neste capítulo, mais definições e resultados relativos a esse importante objeto da Geometria.

11.2 Retas e circunferências

Vejamos primeiro algumas propriedades da relação entre retas e circunferências. Desenhando uma reta e uma circunferência em um plano, percebemos que existem essencialmente três situações: (i) a reta e a circunferência não se intersectam; (ii) a reta e a circunferência se intersectam em um único ponto; (iii) a reta e a circunferência se intersectam em dois pontos.

A seguir conduzimos nosso estudo no sentido de confirmar essa constatação. Começamos com algumas definições.

Definições 11.1. Em um plano, uma reta se diz *tangente* a uma circunferência quando a intersecta em um único ponto. O ponto de intersecção é denominado *ponto de tangência* ou *de contato*. Uma reta se diz *secante* a uma circunferência quando a intersecta em mais de um ponto.

Essas definições estão ilustradas na Figura 11.2.

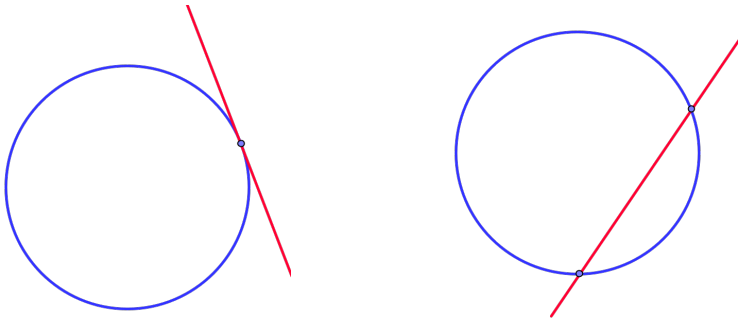


Figura 11.2. Ilustração de reta tangente (desenho da esquerda) e reta secante a uma circunferência (desenho da direita),

Para estudar condições que determinam o posicionamento relativo entre uma reta e uma circunferência, observamos que, dada uma reta e uma circunferência em um plano, existem dois números envolvidos: o raio da circunferência e a distância de seu centro à reta. Precisamos, portanto, usar esse valores para estabelecer em que condições relativas se encontram esses dois objetos geométricos. Uma forma de fazer isso é o resultado seguinte, que pode ser demonstrado com o uso do Teorema de Pitágoras.

Teorema 11.2. *Em um plano, seja $\mathscr{C}$ uma circunferência de centro O e raio ρ, e seja s uma reta. Seja d a distância de O a s. Então ocorre uma e apenas uma das seguintes afirmações: (i) $d > \rho$, e isso implica que $\mathscr{C}$ e s não se intersectam; (ii) $d = \rho$, e isso implica que $\mathscr{C}$ e s se intersectam em um único ponto, logo s é tangente a $\mathscr{C}$; (iii) $d < \rho$, e isso implica que $\mathscr{C}$ e s se intersectam em exatamente dois pontos, logo s é secante a $\mathscr{C}$.*

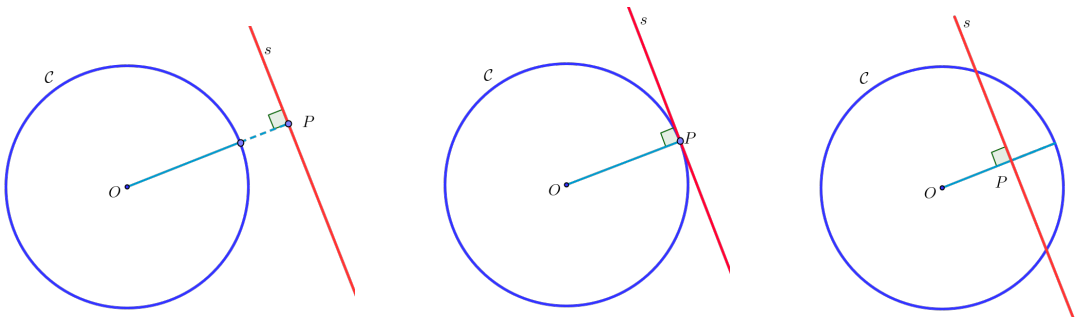


Figura 11.3. Ilustração do Teorema 11.2.

Demonstração de (i). Seja P o pé da perpendicular de O a s. Temos $d = d(O,P)$. Sabemos, pelo Teorema 9.45, que todo ponto de s dista de O uma distância $\geq d$. Como $d > \rho$, todo ponto de s dista de O mais do que ρ, logo $\mathscr{C} \cap s = \emptyset$. Confira a Figura 11.3, desenho da esquerda.

Demonstração de (ii). Com as notações da parte (i), vemos que $d(P,O) = \rho$, logo $P \in \mathscr{C}$. Ainda, pelo Teorema 9.45, todo ponto de s diferente de P dista mais do que $d = \rho$ de O, logo não pertence a $\mathscr{C}$. Segue que $\mathscr{C} \cap s = \{P\}$, e s é tangente a $\mathscr{C}$. Confira a Figura 11.3, desenho do centro.

Demonstração de (iii). Com as notações da parte (i), vemos que $d(P,O) = d < \rho$. Consideremos em s um sistema de coordenadas no qual a coordenada de P seja zero. Se $O = P$, então os pontos de s de coordenadas ρ e $-\rho$ são os únicos que estão em $\mathscr{C}$, e o resultado vale nesse caso.

Suponhamos agora que $O \neq P$. Confira a Figura 11.3, desenho da direita. Seja $x = \sqrt{\rho^2 - d^2} > 0$ (existe pois $\rho > d \Rightarrow \rho^2 > d^2$). Então os pontos A e B de s de coordenadas x e $-x$, respectivamente, são tais que OPA e OPB são triângulos retângulos. Pelo Teorema de Pitágoras as hipotenusas deles valem $OA = \sqrt{OP^2 + PA^2} = \sqrt{d^2 + x^2} = \rho$ e, do mesmo modo, $OB = \rho$. Logo A e B são pontos de s e de $\mathscr{C}$. Ainda, são os únicos nessas condições. De fato, seja $C \in s \cap \mathscr{C}$. Então OPC é um triângulo retângulo e a coordenada de C em s é $CP = \pm\sqrt{OC^2 - OP^2} = \pm\sqrt{\rho^2 - d^2} = \pm x$, e assim $C = A$ ou $C = B$.

Finalmente observamos que, comparando ρ e d, só ocorrem os casos $\rho < d$, $\rho = d$ e $d < \rho$. Como todas as possibilidades foram consideradas e elas são mutuamente excludentes, terminamos. □

A demonstração acima contém duas afirmações que convém destacar:

Escólio 11.3. *Uma reta é tangente a uma circunferência num ponto se, e somente se, é perpendicular ao raio que tem extremidade nesse ponto.*

Demonstração. Segue das observações feitas na parte (ii) do Teorema. □

Escólio 11.4. *Uma reta é secante a uma circunferência se, e somente se, a intersecta em dois pontos.*

Demonstração. Segue das observações feitas na parte (iii) do Teorema. □

11.3 Problemas

Problema 11.3.1. Explique por que, em uma circunferência, as maiores cordas são os diâmetros.

Problema 11.3.2. Explique por que, em um ponto qualquer de uma circunferência, existe uma e uma única reta tangente a ela.

Solução. Vejamos primeiro a existência da reta tangente. Sejam $\mathscr{C}$ uma circunferência de raio ρ e centro O, e $P \in \mathscr{C}$. Seja t a reta perpendicular a OP por P. Em virtude do Escólio 11.3 t é tangente a $\mathscr{C}$ em P.

Por outro lado, seja s uma reta tangente a $\mathscr{C}$ por P. Seja d a distância de O a s. Como $P \in s$ e $OP = \rho$, temos $d \leq \rho$. Usando o Teorema 11.2, se fosse $d < \rho$, então s seria secante a $\mathscr{C}$, o que não ocorre. Logo $d = \rho$, e s é perpendicular a OP em P. Como a perpendicular é única, segue que $s = t$.

Problema 11.3.3. Explique por que, se uma reta é tangente a uma circunferência, então todos os seus pontos, com exceção do ponto de contato, estão em seu exterior.

Problema 11.3.4. Explique por que, se uma reta não intersecta uma circunferência, então todos os seus pontos estão em seu exterior.

Problema 11.3.5. Explique por que, se uma reta tem um ponto no interior de uma circunferência, então ela a intersecta em exatamente dois pontos, situados em lados opostos em relação ao ponto considerado.

Problema 11.3.6. Explique por que, em qualquer circunferência, a mediatriz de qualquer corda passa pelo centro da circunferência. Confira ilustração na Figura 11.4.

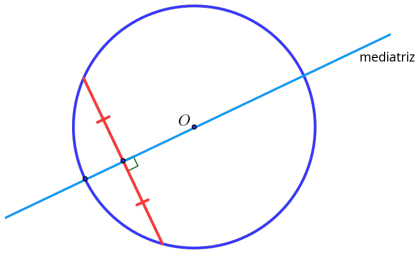


Figura 11.4. Ilustração do Problema 11.3.6

Problema 11.3.7. Demonstre que, se A é um ponto do interior de uma circunferência e B é do exterior, então o segmento AB intersecta a circunferência.

Solução. Seja $\mathscr{C}$ uma circunferência de raio ρ e centro O. Sejam A um ponto do interior de $\mathscr{C}$ e B um ponto do exterior. Seja t a reta que passa por A e B. Seja P o pé da perpendicular de O a t (podendo ocorrer que $P = O$). Então $d = OP$ é a distância de O a t. Como $A \in t$ está no interior de $\mathscr{C}$, temos $d \leq OA < \rho$. Aplicando o Teorema 11.2 parte (iii) vemos que t e $\mathscr{C}$ se intersectam em dois pontos C e D. Logo A está no interior da corda CD (aqui estamos usando o Problema 9.15.20). Notemos que $OC = OD = \rho$. Como B está no exterior de $\mathscr{C}$, temos $OB > \rho$. Dessa forma B está mais afastado de P do que C e D, de modo que B está em t mas no exterior de CD. Assim $D-C-B$ ou $C-D-B$. Temos, respectivamente, $A-C-B$ ou $A-D-B$. No primeiro caso $C \in \mathscr{C} \cap AB$ e, no segundo caso, temos $D \in \mathscr{C} \cap AB$. De qualquer forma o segmento AB intersecta a circunferência. Vemos esses dois casos ilustrados na Figura 11.5.

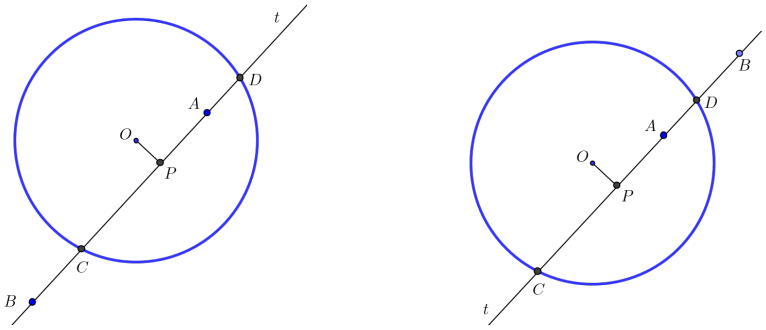


Figura 11.5. Ilustração do Problema 11.3.7.

Problema 11.3.8. Explique por que uma circunferência qualquer não tem três pontos colineares.

Problema 11.3.9. Prove que, em qualquer circunferência: **a)** cordas equidistantes do centro são congruentes; **b)** cordas congruentes são equidistantes do centro.

Problema 11.3.10. Dadas duas cordas em uma circunferência, a menor é a que está mais distante do centro.

Problema 11.3.11. Prove que, dadas duas circunferências concêntricas, se uma corda da maior é tangente à menor, o ponto de contato é o ponto médio da corda. Confira o desenho da esquerda da Figura 11.6.

Problema 11.3.12. Na Figura 11.7 AB é um diâmetro da menor de duas circunferências concêntricas, AC e BD são tangentes à menor, de modo que C e D estão na circunferência maior em lados opostos da reta suporte de AB. Mostre que CD é um diâmetro da circunferência maior.

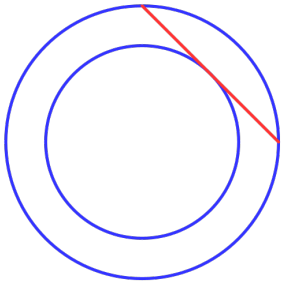


Figura 11.6. Ilustração do Problema 11.3.11.

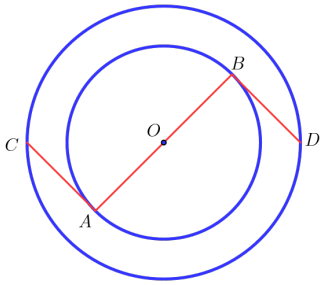


Figura 11.7. Ilustração do Problema 11.3.12.

Problema 11.3.13. Prove que, dado um ângulo, as circunferências com centro na sua bissetriz (exceto o vértice do ângulo) e raio igual à distância desse centro a um dos lados do ângulo é tangente aos dois lados (do ângulo). Ainda, toda circunferência tangente aos dois lados do ângulo tem centro em sua bissetriz e a circunferência está no interior do ângulo, com exceção dos dois pontos de contato.

Solução. Seja $\angle BAC$ um ângulo qualquer e O um ponto de sua bissetriz, com $O \neq A$. Sabemos que O é equidistante dos lados do ângulo (em virtude do Problema 9.16.14 a bissetriz é o conjunto dos pontos do interior do ângulo equidistantes dos seus lados). Sejam P o pé da perpendicular de O a $\overleftrightarrow{AB}$ e Q o pé da perpendicular de O a $\overleftrightarrow{AC}$. Temos $P \in \overrightarrow{AB} - A$ e $Q \in \overrightarrow{AC} - A$ (confira o Problema 9.15.18). Então a circunferência de centro O e raio $OP = OQ$ é tangente aos lados do ângulo.

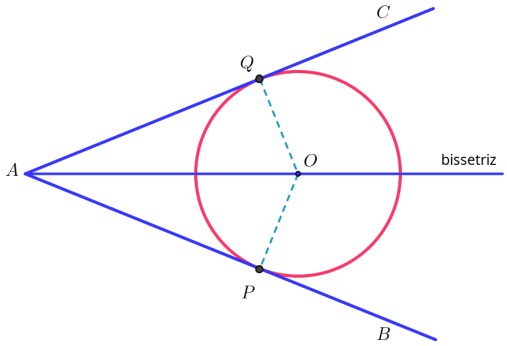


Figura 11.8. Ilustração do Problema 11.3.13.

Seja agora $\mathscr{C}$ uma circunferência de centro O tangente aos lados do ângulo $\angle BAC$ nos pontos $P \in \overrightarrow{AB}$ e $Q \in \overrightarrow{AC}$. Temos $OP = OQ > 0$ logo $O \neq A$.

Observemos o seguinte. Se uma reta r é tangente a $\mathscr{C}$ em T, então, todos os pontos de $\mathscr{C} - T$ estão do mesmo lado de r. De fato, seja $X \in \mathscr{C} - T$. Se existe $Y \in \mathscr{C} - T$ do lado oposto de X em relação a r, então r intersecta a corda XY em seu interior. Assim r tem um ponto no interior de $\mathscr{C}$, e já vimos que isso implica que r intersecta $\mathscr{C}$ em dois pontos, o que não é possível. Ainda, o centro O de $\mathscr{C}$ está no mesmo lado de r que os seus pontos. Se isso não ocorresse, o raio OX intersectaria r em um ponto interior a $\mathscr{C}$, o que novamente não é possível.

Portanto, O e os pontos de $\mathscr{C}$, exceto P e Q, estão no interior de $\angle BAC$. Como O é equidistante dos lados do ângulo, então está na sua bissetriz.

Problema 11.3.14. Na Figura 11.9, O é o centro da circunferência, AB é um diâmetro e C e D são outros pontos da circunferência tais que AC e BD são paralelos. Mostre que **a)** $AC = BD$ e **b)** CD contém O.

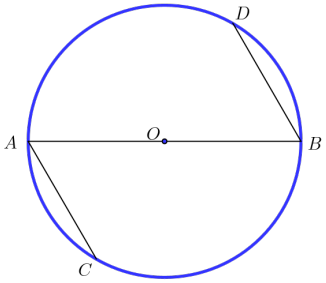


Figura 11.9. Figura para o Problema 11.3.14.

Problema 11.3.15. Sejam A e B dois pontos de um plano. Determine quais são os números ρ com a seguinte propriedade: existe nesse plano pelo menos uma circunferência de raio ρ contendo os pontos A e B. Para cada um desses números, quantas são as circunferências com esse raio que contêm A e B?

Problema 11.3.16. Em uma circunferência $\mathscr{C}$ de centro O, AB é um diâmetro e s é uma reta tangente a $\mathscr{C}$ em um ponto T. Ainda, A' e B' são, respectivamente, os pés das perpendiculares de A e B a s. Demonstre que $OA' = OB'$. Confira a Figura 11.10.

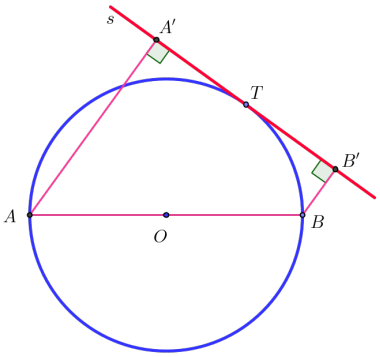


Figura 11.10. Ilustração do Problema 11.3.16.

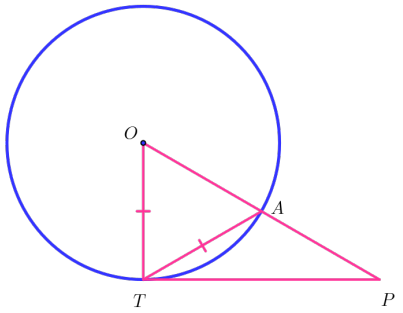


Figura 11.11. Ilustração do Problema 11.3.17.

Problema 11.3.17. Na Figura 11.11 O é o centro da circunferência, P é um ponto em seu exterior, A é o ponto em que OP intersecta a circunferência, TP é tangente à circunferência no ponto T e $AT = OT$. Mostre que A é o ponto médio de OP.

11.4 Posições relativas de duas circunferências

Vejamos agora propriedades da relação entre duas circunferências. Desenhando duas circunferências em um plano, percebemos que existem essencialmente três situações: as circunferências não se intersectam; as circunferências se intersectam em um único ponto; as circunferências se intersectam em dois pontos. Nos dois primeiros casos temos duas situações, dependendo da posição relativa de seus interiores.

Começamos com uma definição.

Definições 11.5. Em um plano, duas circunferências se dizem tangentes quando se intersectam num único ponto, e secantes quando se intersectam em mais de um ponto. Se duas circunferências são tangentes e se o centro de uma delas está no exterior da outra, se diz que são tangentes externamente, e se o centro de uma delas está no interior da outra, se diz que são tangentes internamente.

Dadas duas circunferências em um plano, existem três números envolvidos: os raios das circunferências e a distância entre seus centros. Portanto precisamos usar esse valores para estabelecer em que condições relativas se encontram esses dois objetos geométricos.

Repartimos nosso estudo em cinco lemas.

Lema 11.6. *Dadas duas circunferências em um plano, se a distância entre seus centros é maior do que a soma dos raios, então elas não se intersectam, e cada uma está no exterior da outra.*

Demonstração. Sejam $\mathscr{C}_1$ uma circunferência de centro O_1 e raio ρ_1 e $\mathscr{C}_2$ uma circunferência de centro O_2 e raio ρ_2. Seja d a distância entre O_1 e O_2. Por hipótese temos $d > \rho_1 + \rho_2$. Confira a Figura 11.12. Vamos mostrar que $\mathscr{C}_1$ está no exterior de $\mathscr{C}_2$.

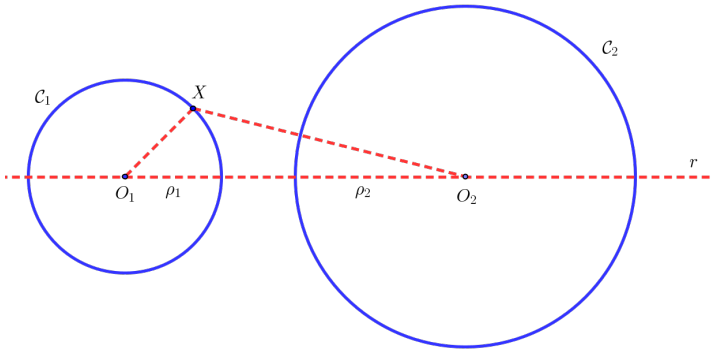


Figura 11.12. Ilustração do Lema 11.6.

Seja $X \in \mathscr{C}_1$. Afirmamos que X está no exterior de $\mathscr{C}_2$. Seja r a reta que contém O_1 e O_2. Se $X \in r$ e está entre O_1 e O_2, então $O_1X + XO_2 = O_1O_2 = d \Rightarrow \rho_1 + XO_2 > \rho_1 + \rho_2 \Rightarrow XO_2 > \rho_2 \Rightarrow X$ está no exterior de $\mathscr{C}_2$. Se $X \in r$ e O_1 está entre X e O_2, então $XO_2 = XO_1 + O_1O_2 = \rho_1 + d > \rho_2 \Rightarrow X$ está no exterior de $\mathscr{C}_2$. Se $X \in r$ não é possível que O_2 esteja entre X e O_1, pois isso implicaria $\rho_1 > d$. Portanto se $X \in r$ então está no exterior de $\mathscr{C}_2$.

Suponhamos agora que $X \notin r$. Então XO_1O_2 é um triângulo. Aplicando a desigualdade triangular vem $O_1X + XO_2 > O_1O_2 = d \Rightarrow \rho_1 + XO_2 > \rho_1 + \rho_2 \Rightarrow XO_2 > \rho_2 \Rightarrow X$ está no exterior de $\mathscr{C}_2$.

Portanto $\mathscr{C}_1$ está no exterior de $\mathscr{C}_2$ e, em particular, as duas circunferências não se intersectam.

Trocando os papéis de $\mathscr{C}_1$ e $\mathscr{C}_2$ na redação acima, ficou também demonstrado que $\mathscr{C}_2$ está no exterior de $\mathscr{C}_1$ e isso termina a demonstração. □

Lema 11.7. *Dadas duas circunferências em um plano, se a distância entre seus centros é igual à soma dos raios, então elas são tangentes externamente.*

Demonstração. Sejam $\mathscr{C}_1$ uma circunferência de centro O_1 e raio ρ_1 e $\mathscr{C}_2$ uma circunferência de centro O_2 e raio ρ_2. Seja d a distância entre O_1 e O_2. Por hipótese temos $d = \rho_1 + \rho_2$. Confira a Figura 11.13.

Seja r a reta que contém O_1 e O_2. Seja $P \in \mathscr{C}_1$ com $P \in r$ e P entre O_1 e O_2. Então $O_1P + PO_2 = O_1O_2 = d \Rightarrow \rho_1 + PO_2 = \rho_1 + \rho_2 \Rightarrow PO_2 = \rho_2 \Rightarrow P$ está em $\mathscr{C}_2$. Logo P é um ponto comum a $\mathscr{C}_1$ e $\mathscr{C}_2$.

Seja agora $X \in \mathscr{C}_1$ com $X \neq P$. Vamos mostrar que X está no exterior de $\mathscr{C}_2$. Se $X \in r$ então O_1 está entre X e O_2 e $XO_2 = XO_1 + O_1O_2 = \rho_1 + d > \rho_2 \Rightarrow X$ está no exterior de $\mathscr{C}_2$. Se $X \notin r$ então XO_1O_2 é um triângulo. Aplicando a desigualdade triangular vem $O_1X + XO_2 > O_1O_2 = d \Rightarrow \rho_1 + XO_2 > \rho_1 + \rho_2 \Rightarrow XO_2 > \rho_2 \Rightarrow X$ está no exterior de $\mathscr{C}_2$. Portanto $\mathscr{C}_1 - P$ está no exterior de $\mathscr{C}_2$ e em particular, as duas circunferências se intersectam apenas em P. Provamos que $\mathscr{C}_1$ e $\mathscr{C}_2$ são tangentes.

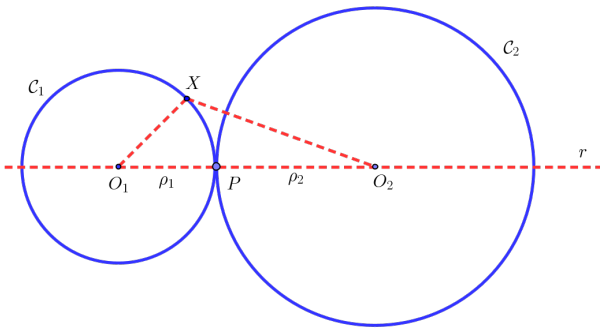


Figura 11.13. Ilustração do Lema 11.7.

Para ver que são tangentes externamente basta observar que O_1 está no exterior de $\mathscr{C}_2$, pois $O_1O_2 = \rho_1 + \rho_2 > \rho_2$. □

Lema 11.8. *Dadas duas circunferências em um plano com raios diferentes, se a distância entre seus centros é igual à diferença positiva entre os raios, então elas são tangentes internamente.*

Demonstração. Sejam $\mathscr{C}_1$ uma circunferência de centro O_1 e raio ρ_1 e $\mathscr{C}_2$ uma circunferência de centro O_2 e raio ρ_2. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $\rho_1 > \rho_2$. Seja d a distância entre O_1 e O_2. Por hipótese temos $d = \rho_1 - \rho_2$. Confira a Figura 11.14.

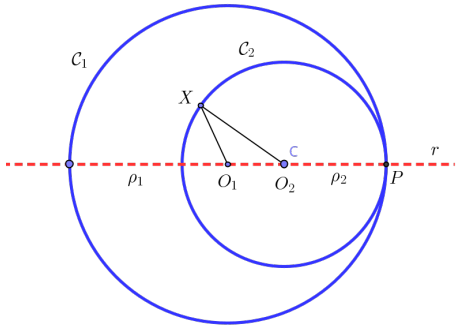


Figura 11.14. Ilustração do Lema 11.7.

Seja r a reta que contém O_1 e O_2. Coloquemos em r um sistema de coordenadas de modo que a coordenada de O_1 seja zero e a de O_2 seja positiva, portanto, é d. Temos $d = \rho_1 - \rho_2 < \rho_1$, logo O_2 está no interior de $\mathscr{C}_1$.

Seja $P \in r$ o ponto de coordenada ρ_1. Então $P \in \mathscr{C}_1$. Como $d(P,O_2) = |\rho_1 - d| = |\rho_1 - (\rho_1 - \rho_2)| = \rho_2$, temos também $P \in \mathscr{C}_2$.

Seja agora $X \in \mathscr{C}_2$ um ponto qualquer com $X \neq P$. Vamos provar que X está no interior de $\mathscr{C}_1$.

Suponhamos primeiro que $X \in r$ (existe tal ponto pois r passa pelo centro de $\mathscr{C}_2$, logo a intersecta em dois pontos, sendo um deles P). Seja x a coordenada de X em r. Como $d(X,O_2) = \rho_2$ temos $|x-d| = \rho_2$, e como $X \neq P$ temos $x \neq \rho_1$. Notemos que

$$d(X,O_1) = |x-0| = |x| = |(x-d)+d| \leq |x-d| + d = \rho_2 + \rho_1 - \rho_2 = \rho_1$$

ou seja, $|x| \leq \rho_1$. Se fosse $|x| = \rho_1$ teríamos $x = -\rho_1$, pois já vimos que $x \neq \rho_1$. Isso implicaria

$$|x-d| = |-\rho_1 - d| = \rho_1 + d = \rho_1 + \rho_1 - \rho_2 > \rho_1 > \rho_2$$

contradizendo que $|x-d| = \rho_2$. Logo $|x| \neq \rho_1$ o que implica $|x| < \rho_1$ e $d(X,O_1) < \rho_1$. Assim X está no interior de $\mathscr{C}_1$.

Suponhamos agora que $X \in \mathscr{C}_2$ e $X \notin r$. Então $d(X, O_2) = \rho_2$ e X, O_1 e O_2 formam um triângulo. Aplicando a desigualdade triangular vem

$$XO_1 < XO_2 + O_1O_2 = \rho_2 + d = \rho_2 + \rho_1 - \rho_2 = \rho_1 \Rightarrow d(X, O_1) < \rho_1$$

portanto X está no interior de $\mathscr{C}_1$.

Em resumo, $\mathscr{C}_2 - P$ está no interior de $\mathscr{C}_1$ e, em particular, as duas circunferências se intersectam apenas em P. Provamos que $\mathscr{C}_1$ e $\mathscr{C}_2$ são tangentes. Já vimos que O_2 está no interior de $\mathscr{C}_1$, assim elas são tangentes internamente. □

Lema 11.9. *Dadas duas circunferências em um plano com raios diferentes, se a distância entre seus centros é menor do que a diferença positiva entre os raios, então a circunferência de raio menor está no interior da outra.*

Demonstração. Sejam $\mathscr{C}_1$ uma circunferência de centro O_1 e raio ρ_1 e $\mathscr{C}_2$ uma circunferência de centro O_2 e raio ρ_2. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $\rho_1 > \rho_2$. Seja d a distância entre O_1 e O_2. Por hipótese temos $d < \rho_1 - \rho_2$. Confira a Figura 11.15. Vamos provar que $\mathscr{C}_2$ está no interior de $\mathscr{C}_1$.

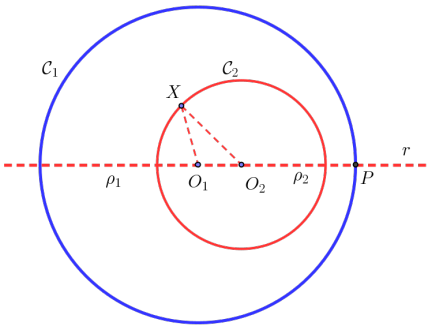


Figura 11.15. Ilustração do Lema 11.9.

Seja r a reta que contém O_1 e O_2. Coloquemos em r um sistema de coordenadas de modo que a coordenada de O_1 seja zero e a de O_2 seja positiva, portanto, é d. Temos $d < \rho_1 - \rho_2 < \rho_1$, logo O_2 está no interior de $\mathscr{C}_1$.

Seja $X \in \mathscr{C}_2$, e suponhamos primeiro que $X \in r$ (existem dois desses pontos). Seja x a coordenada de X em r. Como $d(X, O_2) = \rho_2$ temos $|x - d| = \rho_2$, e

$$d(X, O_1) = |x - 0| = |x| = |(x - d) + d| \leq |x - d| + d < \rho_2 + \rho_1 - \rho_2 = \rho_1$$

ou seja, X está no interior de $\mathscr{C}_1$.

Suponhamos agora que $X \in \mathscr{C}_2$ e $X \notin r$. Então $d(X, O_2) = \rho_2$ e X, O_1 e O_2 formam um triângulo. Aplicando a desigualdade triangular vem

$$XO_1 < XO_2 + O_1O_2 = \rho_2 + d < \rho_2 + \rho_1 - \rho_2 = \rho_1 \Rightarrow d(X, O_1) < \rho_1$$

portanto X está no interior de $\mathscr{C}_1$. Segue que que $\mathscr{C}_2$ está no interior de $\mathscr{C}_1$. □

Lema 11.10. *Dadas duas circunferências em um plano, se a distância entre seus centros é menor do que a soma dos raios e maior do que sua diferença em valor absoluto, então elas se intersectam em exatamente dois pontos.*

Demonstração. Sejam $\mathscr{C}_1$ uma circunferência de centro O_1 e raio ρ_1 e $\mathscr{C}_2$ uma circunferência de centro O_2 e raio ρ_2. Seja d a distância entre O_1 e O_2. Por hipótese temos $|\rho_1 - \rho_2| < d = \rho_1 + \rho_2$. Isso implica $\rho_1 - \rho_2 \leq |\rho_1 - \rho_2| < d \Rightarrow \rho_1 < d + \rho_2$, e igualmente vale $\rho_2 < d + \rho_1$. Em virtude do resultado do Problema 10.6.6 existe um triângulo com lados de medidas d, ρ_1 e ρ_2.

Considerando agora o segmento O_1O_2 (que mede d), podemos construir dois triângulos O_1O_2P e O_1O_2Q tais que $O_1P = O_1Q = \rho_1$ e $O_2P = O_2Q = \rho_2$. Confira a Figura 11.16.

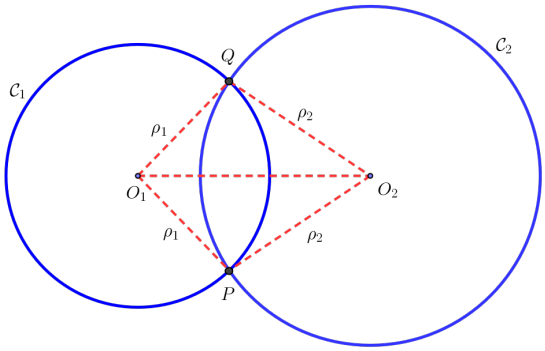


Figura 11.16. Ilustração do Lema 11.10.

Portanto P e Q são pontos comuns a $\mathscr{C}_1$ e a $\mathscr{C}_2$. Não existem outros pontos em comum, pois não existem outros triângulos com as propriedades requeridas. □

O seguinte Teorema inclui todas as possibilidades sobre as posições relativas entre duas circunferências em um plano.

Teorema 11.11. *Sejam $\mathscr{C}_1$ uma circunferência de centro O_1 e raio ρ_1 e $\mathscr{C}_2$ uma circunferência de centro O_2 e raio ρ_2. Seja d a distância entre O_1 e O_2. As seguintes condições descrevem todas as possibilidades de posições relativas entre $\mathscr{C}_1$ e $\mathscr{C}_2$.*

(i) *$d = 0$ e $\rho_1 = \rho_2$. Nesse caso $\mathscr{C}_1$ e $\mathscr{C}_2$ coincidem.*

(ii) *$d < |\rho_1 - \rho_2|$. Nesse caso a circunferência de raio menor está no interior da outra.*

(iii) *$d = |\rho_1 - \rho_2|$. Nesse caso as circunferências são tangentes internamente.*

(iv) *$|\rho_1 - \rho_2| < d < \rho_1 + \rho_2$. Nesse caso as circunferências se intersectam em exatamente dois pontos.*

(v) *$d = \rho_1 + \rho_2$. Nesse caso as circunferências são tangentes externamente.*

(vi) *$\rho_1 + \rho_2 < d$. Nesse caso cada circunferência está no exterior da outra.*

Demonstração. Em **(i)** temos $d = 0$ e $\rho_1 = \rho_2$. Portanto as duas circunferências têm o mesmo centro e o mesmo raio, de modo que coincidem.

Em **(ii)** temos $d < |\rho_1 - \rho_2|$. Nesse caso as circunferências têm raios diferentes (os centros podem ser o mesmo ou não). Pelo Lema 11.9 a circunferência de raio menor está no interior da outra.

Em **(iii)** temos $d = |\rho_1 - \rho_2|$, de modo que pelo Lema 11.8 as circunferências são tangentes internamente.

Em **(iv)** temos $|\rho_1 - \rho_2| < d < \rho_1 + \rho_2$, de modo que pelo Lema 11.10 as circunferências se intersectam em exatamente dois pontos.

Em **(v)** temos $d = \rho_1 + \rho_2$. Nesse caso, pelo Lema 11.7, as circunferências são tangentes externamente.

Em **(vi)** temos $\rho_1 + \rho_2 < d$, o que implica, pelo Lema 11.6, que cada circunferência está no exterior da outra.

Finalmente observamos que esses são todos os casos possíveis. De fato, temos $0 \leq |\rho_1 - \rho_2| < \rho_1 + \rho_2$. Como $d \geq 0$, posicionando d em relação a $|\rho_1 - \rho_2|$ e a $\rho_1 + \rho_2$, os casos que podem ocorrer estão todos considerados. □

11.5 Problemas

Problema 11.5.1. Em um plano são dados um ponto e uma circunferência. Estude as possíveis posições relativas entre esses dois objetos geométricos.

Problema 11.5.2. Explique por que, se duas circunferências são tangentes, seus centros e o ponto de contato são colineares. Ainda, as retas tangentes às circunferências no ponto de contato são a mesma.

Problema 11.5.3. Demonstre que, se duas circunferências se intersectam em P e Q, a mediatriz de PQ passa pelos centros das duas.

Problema 11.5.4. Prove que três pontos não colineares quaisquer determinam uma única circunferência.

Solução. Dados três pontos não colineares, eles determinam dois segmentos. As mediatrizes deles se encontram em um ponto O que é equidistante dos três pontos dados. Seja ρ essa distância comum. A circunferência com centro em O e raio ρ contém esses três pontos.

Para ver que a circunferência é única podemos observar que duas circunferências se encontram em no máximo dois pontos. Assim três pontos não podem pertencer a duas circunferências.

Problema 11.5.5. Duas circunferências são tangentes em P, e r é uma reta secante a elas nos pontos A, P e B. Mostre que são paralelas as retas tangentes às circunferências por A e por B.

Problema 11.5.6. Duas circunferências são tangentes externamente e r é a reta tangente comum. Seja P um ponto qualquer de r fora do ponto de tangência comum. Se os segmentos AP e BP são tangentes às circunferências em A e B, então $AP = BP$. Confira a Figura 11.17.

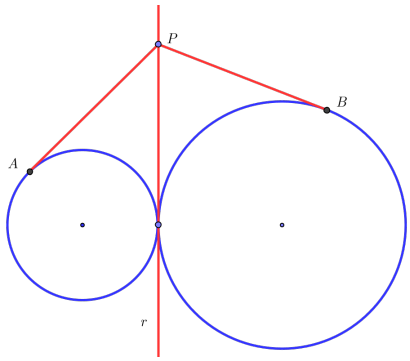


Figura 11.17. Ilustração do Problema 11.5.6.

11.6 Circunferências e ângulos

Vejamos agora propriedades básicas da relação da circunferência com ângulos.

Definições 11.12. Sejam A e B pontos de uma circunferência em um determinado plano. A reta $\overleftrightarrow{AB}$ separa o plano em dois semiplanos, cada um contendo uma parte da circunferência. Cada uma dessas partes, juntamente com os pontos A e B, é denominada *arco determinado pelos pontos A e B*. Se esses pontos são extremidades de um diâmetro, então os arcos chamam-se *semicircunferências*. Se esses pontos não são extremidades de um diâmetro, chama-se *arco maior* aquele que, tirando os pontos A e B, está no mesmo semiplano que o centro da circunferência. O outro se chama *arco menor*. O arco pode ser indicado por $\overset{\frown}{AB}$ se estiver claro de qual se trata. Caso contrário tomamos um ponto X no arco e o indicamos por $\overset{\frown}{AXB}$.

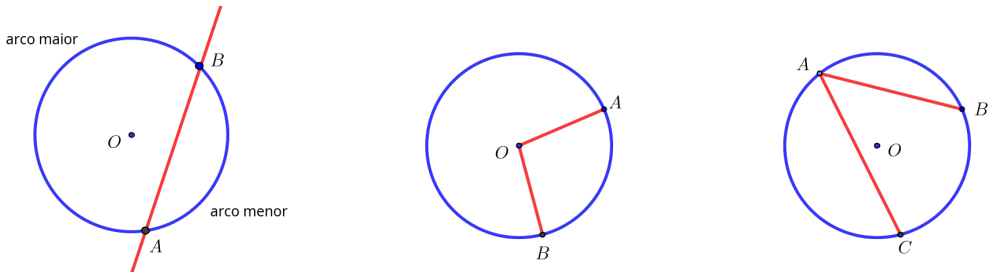


Figura 11.18. Ilustração das definições de arco menor, arco maior, ângulo central e ângulo inscrito em uma circunferência.

Sejam A e B pontos de uma circunferência de centro O que não são extremidades de um diâmetro. O ângulo $\angle AOB$ chama-se *ângulo central* determinado por A e B ou determinado pela corda AB. A *medida em graus* $m(\overset{\frown}{AB})$ do arco menor $\overset{\frown}{AB}$ é $m(\angle AOB)$, e do arco maior correspondente é $360° - m(\angle AOB)$. A medida em graus de uma semicircunferência é $180°$.

Um ângulo se diz *inscrito* em uma circunferência se seu vértice A está nessa circunferência e se seus lados intersectam a circunferência em pontos B e C diferentes de A. O arco determinado por B e C que não contém A chama-se *arco correspondente* ao ângulo inscrito. Dizemos também que o ângulo *inscreve* esse arco, ou que o arco está *inscrito* no ângulo. Ilustrações na Figura 11.18.

Observemos que podemos adicionar ou subtrair arcos. Se $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{BC}$ são arcos que têm em comum apenas o ponto B e se sua união é um arco $\overset{\frown}{AC}$ então a medida (em graus) de $\overset{\frown}{AC}$ é a soma das medidas de $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{BC}$. De forma análoga se define subtração de arcos. Confira o Problema 11.7.4.

Seguem propriedades básicas desses elementos geométricos.

Teorema 11.13. *Em uma mesma circunferência ou em circunferências de mesmo raio, cordas de mesma medida e que não são diâmetros determinam ângulos centrais congruentes, e vice-versa.*

Demonstração. Dada uma circunferência de centro O, se AB e CD são cordas congruentes e não são diâmetros, então OAB e OCD são triângulos e são congruentes pelo caso LLL. Portanto $\angle AOB \cong \angle COD$. Reciprocamente, se $\angle AOB \cong \angle COD$ então $OAB \cong OCD$ pelo caso LAL, e temos $AB = CD$.

Se AB e CD são cordas de duas circunferências diferentes, o raciocínio é análogo. □

Corolário 11.14. *Em uma mesma circunferência ou em circunferências de mesmo raio, cordas de mesma medida e que não são diâmetros determinam arcos menores de mesma medida e arcos maiores de mesma medida.*

Demonstração. Basta usar a Definição de medida de arco e o Teorema acima. □

Teorema 11.15. *Todo ângulo inscrito em uma circunferência tem a metade da medida do arco correspondente.*

Demonstração. Seja $\mathscr{C}$ uma circunferência de centro O e seja $\angle BAC$ um ângulo incrito. Indicamos por $\overset{\frown}{BC}$ o arco inscrito pelo ângulo.

Temos três casos a serem considerados, conforme se vê na Figura 11.19. Em todos os casos queremos provar que $m(\angle BAC) = m(\overset{\frown}{BC})/2$.

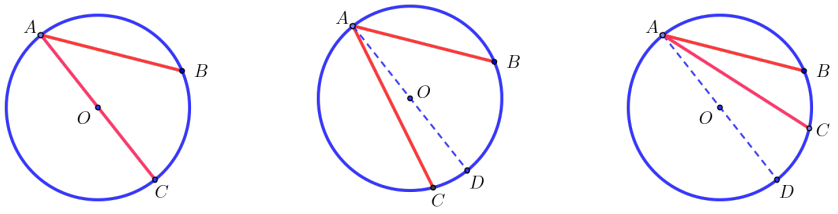


Figura 11.19. Casos de ângulos inscritos em uma circunferência.

Caso 1. O centro da circunferência está em um dos lados do ângulo. Sem perda de generalidade supomos $O \in AC$, como no desenho à esquerda da Figura 11.19. Notemos que AOB é um triângulo e $\angle BOC$ é um ângulo externo. Da Proposição 10.10 temos $m(\angle BOC) = m(\angle BAO) + m(\angle OBA)$. Como AOB é isósceles de base AB, esses dois ângulos são congruentes, de modo que $m(\angle BOC) = 2m(\angle BAO)$, ou $m(\angle BAC) = m(\angle BOC)/2$. Levando em conta que $m(\angle BOC) = m(\overset{\frown}{BC})$, segue $m(\angle BAC) = m(\overset{\frown}{BC})/2$.

Caso 2. O centro da circunferência está no interior do ângulo. Seja AD o diâmetro de extremidade A. Vemos que D está no interior de $\angle BAC$, portanto também de $\overset{\frown}{BC}$. Indicamos por $\overset{\frown}{BD}$ e $\overset{\frown}{DC}$ os subarcos de $\overset{\frown}{BC}$. Aplicando o Caso 1 temos

$$m(\angle BAD) = m(\angle BOD)/2 = m(\overset{\frown}{BD})/2 \quad \text{e} \quad m(\angle CAD) = m(\angle COD)/2 = m(\overset{\frown}{DC})/2.$$

Somando membro a membro e usando o Problema 11.7.4 vem $m(\angle BAC) = m(\overset{\frown}{BC})/2$.

Caso 3. O centro da circunferência está no exterior do ângulo. Seja AD o diâmetro de extremidade A. Sem perda de generalidade admitimos a situação do desenho da direita da Figura 11.19, em que C está no interior de $\angle BAD$. Do Caso 1 temos

$$m(\angle BAD) = m(\angle BOD)/2 \quad \text{e} \quad m(\angle CAD) = m(\angle COD)/2.$$

Subtraindo a segunda relação da primeira membro a membro, segue $m(\angle BAC) = m(\angle BOC)/2$. Levando em conta que $m(\angle BOC) = m(\overset{\frown}{BC})$, segue $m(\angle BAC) = m(\overset{\frown}{BC})/2$. □

Escólio 11.16. *Em qualquer circunferência, se a um ângulo inscrito corresponde uma semicircunferência, sua medida é* 90°.

Demonstração. Essa situação está incluída no Caso 2 do Teorema 11.15. Confira a Figura 11.20. Como uma semicircunferência mede 180°, segue o resultado. □

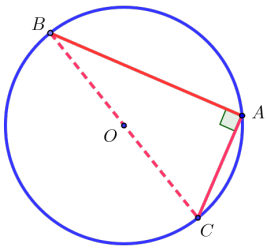


Figura 11.20. Ângulo inscrito correspondendo a uma semicircunferência.

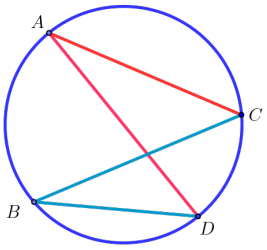


Figura 11.21. Ângulos inscritos correspondendo ao mesmo arco.

Corolário 11.17. *Em qualquer circunferência, dois ângulos que inscrevem o mesmo arco têm a mesma medida.*

Demonstração. Basta aplicar o Teorema 11.15. Confira ilustração na Figura 11.21, em que $\angle CAD \cong \angle CBD$, pois inscrevem o mesmo arco. Do mesmo modo $\angle ACB \cong \angle ADB$. □

11.7 Problemas

Problema 11.7.1. Na Definição 11.12 foi dito que, se A e B são pontos de uma circunferência, a reta $\overleftrightarrow{AB}$ separa o plano em dois semiplanos, cada um contendo uma parte da circunferência. Explique por que ambas as partes da circunferência são não vazias.

Problema 11.7.2. Na Figura 11.22, AB é um diâmetro da circunferência $\mathscr{C}$ e BD é tangente a ela em B. Ainda, AD intersecta $\mathscr{C}$ em C. A medida de BD é a e a medida do arco menor $\overset{\frown}{AC}$ é 120°. Calcule o diâmetro de $\mathscr{C}$.

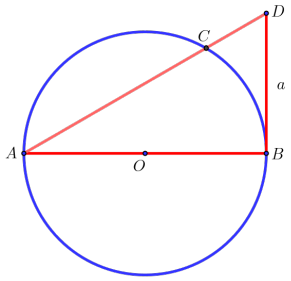


Figura 11.22. Figura para o Problema 11.7.2.

Problema 11.7.3. Sejam A e B pontos de uma circunferência $\mathscr{C}$ de centro O que não são extremidades de um diâmetro, e seja $\overset{\frown}{AB}$ o arco menor determinado por eles. Mostre que $\overset{\frown}{AB}$ é o conjunto dos pontos de $\mathscr{C}$ que estão no ângulo $\angle AOB$ ou no seu interior. Mostre também que o arco maior correspondente é o conjunto dos pontos de $\mathscr{C}$ que estão no ângulo $\angle AOB$ ou no seu exterior.

Problema 11.7.4. Seja $\overset{\frown}{AB}$ um arco de uma circunferência $\mathscr{C}$, e seja C um ponto do interior desse arco, isto é, um ponto do arco diferente de A e de B. Sejam $\overset{\frown}{AC}$ e $\overset{\frown}{CB}$ os arcos contidos em $\overset{\frown}{AB}$. Mostre que $m(\overset{\frown}{AC}) + m(\overset{\frown}{CB}) = m(\overset{\frown}{AB})$.

Problema 11.7.5. Seja $\angle BAC$ um ângulo inscrito em uma circunferência de centro O. Considere a afirmação: "a medida de $\angle BAC$ é igual à metade da medida do ângulo central $\angle BOC$". Se ela for verdadeira, explique por que. Se não for, arrume a frase para que seja.

Problema 11.7.6. Sejam AB um diâmetro de uma circunferência $\mathscr{C}$ e C um ponto fora da reta suporte de AB. Mostre que se C está no exterior de $\mathscr{C}$ então $\angle ACB$ é agudo, e se C está no interior de $\mathscr{C}$ então $\angle ACB$ é obtuso.

Problema 11.7.7. Na Figura 11.23 AB e BC são cordas congruentes da circunferência e D é um ponto do arco complementar a $\overset{\frown}{ABC}$. Ligando esses quatro pontos formam-se vários triângulos. Descubra quais são semelhantes a BCD. Descubra outras propriedades dessa figura.

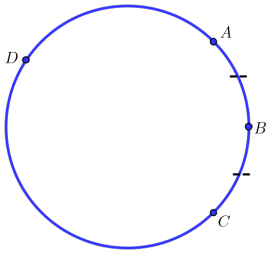


Figura 11.23. Figura para o Problema 11.7.7.

Problema 11.7.8. Na Figura 11.24 AB é um diâmetro de uma circunferência de centro O e BC é uma corda congruente ao raio. Descubra a medida de todos os ângulos formados pelos pontos A, B, C e O.

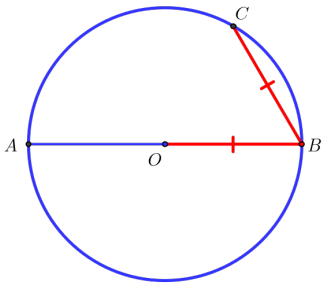


Figura 11.24. Figura para o Problema 11.7.8.

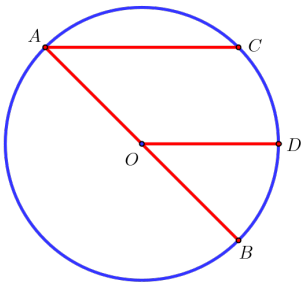


Figura 11.25. Figura para o Problema 11.7.9.

Problema 11.7.9. Na Figura 11.25 vemos uma circunferência de centro O, um diâmetro AB, uma corda AC e um raio OD, paralelo à corda (C e D estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{AB}$). Explique por que D divide o arco $\overset{\frown}{BC}$ ao meio.

Problema 11.7.10. Mostre que, se um ponto está no exterior de uma circunferência, existem exatamente duas retas tangentes à circunferência contendo o ponto dado.

Problema 11.7.11. Um ângulo tem um vértice A numa circunferência $\mathscr{C}$, um lado secante a ela e outro lado tangente em A. Mostre que a medida desse ângulo é igual à metade da medida do arco de $\mathscr{C}$ que está no ângulo e em seu interior.

Solução. Seja $\mathscr{C}$ uma circunferência de centro O. Dado o ângulo $\angle BAC$ com $A \in \mathscr{C}$, por hipótese $\overleftrightarrow{AB}$ é tangente a $\mathscr{C}$ em A e $\overleftrightarrow{AC}$ é secante a $\mathscr{C}$ em A e C. Indicamos por $\overset{\frown}{AC}$ o arco de $\mathscr{C}$ que está no interior de $\angle BAC$, exceto os pontos extremos do arco A e C. Queremos provar que $m(\angle BAC) = m(\overset{\frown}{AC})/2$.

Seja AD o diâmetro com um extremo em A. Sabemos que $AB \perp AD$. Temos três casos a considerar em relação ao posicionamento de D. Confira ilustração na Figura 11.26.

Caso 1. $D = C$. Notemos que $\overset{\frown}{AD}$ é uma semicircunferência, logo sua medida é 180°. Assim

$$m(\angle BAC) = m(\angle BAD) = 90^\circ = 180^\circ/2 = m(\overset{\frown}{AD})/2 = m(\overset{\frown}{AC})/2$$

Caso 2. $D \in \overset{\frown}{AC} - \{C\}$. Como $D \neq A$ temos que D está no interior do arco e no interior de $\angle BAC$. Logo

$$m(\overset{\frown}{AC}) = m(\overset{\frown}{AD}) + m(\overset{\frown}{DC}) \quad \text{e} \quad \angle BAC = \angle BAD + \angle DAC$$

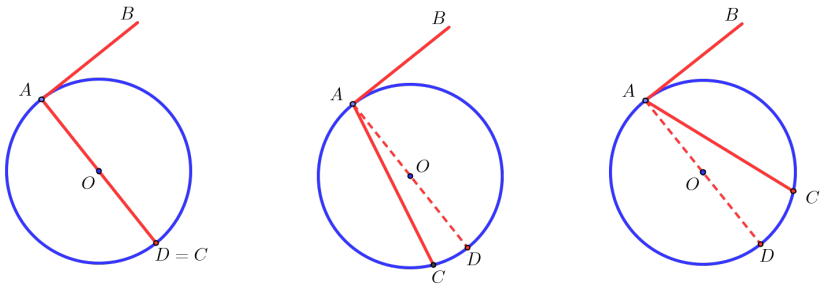


Figura 11.26. Casos de ângulos em uma circunferência com um lado tangente.

Notemos que $\overset{\frown}{AD}$ é uma semicircunferência, logo sua medida é 180°. Ainda, $\angle DAC$ é um ângulo inscrito, de modo que sua medida é $m(\overset{\frown}{DC})/2$. Portanto

$$m(\angle BAC) = m(\angle BAD) + m(\angle DAC) = 90^\circ + m(\overset{\frown}{DC})/2 = [m(\overset{\frown}{AD}) + m(\overset{\frown}{DC})]/2 = m(\overset{\frown}{AC})/2$$

Caso 3. $D \notin \overset{\frown}{AC}$. Temos

$$m(\angle BAC) = m(\angle BAD) - m(\angle DAC) = 90^\circ - m(\overset{\frown}{DC})/2 = [m(\overset{\frown}{AD}) - m(\overset{\frown}{DC})]/2 = m(\overset{\frown}{AC})/2$$

Em todos os casos vale que $m(\angle BAC) = m(\overset{\frown}{AC})/2$, e terminamos. □

Problema 11.7.12. Se os dois lados de um ângulo de vértice P são tangentes a uma circunferência de centro O nos pontos A e B, então $\overrightarrow{PO}$ é a bissetriz de $\hat{P}$ e a medida de $\hat{P}$ é igual a 180° menos a medida do arco menor determinado por A e B. Ilustre sua solução com uma figura.

Problema 11.7.13. Na Figura 11.27 vemos uma circunferência com duas cordas congruentes AB e CD. **a)** Mostre que as outras duas cordas AD e BC que se intersectam também são congruentes. **b)** Mostre que as outras duas cordas AC e BD que não se intersectam são paralelas. **c)** Que tipo de quadrilátero é $ABDC$?

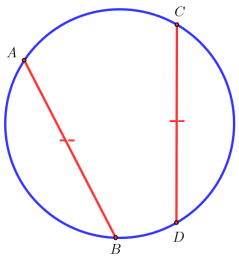


Figura 11.27. Para o Problema 11.7.13.

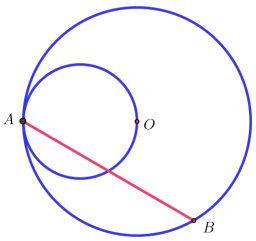


Figura 11.28. Para o Problema 11.7.14.

Problema 11.7.14. Na Figura 11.28 a circunferência menor é tangente internamente à maior em A e passa pelo seu centro. Prove que toda corda AB da circunferência maior intersecta a circunferência menor em seu ponto médio.

Problema 11.7.15. Em uma circunferência duas cordas têm a mesma extremidade A e determinam ângulos congruentes com o diâmetro em A. Demonstre que as cordas são congruentes. Vale a recíproca?

Problema 11.7.16. AB é um diâmetro de uma circunferência de centro O, e C é um ponto da circunferência fora desse diâmetro. Sejam OD a corda que passa pelo ponto médio de AC e OE a corda que passa pelo ponto médio de BC. Prove que $OD \perp OE$. Confira a Figura 11.29.

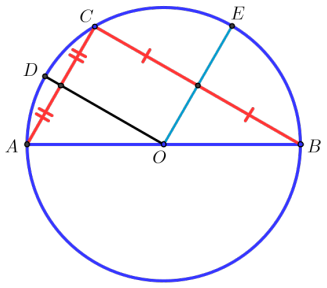


Figura 11.29. Desenho para o Problema 11.7.16.

Problema 11.7.17. Na Figura 11.30 AB e BC são diâmetros de duas circunferências congruentes tangentes externamente, CD é tangente à primeira circunferência em D e intersecta a outra em E, com $C-E-D$. Prove que para os arcos menores $\overset{\frown}{AD}$, $\overset{\frown}{BD}$ e $\overset{\frown}{BE}$ vale $m(\overset{\frown}{AD}) = m(\overset{\frown}{BD}) + m(\overset{\frown}{BE})$.

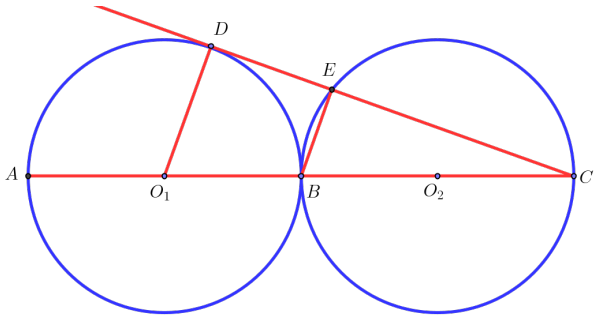


Figura 11.30. Ilustração para o Problema 11.7.17.

Solução. Indicamos por O_1 o centro da circunferência com diâmetro AB. Sabemos que $O_1D \perp CD$ e que os centros das duas circunferências e o ponto de contato B são colineares. Ainda $\angle BEC$ inscreve uma semicircunferência, de modo que $BE \perp CD$. Logo $BE||O_1D$ o que implica $\angle BO_1D \cong \angle CBE$. Como $m(\angle BO_1D) = m(\overset{\frown}{BD})$, $m(\angle CBE) = (1/2)m(\overset{\frown}{CE})$ e $m(\overset{\frown}{CE}) = 180^\circ - m(\overset{\frown}{BE})$ vem

$$2m(\overset{\frown}{BD}) = 2m(\angle BO_1D) = 2m(\angle CBE) = m(\overset{\frown}{CE}) = 180^\circ - m(\overset{\frown}{BE})$$

$$\Rightarrow 2m(\overset{\frown}{BD}) = 180^\circ - m(\overset{\frown}{BE}) \Rightarrow 2m(\overset{\frown}{BD}) + m(\overset{\frown}{BE}) = 180^\circ.$$

Mas $m(\overset{\frown}{AD}) + m(\overset{\frown}{BD}) = 180^\circ$, de modo que

$$2m(\overset{\frown}{BD}) + m(\overset{\frown}{BE}) = m(\overset{\frown}{AD}) + m(\overset{\frown}{BD}) \Rightarrow m(\overset{\frown}{BD}) + m(\overset{\frown}{BE}) = m(\overset{\frown}{AD}).$$

□

Problema 11.7.18. Sejam P um ponto do exterior de um circunferência $\mathscr{C}$, r uma reta por P secante a $\mathscr{C}$ nos pontos A e B de modo que $P-A-B$, e s uma reta secante a $\mathscr{C}$ nos pontos C e D de modo que $P-C-D$. Indicamos por $\overset{\frown}{AC}$ e $\overset{\frown}{BD}$ os arcos com esses extremos determinados pelo interior do ângulo $\angle BPD$. Prove que $m(\angle BPD) = (1/2)[m(\overset{\frown}{BD}) - m(\overset{\frown}{AC})]$. Confira ilustração na Figura 11.31.

Problema 11.7.19. Considerando o Problema 11.7.18 e a Figura 11.31, investigue qual é a medida do ângulo $\hat{P}$ nas seguintes situações: **a)** r é secante à circunferência e s é tangente; **b)** r e s são tangentes à circunferência.

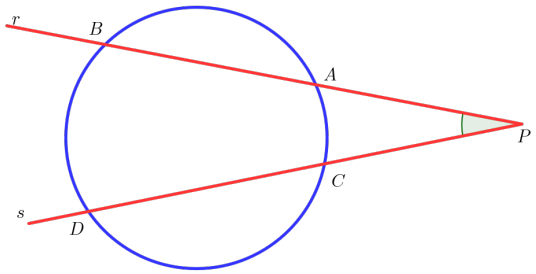


Figura 11.31. Desenho para o Problema 11.7.18.

Problema 11.7.20. Sejam AB e CD cordas diferentes de uma circunferência que se intersectam em um ponto P interior à circunferência. Indicamos por $\overset{\frown}{AC}$ o arco com esses extremos determinados pelo interior do ângulo $\angle APC$ e por $\overset{\frown}{BD}$ o arco com esses extremos determinados pelo interior do ângulo $\angle BPD$. Prove que $m(\angle BPD) = (1/2)[m(\overset{\frown}{BD}) + m(\overset{\frown}{AC})]$. Confira ilustração na Figura 11.32.

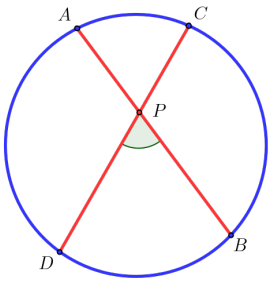


Figura 11.32. Desenho para o Problema 11.7.20.

11.8 Circunferências, pontos e retas

Dentre as inumeráveis propriedades que provêm das relações entre pontos, retas e circunferências, destacamos uma propriedade métrica, denominada *potência de um ponto em relação a uma circunferência.* Começamos com o

Lema 11.18. *Sejam AB e CD cordas diferentes de uma circunferência que se intersectam em um ponto P interior à circunferência. Então $AP \cdot PB = CP \cdot PD$.*

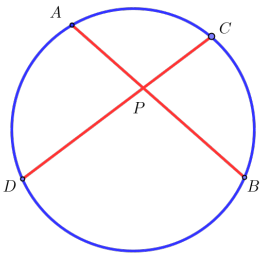


Figura 11.33. Ilustração do Lema 11.18.

Demonstração. Começamos observando que A, P e D são não colineares, caso contrário as cordas seriam iguais. Em seguida introduzimos as cordas auxiliares AD e BC. Usando o Corolário 11.17 vemos que $APD \sim CPB$ pelo caso de semelhança AA. Segue que $AP/CP = PD/PB$ e $AP \cdot PB = CP \cdot PD$. Confira a Figura 11.33. □

Antes de prosseguir observamos que, em virtude do resultado do Problema 11.7.10, se um ponto está no exterior de uma circunferência, existem exatamente duas retas tangentes à circunferência contendo o ponto dado. Por outro lado, devido ao resultado do Problema 11.3.5, se uma reta tem um ponto no interior de uma circunferência então ela a intersecta em dois pontos.

Temos agora o

Lema 11.19. *Se os dois lados de um ângulo de vértice P são tangentes a uma circunferência nos pontos A e B, então $PA = PB$.*

Demonstração. Seja O o centro da circunferência. Lembremos que PA e PB são perpendiculares aos raios OA e OB, respectivamente. Pelo caso de congruência hipotenusa-cateto de triângulos retângulos temos $POA \cong POB$. Segue que $PA = PB$. Pelo que foi observado acima P está no exterior da circunferência, de modo que a Figura 11.34 ilustra a propriedade demonstrada. □

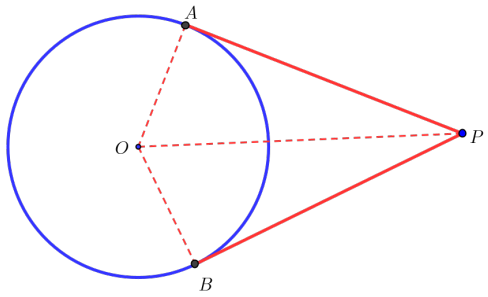


Figura 11.34. Ilustração do Lema 11.19.

Lema 11.20. *Sejam P um ponto do exterior de um circunferência $\mathscr{C}$, r uma reta por P secante a $\mathscr{C}$ nos pontos B e C e s uma reta tangente a $\mathscr{C}$ em A. Então $PB \cdot PC = PA^2$.*

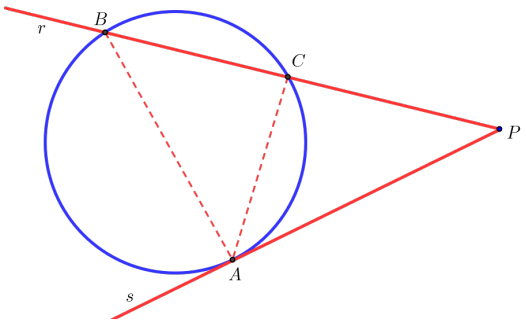


Figura 11.35. Ilustração do Lema 11.20.

Demonstração. Usamos a notação da Figura 11.35. Notemos primeiro que $\angle BPA = \angle APC$, pois é o mesmo ângulo. Ainda $\angle ABP = m(\widehat{AC})/2$ pelo Teorema 11.15 e $\angle CAP = m(\widehat{AC})/2$ pelo Problema 11.7.11, do que resulta $\angle ABP \cong \angle CAP$. Portanto $BPA \sim APC$ pelo caso de similaridade AA. Isso implica $AP/CP = BP/AP \Rightarrow PB \cdot PC = PA^2$. □

Lema 11.21. *Sejam P um ponto do exterior de um circunferência $\mathscr{C}$, r uma reta por P secante a $\mathscr{C}$ nos pontos A e B e s uma reta secante a $\mathscr{C}$ nos pontos C e D. Então $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.*

Demonstração. Usamos a notação da Figura 11.36. Um jeito de demonstrar é usar o Lema 11.20. Mas preferimos uma demonstração independente. Notemos primeiro que $\angle BPD = \angle CPA$ pois é o mesmo ângulo. Ainda, pelo Teorema 11.15, temos $m(\angle PBD) = m(\overset{\frown}{AD})/2 = m(\angle PCA)$, do que resulta $\angle PBD \cong \angle PCA$. Portanto $BPD \sim CPA$ pelo caso de similaridade AA. Isso implica $BP/CP = PD/PA \Rightarrow PA \cdot PB = PC \cdot PD$. □

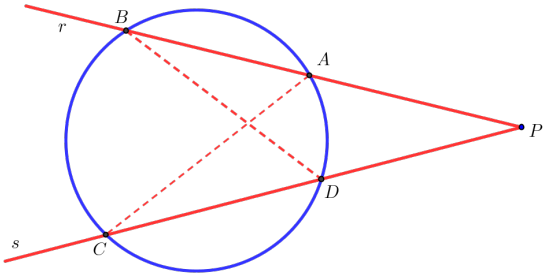


Figura 11.36. Ilustração do Lema 11.21.

Observando novamente a Figura 11.34, seja ρ o raio da circunferência. Vemos que $OP^2 = \rho^2 + AP^2$, e que o número $OP^2 - \rho^2$ só depende de P e da circunferência. Por outro lado, PA^2 é um valor comum ao produto $PB \cdot PC$ nas condições vistas acima. Isso nos induz a definir

Definição 11.22. Sejam $\mathscr{C}$ uma circunferência de centro O e raio ρ e P um ponto não contido nela. A *potência* de P em relação a $\mathscr{C}$ é o número $|OP^2 - \rho^2|$.

A potência de um ponto em relação a uma circunferência é, de certo modo, um invariante, conforme se vê no

Teorema 11.23. *Sejam $\mathscr{C}$ uma circunferência de centro O e raio ρ e P um ponto não contido nela. Seja r uma reta qualquer por P e que intersecta $\mathscr{C}$ nos pontos B e C (podendo ser $B = C$). Então o produto $PB \cdot PC$ é igual à potência de P em relação a $\mathscr{C}$.*

Demonstração. Suponhamos primeiro que P é externo à circunferência. Devido ao Problema 11.7.10 existe um ponto $A \in \mathscr{C}$ tal que PA é tangente a $\mathscr{C}$ em A. Como $PA \perp OA$ temos $PA^2 = PO^2 - \rho^2 > 0$, logo $PA \cdot PA$ é a potência de P em relação a $\mathscr{C}$. Por outro lado, se r é uma reta por P que intersecta $\mathscr{C}$ nos pontos B e C, então $PB \cdot PC = PA^2$ pelo Lema 11.20, de modo que $PB \cdot PC$ é a potência de P em relação a $\mathscr{C}$. O desenho da esquerda da Figura 11.37 ilustra essas situações.

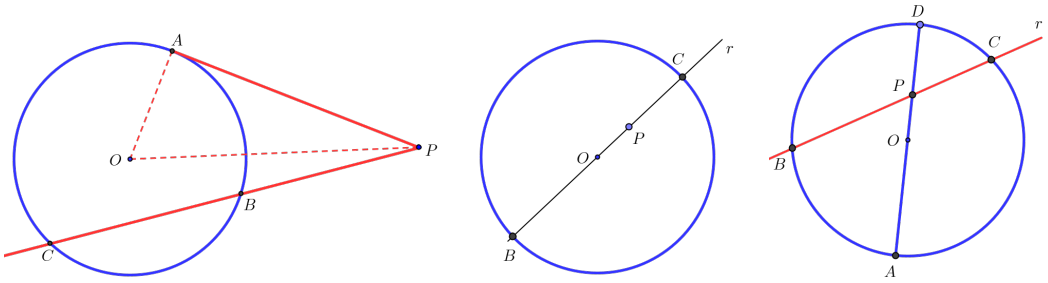


Figura 11.37. Ilustração do Teorema 11.23.

Suponhamos agora que P está no interior de $\mathscr{C}$. Provemos que $PB \cdot PC = |PO^2 - \rho^2| = \rho^2 - PO^2$.

Vejamos primeiro o caso em que $O \in BC$. Se $P = O$ então $PB \cdot PC = OB \cdot OC = \rho^2 = |PO^2 - \rho^2|$, pois $PO = 0$. Se $P \neq O$ podemos admitir, sem perda de generalidade, que $B - O - P - C$. Então

$$PB \cdot PC = (OB + OP)(OC - OP) = (\rho + OP)(\rho - OP) = \rho^2 - OP^2 = |PO^2 - \rho^2|.$$

Vejamos agora o caso em que $O \notin BC$. Seja AD a corda que contém P e O. Pelo que foi visto no Lema 11.18 temos $PB \cdot PC = PA \cdot PD$. Como $O \in AD$ pelo que vimos logo acima temos $PA \cdot PD = |PO^2 - \rho^2|$. Confira ilustração na Figura 11.37.

Portanto para qualquer posicionamento de P e r se tem a $PB \cdot PC = |PO^2 - \rho^2|$. □

Outras propriedades provenientes das relações entre circunferências, retas e pontos estão propostas na lista de Problemas 11.12.

11.9 Pontos notáveis do triângulo

Existem pontos importantes associados ao triângulo, denominados *pontos notáveis do triângulo*. As propriedades desses pontos estão frequentemente relacionadas à circunferência. Vários desses pontos já foram estudados ao longo deste texto. Apresentamos agora uma pequena lista.

Vimos, no Problema 10.3.34, que as três mediatrizes de um triângulo qualquer se encontram em um mesmo ponto. Completamos agora esse resultado com o

Teorema 11.24. *As três mediatrizes dos lados de um triângulo qualquer se encontram em um único ponto que é centro da circunferência que contém os três vértices.*

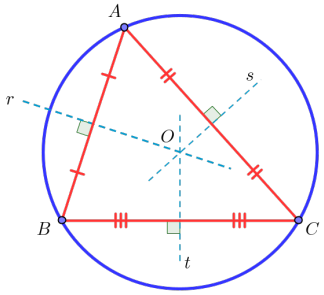


Figura 11.38. Triângulo com suas mediatrizes e a circunferência circunscrita.

Demonstração. Seja ABC um triângulo qualquer, e sejam r e s as mediatrizes de dois de seus lados, digamos, de AB e AC, respectivamente. Confira a Figura 11.38. Já argumentamos no Problema 10.3.34 que r e s não são paralelas, e assim se encontram num ponto O. Esse ponto, por estar em r, é equidistante de A e B, e, por estar em s, é equidistante de A e C. Assim, por ser equidistante de B e C, O está na mediatriz t de BC. Esse ponto é único, pois as mediatrizes são diferentes.

Finalmente observamos que por ser O equidistante dos três vértices do triângulo, ele é centro da circunferência que contém esses três vértices. □

Esse resultado justifica a

Definição 11.25. Dado um triângulo qualquer, o ponto de encontro de suas mediatrizes chama-se *circuncentro* desse triângulo. A circunferência com centro nesse ponto e que contém os três vértices chama-se *circunferência circunscrita* ao triângulo. Diz-se também que o triângulo está inscrito na circunferência. O raio dessa circunferência é, às vezes, denominado *circunraio*.

Vejamos agora que as três bissetrizes de um triângulo também se encontram em um ponto. Lembremos primeiro que no Problema 9.11.13 se afirmou que, em um triângulo arbitrário, as bissetrizes de dois ângulos quaisquer se intersectam em um ponto de seu interior. Por outro lado, no Problema 9.16.14 se viu que a bissetriz de um ângulo qualquer menos a sua origem é o conjunto dos pontos do interior do ângulo que são equidistantes dos seus lados.

Vamos completar esses resultados com o

Teorema 11.26. *As bissetrizes de um triângulo qualquer se encontram em um ponto de seu interior equidistante dos lados. A circunferência com centro nesse ponto e cujo raio é essa distância comum é tangente aos lados.*

Demonstração. Seja ABC um triângulo. As bissetrizes de $\hat{A}$ e de $\hat{B}$ se encontram em um ponto O que está no interior do triângulo, o que implica que está no interior de $\hat{C}$. Ainda, O é equidistante dos lados de $\hat{A}$ e de $\hat{B}$, portanto é equidistante dos lados de $\hat{C}$. Dessa forma, pelo que foi observado acima, O também está na bissetriz de $\hat{C}$. Como cada um dos ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ tem um lado em comum com cada um dos outros dois, a distância de O aos três lados do triângulo é a mesma, digamos que seja ρ. Portanto as bissetrizes de ABC se encontram em um ponto de seu interior equidistante dos lados.

Seja D o pé da perpendicular de O a BC, de modo que $OD = \rho$. Seja $\mathscr{C}$ a circunferência de centro O e raio ρ. Então $D \in \mathscr{C}$ e OD é um raio de $\mathscr{C}$ perpendicular a BC, de modo que BC é tangente a $\mathscr{C}$. Do mesmo modo se observa que $\mathscr{C}$ é tangente aos outros dois lados de ABC. □

Essas propriedades estão ilustradas na Figura 11.39.

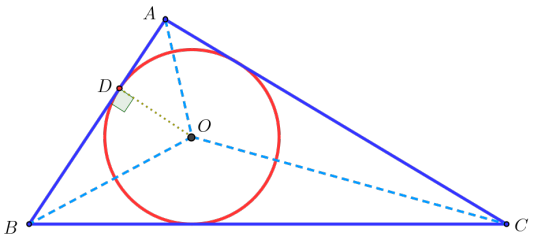


Figura 11.39. Triângulo com suas bissetrizes e a circunferência inscrita.

Definições 11.27. Dado um triângulo, o ponto de encontro de suas bissetrizes denomina-se *incentro*, e a circunferência com centro nesse ponto e tangente aos seus lados chama-se circunferência *inscrita*. Diz-se também que o triângulo é circunscrito à circunferência. O raio dessa circunferência é, às vezes, denominado *inraio*.

Prosseguindo na mesma linha de investigação, perguntamos se as alturas de um triângulo se encontram em um ponto. Fazendo desenhos de triângulos de todos os tipos e medidas, isso parece ser verdade. A demonstração exige uma certa imaginação, como veremos.

Dado um triângulo ABC, lembramos que a altura relativa ao vértice A ou relativa ao lado BC pode ser: (i) a reta que passa por A e é perpendicular a $\overleftrightarrow{BC}$; (ii) o segmento AD tal que $D \in \overleftrightarrow{BC}$ e $AD \perp \overleftrightarrow{BC}$.

No Teorema a seguir usamos a palavra altura no sentido de (i).

Teorema 11.28. *As (retas que são as) alturas de um triângulo qualquer se encontram em um ponto.*

Demonstração. Seja ABC um triângulo. Sejam r a reta paralela a BC por A e s a reta paralela a AC por B. Como AC e BC não são paralelas, r e s também não são, logo se encontram em um ponto X. Seja t a reta paralela a AB por C. Vemos que existem os pontos $Y = r \cap t$ e $Z = s \cap t$, e que X, Y e Z não são colineares, portanto formam um triângulo. Confira a Figura 11.40.

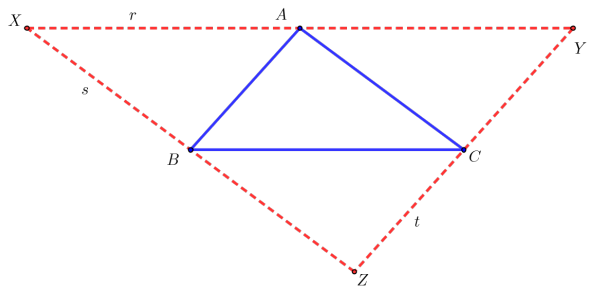


Figura 11.40. Demonstração da existência do ortocentro.

Examinando o posicionamento de X, Y e Z em relação às retas suporte dos lados de ABC vemos que $X-A-Y$, $X-B-Z$ e $Y-C-Z$. Notemos que $ABCY$ e $ACBX$ são quadriláteros com lados opostos paralelos, portanto são paralelogramos. Os lados opostos desses paralelogramos são congruentes, do que resulta $AY = BC$ e $BC = AX$. Portanto A é o ponto médio de XY, e a altura de ABC por A é a mediatriz de XY. O mesmo vale para os outros vértices de ABC, suas alturas são as mediatrizes de XYZ. Portanto as alturas se encontram em um ponto. □

Definição 11.29. Dado um triângulo, o ponto de encontro de suas alturas denomina-se *ortocentro*.

O seguinte ponto notável do triângulo é o encontro de suas medianas. Lembramos que uma mediana de um triângulo é o segmento que liga um vértice ao ponto médio do lado oposto.

Teorema 11.30. *As medianas de um triângulo qualquer se encontram em um ponto cuja distância a um vértice qualquer é igual a 2/3 da medida da mediana correspondente.*

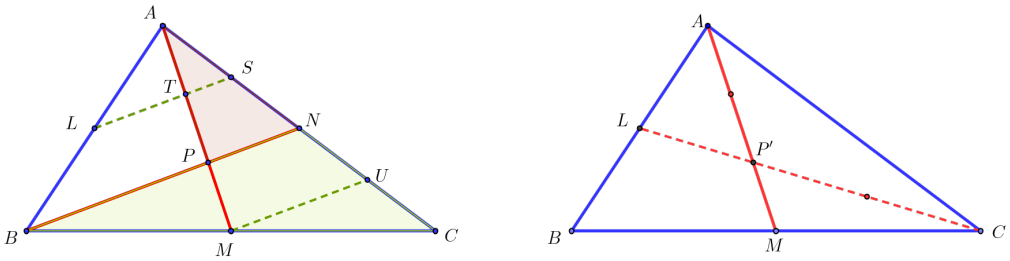


Figura 11.41. Desenho para o Teorema 11.30.

Demonstração. Dado ABC, tome as medianas AM e BN, e seja P seu ponto de encontro. Seja T o ponto médio de AP. Considere paralelas a BN por T e por M. Elas encontram AC nos pontos S e U, respectivamente. Em APN temos que T é ponto médio de um lado, então S é ponto médio do outro, isto é, de AN. Em BCN temos que M é ponto médio de um lado, então U é ponto médio do outro, isto é, de CN. Assim $S-N-U$ reparte AC em quatro segmentos congruentes, de modo que $T-P$ reparte AM em três segmentos congruentes. Dessa forma $AP = 2PM$. Esse mesmo argumento também se aplica à mediana BN, e temos $BP = 2PN$.

Tracemos agora a última mediana CL (confira a Figura 11.41). Seja P' seu ponto de encontro com a mediana AM. Aplicando o que foi visto, temos $CP' = 2P'L$ e $AP' = 2P'M$. Dessa última condição temos $P = P'$. Concluímos que as três medianas se encontram em um único ponto que está a 2/3 de qualquer vértice. □

Definição 11.31. Dado um triângulo, o ponto de encontro de suas medianas denomina-se *centróide* ou *baricentro*.

Os pontos notáveis de um triângulo (a saber, o circuncentro, o incentro, o ortocentro e o baricentro) são objetos de estudos e muitas propriedades foram descobertas. Uma delas está descrita no Teorema abaixo.

Teorema 11.32. *Em um triângulo qualquer o circuncentro, o ortocentro e o baricentro são colineares.*

A reta que contém o circuncentro, o ortocentro e o baricentro de um triângulo chama-se *reta de Euler*. Vemos na Figura 11.42 uma ilustração.

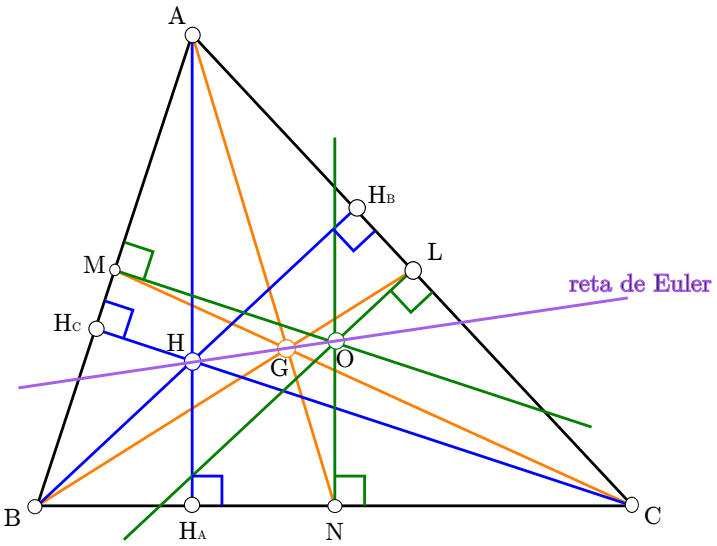
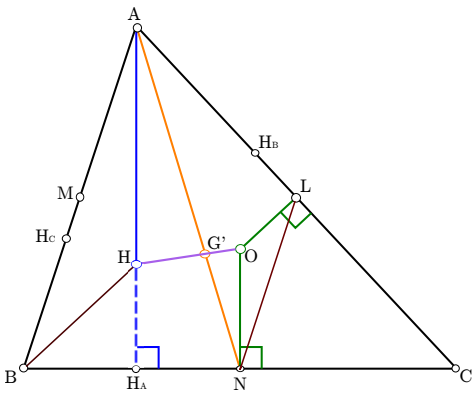


Figura 11.42. Reta de Euler passando pelo circuncentro, ortocentro e baricentro de um triângulo. Figura de [84].

Para a demonstração do Teorema 11.32 usamos as notações dessa Figura. Dado ABC, sejam L, M e N os pontos médios de AC, AB e BC, respectivamente. Sejam H_A, H_B e H_C os pés das alturas relativas aos vértices A, B e C, respectivamente. Sejam O, H e G respectivamente o circuncentro, o ortocentro e o baricentro.

Ao lado vemos a Figura 11.42 com menos elementos. Notemos que $ONL \sim HAB$. De fato, $NL||AB$ e $NL = AB/2$ pois NL liga pontos médios de lados de ABC. Segue que $\angle LNC \cong \hat{B}$. Como $ON \perp BC$ temos $m(\angle ONL) = 90° - m(\angle LNC) = 90° - m(\hat{B})$. Olhando agora o ABH_A vemos que $m(\angle BAH_A) = 90° - m(\hat{B})$, portanto $\angle ONL \cong \angle HAB$. Da mesma forma se tem $\angle OLN \cong \angle HBA$. Segue que $ONL \sim HAB$ pelo caso de semelhança AA. Como a razão é 2 vale que $AH = 2ON$.



Notemos que existe $G' = HO \cap AN$. Vale que $NOG' \sim AHG'$. De fato, $\angle NG'O \cong \angle AG'H$ pois são opostos pelo vértice. Ainda, $m(\angle H_A AN) + m(\angle H_A NA) = 90°$ e $m(\angle ONG') + m(\angle H_A NA) = 90°$, de modo que $\angle H_A AN \cong \angle ONG'$, ou $\angle HAG' \cong \angle ONG'$. Segue que $NOG' \sim AHG'$ pelo caso de semelhança AA. Como $AH = 2ON$, a razão é 2, e vale que $AG' = 2NG'$.

Lembremos agora que G também é um ponto de AN, e que $AG = 2NG$. Segue que $G = G'$, e que H, G e O são colineares. Isso termina a demonstração do Teorema 11.32.

Uma observação sobre a nomenclatura dos pontos notáveis. Os nomes circuncentro e incentro são auto-explicativos. O nome ortocentro usa como prefixo o termo *orto*, que provém da língua grega e significa direito, em linha reta, justo, exato. Na Matemática esse prefixo geralmente é usado para indicar "perpendicularidade". O termo baricentro usa um prefixo com origem na língua latina, *barus*, que significa peso. Assim baricentro quer dizer "centro de gravidade", ou "centro de equilíbrio", ou "centro de massa". Pensando no triângulo como um corpo, por exemplo, uma lâmina fina homogênea em forma triangular, a ideia do seu centro de gravidade é que seja um ponto que possa substitui-lo e não alterar as propriedades dinâmicas do corpo com um todo. A ideia de chamar o baricentro de "centro de equilíbrio" vem do fato de que se pendurarmos uma lâmina triangular pelo seu baricentro usando uma linha, então ela se equilibra em um plano horizontal.

O ponto de equilíbrio de uma barra que tem densidade uniforme é seu centro. Assim, dada uma lâmina em forma triangular com densidade uniforme, podemos subdividir essa lâmina em barras bem finas paralelas a um dos lados. Os pontos médios dessa barras estão localizados na mediana relativa a esse lado, de acordo com o resultado do Problema 10.6.7.

Essa ideia está ilustrada na Figura 11.43. Vemos que a lâmina pode ser sustentada em equilíbrio por uma linha colada sobre a mediana. Fazendo o mesmo procedimento com outra mediana, o ponto de encontro de duas medianas (portanto das três medianas) é o ponto de equilíbrio da lâmina.

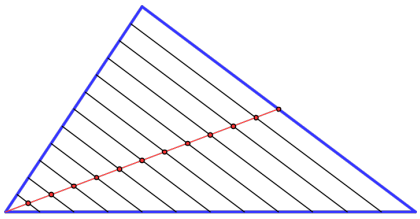


Figura 11.43. Propriedade da mediana de um triângulo.

11.10 Quadriláteros e circunferências

Muitas propriedades importantes são observadas no posicionamento recíproco de quadriláteros e circunferências. Vejamos algumas delas.

Definição 11.33. Um quadrilátero se diz *inscrito* ou *inscritível* em uma circunferência se os seus vértices estão nela contidos. Nesse caso dizemos também que a circunferência é *circunscrita* ao quadrilátero. Uma circunferência se diz *inscrita* em um quadrilátero se todos os seus lados são tangentes a ela. Nesse caso dizemos também que o quadrilátero é *circunscrito* ou *circunscritível* à circunferência.

Fazendo vários desenhos o estudante constatará que um quadrilátero pode ser ou não inscrito em uma circunferência, e pode ter ou não uma circunferência inscrita. O estudante também

observará que apenas quadriláteros convexos podem ser inscritos ou circunscritos em circunferências.

Uma condição imediata para que um quadrilátero seja inscrito é que as mediatrizes de seus lados se encontrem em um ponto. Esse ponto, quando existe, é chamado *circuncentro* do quadrilátero. Uma condição imediata para que um quadrilátero seja inscrito é que as bissetrizes de seus ângulos se encontrem em um ponto. Esse ponto, quando existe, é chamado *incentro* do quadrilátero.

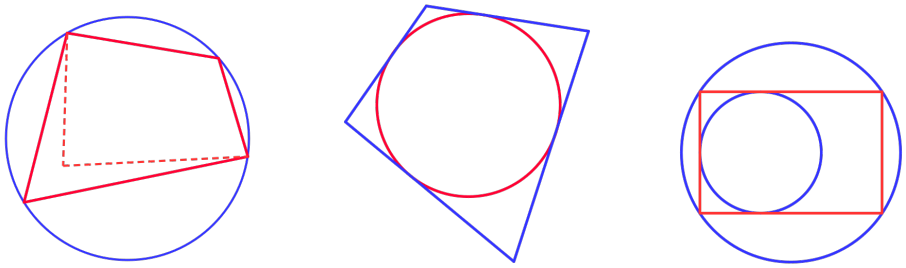


Figura 11.44. Exemplos de circunscrição de quadriláteros e circunferências.

Na Figura 11.44, esquerda, vemos um quadrilátero inscrito em uma circunferência, e dois (com dois lados hachurados) que não podem ser inscritos. No desenho central vemos uma circunferência inscrita em um quadrilátero. À direita vemos que qualquer retângulo pode ser inscrito em uma circunferência, pois tem um ponto central. Mas retângulos não quadrados não têm circunferência inscrita.

Observando detidamente o desenho de um quadrilátero inscrito em uma circunferência, vemos que, tomando um par qualquer de ângulos opostos, eles estão inscritos em arcos que, somados, constituem toda a circunferência. Então sua soma é 180°. Como a soma dos ângulos de um quadrilátero convexo é 360°, o outro par de ângulos opostos também são suplementares. Examinando a recíproca dessa propriedade, temos o

Teorema 11.34. *Um quadrilátero convexo está inscrito em uma circunferência se e somente se possui dois ângulos opostos suplementares.*

Demonstração. Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo inscrito em uma circunferência $\mathscr{C}$. O leitor pode considerar como referência o desenho da Figura 11.45.

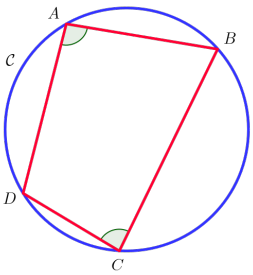


Figura 11.45. Teorema 11.34.

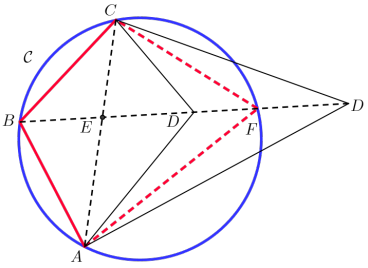


Figura 11.46. Teorema 11.34.

Cada vértice está no interior do ângulo formado pelos outros três vértices, de modo que esse vértice está no arco de circunferência inscrito pelo citado ângulo. Temos

$$m(\angle BAD) + m(\angle BCD) = [m(\overset{\frown}{BCD}) + m(\overset{\frown}{BAD})]/2 = 360^\circ/2 = 180^\circ.$$

Portanto $\hat{A}$ e $\hat{C}$ são suplementares. Do mesmo modo se vê que $\hat{B}$ e $\hat{D}$ são suplementares (ou então use que a soma dos ângulos de um quadrilátero convexo é 360°).

Reciprocamente, suponhamos que o quadrilátero $ABCD$ tenha um par de ângulos opostos suplementares, digamos que sejam $\hat{A}$ e $\hat{C}$. Seja $\mathscr{C}$ a circunferência que contém os pontos A, B e C. Como o quadrilátero é convexo, suas diagonais se encontram em um ponto E do seu interior. Como AC é uma corda de $\mathscr{C}$, E está no seu interior. A reta pelos pontos $B-E-D$ intersecta $\mathscr{C}$ em dois pontos com E entre eles (Problema 11.3.5).

Um desses pontos é B. Seja F o outro. Os posicionamentos possíveis desses pontos são $B-E-D-F$, $B-E-F-D$ ou $D=F$. Confira a Figura 11.46.

Observemos agora que no quadrilátero convexo $ABCD$ se tem, por hipótese, que $m(\hat{A})+m(\hat{C}) = 180°$. Como a soma dos ângulos de um quadrilátero convexo é 360°, segue que $m(\hat{B})+m(\hat{D}) = 180°$. Por outro lado, $ABCF$ é um quadrilátero inscrito, e já foi visto que isso implica que $m(\hat{B})+m(\hat{F}) = 180°$. Logo $\hat{D} \cong \hat{F}$.

Se ocorrer $B-E-D-F$ o resultado do Problema 9.15.6, implica $m(\hat{D}) > m(\hat{F})$, e, se ocorrer $B-E-F-D$, o mesmo resultado implica $m(\hat{F}) > m(\hat{D})$. Em ambos os casos temos uma contradição. Portanto $D=F$, e $D \in \mathscr{C}$. Provamos que o quadrilátero é inscrito em $\mathscr{C}$. □

Outra condição necessária e suficiente para que um quadrilátero seja inscritível está descrita no Teorema 11.36. Existem também condições necessárias e suficientes sobre um quadrilátero convexo para que ele tenha circunferência inscrita. Confira os problemas mais abaixo.

11.11 Construção do arco capaz

Explicamos aqui um conceito útil em várias situações.

Definição 11.35. Dado um segmento AB e um ângulo de medida α em um plano, seu *arco capaz* é o lugar geométrico dos pontos P desse plano para os quais $\angle APB$ mede α.

Esse lugar geométrico, conforme ilustrado na Figura 11.47, são dois arcos de circunferência, simétricos em relação a AB. Vejamos.

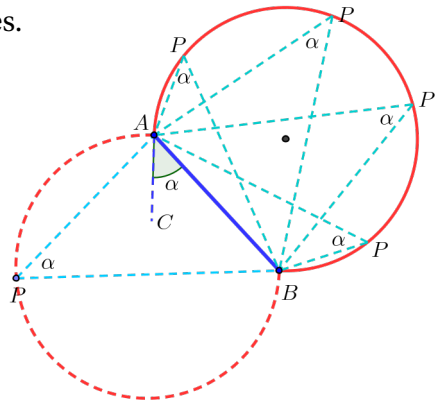


Figura 11.47. Arcos capazes de AB e α.

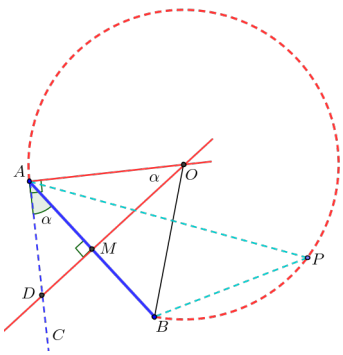


Figura 11.48. Construção do arco capaz.

Dados AB e α nas condições da Figura 11.47, o centro O de seu arco capaz, situado no lado oposto ao ângulo, é o encontro da mediatriz de AB com a reta perpendicular a AC por A. Para constatar isso seja M o ponto médio de AB e D o encontro da mediatriz com $\overrightarrow{AC}$. Acompanhando a Figura 11.48 temos $OAD \sim AMD$, pois ambos têm um ângulo reto e o ângulo comum $\angle ADO = \angle MDA$. Dessa semelhança segue $\angle AOD \cong \angle MAD$, e temos $m(\angle AOM) = \alpha$.

Como o triângulo AOB é isósceles de base AB, OM é também bissetriz, e segue que $\angle AOB$ tem medida 2α. Consideremos agora a circunferência com centro em O e raio OA. Vemos que para todo ponto P no arco situado no lado de AB oposto a C, $\angle APB$ inscreve o mesmo arco que o ângulo central $\angle AOB$, e portanto sua medida é α.

Tomando a circunferência simétrica em relação a AB, os pontos P do arco simétrico também satisfazem à propriedade requerida. Não existem outros pontos com essa propriedade, pois se P não está nesses arcos, a medida de $\angle APB$ é menor do que α quando P está no exterior das circunferências, e maior quando está no interior.

Uma aplicação do arco capaz de nosso interesse imediato é o

Teorema 11.36. *Um quadrilátero convexo é inscritível em uma circunferência se, e somente se, dois lados opostos determinam com as duas diagonais um par de ângulos congruentes.*

Demonstração. Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo, e suponhamos que seja inscritível em uma circunferência. Um par de ângulos determinados por dois lados opostos e duas diagonais podem ser $\angle CAD$ e $\angle CBD$ (os lados opostos são AD e BC, AD forma um ângulo com AC e BC forma um ângulo com a outra diagonal BD). Confira a Figura 11.49 à esquerda. Esses ângulos são congruentes pois inscrevem o mesmo arco. Observe que o mesmo ocorre com os outros três pares de ângulos nas condições dadas.

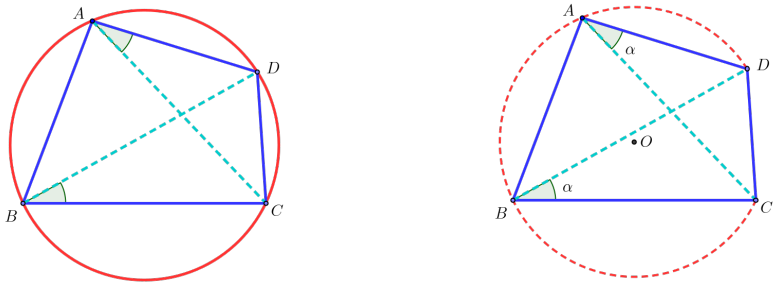


Figura 11.49. Uma propriedade de quadrilátero inscritível.

Reciprocamente, suponhamos que $\angle CAD \cong \angle CBD$ tenham medida α. Consideremos o arco capaz relativo a CD e a α no mesmo lado de A e B. Então a respectiva circunferência contém os quatro vértices do quadrilátero. Confira a Figura 11.49 à direita. □

11.12 Problemas finais

Problema 11.12.1. Na Figura 11.50 AB e AC são cordas de uma circunferência de centro O, $OD = OE$, $OD \perp AB$ e $OE \perp AC$. Mostre que a reta que passa por A e O é mediatriz de BC.

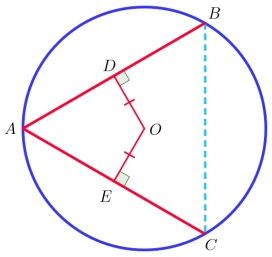


Figura 11.50. Problema 11.12.1.

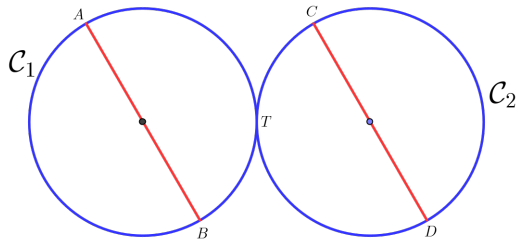


Figura 11.51. Problema 11.12.2.

Problema 11.12.2. Na Figura 11.51 $\mathscr{C}_1$ e $\mathscr{C}_2$ são circunferências congruentes tangentes externamente em T, AB é um diâmetro de $\mathscr{C}_1$ que não contém T e CD é um diâmetro de $\mathscr{C}_2$ tal que $CD||AB$. Mostre que $ABCD$ ou $ABDC$ é um losango.

Problema 11.12.3. Consideremos um triângulo com lados a, b e c tais que $c \leq b \leq a$. Prove que se todos os ângulos do triângulo forem agudos então $a^2 < b^2 + c^2$ e, se um dos ângulos for obtuso, então $a^2 > b^2 + c^2$.

Solução. Seja ABC um triângulo tal que $BC = a$, $AC = b$ e $AB = c$, com $c \leq b \leq a$. Em virtude do resultado do Problema 9.15.9 a altura AH tem o pé H no interior do lado BC. Consideremos a reta $r = \overleftrightarrow{HA}$, e seja $\mathscr{C}$ a circunferência com centro no ponto médio O de BC e raio $BC/2$. Usando a afirmação do Problema 11.3.5 r intersecta $\mathscr{C}$ em dois pontos, sendo um deles, digamos D, do mesmo lado que A em relação ao diâmetro BC. Sabemos que $m(\angle BDC) = 90°$ e que $a^2 = BD^2 + CD^2$.

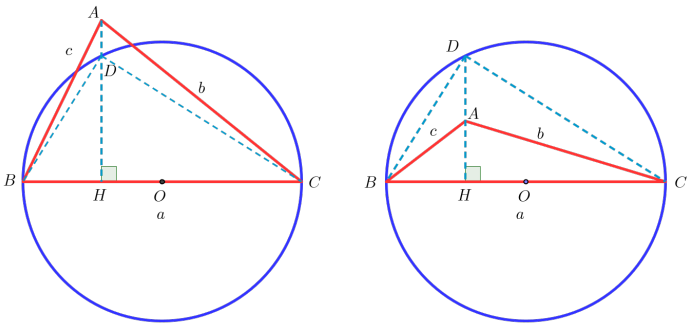


Figura 11.52. Desenho para o Problema 11.12.3.

Suponhamos primeiro que todos os ângulos do triângulo ABC sejam agudos. Queremos provar que $a^2 < b^2 + c^2$. Notemos que se $A = D$ então $\angle BAC$ é reto, o que contraria a hipótese. Então $A \neq D$. Se A estivesse no segmento DH então A estaria no interior de BDC e o resultado do Problema 9.15.6 implicaria que $m(\angle BAC) > m(\angle BDC) = 90°$, novamente contrariando a hipótese. Logo $H - D - A$, e temos a situação ilustrada na Figura acima, desenho da esquerda.

Notemos agora que $\angle BDH$ é ângulo externo de ABD, de modo que $\angle BDH > \angle BAD$ e $\angle BDH > \angle ABD$. Como $\angle BDH$ é um ângulo não reto do triângulo retângulo BDH, segue que é agudo, de modo que $\angle BAD$ e $\angle ABD$ também são agudos. Mas $\angle BDA$ é suplementar de $\angle BDH$, assim é obtuso. Portanto no triângulo ABD o maior lado é AB, e temos $BD < AB$. Com argumento similar se vê que $CD < AC$. Logo $a^2 = BD^2 + CD^2 < AB^2 + AC^2 = c^2 + b^2$, ou $a^2 < b^2 + c^2$.

Suponhamos agora que um dos ângulos do triângulo ABC seja obtuso. Esse ângulo tem que ser $\angle BAC$, e temos $H - A - D$. Ocorre a situação ilustrada na Figura acima, desenho da direita. Usando um argumento similar ao do caso anterior vem $a^2 = BD^2 + CD^2 > AB^2 + AC^2 = c^2 + b^2$, ou $a^2 > b^2 + c^2$.

Problema 11.12.4. Na situação da Figura 11.53, a circunferência de centro O tem duas cordas $AB = CD$ que não são diâmetros e se intersectam em P. Mostre que as cordas determinam ângulos congruentes com o diâmetro que passa por P.

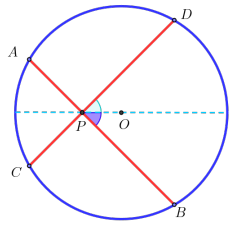


Figura 11.53. Problema 11.12.4.

Problema 11.12.5. Explique por que qualquer triângulo tem uma única circunferência circunscrita e uma única inscrita.

Problema 11.12.6. **a)** Demonstre que o circuncentro de um triângulo está em um de seus lados se, e somente se, o triângulo é retângulo, tendo como hipotenusa o referido lado. **b)** Demonstre que o circuncentro de um triângulo está em seu interior se e somente se todos os seus ângulos são agudos.

Problema 11.12.7. Calcule, em função dos lados laterais a e da base b, o incentro da circunferência inscrita num triângulo isósceles. Sugestão: acompanhando a Figura 11.54, procure triângulos semelhantes e use a proporção dos seus lados.

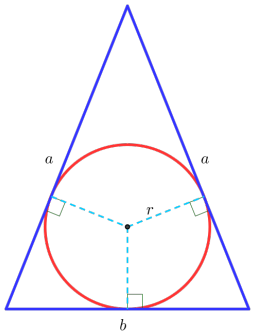


Figura 11.54. Problema 11.12.7.

Problema 11.12.8. Seja ABC um triângulo e sejam M_A, M_B e M_C os pontos médios de BC, AC e AB, respectivamente. **a)** Mostre que os baricentros dos triângulos ABC e $M_AM_BM_C$ coincidem. **b)** Demonstre que o circuncentro de ABC coincide com o ortocentro de $M_AM_BM_C$.

Problema 11.12.9. Uma circunferência está inscrita em um triângulo retângulo cujos catetos medem b e c e cuja hipotenusa mede a. Determine o raio da circunferência.

Problema 11.12.10. Demonstre agora a recíproca da afirmação do Problema 10.3.30: se num triângulo uma mediana mede a metade do lado, então ele é retângulo e o lado é a hipotenusa.

Problema 11.12.11. **a)** Explique por que apenas quadriláteros convexos podem ser inscritos em uma circunferência. **b)** Explique por que apenas quadriláteros convexos podem ser circunscritos a uma circunferência.

Problema 11.12.12. Verifique o seguinte. **a)** Uma condição necessária e suficiente para que um quadrilátero seja inscrito em uma circunferência é que as mediatrizes de seus lados se encontrem em um ponto. **b)** Uma condição necessária e suficiente para que um quadrilátero circunscreva uma circunferência é que as bissetrizes de seus ângulos se encontrem em um ponto.

Problema 11.12.13 (Teorema de Pitot)**.** Uma condição necessária para que um quadrilátero $ABCD$ tenha uma circunferência inscrita é que $AB+CD=AD+BC$. Para quadriláteros convexos, a condição também é suficiente: consulte o Tema 11.13.12.

Problema 11.12.14. Demonstre que em um triângulo qualquer a soma das três medianas é maior do que $3/4$ do perímetro.

Problema 11.12.15. Demonstre que todo quadrilátero inscrito em uma circunferência de raio ρ tem pelo menos um lado $< \rho\sqrt{2}$.

Problema 11.12.16. Duas circunferências num plano se dizem perpendiculares quando se intersectam em dois pontos e, nos pontos de interseção, suas retas tangentes são perpendiculares. Seja $\mathscr{C}$ uma circunferência de raio ρ e centro O, e tome uma semirreta com origem em O. Localize os pontos P nessa semirreta para os quais existe uma circunferência $\mathscr{D}$ com centro em P que seja perpendicular a $\mathscr{C}$. Mostre que, dado P nessa condição, existe uma única circunferência com centro em P com essa propriedade, e calcule seu raio.

Problema 11.12.17 (Lei dos senos)**.** Demonstre que, em um triângulo qualquer, as medidas dos lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos, e a constante de proporcionalidade é o diâmetro da circunferência circunscrita. Com as notações da Figura 11.55:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} = 2R.$$

Sugestão: para cada vértice, tome o diâmetro por ele e use ângulos inscritos.

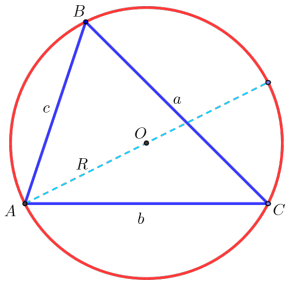


Figura 11.55. Problema 11.12.17.

Problema 11.12.18. Um triângulo isósceles de lados a e base b está inscrito em uma circunferência de raio R, como na Figura 11.56. Encontre relações entre esses valores.

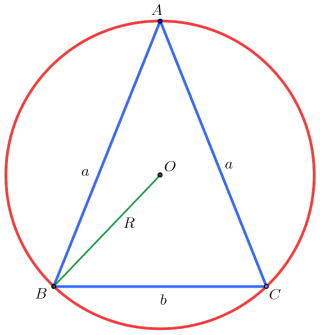


Figura 11.56. Problema 11.12.18.

Problema 11.12.19. Dado um triângulo, sejam H seu ortocentro, I seu incentro e O seu circuncentro. Demonstre que: **a)** O triângulo é equilátero se, e somente se $H = I$. **b)** O triângulo é equilátero se, e somente se $H = O$. **c)** O triângulo é equilátero se, e somente se $O = I$. Para cada um dos itens, faça figuras.

Problema 11.12.20. Explique o truque de marceneiro apresentado no vídeo neste endereço para cortar uma ripa em um ângulo de 45°. Confira a Figura 11.57. Primeiro se risca o segmento 1º para marcar o ponto final de corte. Depois se desenha o arco 2º para determinar o risco de corte.

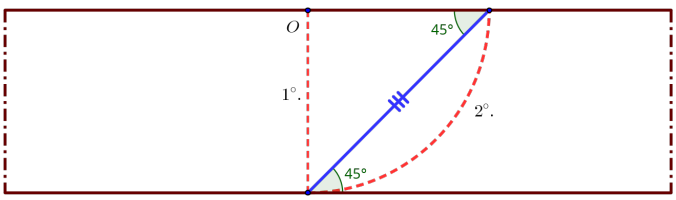


Figura 11.57. Truque para obter ângulo de 45°.

Problema 11.12.21. São dados um ângulo $\angle AOB$ de medida α e uma circunferência de raio R. **a)** Determine o ponto O_1 em que que deve ser posto o centro da circunferência para que ela seja tangente aos dois lados do ângulo. Confira a Figura 11.58. **b)** Determine o raio r e o ponto O_2 em que deve ser posto o centro de uma circunferência menor que seja tangente à primeira e tangente aos dois lados do ângulo.

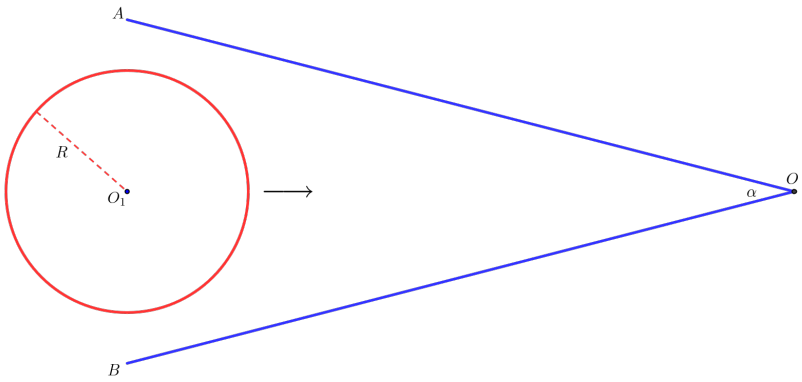


Figura 11.58. Ângulo e circunferência.

Problema 11.12.22. Na Figura 11.59 ABC é um triângulo retângulo em A, $BCDE$ é um quadrado e O é seu centro. Mostre que AO contém a bissetriz de $\hat{A}$.

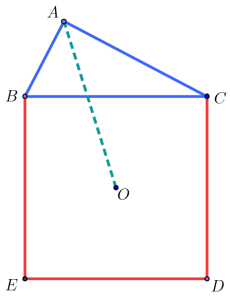


Figura 11.59. Relação do centro de um quadrado com um triângulo retângulo adjacente.

11.13 Temas para investigação

Tema 11.13.1. Faça desenhos mostrando as posições relativas de três circunferências em um plano, e obtenha resultados analíticos sobre esses casos.

Tema 11.13.2. Investigue as localizações possíveis do ortocentro. Produza afirmações similares às do Problema 11.12.6 e justifique.

Tema 11.13.3. Investigue, faça conjecturas e justifique condições necessárias e suficientes para: (i) retângulos serem inscritos em circunferência; (ii) retângulos serem circunscritos em circunferência; (iii) paralelogramos serem inscritos em circunferência; (iv) paralelogramos serem circunscritos em circunferência.

Tema 11.13.4. Dado um triângulo qualquer, o triângulo formado pelos pés de suas alturas chama-se *triângulo órtico*. Investigue suas propriedades.

Tema 11.13.5. Existe uma plêiade de pontos notáveis relacionados com o triângulo. Faça uma consulta na internet e artigos. Pode iniciar com o verbete *Encyclopedia of Triangle Centers* de [84]. Faça uma tabela expondo um certo número deles, incluindo os pontos notáveis apresentados neste texto. Inclua na tabela seus nomes, definição e propriedades.

Tema 11.13.6. É dada uma circunferência de raio ρ. Investigue quais são as medidas possíveis para as suas cordas (com justificativas, naturalmente).

Tema 11.13.7. **a)** Confirme se toda semicircunferência admite quadrado inscrito, com um lado em seu diâmetro, como na Figura 11.60 (a). **b)** Confirme se todo quarto de circunferência admite quadrado inscrito, com dois lados contidos em raios, como na Figura 11.60 (b). Descubra teoremas sobre essas configurações.

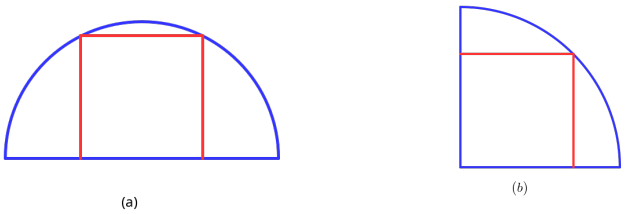


Figura 11.60. Quadrados inscritos em semicircunferência e um quarto de circunferência.

Tema 11.13.8. São dados uma circunferência e uma corda. Duas circunferências menores tangenciam a primeira internamente e têm a corda como tangente comum. Confira a Figura 11.61. Descubra teoremas sobre essa configuração.

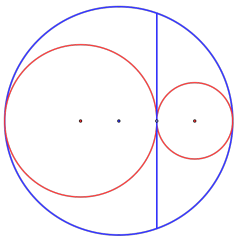


Figura 11.61. Três circunferências.

Tema 11.13.9. **a)** Ao definir semicircunferência inscrita em um triângulo equilátero parece que o adequado é pedir que seu diâmetro esteja contido em um lado e que seja tangente aos outros dois lados. Estude essa questão e descubra propriedades dessa configuração. **b)** Estude a mesma questão para triângulos isósceles.

Tema 11.13.10. Confirme se todo triângulo retângulo tem semicircunferência inscrita com seu diâmetro contido em um dos catetos, como na Figura 11.62 à esquerda. Descubra teoremas sobre essa configuração.

Tema 11.13.11. Confirme se todo triângulo retângulo tem semicircunferência inscrita com seu diâmetro contido na hipotenusa, como na Figura 11.62, à direita. Descubra teoremas sobre essa configuração.

Tema 11.13.12 (Recíproca do Teorema de Pitot)**.** Investigue uma demonstração para a recíproca do Teorema de Pitot: uma condição suficiente para que um quadrilátero convexo $ABCD$ tenha uma circunferência inscrita é que $AB + CD = AD + BC$.

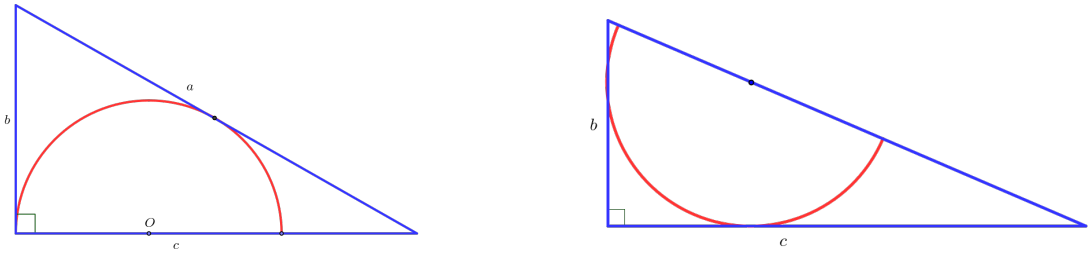


Figura 11.62. Semicircunferência inscrita em triângulo retângulo.

Tema 11.13.13. Vimos, no Problema 9.16.15, que em um triângulo qualquer as três bissetrizes internas se encontram em um único ponto. Investigue se as bissetrizes externas admitem pontos de encontro que possam ser centros de circunferências tangentes aos prolongamentos dos lados.

Tema 11.13.14. Investigue como são os trapézios inscritíveis. Para esses localize o circuncentro e calcule o circunraio em função dos dados do trapézio. Faça figuras.

Tema 11.13.15. Um quadrilátero se diz *bicêntrico* quando for inscritível e circunscritível, e o circuncentro e o incentro são diferentes. Um quadrilátero se diz *unicêntrico* quando for inscritível e circunscritível, e o circuncentro e o incentro são o mesmo ponto. **a)** Ache todos os quadriláteros unicêntricos. **b)** Encontre todos os trapézios isósceles bicêntricos. **c)** Ache uma receita para construir outros quadriláteros bicêntricos.

Tema 11.13.16. Estude posicionamentos interessantes de quatro circunferências em um plano. Faça desenhos. Investigue propriedades e justifique. (i) Veja se é possível que três delas se tangenciem duas a duas externamente e tangenciem a quarta internamente. (ii) Três delas têm centros colineares e se tangenciam externamente. A quarta pode tangenciá-las? (iii) Podem as quatro circunferências serem tangentes exteriormente duas a duas?

Tema 11.13.17. Um quadrilátero se diz especial quando tiver dois lados opostos congruentes e dois ângulos opostos congruentes. Para investigar se essas condições implicam que o quadrilátero é um paralelogramo, usou-se o Geogebra, e foi obtido o exemplo da Figura 11.63. Lembrando que observações proporcionadas por um aplicativo de desenho são indicações que precisam passar por um crivo usando dedução, investigue como podem ser construídos quadriláteros especiais que não são paralelogramos com os recursos da Geometria Euclidiana.

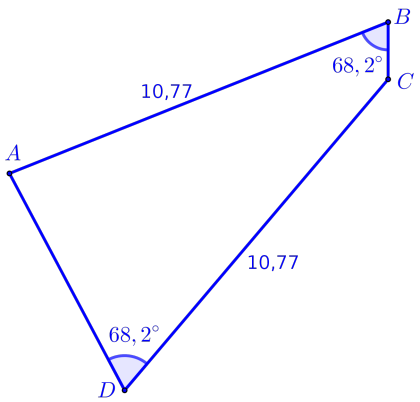


Figura 11.63. Um quadrilátero especial.

Tema 11.13.18. Vemos na Figura 11.64, à esquerda, um instrumento articulado para fazer desenhos em uma folha de papel, e, na mesma figura, à direita, vemos um esquema geométrico. A vareta AB se articula com a vareta PC em seu ponto médio C, e $AC = PC$. O ponto P está fixado em uma reta r. Qual é a curva que descreve B quando A se movimenta sobre r?

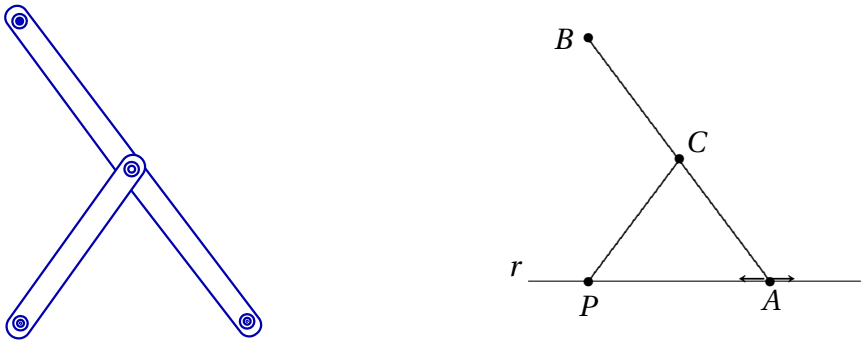


Figura 11.64. Um mecanismo articulado.

Tema 11.13.19. Estude o seguinte mecanismo articulado.

Vemos na Figura 11.65 o esquema de um portão basculante. A barra AE representa a seção do portão, e a canaleta BF é fixa verticalmente e serve de guia para o pino D, fixado em AE. O pino B está fixo na barra BC e na parte superior da canaleta, e permite movimento de rotação. C é um pino fixado em AE e em BC e permite movimento de rotação. Temos $AC = BC = CD$. Investigue a seguinte questão: quando o portão se movimenta, existe o perigo dele bater no teto?

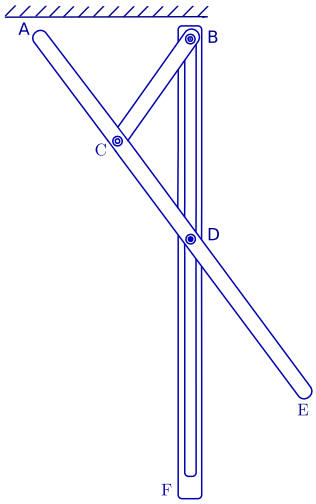


Figura 11.65

Tema 11.13.20. Na Figura 11.66 duas circunferências de mesmo raio são tangentes em um ponto A. É construído um triângulo equilátero ABC com B em uma circunferência e C em outra. Descubra propriedades dessa configuração (e justifique).

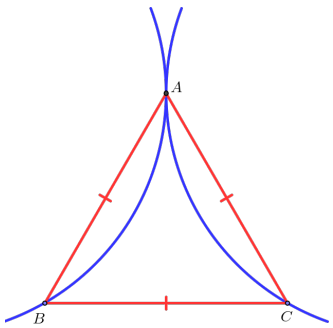


Figura 11.66. Arcos de circunferências inscritos em um triângulo equilátero.

Tema 11.13.21. Na Figura 11.67 $ABCD$ é um retângulo com três semicircunferências inscritas e tangentes entre si. M é ponto médio do lado. Descubra propriedades dessa configuração (e justifique).

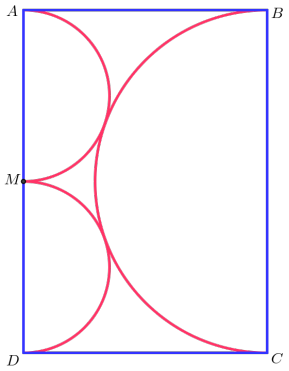


Figura 11.67. Um retângulo com três semicircunferências inscritas.

Tema 11.13.22. Um estudioso da Idade Média teve uma ideia para calcular o raio da Terra. Primeiro mediu a altura de uma alta montanha. Depois subiu ao topo dessa montanha e fez uma outra medição. Com esses dados calculou uma aproximação do raio da Terra. **a)** Estude você mesmo uma maneira de obter uma aproximação do raio da Terra com esse método. **b)** Se você vivesse na Idade Média e precisasse medir a altura de uma montanha, como o faria?

Capítulo 12

Área de regiões poligonais

12.1 Introdução

A Matemática estuda os números e as formas, e esses dois campos não são isolados. A associação entre eles ocorre nos mais diferentes aspectos. O mais imediato é aquele em que números medem a "extensão" de uma figura. Os resultados desse estudo são extremamente úteis tanto para a Matemática e as outras ciências como para as atividades práticas do dia a dia.

Uma figura é um subconjunto do espaço, portanto, um conjunto de pontos. As figuras podem ser muito complexas, por isso não é fácil criar um método geral para medi-las. A Geometria Euclidiana se limita a propor métodos de medida para poucos tipos de figuras. Métodos mais gerais e elaborados podem ser investigados através de outras teorias da Matemática Superior.

Já vimos no Capítulo 9, na Seção 9.6, um estudo sobre medidas de segmentos. Ficou claro, ao longo das seções e capítulos seguintes, a utilidade desses conceitos e técnicas. Agora vamos ampliar esse estudo e incluir métodos de medida de um tipo específico de figuras planas, chamadas regiões poligonais. Enquanto a medida de um segmento é denominada *comprimento*, a medida da extensão de uma figura plana chama-se *área*.

Quando relacionamos números a formas não queremos fazer uma associação qualquer. Se desejamos que um número meça a extensão ou tamanho de uma forma, precisamos que algumas propriedades imediatas sejam satisfeitas. Por exemplo, se associamos a uma figura $\mathscr{A}_1$ um número a_1 e a uma figura $\mathscr{A}_2$ um número a_2, então à figura $\mathscr{A}_1 \cup \mathscr{A}_2$ devemos associar o número $a_1 + a_2$, sob a hipótese de que a interseção das figuras tenha extensão nula. Outra coisa é que o número que mede a extensão de uma figura deve ser positivo, pois a extensão traz em si uma ideia afirmativa. No máximo, em casos especiais, podemos associar o número zero. Também desejamos que a medida associada a uma figura não se modifique só por que ela foi mudada de lugar. Por isso figuras congruentes devem ter a mesma área.

A seguir desenvolvemos essas ideias.

12.2 Conceitos iniciais de área

Iniciamos com a definição de região poligonal.

Definições 12.1. Uma *região triangular* é o conjunto formado por um triângulo e seu interior. Uma *região poligonal* é a reunião de um número finito de regiões triangulares de um mesmo plano de forma que se duas dessas regiões se intersectam, a interseção é um lado comum ou um vértice comum.

Na Figura 12.1 vemos desenhos de uma região triangular (à esquerda) e de regiões poligonais (à direita). Entendemos que uma única região triangular também é uma região poligonal.

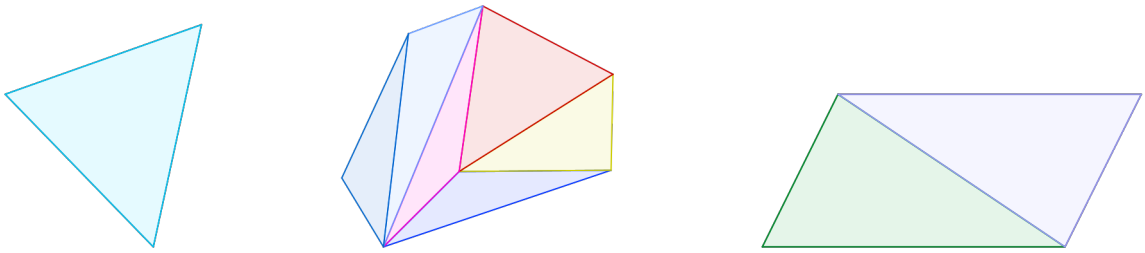


Figura 12.1. Regiões poligonais.

São regiões poligonais as figuras geométricas delimitadas por quadriláteros. Dado um triângulo ABC ou um quadrilátero $ABCD$, indicamos com a mesma notação a região poligonal definida por eles. Quando o contexto estiver claro podemos chamar uma região quadrada de quadrado, e procedemos da mesma forma para outras figuras.

O conceiro de área pode ser construído com os métodos da Geometria Euclidiana. Para ver como fazer isso confira, por exemplo, [54], página 168 e seguintes. Neste texto preferimos definir a área através de axiomas.

Axioma 17. *(da área)*
A toda região poligonal corresponde um único número positivo.

Definição 12.2. O número a que se refere o Axioma 17 chama-se *área* da região poligonal. Se o nome de uma figura é $\mathscr{F}$, sua área pode ser indicada por $a(\mathscr{F})$.

Axioma 18. *(da soma de áreas)*
Se uma região poligonal $\mathscr{P}$ é a união de duas ou mais regiões poligonais tais que, se duas delas se intersectam, a interseção é formada por lados ou vértices de regiões triangulares que as compõem, então a área de $\mathscr{P}$ é a soma das áreas das regiões poligonais que a formam.

Axioma 19. *(da área de triângulos congruentes)*
As áreas de regiões triangulares delimitadas por triângulos congruentes são iguais.

Por fim precisamos de uma região padrão que sirva de comparação para medirmos as áreas das regiões. O melhor modo de fazer isso seria estabelecer que a área do quadrado unitário (isto é, do quadrado de lado 1) é 1. Mas essa acepção traz algumas dificuldades técnicas que adiamos para o final do Capítulo. Por isso adotamos provisoriamente o

Axioma 20. *(da área de quadrados)*
A área de qualquer quadrado de lado a é a^2.

Nosso trabalho prossegue com o cálculo da área das regiões poligonais que temos estudado até agora.

12.3 Área das principais figuras

Já sabemos, em virtude do Axioma 20, como calcular a área de qualquer quadrado. Vamos ver qual é a área de um retângulo qualquer. Para isso precisamos primeiro do

Lema 12.3. *Dois retângulos congruentes quaisquer têm a mesma área.*

Demonstração. Sejam $ABCD$ e $EFGH$ retângulos congruentes, com $AB = EF$ e $BC = FG$. Em $ABCD$ escolhemos a diagonal AC. Assim esse retângulo é uma região poligonal, reunião das regiões triangulares ABC e ADC. Esses triângulos são congruentes por LAL. Usando o Axioma 17, seja $a = a(ABC)$. Pelo Axioma 19, a área de ADC também é a. Usando agora o Axioma 18 vemos que a área de $ABCD$ é $2a$. Confira a Figura 12.2.

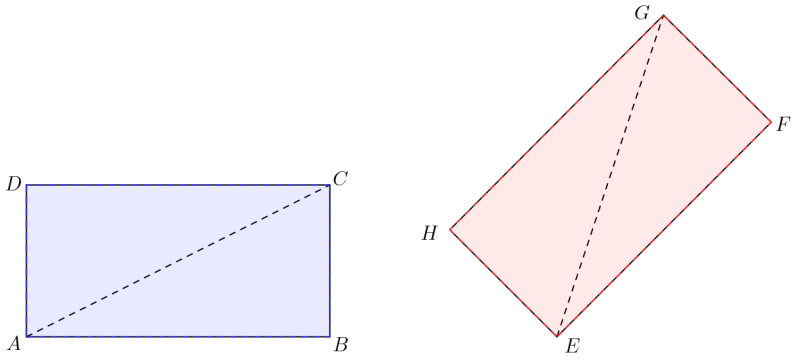


Figura 12.2. Área de dois retângulos congruentes.

Consideremos agora a diagonal EG do retângulo $EFGH$, que é assim a reunião das regiões triangulares EFG e EHG. Como $EFG \cong EHG \cong ABC$ por LAL, vem que a área de $EFGH$ é $2a$. Logo $a(ABCD) = a(EFGH)$, e terminamos a demonstração. □

Temos a seguir o

Teorema 12.4. *A área de qualquer retângulo é o produto de dois lados consecutivos quaisquer.*

Demonstração. Seja $ABCD$ um retângulo com $a = AB$ e $b = BC$. Confira a Figura 12.3.

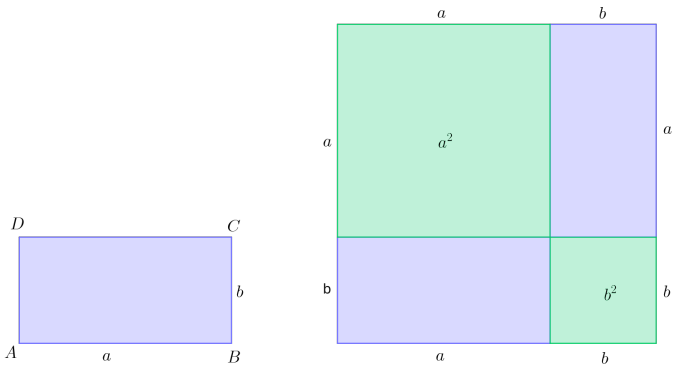


Figura 12.3. Cálculo da área de um retângulo.

Notemos que se provarmos que $a(ABCD) = ab$ então o Teorema estará demonstrado. De fato, os lados opostos de um retângulo são congruentes, de modo que

$$ab = AB \cdot BC = BC \cdot CD = CD \cdot AD = AD \cdot AB,$$

ou seja, a área do retângulo pode ser calculada tomando-se dois lados consecutivos quaisquer.

Para demonstrar a afirmação $a(ABCD) = ab$ consideramos um quadrado de lado $a+b$. Tomando um segmento perpendicular a cada par de lados opostos, convenientemente posicionados, a região quadrada fica repartida em dois quadrados, um de lado a e outro de lado b, e em dois retângulos de lados a e b. Esses dois retângulos são congruentes entre si e a $ABCD$, de modo que todos têm a mesma área, que indicamos por $a(ABCD)$.

Já sabemos, do Axioma 20, que a área do quadrado de lado $a+b$ é $(a+b)^2$, e, do Axioma 18, que essa área é também a soma das áreas das regiões que a compõem. Assim

$$(a+b)^2 = a^2+b^2+2a(ABCD) \Rightarrow a^2+2ab+b^2 = a^2+b^2+2a(ABCD) \Rightarrow a(ABCD) = ab.$$

Provamos o que queríamos. □

Observações: Vimos que, em todo retângulo, é constante "o produto de dois lados consecutivos quaisquer". Dizemos que esse produto é um invariante, pois não se modifica se mudarmos os lados escolhidos, e nem a ordem com que são tomados.

Outra observação, essa de cunho mais pedagógico, é que nos livros didáticos do Ensino Fundamental, muitas vezes se diz que "a área de um retângulo é o produto de sua base pela sua altura". Convém explicar aqui que os termos "base" e "altura" têm origem no posicionamento padrão de um retângulo, quando se desenha o retângulo com os lados paralelos aos bordos da folha de papel. Como o retângulo pode estar em qualquer posição, evitamos essa nomenclatura, salvo em casos especiais.

Prosseguimos com o cálculo da área de regiões poligonais. Há vários caminhos a seguir. Escolhemos obter de imediato a área de uma região triangular qualquer.

Começamos com o

Lema 12.5. *A área de um triângulo qualquer é a metade do produto de seu maior lado pela altura respectiva.*

Demonstração. Seja ABC um triângulo e suponhamos que AB seja o maior lado. Seja CD a altura relativa a AB. Queremos provar que $a(ABC) = (1/2)\,AB \cdot CD$.

Sabemos que $A-D-B$ pelo resultado do Problema 9.15.9. Dessa forma CD reparte a região triangular ABC em duas regiões, e temos $a(ABC) = a(ADC) + a(BDC)$.

Consideremos a reta r paralela a AB por C, e sejam E e F os pés das perpendiculares a r por A e B, respectivamente. Como AE, DC e BF são perpendiculares a r e $A-D-C$ então $E-C-F$. Já sabemos que $CD = BF = AE$. Confira a Figura 12.4.

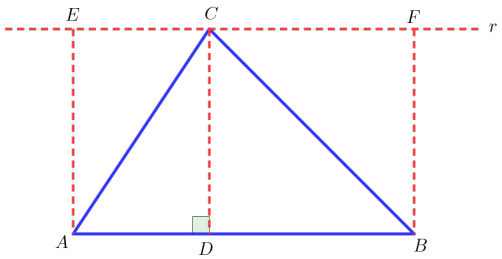


Figura 12.4. Cálculo da área de um triângulo.

Notemos que $ADCE$, $BFCD$ e $ABFE$ são retângulos e que a região retangular $ABFE$ é a união das regiões $ADCE$ e $BFCD$. Temos $a(ABFE) = a(ADCE) + a(BFCD)$.

Por outro lado, AC é uma diagonal de $ADCE$, e reparte essa região em duas regiões triangulares de mesma área. Igualmente BC é uma diagonal de $BFCD$, e reparte essa região em duas regiões triangulares de mesma área. Assim $a(ADCE) = a(ADC) + a(ACE) = 2a(ADC)$ e $a(BFCD) = a(BFC) + a(BDC) = 2a(BDC)$.

Reunindo essas relações obtemos $2\,a(ABC) = 2(a(ADC) + a(BDC)) = 2a(ADC) + 2a(BDC) = a(ADCE) + a(BFCD) = a(ABFE) = AB \cdot BF = AB \cdot CD$. Portanto

$$a(ABC) = \frac{1}{2}\, AB \cdot CD,$$

e terminamos a demonstração. □

Consideramos agora o

Lema 12.6. *Em qualquer triângulo é invariante o produto de um lado pela altura respectiva.*

Demonstração. Seja ABC um triângulo e suponhamos que AB seja o maior lado. Seja CD a altura relativa a AB. Sabemos que $A - D - B$ pelo resultado do Problema 9.15.9. Da hipótese de que AB é o maior lado temos também que $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são agudos, pois num triângulo ao maior lado se opõe o maior ângulo.

Consideremos qualquer um dos outros dois lados, digamos, AC, e seja BE sua altura correspondente. Vejamos como E se localiza na reta $\overleftrightarrow{AC}$ em relação aos pontos A e C. Os casos possíveis estão ilustrados na Figura 12.5.

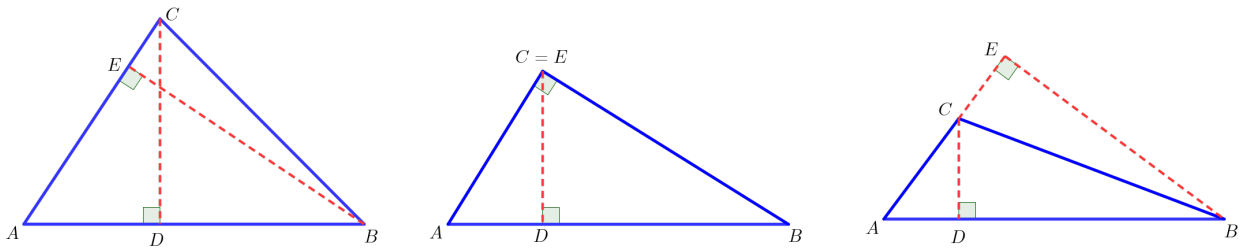


Figura 12.5. Um invariante do triângulo.

De fato, se fosse $E = A$ o triângulo ABC seria retângulo de hipotenusa BC, que seria o maior lado, contrariando a hipótese. Portanto $E \neq A$. Se E e C estivessem em lados opostos em relação a $\overleftrightarrow{AB}$, o ângulo $\angle BAC$ seria externo ao triângulo retângulo BAE, e esse ângulo não seria agudo. Portanto E e C estão do mesmo lado em relação a $\overleftrightarrow{AB}$. Temos assim os três casos já referidos.

1º caso: $A - E - C$ (desenho da esquerda da Figura 12.5). Por AA temos $AEB \sim ADC \Rightarrow AB/AC = BE/CD \Rightarrow AB \cdot CD = AC \cdot BE$.

2º caso: $E = C$ (desenho central da Figura 12.5). Por AA temos $ADC \sim ACB \Rightarrow AC/AB = CD/BC \Rightarrow AB \cdot CD = AC \cdot BC. \Rightarrow AB \cdot CD = AC \cdot BE$.

3º caso: $A - C - E$ (desenho da direita da Figura 12.5). Por AA temos $AEB \sim ADC \Rightarrow AB/AC = BE/CD \Rightarrow AB \cdot CD = AC \cdot BE$.

Com isso terminamos a demonstração. □

Combinando os resultados desses dois Lemas temos

Teorema 12.7. *A área de um triângulo qualquer é a metade do produto de um lado qualquer pela altura respectiva.*

Vejamos agora a área dos paralelogramos. Lembramos a Definição 10.14 que diz que "um *paralelogramo* é um quadrilátero cujos lados opostos são paralelos". Dado um lado de um paralelogramo, a *altura relativa a esse lado* é a distância entre a reta suporte desse lado e a do lado oposto. Assim se nomeia também qualquer segmento que liga as retas suportes desses dois lados e lhes é perpendicular.

Um paralelogramo tem duas alturas, e a Figura 12.6 ilustra esse fato. Vemos que CE é uma altura relativa ao lado AB (ou relativa ao lado CD já que $CD \parallel AB$) e CF é uma altura relativa ao lado AD (ou relativa ao lado BC).

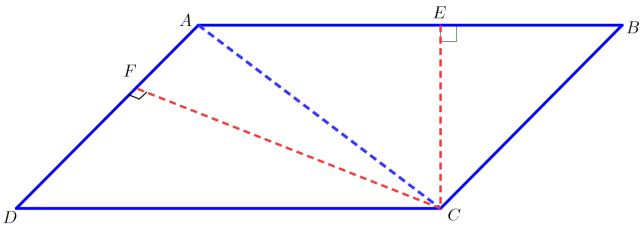


Figura 12.6. Um paralelogramo e suas duas alturas.

Lema 12.8. *Em todo paralelogramo é invariante o produto de um lado qualquer pela altura respectiva.*

Demonstração. Consideremos o paralelogramo $ABCD$. Sejam CE a altura relativa aos lados AB e CD, e CF a relativa aos lados AD e BC. A Figura 12.6 pode servir de referência.

Queremos provar que $AB \cdot CE = BC \cdot CF$. Como os lados opostos de um paralelogramo são congruentes, disso resultará a afirmação do Lema.

Consideremos o triângulo ABC. Sua altura relativa ao lado AB é CE, e a relativa ao lado BC é congruente a CF. Em virtude do Lema 12.6 temos $AB \cdot CE = BC \cdot CF$, como queríamos. □

Teorema 12.9. *A área de qualquer paralelogramo é o produto da medida de qualquer lado pela altura correspondente.*

Demonstração. Consideremos o paralelogramo $ABCD$. Temos $a(ABCD) = a(ABC) + a(ADC)$. Sejam CE a altura relativa ao lado AB, e CF a relativa ao lado AD e BC. São alturas tanto dos triângulos quanto do paralelogramo. A Figura 12.6 pode, novamente, servir de referência. Temos

$$a(ABCD) = a(ABC) + a(ADC) = \frac{1}{2}\, AB \cdot CE + \frac{1}{2}\, AD \cdot CF.$$

Em virtude do Lema 12.8 temos $AB \cdot CE = AD \cdot CF$. Logo $a(ABCD) = AB \cdot CE$. Da invariância do produto $AB \cdot CE$ segue a afirmação do Teorema. □

Vejamos agora a área dos trapézios. Um *trapézio* é um quadrilátero com um par de lados paralelos. Esse par tem que ser de lados opostos, necessariamente. Podemos exigir na definição de trapézio que os outros dois lados opostos não sejam paralelos. Ou podemos não exigir. Para a finalidade de deduzir sua área não precisamos decidir isso.

Um trapézio tem pelo menos uma altura, que é a distância entre as retas suportes de seus lados paralelos. Assim se nomeia também qualquer segmento que liga essas retas suportes e lhes é perpendicular. Confira ilustração na Figura 12.7.

Teorema 12.10. *A área de qualquer trapézio é o produto da semissoma de dois lados paralelos pela respectiva altura.*

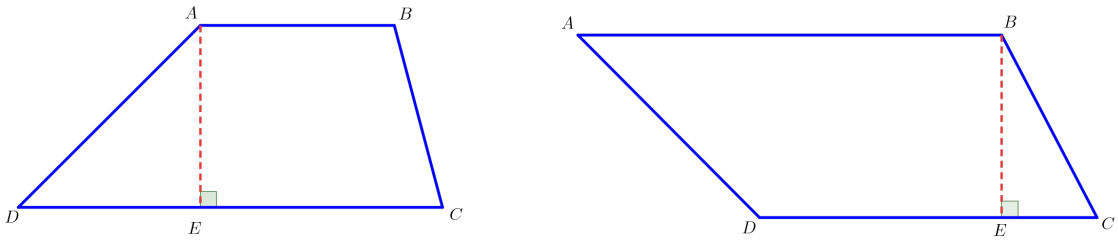


Figura 12.7. Desenhos de trapézios e suas alturas.

Demonstração. Seja $ABCD$ um trapézio no qual os lados AB e CD são paralelos. Seja AE a altura relativa a esse par de lados. Queremos provar que $a(ABCD) = AE\cdot(AB+CD)/2$. Para ver isso basta considerar uma diagonal, digamos AC. Como o trapézio é um quadrilátero convexo, qualquer diagonal o reparte em duas regiões triangulares. No caso essas regiões são ABC e ACD. Portanto

$$a(ABCD) = a(ABC) + a(ACD) = \frac{1}{2}\,AB\cdot AE + \frac{1}{2}\,CD\cdot AE = \frac{1}{2}\,(AB+CD)\,AE.$$

Se os outros dois lados do trapézio forem paralelos, as duas fórmulas fornecem o mesmo número devido ao resultado do Lema 12.8. □

Em geral, para calcular a área de um quadrilátero, o repartimos em dois triângulos. Usamos essa ideia três vezes nos teoremas acima. Mas nem sempre é cômodo adotar esse procedimento em um quadrilátero qualquer.

Uma observação de caráter geral é que calculamos a área de um retângulo usando apenas seus lados. Esse é um bom procedimento, pois dado um retângulo, se entende que estão dados seus lados. Entretanto, ao calcular a área de um triângulo e de outros quadriláteros, não usamos exclusivamente seus lados. Consideramos um outro elemento, a altura, que não está informada necessariamente.

Assim perguntamos se existem fórmulas de área para o triângulo e o quadrilátero que só dependem dos seus lados.

Para o triângulo é conhecida uma fórmula atribuída ao matemático grego Herão, enunciada e demonstrada no Teorema a seguir.

Uma das maneiras de demonstrar a fórmula de Herão é calcular primeiro uma altura do triângulo. Seguimos essa ideia, e obtemos duas fórmulas para a área do triângulo que só dependem dos lados. Na verdade, uma é um rearranjo da outra.

Lema 12.11. *Dado um triângulo com lados a, b e c, com $a \le c$ e $b \le c$, sua altura relativa ao lado de medida c é*

$$\frac{1}{2c}\sqrt{4b^2c^2 - \left(b^2+c^2-a^2\right)^2}\,.$$

Demonstração. Consideremos um triângulo ABC com $AB = c$, $BC = a$ e $AC = b$. Seja $h = CD$ a altura relativa ao lado AB. Das hipóteses sabemos que D está no interior de AB. Confira a Figura 12.8.

Para a demonstração usamos provisoriamente a letra $x = AD$. Aplicando o Teorema de Pitágoras em ACD temos

$$b^2 = h^2 + x^2, \qquad (*)$$

e em BCD temos

$$a^2 = h^2 + (c-x)^2 = h^2 + c^2 - 2cx + x^2. \qquad (**)$$

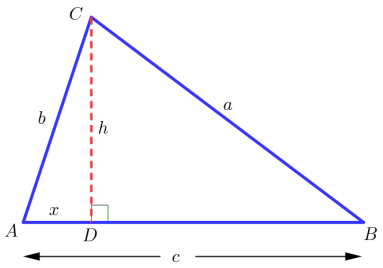


Figura 12.8. Cálculo da altura de um triângulo.

Introduzindo $(*)$ em $(**)$ temos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cx \quad \Rightarrow \quad x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}.$$

Usando novamente $(*)$ vem

$$h^2 = b^2 - x^2 = b^2 - \frac{\left(b^2 + c^2 - a^2\right)^2}{4c^2} = \frac{1}{4c^2}\left[4b^2c^2 - \left(b^2 + c^2 - a^2\right)^2\right].$$

Extraindo a raiz quadrada obtemos a fórmula do Lema. □

Temos agora uma das fórmulas prometidas:

Teorema 12.12. *A área de um triângulo de lados a, b e c é*

$$\frac{1}{4}\sqrt{2(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2) - (a^4 + b^4 + c^4)}.$$

Demonstração. Calculamos a área do triângulo usando o maior lado e sua altura. Sem perda de generalidade podemos supor que o maior lado é c. Seja h a altura correspondente. Combinando as anotações e os resultados do Teorema 12.7 e do Lema 12.11 a área é

$$\frac{1}{2}ch = \frac{1}{4}\sqrt{4b^2c^2 - \left(b^2 + c^2 - a^2\right)^2}.$$

Manipulando o radicando temos

$$4b^2c^2 - \left(b^2 + c^2 - a^2\right)^2 = 2(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2) - (a^4 + b^4 + c^4),$$

do que segue a fórmula dada. □

Observação: Para aplicarmos a fórmula do Teorema 12.12 não importa que esteja determinado qual é o maior lado. Essa informação foi usada apenas na demonstração. Note que se trocarmos entre si duas quaisquer das letras a, b ou c a fórmula não muda. A expressão da fórmula é simétrica nas variáveis a, b e c. Entretanto, o mesmo não ocorre na fórmula do Lema 12.11. Essa fórmula muda se assumirmos $b < a$ e $c < a$? No Problema 12.6.16 o estudante é convidado a estudar melhor essa questão.

Provamos agora o

Teorema 12.13 (Fórmula de Herão)**.** *A área de um triângulo qualquer é dada pela fórmula*

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

em que a, b e c são seus lados e $s = (a+b+c)/2$ é o semiperímetro.

Demonstração. Chamando de H a expressão de Herão temos

$$H = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \iff H^2 = s(s-a)(s-b)(s-c) \iff$$
$$\iff H^2 = \frac{a+b+c}{2}\left[\frac{a+b+c}{2}-a\right]\left[\frac{a+b+c}{2}-b\right]\left[\frac{a+b+c}{2}-c\right]$$
$$\iff H^2 = \frac{a+b+c}{2}\,\frac{-a+b+c}{2}\,\frac{a-b+c}{2}\,\frac{a+b-c}{2}$$
$$\iff 16H^2 = (a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) = 2(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2)-(a^4+b^4+c^4).$$

Seja A a área do triângulo. Usando o resultado do Teorema 12.12 temos

$$A = \frac{1}{4}\sqrt{2(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2)-(a^4+b^4+c^4)} \iff 16A^2 = 2(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2)-(a^4+b^4+c^4).$$

Logo $16A^2 = 16H^2$ e $A = H$. □

Na demonstração acima apareceu uma expressão para a área do triângulo que vale a pena ressaltar:

Escólio 12.14. *A área de um triângulo de lados a, b e c é dada pela fórmula*

$$\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}\,.$$

Existem muitas outras fórmulas para a área de um triângulo. Na seção de problemas o estudante pode ver mais algumas. Particularmente interessante é uma fórmula que depende das coordenadas dos vértices, dada no Problema 12.6.27.

Queremos agora comentar fórmulas para área de quadriláteros que dependem apenas dos lados. Existe uma "tipo Herão", atribuída ao matemático Brahmagupta, mas que funciona apenas para quadriláteros inscritíveis em uma circunferência:

Teorema 12.15 (Fórmula de Brahmagupta)**.** *A área de um quadrilátero inscritível qualquer é dada pela fórmula*

$$\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}\,,$$

em que a, b, c e d são seus lados e $s = (a+b+c+d)/2$ é o semiperímetro.

Para um quadrilátero qualquer existe uma fórmula parecida mas que usa também dois ângulos.

Dado um quadrilátero qualquer (convexo ou não), existe pelo menos uma diagonal que o reparte em duas regiões triangulares. Considerando isso temos o

Teorema 12.16. *Seja $ABCD$ um quadrilátero e suponhamos que a diagonal AC o reparta em duas regiões triangulares. Seja $\theta = (m(\hat{B}) + m(\hat{D}))/2$. Sejam a, b, c e d as medidas de seus lados e $s = (a+b+c+d)/2$ o semiperímetro. A área de $ABCD$ é dada pela fórmula*

$$\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd\cos^2\theta}\,.$$

Para a demonstração desses dois teoremas sobre áreas de quadriláteros confira [29]. Acesse também *Bretschneider's formula* de [84]. Do mesmo modo que para triângulos, existe uma fórmula para área de quadriláteros que depende das coordenadas dos vértices. Confira o Problema 12.6.28.

Consideramos que fizemos as observações mais importantes sobre áreas de triângulos e quadriláteros. Outros resultados constam de nossa lista de problemas dada abaixo. Outras regiões poligonais serão consideradas no Capítulo 13.

12.4 Reduzindo o Axioma 20

Comentamos no final da Seção 12.2 que o Axioma 20 deveria ter o seguinte enunciado: "A área do quadrado de lado 1 é 1". Esse enunciado significa que o quadrado de lado 1 está sendo tomado como unidade de área, do mesmo modo que tomamos como unidade de comprimento o segmento de medida 1. Para sacramentar essa mudança demonstramos o

Teorema 12.17. *Suponhamos que a área do quadrado de lado 1 seja 1. Então a área de um quadrado de lado a é a^2, para todo número real positivo a.*

Demonstração. Seguimos a ideia apresentada em [54], página 165 e seguintes. Consideremos um quadrado de lado a. Vejamos primeiro o caso em que $a = 1/n$, sendo n um inteiro positivo. Tomamos um quadrado de lado 1. Dividindo os lados desse quadrado em n partes iguais, podemos reparti-lo em n^2 quadrados menores congruentes, cada um com lado $a = 1/n$. Confira a Figura 12.9.

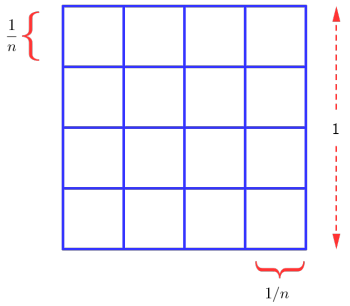


Figura 12.9. Área do quadrado de lado $a = 1/n$.

Usando o Axioma 18 temos

$$\text{área do quadrado de lado } 1 = n^2 \times \text{ área do quadrado menor.}$$

Pela hipótese assumida vem

$$1 = n^2 \times \text{ área do quadrado menor} \Rightarrow \text{área do quadrado menor} = \frac{1}{n^2} = \left(\frac{1}{n}\right)^2 = a^2.$$

A afirmação do Teorema fica provada para esse caso. Suponhamos agora que o lado do quadrado dado é um número racional $a = m/n$. Dividindo seus lados em m partes iguais, podemos reparti-lo em m^2 quadrados menores, cada um com lado $1/n$, portanto com área $1/n^2$, de acordo com o que foi provado acima. Confira a Figura 12.10.

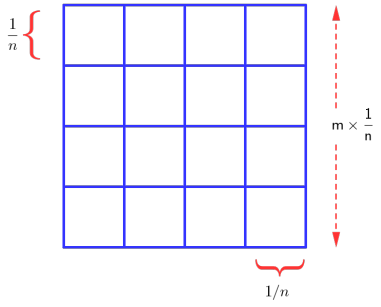


Figura 12.10. Área do quadrado de lado $a = m/n$.

Em consequência a área do quadrado dado $= m^2 \times \frac{1}{n^2} = \left(\frac{m}{n}\right)^2 = a^2$, e fica provado o teorema para esse caso.

Suponhamos agora que o lado do quadrado dado seja um número real positivo a, e seja α sua área (que existe pelo Axioma 17). Queremos provar que $\alpha = a^2$. Usando contradição, admitamos primeiro que $\alpha < a^2$. Isso implica $\sqrt{\alpha} < a$, e existe um número racional r tal que $\sqrt{\alpha} < r < a$. Construímos um quadrado de lado r contido no quadrado de lado a. Então

$$\text{área do quadrado de lado } r \ \leq \ \text{área do quadrado de lado } a \Rightarrow r^2 \leq \alpha \Rightarrow r \leq \sqrt{\alpha},$$

o que é uma contradição. Portanto $\alpha \geq a^2$.

Admitamos agora $a^2 < \alpha$. Então $a < \sqrt{\alpha}$ e existe um número racional r tal que $a < r < \sqrt{\alpha}$. Construímos um quadrado de lado r contendo o quadrado de lado a. Logo

$$\text{área do quadrado de lado } a \ \leq \ \text{área do quadrado de lado } r \Rightarrow \alpha \leq r^2 \Rightarrow \sqrt{\alpha} \leq r,$$

o que é uma contradição. Portanto $\alpha \leq a^2$. Segue $\alpha = a^2$, e isso termina a demonstração. □

Dessa forma temos uma nova versão para o Axioma 20:

Axioma 20. *(da unidade de área)*
A área do quadrado de lado 1 é 1.

12.5 Completando os axiomas de área

Dada uma região poligonal $\mathscr{R}$, o Axioma 17 afirma que ela tem uma única área. Se $\mathscr{R}$ é a reunião das regiões triangulares $\mathscr{T}_1$, $\mathscr{T}_2$, ..., $\mathscr{T}_n$, o Axioma 18 nos diz que essa área é

$$a(\mathscr{R}) = a(\mathscr{T}_1) + a(\mathscr{T}_2) + \cdots + a(\mathscr{T}_n).$$

O valor da área de $\mathscr{R}$ depende da forma como a região está repartida em triângulos? Em geral existe mais de um modo de obter essa repartição. Surge assim a pergunta: a área de uma região poligonal é mesmo única?

Observamos que a área do quadrado é única, em virtude do Axioma 20 e do Teorema 12.17. Ainda, ao calcular áreas de triângulos e quadriláteros, obtivemos fórmulas que dependem dos seus lados, de modo que suas áreas são únicas.

Em geral, para saber se a área de uma dada região poligonal é única precisamos de uma fórmula que não dependa do modo como ela está repartida em regiões triangulares. Essa fórmula existe e é denominada, em alguns textos, como *fórmula de Gauss*. Essa fórmula está apresentada nos Problemas 12.6.27 e 12.6.28 para triângulos e quadriláteros, e no Problema 13.8.37 para regiões poligonais quaisquer.

Mas podemos argumentar de outro jeito. Consideremos uma região poligonal $\mathscr{R}$ e duas repartições diferentes em regiões triangulares. Consideremos o conjunto formado pelos vértices dos triângulos das duas repartições, e também pelas eventuais interseções de lados de triângulos das duas repartições, lados cujas retas suportes são diferentes. Esse conjunto de pontos é finito. Escolhemos no plano uma reta l, e consideremos as retas l_1, l_2, l_3,... paralelas a l e passando por todos os pontos do referido conjunto. Vemos uma ilustração na Figura 12.11, na qual a região poligonal

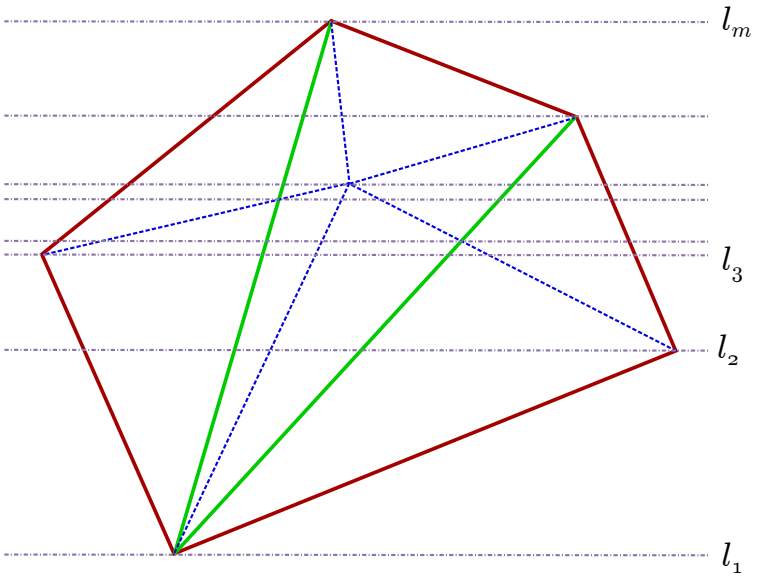


Figura 12.11. Região poligonal com duas repartições.

está repartida de dois modos em regiões triangulares, uma marcada com linhas verdes contínuas e a outra com linhas azuis interrompidas.

Considerando os lados dos triângulos das duas repartições e as retas l_i vemos que $\mathscr{R}$ fica repartido em triângulos e trapézios menores de um modo que podemos aplicar o Axioma 18, e a área de $\mathscr{R}$ é a soma das áreas desses triângulos e trapézios menores. Mas, dada uma repartição, a área de cada uma de suas regiões triangulares é a soma das áreas de alguns desses triângulos e trapézios menores, sem repetição. Logo a soma das áreas das regiões triangulares de uma dada repartição é novamente a soma das áreas daqueles mesmos triângulos e trapézios menores. Assim a área fornecida por uma repartição é igual à da outra.

Portanto a área de $\mathscr{R}$ não depende da repartição, e vemos que a área de uma região poligonal qualquer é única.

12.6 Problemas

Problema 12.6.1. Explique por que todo quadrilátero delimita um conjunto de pontos que é uma região poligonal.

Problema 12.6.2. **a)** Defina congruência entre quadriláteros. **b)** Demonstre que a convexidade é invariante pela congruência entre quadriláteros. **c)** Justifique por que quadriláteros congruentes têm a mesma área.

Problema 12.6.3. Explique por que a área de um triângulo retângulo é o semiproduto dos catetos.

Problema 12.6.4. Explique por que a área de um losango é o semiproduto das suas diagonais.

Problema 12.6.5. As diagonais do retângulo repartem a região retangular em quatro regiões triangulares. Descubra a relação entre elas.

Problema 12.6.6. Um triângulo tem área a. Qual é a área do triângulo formado pelos pontos médios de seus lados?

Problema 12.6.7. **a)** Explique por que a área de um quadrilátero convexo cujas diagonais são perpendiculares é o semiproduto dessas diagonais. **b)** Existe uma formulação análoga para quadriláteros não convexos?

Problema 12.6.8. Explique a seguinte frase: dado um triângulo ABC, se o ponto A se desloca em uma reta paralela a BC, os triângulos têm sempre a mesma área.

Problema 12.6.9. Dado um quadrilátero convexo $ABCD$ podemos obter um triângulo ABE de mesma área com o seguinte procedimento (complete os detalhes). Considere a reta paralela a AC por D. Ela encontra $\overrightarrow{BC}$ em E com $B - C - E$. Então $a(ABCD) = a(ABE)$. Confira a Figura 12.12.

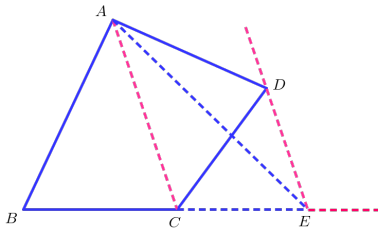


Figura 12.12. Um quadrilátero e um triângulo de mesma área.

Problema 12.6.10. Demonstre que a área de um triângulo qualquer ABC é dada pela fórmula

$$\frac{1}{2} AB \cdot AC \operatorname{sen} \hat{A}.$$

Problema 12.6.11. Encontre uma fórmula para a área de um triângulo equilátero de lado a (uma fórmula que só dependa de a).

Problema 12.6.12. Um professor pediu para seus estudantes cortarem em papel cartolina muitas peças em forma de triângulos equiláteros com área de $16\sqrt{3}$ cm^2. A classe já dispunha de muitas peças em forma de triângulos equiláteros de lado 10 cm. Um estudante teve a ideia de cortar cada uma dessas peças em uma linha paralela a um dos lados. **a)** Descubra se a estratégia proposta pelo estudante resolverá ou não o problema. **b)** Em caso afirmativo, calcule a que distância do lado está a linha em que deve ser cortada a peça.

Problema 12.6.13. Encontre uma fórmula para a área de um triângulo isósceles de lado lateral a e base b (uma fórmula que só dependa de a e de b).

Problema 12.6.14. Num triângulo isósceles a base mede 10 e os lados 13 cada um. Qual a base de outro triângulo isósceles cujos lados também medem 13 cada um e que tem a mesma área do primeiro triângulo?

Problema 12.6.15. Um triângulo equilátero ABC tem lado a. Um ponto P é tomado no interior de BC. Traçamos $PD \parallel AC$, com $D \in AB$, e $PE \parallel AB$, com $E \in AC$. Seja $BP = x$. Confira ilustração na Figura 12.13. **a)** Calcule a área do quadrilátero $ADPE$ em função de a e x. **b)** Determine a posição do ponto P para que essa área seja máxima.

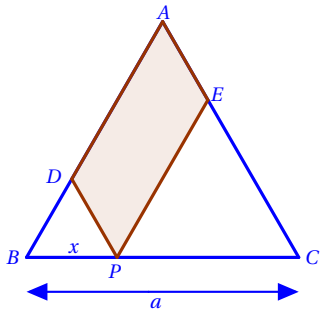


Figura 12.13. Ilustração para o Problema 12.6.15.

Problema 12.6.16. **a)** Reestude o Lema 12.11 assumindo que $b < a$ e $c < a$, e que h é ainda a altura relativa ao lado de medida c. **b)** Verifique também a expressão $h = \frac{2}{c}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$. **c)** Dado um triângulo de lados a, b e c, expresse as fórmulas das três alturas h_a, h_b e h_c.

Problema 12.6.17. Explique por que a fórmula da área de um trapézio, dada no Teorema 12.10, também funciona para paralelogramos e, neste caso, independe qual par de lados paralelos seja escolhido. Em outros termos, se na definição de trapézio for permitido que ele seja um paralelogramo, não existe incongruência entre as fórmulas dadas.

Problema 12.6.18. Verifique que cevianas de um triângulo qualquer repartem a região triangular em duas com áreas proporcionais aos repectivos segmentos determinados no lado pelo seu pé. Confira a Figura 12.14. O que ocorre com medianas?

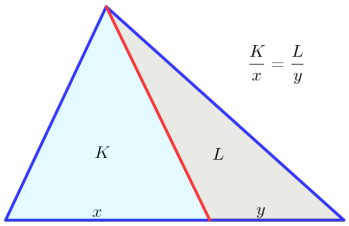


Figura 12.14. Problema 12.6.18.

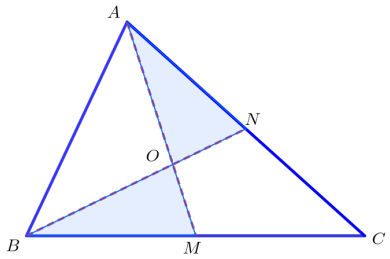


Figura 12.15. Problema 12.6.19.

Problema 12.6.19. Em um triângulo ABC qualquer, consideremos as medianas AM e BN, que se encontram no ponto O. Mostre que $a(AON) = a(BOM)$. Confira a Figura 12.15.

Problema 12.6.20. **a)** Explique por que qualquer diagonal do paralelogramo o reparte em dois triângulos de mesma área. **b)** Explique por que as diagonais do paralelogramo o repartem em quatro triângulos de mesma área. **c)** Demonstre que uma reta reparte um paralelogramo em regiões de áreas iguais se, e somente se, a reta contém o ponto de encontro das diagonais.

Problema 12.6.21. Seja AB um segmento de um plano, e seja $a > 0$ um número real positivo. Determine o lugar geométrico dos pontos P desse plano tais que $a(ABP) = a$.

Problema 12.6.22. Dado um quadrilátero convexo de área a, ache a área do paralelogramo cujos vértices são seus pontos médios. Confira o Problema 10.3.33.

Problema 12.6.23. Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo, com $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ e $AD = d$. Prove que

$$a(ABCD) = \frac{1}{2}\left[ad\,\mathrm{sen}\,\hat{A} + bc\,\mathrm{sen}\,\hat{C}\right].$$

Obtenha as fórmulas análogas:

$$a(ABCD) = \frac{1}{2}\left[ab\,\mathrm{sen}\,\hat{B} + cd\,\mathrm{sen}\,\hat{D}\right] = \frac{1}{4}\left[ad\,\mathrm{sen}\,\hat{A} + ab\,\mathrm{sen}\,\hat{B} + bc\,\mathrm{sen}\,\hat{C} + cd\,\mathrm{sen}\,\hat{D}\right].$$

Problema 12.6.24. Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo, e sejam $AC = p$ e $CD = q$ suas diagonais. Seja θ um dos ângulos formados por suas diagonais. Prove que

$$a(ABCD) = \frac{1}{2}pq\,\mathrm{sen}\,\theta\,.$$

Problema 12.6.25. Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo, com $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ e $AD = d$. Consideremos o número

$$H(ABCD) = \frac{a+c}{2}\,\frac{b+d}{2},$$

denominado fórmula do Templo de Horo para a área do quadrilátero. Essa fórmula foi usada pelos antigos egípcios por volta de 3.000 a.C. Prove que $a(ABCD) \leq H(ABCD)$ e que a igualdade ocorre se, e somente se, $ABCD$ é um retângulo.

Problema 12.6.26. Dado um quadrilátero convexo, suas diagonais o repartem em quatro triângulos. Os dois produtos das áreas dos triângulos opostos pelo vértice são iguais. O que se pode afirmar no caso de quadriláteros não convexos?

Problema 12.6.27. A área de um triângulo $P_1P_2P_3$ em função das coordenadas de seus vértices $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ e $P_3 = (x_3, y_3)$ é:

$$\frac{1}{2}\,|x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_2y_1 - x_3y_2 - x_1y_3|.$$

Essa expressão, às vezes denominada *fórmula de Gauss*, pode ser memorizada mais facilmente se usarmos a notação de um tipo de "determinante estendido" (e depois tomando o valor absoluto):

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{vmatrix} = x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_2y_1 - x_3y_2 - x_1y_3.$$

Problema 12.6.28. A área de um quadrilátero $P_1P_2P_3P_4$ em função das coordenadas de seus vértices $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$, $P_3 = (x_3, y_3)$ e $P_4 = (x_4, y_4)$ é:

$$\frac{1}{2}\,|x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4 + x_4y_1 - x_2y_1 - x_3y_2 - x_4y_3 - x_1y_4|.$$

Essa expressão, às vezes denominada *fórmula de Gauss*, pode ser memorizada mais facilmente se usarmos a notação de um tipo de "determinante estendido" (e depois tomando o valor absoluto):

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_1 \end{vmatrix} = x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4 + x_4y_1 - x_2y_1 - x_3y_2 - x_4y_3 - x_1y_4.$$

Problema 12.6.29. É dado um triângulo de lados a, b e c, cujas respectivas alturas são h_a, h_b e h_c. Prove que se $a + h_a = b + h_b = c + h_c$ então o triângulo é equilátero.

Solução. Seja A a área do triângulo. Então $ah_a = bh_b = ch_c = 2A$. Mutiplicando $a + h_a = b + h_b$ por ab vem $a + h_a = b + h_b \iff a^2b + abh_a = ab^2 + abh_b \iff a^2b + 2bA = ab^2 + 2aA \iff a^2b - ab^2 = 2aA - 2bA \iff ab(a-b) = 2A(a-b)$.

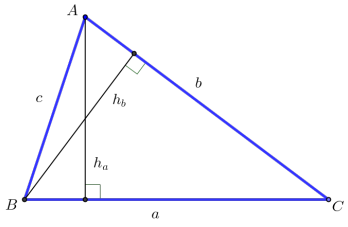


Figura 12.16. Solução do Problema 12.6.29.

Suponhamos que $a \neq b$. Então $2A = ab$. Usando as relações acima vem $ab = ah_a \Rightarrow b = h_a$ e $ab = bh_b \Rightarrow a = h_b$ e $ab = ch_c$. Nesse caso o triângulo é retângulo de catetos a e b, e temos ainda que $a + h_a = c + h_c \Rightarrow a + b = c + h_c$. Elevando essa última relação ao quadrado vem $a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + h_c^2 + 2ch_c$. Como $a^2 + b^2 = c^2$ e $ab = ch_c$ segue $h_c = 0$ o que não é possível. Portanto $a = b$. Por simetria dos argumentos temos também $a = c$. Provamos que o triângulo é equilátero. □

Problema 12.6.30. Mostre que se dois triângulos são semelhantes então a razão entre suas áreas é igual ao quadrado da razão de semelhança. Também é igual ao quadrado da razão entre qualquer par de lados correspondentes, e é ainda igual ao quadrado da razão entre qualquer par de alturas correspondentes.

Problema 12.6.31. Na Figura 12.17 $ABCD$ é um quadrado, $EFGH$ é um quadrilátero inscrito nos pontos médios do quadrado e $IJKL$ é um quadrilátero inscrito nos pontos médios do quadrilátero. Encontre a razão entre as áreas de $ABCD$ e $IJKL$.

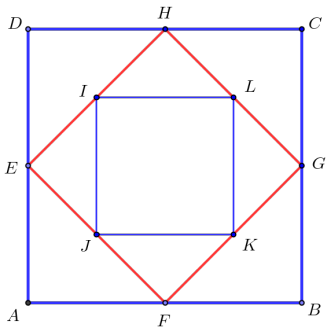


Figura 12.17. Um desenho de J. Kepler.

Problema 12.6.32. A região do desenho da esquerda da Figura 12.18 é formada pela reunião de 9 regiões quadradas unitárias. Queremos determinar uma reta pelo ponto P de modo que a região fique repartida em duas regiões de mesma área. P está no vértice do quadrado, conforme indicado. **a)** Mostre que o segmento PD da Figura 12.18 à direita não resolve o problema. D está no vértice do quadrado, conforme indicado. **b)** Determine a reta procurada.

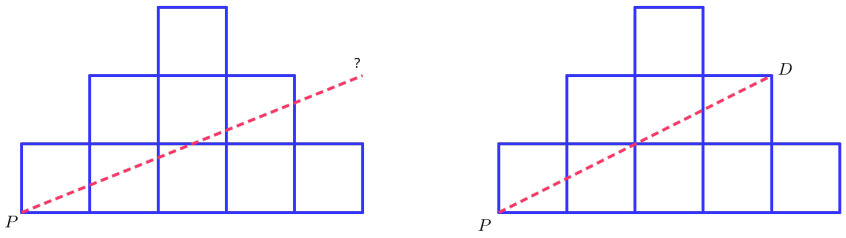


Figura 12.18. Como repartir uma pirâmide de quadradinhos.

Problema 12.6.33. Um professor pediu para seus estudantes cortarem em papel cartolina muitas peças em forma de triângulos equiláteros e na forma de trapézios, todas com a mesma área. A classe já dispunha de muitas peças em forma de triângulos equiláteros de lado 10 cm. Um estudante teve a ideia de cortar cada uma dessas peças em uma linha paralela a um dos lados, obtendo ao mesmo tempo um triângulo equilátero e um trapézio. **a)** Explique se a estratégia proposta pelo estudante resolverá o ou não o problema. **b)** Em caso afirmativo calcule a que distância de um lado está a linha em que deve ser cortada a peça.

Problema 12.6.34. Mostre que entre os retângulos com perímetro fixado, o de maior área é o quadrado.

Problema 12.6.35. **a)** Se deformarmos um retângulo de lados a e b em um paralelogramo ainda com lados a e b, sua área se conserva? **b)** Conclua encontrando entre os paralelogramos com perímetro fixado aquele que tem maior área.

Problema 12.6.36. Mostre que entre os retângulos com área fixada, o que tem o menor perímetro é o quadrado.

Problema 12.6.37. Dentre todos os retângulos com diagonal fixada, achar o que tem perímetro máximo.

Problema 12.6.38. Encontre, entre os triângulos isósceles com os lados laterais com uma medida fixada, aquele que tem a maior área.

Problema 12.6.39. Um lado de um triângulo mede 19, e seu perímetro, 95. Qual é a área máxima possível para o triângulo?

Problema 12.6.40. Entre todos os triângulos com perímetro fixado, ache as dimensões dos lados daquele que possui a maior área.

Problema 12.6.41. Um sucesso dos vestibulares, que não poderia faltar nesta lista de problemas. Na Figura 12.19 os números indicam as áreas das sub-regiões. Ache a área do triângulo maior.

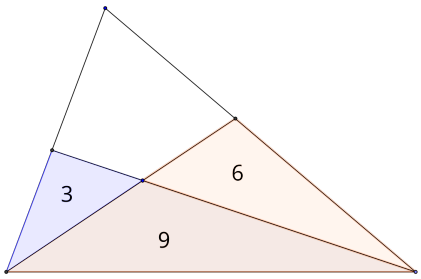


Figura 12.19. Calcule a área do triângulo maior.

Problema 12.6.42. Em um triângulo retângulo a hipotenusa mede 53 e o perímetro, 126. É possível calcular sua área?

Muitos resultados, fórmulas e propriedades da Geometria Plana podem ser obtidos com o uso de áreas. Seguem alguns exemplos.

Problema 12.6.43. Considere um triângulo retângulo de hipotenusa a e catetos b e c. Seja h a altura em relação à hipotenusa. Usando áreas mostre que $h = bc/a$.

Problema 12.6.44. Calcule o raio da circunferência inscrita em um triângulo de lados a, b e c.

Problema 12.6.45. Em um retângulo arbitrário é constante a soma das distâncias às duas diagonais de um ponto qualquer nele situado.

Problema 12.6.46. Um triângulo ABC é retângulo em A. Anotamos $a = BC$, $b = AC$ e $c = AB$. Seja r o raio da circunferência inscrita. **a)** Explique os valores dispostos na Figura 12.20, isto é, prove que se D é o ponto de contato da circunferência inscrita com BC, então $BD = c - r$ e $CD = b - r$. **b)** Demonstre que $r = \frac{b+c-a}{2}$. **c)** Seja $H \in BC$ o pé da altura relativa a A, e seja $h = AH$. Sejam s o raio da circunferência inscrita em ABH e t o raio da circunferência inscrita em ACH. Demonstre que $r + s + t = h$. **d)** Demonstre ainda que $r = \frac{bc}{a+b+c} = \frac{ah}{a+b+c}$. **e)** Demonstre que $h = \frac{(a+b+c)(b+c-a)}{2a}$.

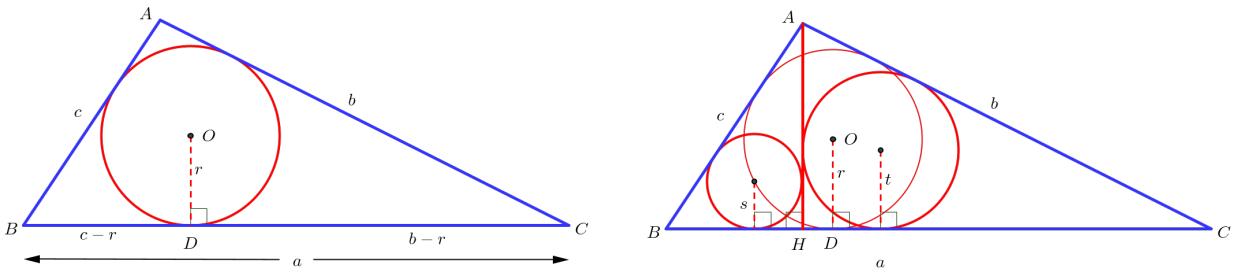


Figura 12.20. Figura para o Problema 12.6.46.

Problema 12.6.47. Seja S área de um triângulo de lados a, b e c. Seu cicunraio R (raio da circunferência circunscrita) é dado pela fórmula

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{abc}{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}.$$

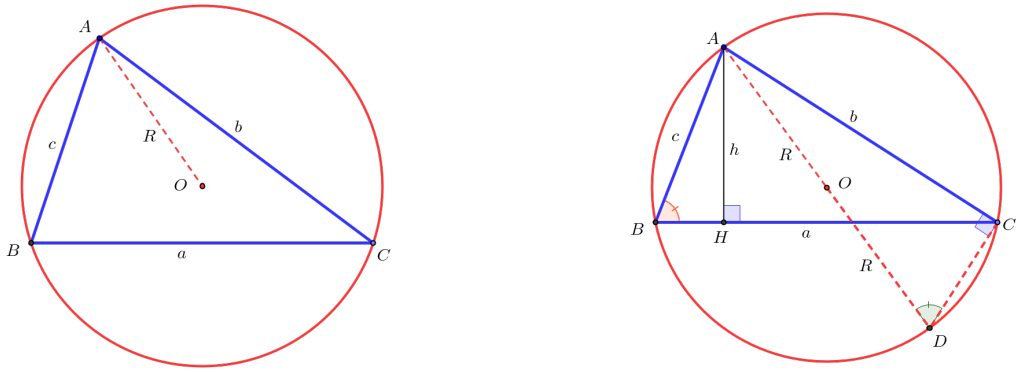


Figura 12.21. Cálculo do circunraio.

Solução. Seja ABC o triângulo com área S e lados $BC = a$, $AC = b$ e $AB = c$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que BC seja o maior lado. Então o pé H da altura $AH = h$ está no interior de BC. Portanto $S = \frac{1}{2}ah$. Confira a Figura 12.21.

Seja AD um diâmetro da circunferência circunscrita e consideremos o triângulo ADC, retângulo em C. Temos $\angle ABH \cong \angle ADC$ pois inscrevem o mesmo arco. Segue que

$$ABH \sim ADC \Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AH}{AC} \Rightarrow \frac{c}{2R} = \frac{h}{b} \Rightarrow 2Rh = bc$$

$$\Rightarrow 2Rah = abc \Rightarrow 4R\frac{1}{2}ah = abc \Rightarrow 4RS = abc \Rightarrow R = \frac{abc}{4S}.$$

Usando o resultado do Escólio 12.14 temos

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)},$$

e segue o resultado. □

Problema 12.6.48. Dado um triângulo equilátero, é invariante a soma das distâncias aos lados de qualquer ponto em seu interior.

Problema 12.6.49. Inúmeras demonstrações simples do Teorema de Pitágoras podem ser feitas usando áreas. Inspirando-se nos desenhos da Figura 12.22 faça três dessas demonstrações. Não se esqueça de justificar a construção de cada figura.

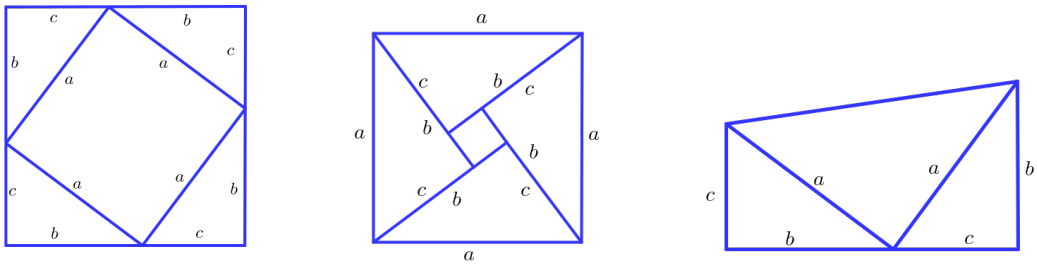


Figura 12.22. Sugestões para demonstração do Teorema de Pitágoras usando áreas.

Problema 12.6.50. Complete os detalhes da seguinte demonstração do Teorema 10.21 usando áreas de triângulos. Considere a Figura 12.23. É dado o triângulo ABC, DE é paralelo a BC, com D entre A e B e com E entre A e C. Queremos provar que $AD/DB = AE/EC$. Consideremos os segmentos BE e CD. Indicamos a área de uma figura do plano F por $a(F)$. Temos $a(BDE) = a(CDE)$. Ainda $a(ADE)/a(BDE) = AD/BD$ e $a(ADE)/a(CDE) = AE/CE$. Conclua.

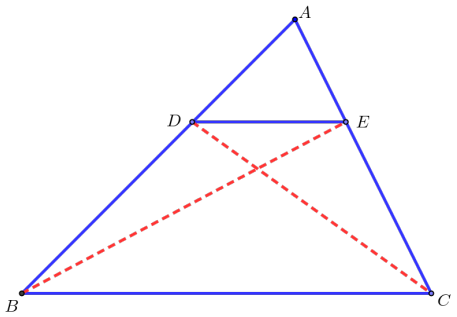


Figura 12.23. Prova do Teorema da Proporcionalidade de Tales usando área.

12.7 Temas para investigação

Tema 12.7.1. Em um triângulo qualquer, considere as três medianas. Faça conjecturas sobre as regiões triangulares que elas determinam e demonstre.

Tema 12.7.2. Dado um triângulo arbitrário, uma reta que passa por um vértice reparte a região triangular em duas com mesma área se, e somente se, contém a mediana relativa àquele vértice. Localize outras retas que também repartem a região triangular em duas com mesma área.

Tema 12.7.3. **a)** A Figura 12.24 representa uma região retangular da qual foi retirada uma região retangular menor, disposta em qualquer posição. Localize a reta que divide a figura remanescente em duas regiões de mesma área. **b)** Explore a mesma situação usando outras figuras planas, como discos, triângulos, paralelogramos, etc.

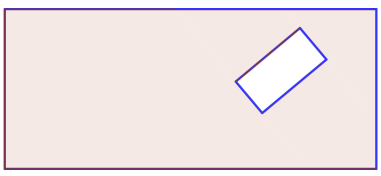


Figura 12.24. Pequeno quebra-cabeça.

Tema 12.7.4. Investigue quais triângulos têm a seguinte propriedade: existe um ponto em seu interior tal que qualquer reta que o contenha reparte a região triangular em duas de mesma área.

Tema 12.7.5. Na Figura 12.25, à esquerda, vemos um paralelogramo, uma diagonal e um segmento que liga um vértice a um ponto médio. Descubra suas propriedades.

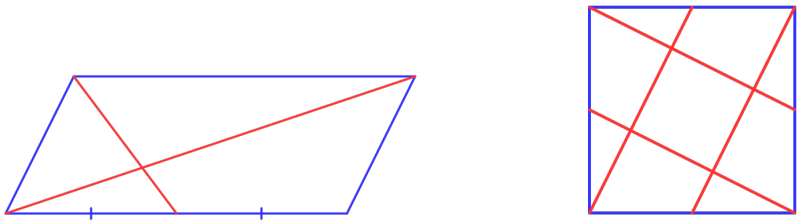


Figura 12.25. Duas figuras bem repartidas.

Tema 12.7.6. Na Figura 12.25, à direita, vemos um quadrado e os segmentos internos ligam vértices a pontos médios. Descubra suas propriedades.

Tema 12.7.7. O antiparalelogramo é um quadrilátero cruzado, definido na Figura 12.26, à esquerda. Os vértices são A, B, C e D, e os lados são AB, AD, BC e CD. Investigue suas propriedades. Sugestões: (i) examine como podem ser construídos; (ii) que tipo de figuras o circunscrevem; (iii) que tipo de figura é formada pelos pontos médios de seus lados; (iv) como pode ser calculada sua área.

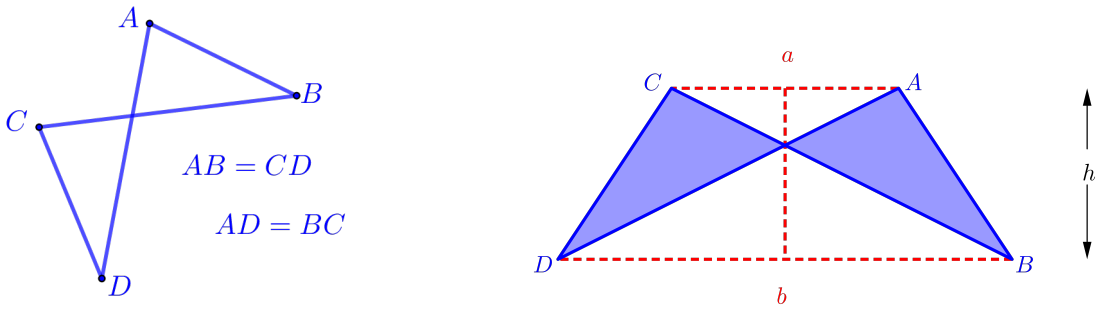


Figura 12.26. O antiparalelogramo e sua área.

Tema 12.7.8. Cinco circunferências congruentes estão dispostas como na Figura 12.27, com tangências e simetrias conforme sugerido. Localize a reta que reparte a região delimitada por seus discos em duas regiões de mesma área.

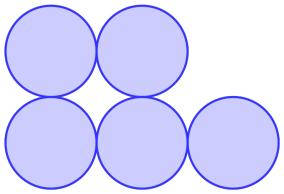


Figura 12.27. Problema dos cinco círculos.

Tema 12.7.9. Em um plano é dado um retângulo de área A e diagonal de medida D. Determine o lugar geométrico dos pontos P do plano com a seguinte propriedade: a soma das distâncias de P às retas suportes das duas diagonais é A/D.

Tema 12.7.10. Ache uma fórmula sintética para a área de quadriláteros bicêntricos.

Tema 12.7.11. Chamamos de *pipa* a qualquer quadrilátero com dois pares de lados adjacentes congruentes. Investigue suas propriedades.

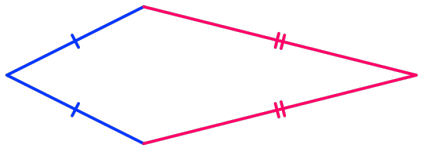


Figura 12.28. Quadrilátero tipo pipa.

Tema 12.7.12. A Figura 12.29 sugere como cortar um triângulo retângulo ABC em duas peças as quais, rearranjadas, compõem um retângulo de mesma base BC e com área igual à do triângulo. **a)** Detalhe e justifique a decomposição sugerida. **b)** Investigue como fazer o mesmo com um triângulo qualquer (mantendo o lado tomado como base). **c)** Investigue como recortar um paralelogramo $ABCD$ em peças as quais, rearranjadas, compõem um retângulo de mesma base AB e com área igual à do paralelogramo. **d)** Investigue como recortar um trapézio em peças as quais, rearranjadas, compõem um retângulo cuja base é a soma de suas bases e com área igual à do trapézio. **e)** Estude um procedimento similar para quadriláteros quaisquer.

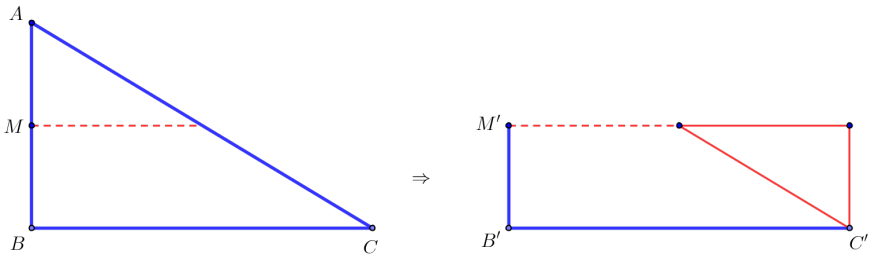


Figura 12.29. Decomposição de um triângulo retângulo.

Tema 12.7.13. A Figura 12.30, à esquerda, apresenta a decomposição de H. Dudeney de um triângulo equilátero de lado ℓ. Rearranjando as partes se obtém um retângulo. Uma forma de verificar consiste em refletir para fora os quadriláteros, como explicado na mesma figura, à direita. Movendo o segmento EF dentro de BC e mantendo sua medida $\ell/2$, existe uma posição em que o retângulo é um quadrado.

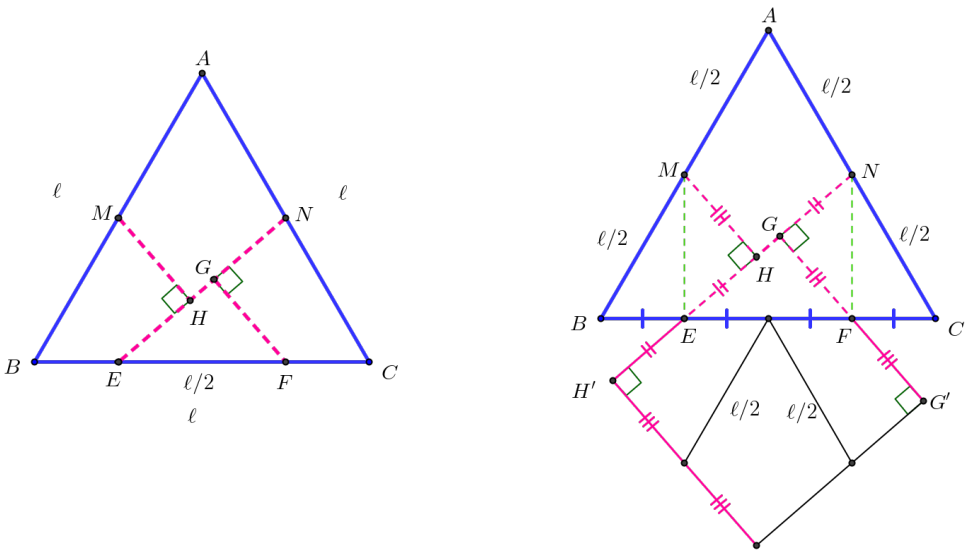


Figura 12.30. Decomposição de Dudeney de um triângulo equilátero.

Tema 12.7.14. O autor de [5], na página 192, comenta que é possível evitar os axiomas de 17 a 20, que definem área de regiões poligonais. Isto é, é possível construir a "função área" com as propriedades descritas por esses axiomas. Investigue como isso pode ser feito. Consulte também [54].

Capítulo 13

Polígonos

13.1 Introdução

Neste texto estudamos três figuras geométricas importantes, a saber, o triângulo, o quadrilátero e a circunferência. As duas primeiras pertencem a uma classe mais geral de figuras, denominadas polígonos. Ampliamos agora esse estudo abordando polígonos com qualquer número de lados ≥ 3. Em particular usamos os polígonos regulares para definir comprimento da circunferência e área do disco.

13.2 Definição e nomenclatura de polígonos

Já definimos linha poligonal, mas vamos repetir aqui com mais detalhes:

Definição 13.1. Dados n pontos A_1, A_2, A_3, ..., A_n ($n \geq 2$) em um plano, a *linha poligonal* por eles determinada é a reunião dos segmentos A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$ satisfazendo à seguinte condição: dois segmentos consecutivos quaisquer não são colineares. Os pontos A_1, A_2, A_3, ..., A_n são seus *vértices*, os segmentos que a definem são seus *lados*, e seus *ângulos* são $\angle A_1A_2A_3$, $\angle A_2A_3A_4$, ..., e $\angle A_{n-2}A_{n-1}A_n$.

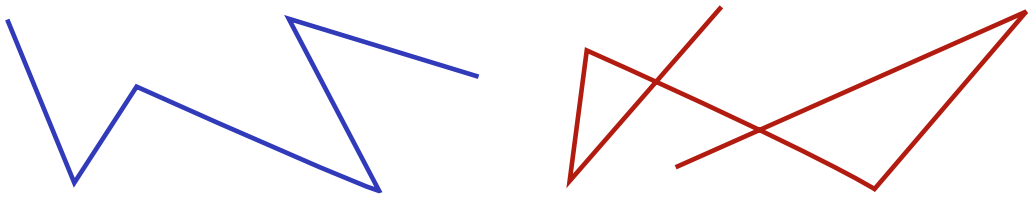


Figura 13.1. Exemplos de linhas poligonais.

Os polígonos são linhas poligonais, mas exigimos que sejam fechadas e não tenham autointerseções. A definição é:

Definições 13.2. Sejam A_1, A_2, A_3, ..., A_n n pontos em um plano, com $n \geq 3$. Suponhamos que os segmentos A_1A_2, A_2A_3, ...,$A_{n-1}A_n$ e A_nA_1 satisfazem às duas condições seguintes: (i) se dois deles se intersectam, a intersecção é a sua extremidade comum; (ii) dois segmentos consecutivos quaisquer não são colineares. A reunião desses segmentos chama-se *polígono de n vértices*, e é anotada por $A_1A_2A_3\ldots A_n$. Seus vértices, lados e ângulos são os vértices, lados e ângulos da linha poligonal, acrescentando A_nA_1, $\angle A_{n-1}A_nA_1$ e $\angle A_nA_1A_2$. A medida de um lado também

é chamada de lado. A soma dos comprimentos dos lados chama-se *perímetro*. Dois lados com um vértice comum se dizem *consecutivos*. Dois ângulos com um lado comum também se dizem consecutivos. Um segmento que liga vértices não consecutivos chama-se *diagonal*.

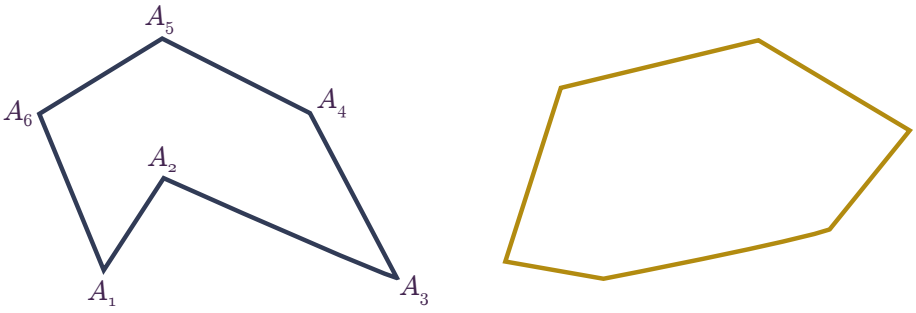


Figura 13.2. Exemplos de polígonos.

Um polígono com n lados é também denominado n-ágono. Os 3-ágonos são mais comumente chamados triângulos, conforme já sabemos, e, às vezes, triláteros. Os 4-ágonos são designados por quadriláteros, e raramente por quadriângulos. Os 5-ágonos são denominados mais comumente por pentágonos, os 6-ágonos por hexágonos, os 7-ágonos por heptágonos, os 8-ágonos por octógonos, os 9-ágonos por eneágonos, e os 10-ágonos por decágonos. Existem muitos outros nomes, mas não vamos nos ocupar disso. O estudante pode fazer uma pesquisa sobre nomes de polígonos.

Observe que na notação $A_1A_2A_3\ldots A_n$ do polígono de vértices A_1, A_2, A_3, ..., A_n a ordem dos pontos é importante. Se mudarmos a ordem de forma não cíclica o polígono pode ser outro ou não ser bem definido por apresentar autointerseções. Na literatura os polígonos tratados aqui são denominados simples e fechados, mas neste texto não precisamos acrescentar esses predicados, pois estão sempre implícitos.

Estamos interessados em estudar propriedades básicas dos polígonos, por exemplo, mostrar que todo polígono é uma região poligonal e, portanto, tem área. Esse estudo fica mais claro se separarmos os polígonos em duas categorias, os convexos e os não convexos.

13.3 Polígonos convexos

No ensino básico o estudo dos polígonos se limita, em geral, aos convexos por serem mais simples. Devido a isso começamos com eles. A definição pode ser a seguinte:

Definição 13.3. Um polígono se diz *convexo* quando, para cada um de seus lados, ele está contido na reunião desse lado com um dos semiplanos determinados pela sua reta suporte.

Em outros termos, dado $\mathscr{P} = A_1A_2A_3\ldots A_n$, seja r_i a reta suporte de A_iA_{i+1}, para todo $1 \leq i \leq n-1$, e seja r_n a reta suporte de A_nA_1. Suponhamos que $\mathscr{P}$ esteja contido na reunião de A_iA_{i+1} com um dos semiplanos determinados por r_i, para todo $1 \leq i \leq n-1$, e esteja contido na reunião de A_nA_1 com um dos semiplanos determinados por r_n. Então $\mathscr{P}$ é convexo.

Na definição de polígono convexo cometemos um abuso de linguagem, pois o fato de um polígono ser convexo não é o mesmo que ser convexo como conjunto de pontos conforme a Definição 9.11. Por exemplo, um triângulo é convexo como polígono mas não é convexo como conjunto de pontos. O uso da mesma palavra para os dois contextos é tradicional.

Já sabemos que todo triângulo é convexo. Os quadriláteros podem ser convexos ou não. Por exemplo, paralelogramos e trapézios são convexos. Vimos nos Problemas 9.13.18 a 9.13.27 condições para que um quadrilátero seja convexo.

Vemos na Figura 13.2 exemplos de hexágonos, um não convexo (desenho da esquerda) e um convexo (desenho da direita).

Examinando desenhos de polígonos percebemos de imediato que eles separam o plano em dois conjuntos, um deles "delimitado" pela linha poligonal. Dado um polígono convexo se observa que seu interior também é convexo. A Figura 13.3 ilustra essas situações.

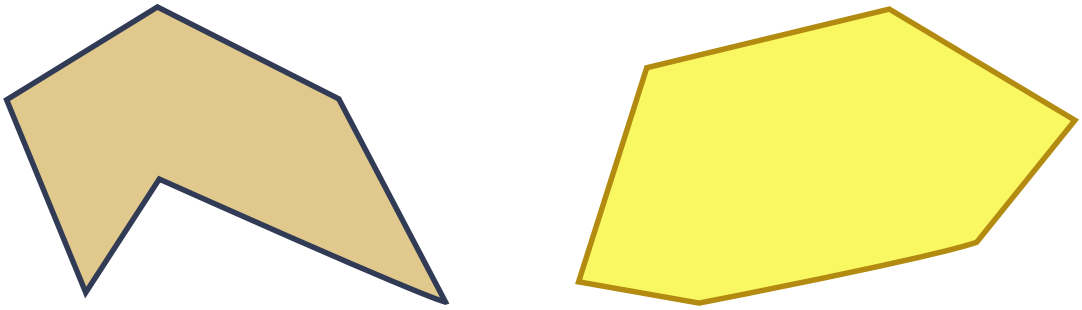


Figura 13.3. Exemplos de polígonos com os interiores assinalados.

Vamos formalizar essa propriedade para polígonos convexos no

Teorema 13.4. *Um polígono convexo $\mathscr{P}$ determina no plano dois conjuntos disjuntos $\mathscr{P}_i$ e $\mathscr{P}_e$, denominados respectivamente interior e exterior de $\mathscr{P}$, de modo que $\mathscr{P}_i$ é não vazio e convexo, e o plano é a reunião disjunta de $\mathscr{P}$, $\mathscr{P}_i$ e $\mathscr{P}_e$.*

Demonstração. Seja $\mathscr{P} = A_1A_2\ldots A_n$ um polígono convexo. Para todo $1 \leq j \leq n-1$, seja $\mathscr{H}_j$ o semiplano determinado por $\overleftrightarrow{A_jA_{j+1}}$ que contém pontos de $\mathscr{P}$, e $\mathscr{H}_n$ o semiplano determinado por $\overleftrightarrow{A_nA_1}$ que contém pontos de $\mathscr{P}$. Anotamos

$$\mathscr{P}_i = \bigcap_{j=1}^{n} \mathscr{H}_j\,.$$

Vemos que $\mathscr{P}_i$ é não vazio, pois $\mathscr{H}_j$ contém o interior de $A_1A_2A_3$ para todo $1 \leq j \leq n$. Também é convexo (no sentido de conjunto), pois é a intersecção de conjuntos convexos (os semiplanos $\mathscr{H}_j$). Definimos $\mathscr{P}_e$ como o complementar de $\mathscr{P} \cup \mathscr{P}_i$ no plano. Portanto o plano é a reunião disjunta de $\mathscr{P}$, $\mathscr{P}_i$ e $\mathscr{P}_e$, e terminamos a demonstração. □

Definição 13.5. Seja $\mathscr{P}$ um polígono convexo. Com as notações do Teorema 13.4, a reunião

$$\mathscr{P} \cup \mathscr{P}_i$$

chama-se *região determinada por $\mathscr{P}$*.

O interior de um polígono convexo também pode ser definido como a intersecção dos interiores de seus ângulos. Praticamente é a mesma definição que consta do Teorema acima. Confira o Problema 13.8.3.

Vemos a seguir que a região determinada por um polígono convexo pode ser repartida em regiões triangulares. Observamos o resultado do Problema 13.8.4, de que qualquer diagonal de um polígono convexo está contida em seu interior exceto os seus dois extremos.

Definições 13.6. Seja $\mathscr{P}$ um polígono convexo. Uma *triangulação* de $\mathscr{P}$ é uma coleção de triângulos cujos lados são lados de $\mathscr{P}$ ou diagonais, de modo que esses triângulos, quando se intersectam, o fazem em lados comuns ou em vértices de $\mathscr{P}$, e a reunião desses triângulos e seus interiores é a região determinada por $\mathscr{P}$.

Temos agora o

Teorema 13.7. *Todo polígono convexo admite uma triangulação.*

Demonstração. Seja $\mathscr{P} = A_1A_2\ldots A_n$ um polígono convexo. As diagonais A_1A_3, A_1A_4, ..., A_1A_{n-1} estão, com exceção de seus extremos, contidas no interior de $\mathscr{P}$. Consideremos os triângulos $\Delta_3 = A_1A_2A_3$, $\Delta_4 = A_1A_3A_4$, ..., $\Delta_n = A_1A_{n-1}A_n$. Seus lados são lados do polígono ou diagonais. Se dois desses triângulos se intersectam, o fazem em uma diagonal A_1A_i, que é um lado comum, ou se intersectam em A_1. Por outro lado, sabemos do Problema 13.8.3 que o interior de $\mathscr{P}$ é igual à intersecção dos interiores de seus ângulos, e vemos então que é igual à reunião dos interiores dos triângulos Δ_j, $3 \le j \le n$, com os interiores dos lados que são diagonais. Portanto a reunião desses triângulos e seus interiores é a região determinada por $\mathscr{P}$.

Provamos que Δ_j, $3 \le j \le n$, formam uma triangulação de $\mathscr{P}$. □

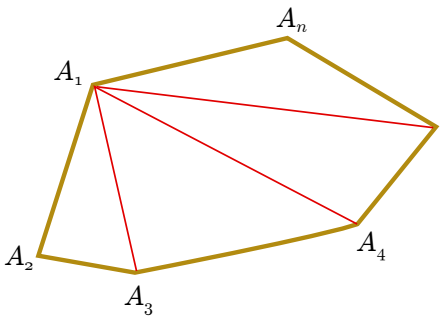


Figura 13.4. Triangulação de polígono convexo.

Portanto a região determinada por um polígono convexo é uma região poligonal no sentido da Definição 12.1. Assim essa região tem uma única área, conforme foi comentado na Seção 12.5. Essa área é a soma das áreas dos triângulos de qualquer triangulação.

De agora em diante o termo "polígono" pode ser usado tanto no sentido da Definição 13.2 como para designar a região poligonal correspondente. Costuma-se escrever "área do polígono tal".

Outra aplicação do resultado do Teorema 13.7 é que podemos facilmente obter a soma dos ângulos de um polígono convexo. Lembremos que dado um polígono $\mathscr{P} = A_1A_2A_3\ldots A_n$, seus ângulos são $\angle A_nA_1A_2$, $\angle A_1A_2A_3$, ... e $\angle A_{n-1}A_nA_1$.

Temos o

Teorema 13.8. *A soma dos ângulos de qualquer polígono convexo é* $(n-2)180°$.

Demonstração. Seja $\mathscr{P} = A_1A_2A_3\ldots A_n$ um polígono convexo. Vimos na demonstração do Teorema 13.7 que os triângulos $\Delta_1 = A_1A_2A_3$, $\Delta_2 = A_1A_3A_4$, ..., $\Delta_{n-2} = A_1A_{n-1}A_n$ perfazem uma triangulação de $\mathscr{P}$. Vemos que a soma dos ângulos desses triângulos é igual à soma dos ângulos de $\mathscr{P}$. Como são $n-2$ triângulos, obtemos a fórmula proposta. □

Observamos que um polígono pode ter muitas triangulações. Uma propriedade importante é:

Teorema 13.9. *Em todo polígono uma triangulação qualquer tem um triângulo com dois lados coincidindo com lados adjacentes do polígono.*

Demonstração. Seja $\mathscr{P} = A_1A_2\ldots A_n$ um polígono munido de uma triangulação. Começamos observando que A_1A_2 é lado de um triângulo dessa triangulação. Se $A_1A_nA_2$ faz parte da triangulação, terminamos. Caso contrário, A_1 é ponto extremo de um lado da triangulação, digamos A_1A_j, com $3 \leq j \leq n-1$ e A_1A_j diagonal interior. Seja j_1 o menor j com essa propriedade. Se $j_1 = 3$, terminamos. Caso contrário, A_2 é ponto extremo de uma diagonal da triangulação, digamos A_2A_j. Seja j_2 o menor j com essa propriedade. Temos $4 \leq j_2 \leq j_1$. Se $j_2 = 4$ então $A_2A_3A_4$ faz parte da triangulação, e terminamos. Caso contrário tomamos A_3 e j_3. Prosseguindo encontramos uma sequência decrescente $j_1 \geq j_2 \geq j_3 \geq \ldots$, parando quando encontrarmos um k tal que $A_kA_{k+1}A_{k+2}$ faz parte da triangulação, o que ocorre necessariamente. Terminamos a demonstração. □

Uma implicação interessante é o

Teorema 13.10. *Seja $\mathscr{P}$ um polígono de n lados. Em qualquer triangulação de $\mathscr{P}$, o número de triângulos é $n-2$ e o número de diagonais que fazem parte da triangulação é $n-3$.*

Demonstração. Provemos primeiro que o número de triângulos de qualquer triangulação é $n-2$. Suponha que isso seja falso, e seja n o menor número natural para o qual existe um polígono que contraria a afirmação. Certamente $n > 3$ pois a afirmação do Teorema vale para $n = 3$. Considere $\mathscr{P} = A_1A_2\ldots A_n$ um polígono que tem uma triangulação para a qual a afirmação não seja válida. Usando o Teorema 13.9 e renomeando os vértices de $\mathscr{P}$ se necessário, podemos supor que $A_1A_2A_3$ faz parte da triangulação. Portanto $\mathscr{P}' = A_1A_3A_4\ldots A_n$ é um polígono com $n-1$ lados, e assim para ele qualquer triangulação tem $n-3$ triângulos. Em particular, a triangulação herdada de $\mathscr{P}$. Mas essa última tem apenas o triângulo $A_1A_2A_3$ a mais, e assim tem $n-2$ triângulos, o que contraria a hipótese. Portanto toda triangulação de qualquer polígono de n lados tem $n-2$ triângulos.

Da mesma forma se demonstra que toda triangulação de qualquer polígono de n lados tem $n-3$ lados que são diagonais.

□

Sobre os ângulos externos de polígonos convexos podemos definir:

Definição 13.11. Um *ângulo externo* de um vértice de um polígono é formado por um lado do polígono e o prolongamento do lado adjacente. Mais exatamente, seja $\mathscr{P} = A_1A_2\ldots A_n$ um polígono. Dado um vértice A_j, com $1 \leq j \leq n$, seja B_j um ponto da semirreta $\overrightarrow{A_{j-1}A_j}$ tal que A_j está entre A_{j-1} e B_j. Então $\angle B_jA_jA_{j+1}$ denomina-se ângulo externo do polígono correspondente ao vértice A_j. Nessa notação, se $j = 1$ então $j-1$ significa n, e se $j = n$, $j+1$ significa 1.

Confira na Figura 13.5 um desenho de um polígono convexo mostrando seus ângulos e os ângulos externos.

Teorema 13.12. *A soma das medidas dos ângulos externos de qualquer polígono convexo é 360^o.*

Demonstração. Notemos que, em um vértice de um polígono qualquer, a soma da medida do ângulo com a medida do ângulo externo é 180^o. Seja S a soma dos ângulos externos de um polígono convexo de n lados. Sabemos que a soma dos ângulos é $(n-2)180^o$. Então $S + (n-2)180^o = n180^o$ e daí $S = 360^o$. □

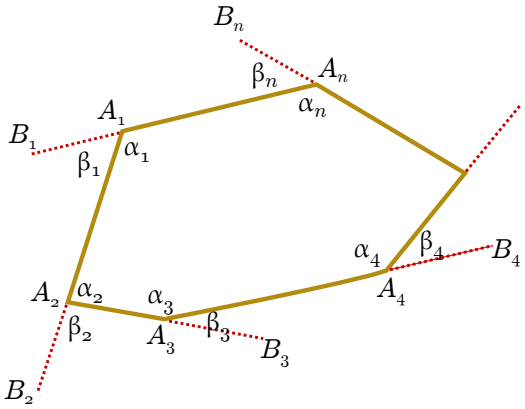


Figura 13.5. Ângulos externos de um polígono convexo.

13.4 Polígonos regulares

Uma classe especial de polígonos convexos são os regulares.

Definição 13.13. Um polígono convexo se diz *regular* se for equilátero e equiangular, isto é, todos os seus lados são congruentes, assim como os seus ângulos.

O 3-ágono regular é o triângulo equilátero, e o 4-ágono regular é o quadrado. A Figura 13.6 mostra um pentágono regular, um hexágono regular e um heptágono regular.

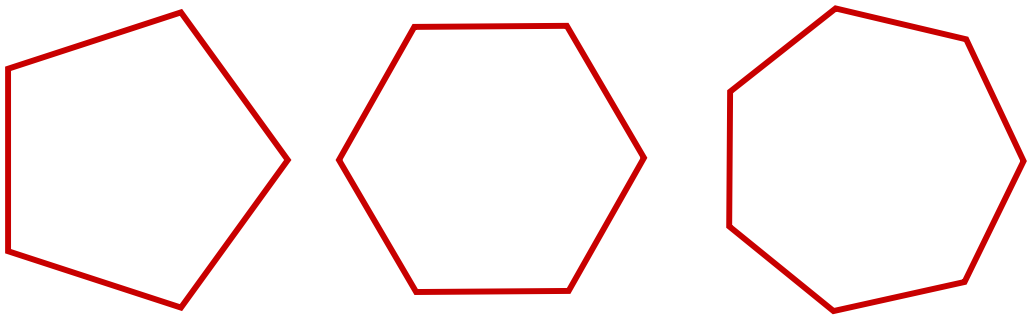


Figura 13.6. Exemplos de polígonos regulares.

Para todo inteiro $n \geq 3$ existe um n-ágono regular. Para ver isso, consideremos uma circunferência $\mathscr{C}$ de centro O e raio R. Escolhemos um ponto A_1 em $\mathscr{C}$. Marcamos o ponto A_2 em $\mathscr{C}$ tal que $m(\angle A_1OA_2) = \theta$, sendo $\theta = \frac{360^\circ}{n}$. Marcamos o ponto A_3 em $\mathscr{C}$ tal que $m(\angle A_2OA_3) = \theta$, sendo $A_3 \neq A_1$. E assim sucessivamente, percorrendo $\mathscr{C}$ sempre no mesmo sentido, marcamos A_4, ..., A_n, com $m(\angle A_iOA_{i+1}) = \theta$, $1 \leq i \leq n-1$. Notemos que $m(\angle A_nOA_1) = \theta$, pois a soma dos ângulos construídos é $(n-1)\theta$, e assim falta θ para completar 360°. Obtemos assim um polígono $\mathscr{P} = A_1A_2\ldots A_n$ com n lados. Confira ilustração na Figura 13.7.

Os triângulos A_iOA_{i+1}, $1 \leq i \leq n-1$, e A_nOA_1 são isósceles, com os lados laterais medindo R e ângulo do vértice medindo θ. Pelo caso *LAL* são dois a dois congruentes, de modo que suas bases, que são os lados A_iA_{i+1} e A_nA_1 do polígono, são congruentes duas a duas. Portanto o polígono é equilátero.

Por outro lado, cada ângulo de $\mathscr{P}$ é a soma de dois ângulos contíguos das bases dos triângulos isósceles, e assim são todos congruentes. Segue que o polígono é equiângulo, portanto é regular.

Uma constatação importante é que todo n-ágono regular é obtido da forma descrita acima. Para ver isso começamos com a

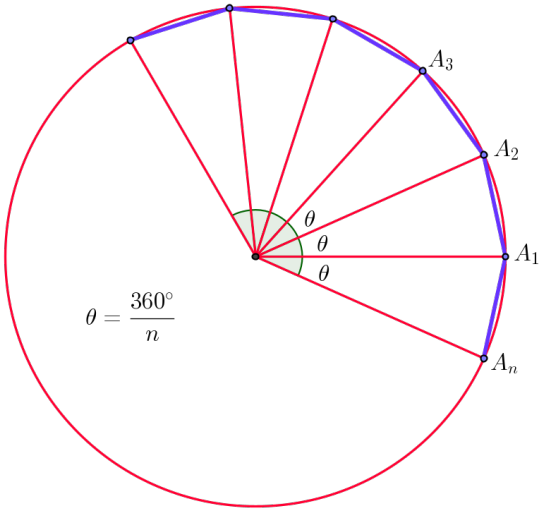


Figura 13.7. Construção de polígonos regulares.

Definição 13.14. Um polígono está inscrito em uma circunferência se todos os seus vértices estão na circunferência. Nesse caso dizemos também que a circunferência é circunscrita ao polígono. Uma circunferência está inscrita em um polígono se todos os seus lados são tangentes a ela. Nesse caso dizemos também que o polígono é circunscrito à circunferência.

Temos agora o

Teorema 13.15. *Todo polígono regular tem uma circunferência circunscrita.*

Demonstração. Seja $\mathscr{P} = A_1A_2A_3\ldots A_n$ um polígono regular. Como A_1, A_2 e A_3 não são colineares, existe uma (única) circunferência $\mathscr{C}$ que os contém. Seja O seu centro. Nosso objetivo é mostrar que $A_4 \in \mathscr{C}$. Podemos usar como referência a Figura 13.7. Vemos que A_1OA_2 e A_2OA_3 são triângulos isósceles congruentes pelo caso *LLL*.

Notemos primeiro que O, A_3 e A_4 não são colineares. Se isso ocorresse com $O - A_4 - A_3$ ou $A_4 = O$ ou $A_4 - O - A_3$ teríamos $m(\angle A_3) = m(\angle A_2)/2$, o que não é possível, pois são iguais. Se $O - A_3 - A_4$ o polígono não seria convexo.

Seja 2α a medida comum dos ângulos de $\mathscr{P}$. Temos $2\alpha = m(\angle A_2A_3A_4) = m(\angle OA_3A_4) + \alpha \Rightarrow m(\angle OA_3A_4) = \alpha$.

Portanto $OA_2A_3 \cong OA_4A_3$ pelo caso *LAL*, do que segue que $OA_4 = OA_3$. Logo $A_4 \in \mathscr{C}$. Repetindo o argumento sucessivamente para A_5, ..., A_n vemos que todos os vértices de $\mathscr{P}$ estão em $\mathscr{C}$. □

Temos também o

Teorema 13.16. *Todo polígono regular tem uma circunferência inscrita, e seu centro é o mesmo da circunferência circunscrita.*

Demonstração. Seja $\mathscr{P} = A_1A_2A_3\ldots A_n$ um polígono regular, e seja $\mathscr{C}$ sua circunferência circunscrita. Se O é o centro de $\mathscr{C}$, sabemos que os triângulos A_1OA_2, A_2OA_3, ..., A_nOA_1 são todos isósceles e congruentes dois a dois. Portanto todos têm a mesma altura em relação a O, digamos a. Consideremos a circunferência $\mathscr{C}'$ de centro O e raio a. Ela tangencia todos os lados de $\mathscr{P}$ em seus pontos médios, portanto é uma circunferência inscrita. □

Definições 13.17. Dado um polígono regular $\mathscr{P} = A_1A_2A_3\ldots A_n$, seja O o centro das circunferências inscrita e circunscrita. O chama-se *centro* de $\mathscr{P}$. O raio R da circunferência circunscrita chama-se *circunraio* de $\mathscr{P}$, e o raio a da circunferência inscrita chama-se *inraio* ou *apótema* de $\mathscr{P}$. Os ângulos com vértice em O e lados por dois vértices contíguos denominam-se *ângulos centrais* de $\mathscr{P}$, e os triângulos correspondentes chamam-se *centrais*.

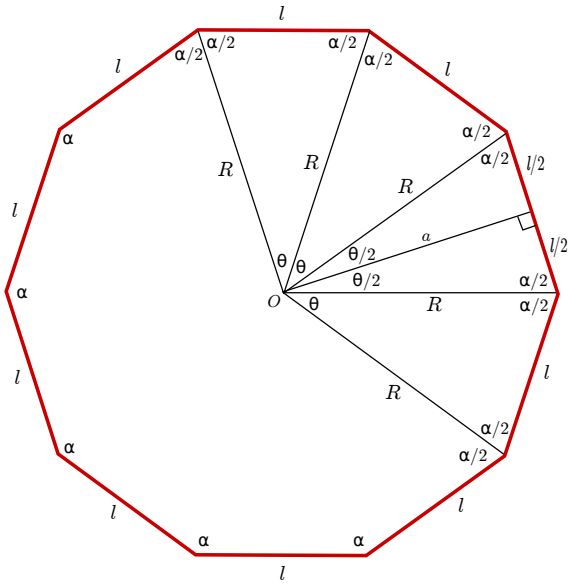


Figura 13.8. Elementos de um polígono regular.

Teorema 13.18. *Seja $\mathscr{P} = A_1A_2A_3\ldots A_n$ um polígono regular. Indicamos por ℓ seu lado comum, R o seu circunraio, por a o apótema e inraio, A a área, θ seu ângulo central, α o valor comum de seus ângulos. Valem as seguintes relações:*

valor em graus do ângulo $\alpha = \dfrac{(n-2)180^\circ}{n}$;

valor em graus do ângulo central $\theta = \dfrac{360^\circ}{n}$;

relações entre ℓ, R e a: $R^2 = a^2 + \dfrac{\ell^2}{4}$ $l = 2R\operatorname{sen}\dfrac{180^\circ}{n}$ $a = R\cos\dfrac{180^\circ}{n}$;

fórmulas para a área: $A = \dfrac{n}{2}\ell\, a = \dfrac{n}{2}R^2\operatorname{sen}\dfrac{360^\circ}{n} = \dfrac{n}{4}\ell^2\operatorname{cotg}\dfrac{180^\circ}{n}$.

Demonstração. Exercício para o estudante. Confira também o Problema 13.8.31. □

Um polígono qualquer pode ser descrito em um sistema de coordenadas cartesianas no plano. Para isso basta fornecer as coordenadas de seus vértices. Para polígonos regulares os vértices podem ser dados pela fórmula do Teorema abaixo.

Teorema 13.19. *Seja $\mathscr{P}$ um polígono regular de n lados com centro na origem das coordenadas e com um vértice no semieixo positivo Ox. Se R é o circunraio os vértices de $\mathscr{P}$ são*

$$V_j = \left(R\cos\frac{(j-1)360}{n}, R\operatorname{sen}\frac{(j-1)360}{n}\right) \quad 1 \le j \le n$$

Demonstração. Exercício para o estudante. □

Outras propriedades dos polígonos regulares são comentadas nos problemas da Seção 13.8. Uma importante aplicação é a definição do número π e a determinação do comprimento da circunferência e da área do disco. Desenvolvemos esse estudo a seguir.

13.5 Sobre o comprimento da circunferência e a área do disco

Vimos os Axiomas de distância entre pontos e medida de segmentos. Isso nos permite medir linhas poligonais e, em particular, o perímetro de polígonos. Por outro lado a medida de linhas que não são formadas por segmentos usa, em geral, técnicas da Matemática Superior. Mas com pouco esforço teórico podemos estudar aqui o comprimento da circunferência e a área do disco.

Existem várias formas de fazer isso. Apresentamos a seguir o método geométrico de Arquimedes, por ser o mais usado na Escola Básica. A ideia é simples: dada uma circunferência, consideramos os polígonos regulares nela inscritos. Percebemos que, à medida que cresce o número de lados, o polígono se aproxima visualmente da circunferência. Essa ideia está ilustrada na Figura 13.9.

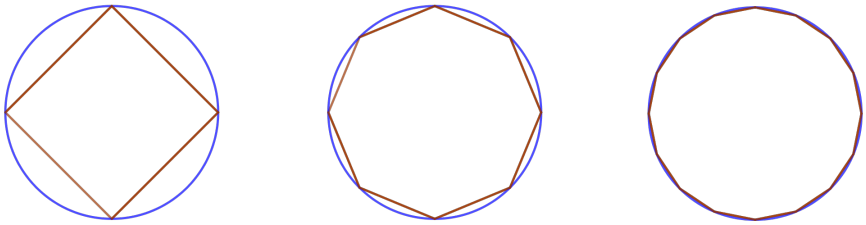


Figura 13.9 Polígonos regulares de 4, 8 e 16 lados inscritos em uma circunferência.

A percepção visual sugerida pela Figura 13.9 deve ser verificada com métodos analíticos. Dada uma circunferência, indicamos por p_n o perímetro do polígono regular de n lados nela inscrito. A ideia é mostrar que existe $\lim_{n\to\infty} p_n$ e definir comprimento da circunferência como esse número. Seguimos de perto a apresentação de [61], Capítulo 6. Ali o estudante pode encontrar as demonstrações. Apresentamos figuras que ajudam na compreensão. Consulte também o Apêndice de [68] e o Capítulo 5 de [15].

Começamos com o

Lema 13.20. *No triângulo ABC, sejam D um ponto de AB e E um ponto de AC tais que $AD = AE$. Então $BC \geq DE$.*

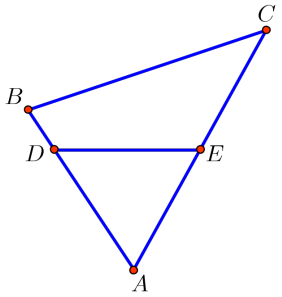


Figura 13.10. Desigualdade em um triângulo.

A Figura 13.11 ajuda o entendimento dos dois lemas seguintes.

Lema 13.21. *Dada uma circunferência $\mathscr{C}$ de raio r, seja p_n o perímetro do polígono regular de n lados nela inscrito. A sequência (p_n) é limitada superiormente.*

Lema 13.22. *Dada uma circunferência $\mathscr{C}$ de raio r, seja p_n o perímetro do polígono regular de n lados inscrito em C. Então $p_n < p_{2n}$.*

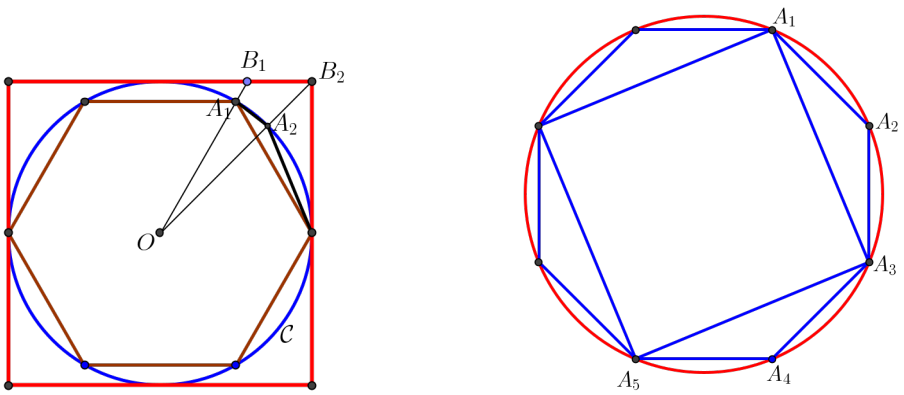


Figura 13.11 À esquerda: a sequência (p_n) é limitada superiormente pelo perímetro do quadrado circunscrito. À direita: ilustração de $p_n < p_{2n}$.

Temos agora o principal resultado:

Teorema 13.23. *Dada uma circunferência $\mathscr{C}$ de raio r, seja p_n o perímetro do polígono regular de n lados inscrito em C. O limite da sequência p_4, p_8, p_{16}, ... é um número real.*

Demonstração. Devido aos lemas anteriores, a sequência p_4, p_8, p_{16}, ... é limitada e crescente. Então converge, em virtude do Teorema das Sequências Monótonas, demonstrado em [61], Capítulo 5. □

Isso nos permite definir o comprimento de uma circunferência.

Definição 13.24. O comprimento de uma circunferência é o limite dos perímetros p_4, p_8, p_{16}, ... dos polígonos regulares de 2^n lados inscritos.

Na Definição 13.24 podemos usar os perímetros p_3, p_6, p_{12}, p_{24}, ... ou qualquer sequência p_k, p_{2k}, p_{4k}, p_{8k}, ... Por uma questão de facilidade nos limitamos à sequência considerada. Todas essas sequências têm o mesmo limite. Na verdade a sequência (p_n) é crescente, e portanto convergente. Esse resultado está demonstrado em [61], Capítulo 10.

Realizando experimentos com objetos circulares observamos que a razão entre o comprimento de uma circunferência qualquer e seu diâmetro tem medida muito próxima do valor 6,2, mesmo variando bastante o tamanho dos objetos. Estamos agora em condições de verificar que essa razão, na verdade, é uma constante.

Teorema 13.25. *É constante a razão entre o comprimento de uma circunferência qualquer e seu diâmetro.*

Demonstração. Consideremos duas circunferências $\mathscr{C}$ e $\mathscr{C}'$ com centros O e O', raios r e r' e comprimentos c e c', respectivamente. Sejam $A_1A_2\ldots A_n$ e $A'_1A'_2\ldots A'_n$ polígonos regulares de n lados inscritos em $\mathscr{C}$ e $\mathscr{C}'$, com perímetros p_n e p'_n, respectivamente.

Tomando como referência a Figura 13.12, os triângulos OA_1A_2 e $O'A'_1A'_2$ são semelhantes pois são isósceles e os ângulos $\angle A_1OA_2$ e $\angle A'_1O'A'_2$ são iguais (ambos medem $\theta_n = 360°/n$). Portanto

$$\frac{A_1A_2}{r} = \frac{A'_1A'_2}{r'} \quad\Rightarrow\quad \frac{nA_1A_2}{2r} = \frac{nA'_1A'_2}{2r'} \quad\Rightarrow\quad \frac{p_n}{2r} = \frac{p'_n}{2r'}$$

para todo $n \geq 3$. Em particular

$$\frac{p_{2^n}}{2r} = \frac{p'_{2^n}}{2r'} \quad\Rightarrow\quad \lim_{n\to\infty}\frac{p_{2^n}}{2r} = \lim_{n\to\infty}\frac{p'_{2^n}}{2r'} \quad\Rightarrow\quad \frac{c}{2r} = \frac{c'}{2r'}.$$

Isso termina a demonstração do Teorema. □

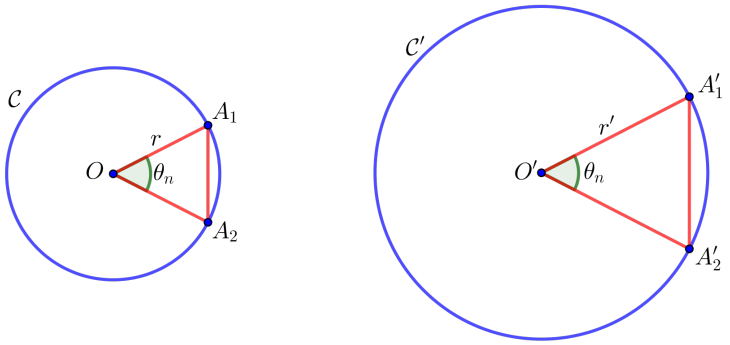


Figura 13.12 Existência da constante π.

Definição 13.26. A constante cuja existência foi demonstrada no Teorema 13.25 é designada com o símbolo π, e denominada *constante de Arquimedes*.

Teorema 13.27. *O comprimento c de uma circunferência de raio r é dado pela fórmula*

$$c = 2\pi r$$

Demonstração. Vimos no Teorema 13.25 que $c/2r = \pi$. Portanto $c = 2\pi r$. □

Chegamos assim à definição do número π, que é certamente já conhecido do estudante. Podemos nos perguntar sobre a natureza desse número, em particular, qual é o seu valor. Essas perguntas demandam muito estudo. Uma pequena parte dele está feita em [61]. Aqui podemos informar que uma aproximação do valor de π no sistema decimal com 17 casas exatas é

$$\pi \approx 3,14159265358979 32...$$

O método geométrico de Arquimedes nos permite definir a área de um disco e obter uma fórmula em função do raio. A ideia é mesma: dado um disco, consideramos os polígonos regulares nele inscritos. Revendo a Figura 13.9, podemos perceber que, à medida que cresce o número de lados do polígono, a região poligonal se confunde com o disco.

Dado um disco de raio r, indicamos por s_n a área da região delimitada por um polígono regular de n lados inscrito no disco (isto é, inscrito na circunferência que delimita o disco). Com a experiência já adquirida o estudante pode constatar facilmente que $s_n < s_{2n}$ e $s_n < 4r^2$ para todo $n \geq 3$. Aliás, essa constatação é até mais simples do que no estudo do comprimento da circunferência. Basta reexaminar as Figuras de 13.11. Lembrando de usar o Teorema das Sequências Monótonas, temos a

Definição 13.28. A área de um disco de raio r é o limite da sequência s_4, s_8, s_{16}, ... sendo s_n a área da região delimitada por um polígono regular de n lados inscrito na circunferência que delimita o disco.

Para obter uma fórmula para a área do disco, precisamos antes do

Lema 13.29. *Seja $\mathscr{C}$ uma circunferência, e seja l_n o lado do polígono regular de n lados inscrito em $\mathscr{C}$. Então* $\lim_{n\to\infty} l_n = 0$.

Demonstração. Uma forma de demonstrar o Lema é calcular $l_n = 2r\,\mathrm{sen}(\pi/n)$, logo $\lim_{n\to\infty} l_n = 2r\,\mathrm{sen}\,0 = 0$. □

Provamos agora o

Teorema 13.30. *A área de um disco de raio r é πr^2.*

Demonstração. Seja $\mathscr{D}$ um disco de raio r e $\mathscr{C}$ sua circunferência. Consideremos um polígono de n lados inscrito em $\mathscr{C}$. Sejam l_n o lado desse polígono, a_n seu apótema e p_n seu perímetro. Na Figura 13.13, $l_n = AB$.

A área da região delimitada pelo polígono é $s_n = n\frac{1}{2}l_n a_n = \frac{1}{2}p_n a_n$. Temos $a_n = \sqrt{r^2 - (l_n/2)^2}$, com $\lim l_n = 0$ (Lema 13.29). Segue que $\lim a_n = r$. Lembremo-nos ainda de que $\lim_{n\to\infty} p_{2^n} = 2\pi r$. Portanto a área de $\mathscr{D}$ é

$$\lim_{n\to\infty} s_{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} p_{2^n} a_{2^n} = \frac{1}{2} 2\pi r r = \pi r^2.$$

Isso termina a demonstração do Teorema. □

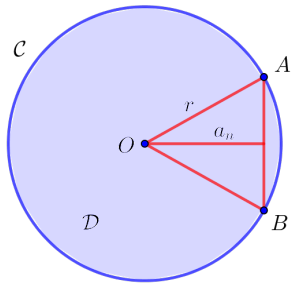


Figura 13.13. Área do disco.

Escólio 13.31. *É constante a razão entre a área de um disco qualquer e o quadrado de seu raio, e essa constante é π.*

Vemos assim que, por "coincidência", a constante que é a razão entre a área de um disco qualquer e o quadrado de seu raio é a mesma contante que é a razão entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro. Essa bela propriedade foi provada por Arquimedes.

Para finalizar esta seção apresentamos resultados sobre comprimento de arcos de circunferências, área de setores de discos e definição de radiano. Para ler as demonstrações consulte [61]

Teorema 13.32. *Seja $\mathscr{C}$ uma circunferência de raio r e centro O, e seja $\overset{\frown}{AB}$ um arco dessa circunferência determinado pelo ângulo $\angle AOC$ de medida θ (em graus). Então o comprimento do arco é $\pi r\theta/180$.*

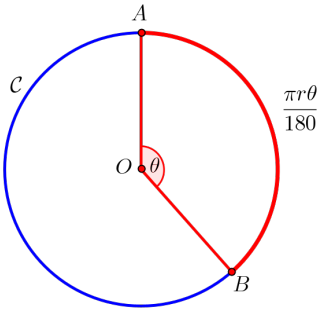


Figura 13.14. Arco em uma circunferência.

Se $A = B$ consideramos que o arco é toda a circunferência $\mathscr{C}$, nesse caso $\theta = 360^o$ e a fórmula do Teorema 13.32 se reduz a $2\pi r$, de acordo com o que já conhecemos. Se AB é um diâmetro de $\mathscr{C}$, então o arco é uma semicircunferência e seu comprimento é πr.

Os resultados acima nos permitem definir a medida em radianos de um ângulo. A Figura 13.15 ilustra a definição.

Definição 13.33. Seja $\angle AOB$ um ângulo e consideremos a circunferência com centro O e raio r. Sejam C e D os pontos do ângulo que intersectam a circunferência. A medida em radianos x do $\angle AOB$ é definida por

$$x = \frac{\text{comprimento de } \overset{\frown}{CD}}{r}. \qquad (13.1)$$

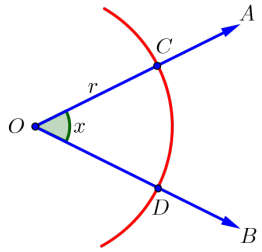


Figura 13.15. Definindo radiano.

Juntando essa definição com o resultado do Teorema 13.32 temos uma fórmula de conversão. Se um ângulo mede θ graus, sua medida em radianos é

$$x = \frac{\pi}{180^0}\theta. \qquad (13.2)$$

A fórmula (13.2) implica que a Definição 13.33 não depende do raio r, e portanto não depende da circunferência ali considerada. Da fórmula (13.1) temos ainda o

Teorema 13.34. *Seja $\mathscr{C}$ uma circunferência de raio r e centro O, e seja $\overset{\frown}{AB}$ um arco dessa circunferência determinado pelo ângulo $\angle AOC$ de medida x (em radianos). Então o comprimento do arco é rx.*

Seja $\mathscr{D}$ um disco delimitado pela circunferência $\mathscr{C}$ de centro O. Sejam A e B pontos de $\mathscr{C}$ que não sejam extremos de um diâmetro. O *setor* de $\mathscr{D}$ determinado por A e B é o subconjunto formado pela intersecção de $\mathscr{D}$ com o ângulo $\angle AOB$ e seu interior. Confira ilustração na Figura 13.16. O $\angle AOB$ chama-se *ângulo determinado pelo setor*. Dizemos também *setor determinado por* $\angle AOB$, ou *setor inscrito* em $\angle AOB$. O complemento do setor é o conjunto formado pelos pontos de $\mathscr{D}$ menos o interior do $\angle AOB$. Se A e B são extremos de um diâmetro de $\mathscr{C}$, a intersecção de $\mathscr{D}$ com qualquer um dos semiplanos determinados por $\overleftrightarrow{AB}$ chama-se *semidisco*.

Para definir área de setores de discos ou de semidiscos consulte [61], Capítulo 6. Temos o

Teorema 13.35. *Seja $\mathscr{D}$ um disco de raio r e centro O, e seja S a área do setor delimitado por $\angle AOB$. Seja θ (em graus) a medida desse ângulo. Então*

$$S = \frac{\pi r^2 \theta}{360}.$$

Se a medida do ângulo determinado pelo setor for x em radianos, então

$$S = \frac{1}{2} x r^2.$$

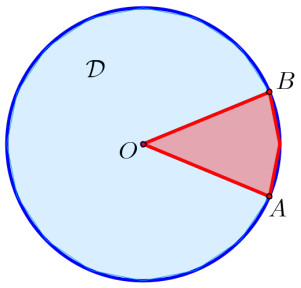


Figura 13.16. Setor de um disco.

A área do complemento do setor é $\pi r^2 - S$. A área de um semidisco de $\mathscr{D}$ é $\pi r^2/2$.

13.6 Polígonos não convexos

Os polígonos não convexos podem ser visualmente bem complicados. A Figura 13.17 traz um exemplo. Entretanto, o polígono ainda separa o plano em duas regiões.

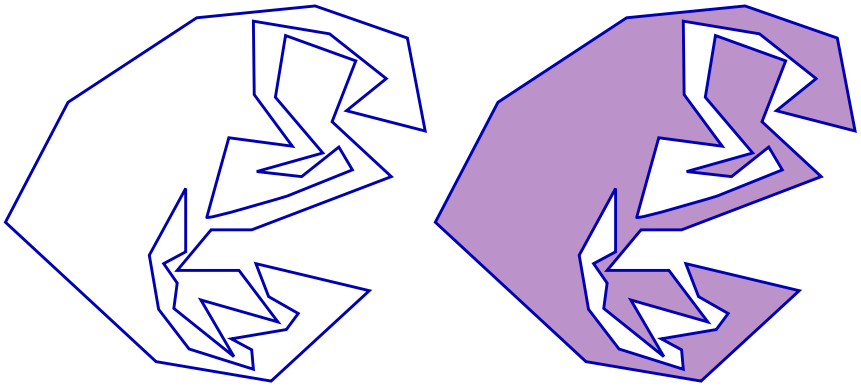


Figura 13.17. Um polígono não convexo e seu interior.

Temos o

Teorema 13.36. *Seja $\mathscr{P}$ um polígono em um plano. O plano menos $\mathscr{P}$ é a reunião de dois conjuntos disjuntos e não vazios $\mathscr{P}_i$ e $\mathscr{P}_e$, denominados respectivamente interior e exterior de $\mathscr{P}$. $\mathscr{P}_i$ é limitado e $\mathscr{P}_e$ é ilimitado. Se $A \in \mathscr{P}_i$ e se $B \in \mathscr{P}_e$ então AB intersecta $\mathscr{P}$.*

Um conjunto de um plano se diz *limitado* quando existe uma circunferência nesse plano tal que o conjunto está contido em seu interior. Um conjunto de um plano se diz *ilimitado* quando não é limitado.

Observe que se $A, B \in \mathscr{P}_i$ e se AB não intersecta $\mathscr{P}$ então $AB \subset \mathscr{P}_i$.

No Teorema 13.4 vimos a demonstração desse resultado para polígonos convexos. A demonstração geral é mais complicada e não a apresentamos aqui. O estudante pode consultar [34], a partir da página 281, ou o artigo [42], ou ainda [2].

Assim como definimos para polígonos convexos, para polígonos quaisquer $\mathscr{P}$ também dizemos que a reunião $\mathscr{P} \cup \mathscr{P}_i$ chama-se *região determinada por* $\mathscr{P}$.

Com isso podemos considerar para polígonos quaisquer $\mathscr{P}$ as definições de *diagonal interior* e *triangulação*.

Definições 13.37. Seja $\mathscr{P}$ um polígono. Uma diagonal que, com exceção de seus extremos, está contida no interior de $\mathscr{P}$, chama-se *diagonal interior*. Uma *triangulação* de $\mathscr{P}$ é uma coleção de triângulos cujos lados são lados de $\mathscr{P}$ ou diagonais interiores, de modo que esses triângulos, quando se intersectam, o fazem em lados comuns ou em vértices de $\mathscr{P}$, e a reunião desses triângulos e seus interiores é a região determinada por $\mathscr{P}$.

Temos agora o

Teorema 13.38. *Todo polígono admite uma triangulação.*

Para polígonos convexos essa afirmação já foi objeto do Teorema 13.7. Para o caso geral apresentamos aqui uma justificativa.

Demonstração. Se o número de lados do polígono é três, o próprio triângulo é sua triangulação. Para quadriláteros, basta ligar dois vértices opostos, escolhendo o vértice reentrante no caso de não convexo.

Seja $n \geq 5$ um número natural para o qual se sabe que todo polígono com $\leq n-1$ lados tem triangulação. Seja $\mathscr{P}$ um polígono com n lados.

Tomamos uma reta r que não intersecta $\mathscr{P}$ e que não seja paralela a nenhum lado. Chamamos de B o vértice de $\mathscr{P}$ localizado à menor distância de r. Se houver mais de um vértice à mesma distância, eles não são adjacentes, e escolhemos um deles. Sejam A e C os vértices adjacentes a B. Temos dois casos possíveis.

1º caso: A, B e C são os únicos vértices de $\mathscr{P}$ que estão contidos na região triangular ABC. Confira ilustração na Figura 13.18. Note que AC é uma diagonal interior de $\mathscr{P}$. O polígono $\mathscr{P}'$, obtido do polígono $\mathscr{P}$ substituindo-se os lados AB e BC por AC, tem $n-1$ lados. Então $\mathscr{P}'$ tem uma triangulação. Juntando a ela o triângulo ABC, obtemos uma triangulação de $\mathscr{P}$.

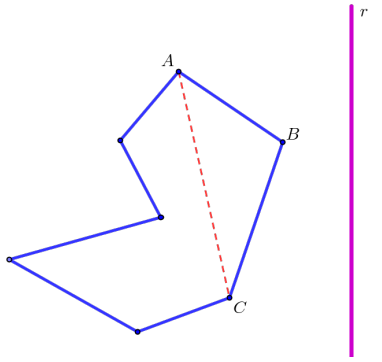


Figura 13.18. Teorema 13.38: 1º caso.

2º caso: O triângulo ABC contém outros vértices de $\mathscr{P}$. Confira ilustração na Figura 13.19. Dentre esses vértices contidos no triângulo ABC, seja D o mais distante do lado AC (se houver mais de um, escolhemos um deles). Assim BD é uma diagonal interior de $\mathscr{P}$. Esse segmento reparte $\mathscr{P}$ em dois polígonos $\mathscr{P}'$ e $\mathscr{P}''$, ambos com número de lados $< n$. Portanto $\mathscr{P}'$ e $\mathscr{P}''$ têm triangulação. Essas duas triangulações formam uma triangulação de $\mathscr{P}$.

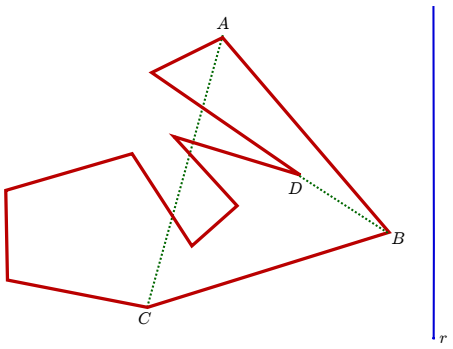


Figura 13.19. Teorema 13.38: 2º caso.

□

Observação 13.39. (i) Toda triangulação de qualquer polígono, convexo ou não, tem um triângulo com dois lados coincidindo com lados adjacentes do polígono. A demonstração é a mesma que foi feita para polígonos convexos, no Teorema 13.9.
(ii) Toda triangulação de qualquer polígono, convexo ou não, tem $n-2$ triângulos e $n-3$ lados que são diagonais interiores. A demonstração é a mesma que foi feita para polígonos convexos, no Teorema 13.10.

Sobre a soma de ângulos de um polígono, no caso não convexo, convém fazer algumas observações. Já vimos que, num polígono convexo qualquer, a soma de seus ângulos é $(n-2)180°$. Polígonos não convexos também admitem triangulações, que têm $n-2$ triângulos. Assim os ângulos que fazem parte de uma triangulação também somam $(n-2)180°$. Mas não são "os ângulos do polígono". Vemos na Figura 13.20 uma configuração em que $\alpha_4 = \angle A_3A_4A_5$ é um ângulo do polígono mas se abre para fora, e assim não faz parte de nenhuma triangulação.

Portanto, em um polígono não convexo, para obter a soma $(n-2)180°$, devemos tomar as medidas dos ângulos dos vértices salientes, e nos vértices reentrantes deve ser tomada a medida replementar do ângulo (isto é, o que falta para completar 360°).

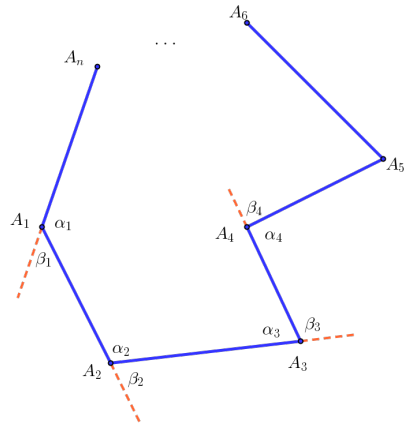


Figura 13.20. Ângulos de um polígono não convexo.

13.7 Poligramas regulares

Uma importante classe de polígonos não simples são os *poligramas*, também designados pela nomenclatura geral de *polígonos estrelados*. Para evitar uma abordagem teórica apresentamos um exemplo e algumas observações.

Começamos descrevendo o *octograma regular de densidade 3*. Marcamos em uma circunferência os 8 vértices de um octógono regular inscrito. Percorrendo a circunferência em um único sentido, e começando com um desses pontos, o ligamos com um segmento ao terceiro ponto depois dele, e esse ao terceiro depois dele, e repetimos esse processo até encontrar novamente o primeiro ponto. Observe que todos os pontos são interligados com esse procedimento. O octograma é a união desses segmentos, que são seus lados. Os vértices do octógono inicial são os vértices do octograma, e seus ângulos são os que têm como vértice esses pontos e como lados os lados do octograma. O símbolo desse octograma é $\{8/3\}$. Confira a Figura 13.21, desenho da esquerda. À direita da mesma Figura vemos a representação *côncava*, que consiste em retirar dos lados os segmentos entre dois pontos de intersecção quaisquer situados no seu interior.

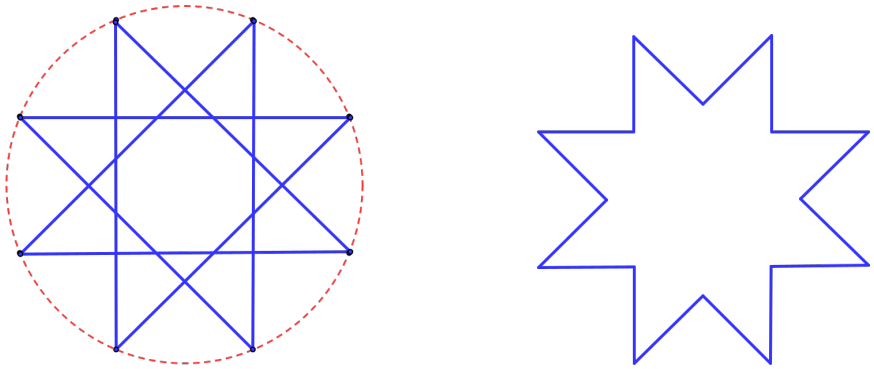


Figura 13.21. Construção e duas representações do octograma regular $\{8/3\}$: à esquerda, em azul, o octograma regular estrelado, e, à direita, o octograma regular côncavo.

Vejamos o que ocorre com o octograma regular $\{8/2\}$. Seguindo o mesmo processo anterior, tomamos uma circunferência, e dispomos nela oito pontos igualmente espaçados A_0, A_1, ..., A_7. Ligamos A_0 com A_2, este com A_4, este com A_6, e voltamos a A_0. Com isso já formamos uma linha poligonal simples fechada, na verdade, um 4-ágono regular. Ligando A_1, A_3, A_5 e A_7, formamos

outro 4-ágono regular. Todos os pontos foram usados. A reunião desses dois quadrados é o octograma regular {8/2}. Nesse caso dizemos que o octograma é *composto*. Confira a Figura 13.22.

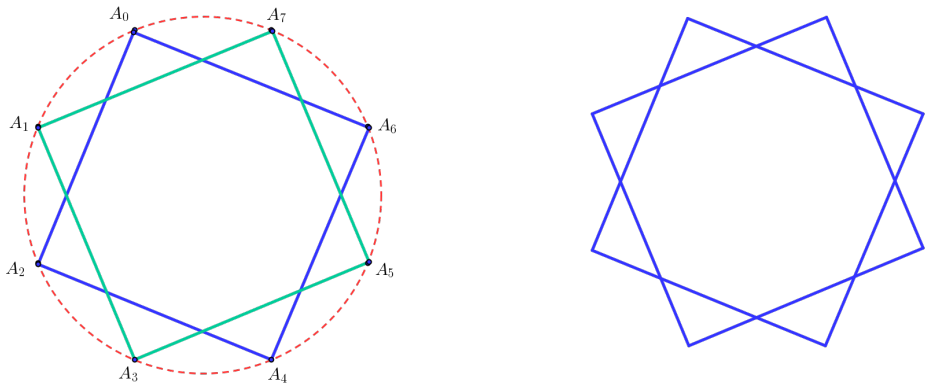


Figura 13.22. Construção do octograma regular composto {8/2}.

Uma definição mais geral pode ser a seguinte.

Definições 13.40. Seja $A_1A_2A_3\ldots A_nA_1$ uma linha poligonal fechada que satisfaz às duas condições seguintes: (i) se dois dos seus lados se intersectam, a intersecção é a sua extremidade comum ou um ponto interior de ambos; (ii) dois segmentos consecutivos quaisquer não são colineares. Tal linha poligonal chama-se *poligrama de n vértices*. Os pontos A_1, A_2, A_3, ..., A_n são seus *vértices*, e os lados da linha poligonal são seus *lados*. Os *ângulos* do poligrama são $\angle A_nA_1A_2$, $\angle A_1A_2A_3$, ... e $\angle A_{n-1}A_nA_1$. A medida de um lado também é chamada de lado.

Portanto em um poligrama é permitido que os lados se intersectem em pontos de seus interiores. Esses pontos não são considerados vértices. Uma propriedade dos poligramas é que a sua linha poligonal pode ser percorrida em um único movimento, passando uma única vez por todos os vértices. Um *poligrama composto* é a reunião de dois ou mais poligramas.

Definição 13.41. Um poligrama se diz regular quando seus lados são congruentes dois a dois, assim como seus ângulos. Um poligrama composto se diz regular quando os poligramas que o compõem são regulares.

Podemos chamar de *poligrama estrelado* um poligrama tal que seus vértices estão organizados ordenadamente em forma circular em torno de um ponto.

Um exemplo de poligrama regular é o octograma {8/3}, e de poligrama regular composto é {8/2}.

Sejam p e q inteiros tais que $p \geq 3$ e $1 < q < p$. Um p-grama regular de densidade q é definido usando o mesmo processo que foi feito para os octogramas, iniciando com os vértices de um p-ágono regular em uma circunferência, e ligando cada ponto com o q-ésimo seguinte. O símbolo do p-grama regular com densidade q é $\{p/q\}$.

Figura 13.23. Iluminura atribuída a Ibrahim al-Amidi em uma página do manuscrito "Alcorão do Sultão Barquq" do Século XIV. O artista usou um decagrama regular na versão côncava como base do desenho. Completou com outros polígonos, como quadriláteros e pentágonos. Ver créditos na pág. 215.



13.8 Problemas

Problema 13.8.1. Explique por que um polígono com n vértices também tem n lados e n ângulos.

Problema 13.8.2. Explique por que a definição de convexidade para polígonos com $n \geq 4$ lados poderia ser a seguinte: todo ângulo do polígono contém em seu interior todos os vértices do polígono exceto os três vértices que determinam esse ângulo. O caso $n = 3$ já foi visto no Problema 9.11.6.

Problema 13.8.3. Explique por que o interior de um polígono convexo é igual à intersecção dos interiores de todos os seus ângulos.

Problema 13.8.4. Demonstre que qualquer diagonal de um polígono convexo está contida em seu interior exceto os seus dois extremos.

Problema 13.8.5. Prove que qualquer diagonal de um polígono convexo o reparte em dois polígonos convexos.

Problema 13.8.6. Mostre que todo polígono convexo de n lados tem $n(n-3)/2$ diagonais.

Problema 13.8.7. Descreva qual é a forma mais rápida de desenhar um pentágono regular usando régua, compasso e transferidor.

Problema 13.8.8. Explique por que dados um número real $\ell > 0$ e um inteiro positivo $n \geq 3$, existe um polígono regular de n lados, cada um medindo ℓ.

Problema 13.8.9. O pentágono regular da Figura 13.24, com um triângulo central destacado, passou por uma rotação no sentido horário de 252° em torno de seu centro. Desenhe a nova posição.

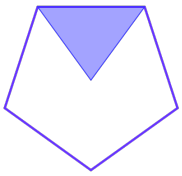


Figura 13.24. Rotação de pentágono regular.

Problema 13.8.10. Para recortar octógonos regulares em uma folha de EVA um estudante teve a seguinte ideia. Primeiro recortou um quadrado de lado 20 cm. Depois recortou um triângulo de cada canto. A ideia do estudante está correta? Se não, explique por que. Se sim, diga quais são as medidas dos lados do triângulo a ser cortado. Confira ilustração na Figura 13.25.

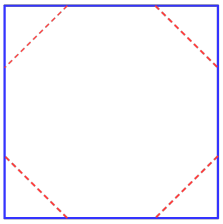


Figura 13.25. De um quadrado ao octógono regular.

Problema 13.8.11. Para recortar um hexágono regular de lado 50 cm, um estudante constatou que as folhas de papel de que dispunha não tinham dimensões suficientes. Teve a ideia de recortar dois trapézios isósceles idênticos, um de cada folha, e depois juntá-los pela base maior. A ideia do estudante está correta? Se não, explique por que. Se sim, diga quais são as medidas que o estudante deve ter para que ele possa desenhar o trapézio a ser cortado. Confira a Figura 13.26.

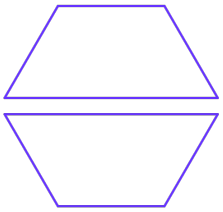


Figura 13.26. Recortes para um hexágono regular.

Problema 13.8.12. Em um sistema de coordenadas cartesianas, um hexágono regular tem centro na origem das coordenadas e tem um vértice no ponto $(1,0)$. Assinale a opção FALSA. Justifique. Explique por que as outras opções são verdadeiras.

a) A bissetriz do primeiro quadrante é um eixo de simetria do hexágono.

b) O hexágono tem um vértice no ponto $(-1,0)$.

c) Oy é um eixo de simetria do hexágono.

d) Ox é um eixo de simetria do hexágono.

e) $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ é um vértice do hexágono.

Problema 13.8.13. Um octógono regular tem centro na origem das coordenadas e um vértice é o ponto $(1,0)$. Calcule as coordenadas do vértice que está no interior do primeiro quadrante das coordenadas.

Problema 13.8.14. Os lados de um hexágono regular medem 10. Calcule os lados do triângulo no qual ele está inscrito (isto é, cada um de três lados não adjacentes do hexágono está contido em um lado do triângulo).

Problema 13.8.15. Os lados de um hexágono convexo equiângulo medem 20, 12, 24, 28, x e y nessa ordem. Calcule o perímetro desse hexágono.

Problema 13.8.16. Quatro segmentos de medida a e quatro de medida b formam um octógono inscritível em uma circunferência. Qual é a medida do raio?

Problema 13.8.17. Quantas diagonais de medidas diferentes tem um n-ágono regular?

Problema 13.8.18. Explique por que a área de um n-ágono regular qualquer é igual à metade do produto do perímetro pelo apótema.

Problema 13.8.19. Considere um hexágono regular. Anotamos: ℓ = lado; a = apótema e raio da circunferência inscrita; R = raio da circunferência circunscrita; A = área. Demonstre as seguintes fórmulas:

$\ell = R$;

$a = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,\ell$;

$A = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\,\ell^2 = 2\sqrt{3}\,a^2$.

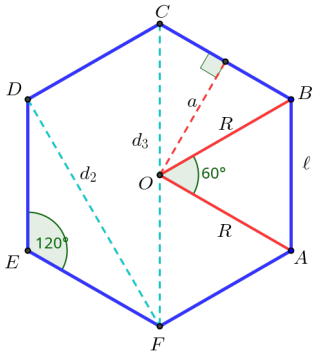


Figura 13.27. Hexágono regular.

Problema 13.8.20. O hexágono regular tem dois tipos de diagonais. Descreva-as e calcule suas medidas em função de seu lado.

Problema 13.8.21. Um hexágono regular $ABCDEF$ de centro O e lado $\ell \geq 3$ é intersectado por dois segmentos OS e OT tais que $S \in BC$ e $BS = 1$, e $T \in AB$ e $AT = 2$. Calcule a área do quadrilátero $OSBT$. Confira a Figura 13.28.

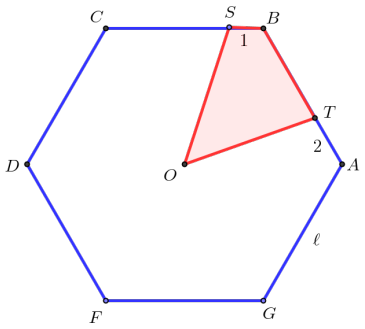


Figura 13.28. Quadrilátero incluso em um hexágono regular.

Problema 13.8.22. Seja $ABCDEF$ um hexágono convexo com lados opostos paralelos, isto é, $AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$ e $CD \parallel FA$. Um exemplo está na Figura 13.29. O que se pode afirmar sobre seus ângulos? E quanto a octógonos, ocorre algo similar?

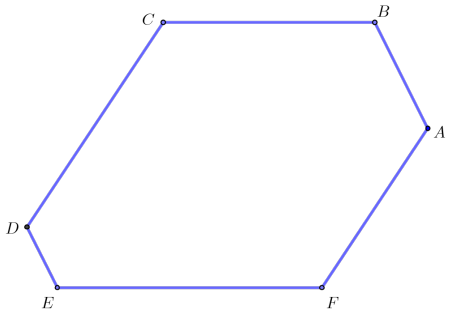


Figura 13.29. Hexágono convexo com lados opostos paralelos.

Problema 13.8.23. Considere um octógono regular. Anotamos: ℓ = lado; a = apótema e raio da circunferência inscrita; R = raio da circunferência circunscrita; A = área. Demonstre as seguintes fórmulas:

$$R = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}\,\ell; \quad \ell = \sqrt{2-\sqrt{2}}\,R;$$

$$a = \frac{1+\sqrt{2}}{2}\,\ell; \quad a = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\,R;$$

$$R = \sqrt{2(2-\sqrt{2})}\,a;$$

$$A = 2(1+\sqrt{2})\,l^2 = 2\sqrt{2}\,R^2 = 8(\sqrt{2}-1)\,a^2.$$

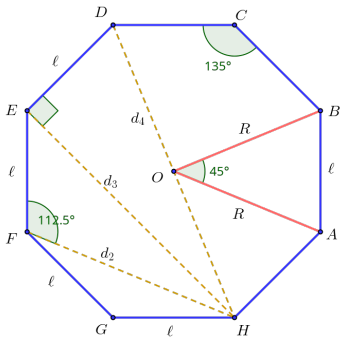


Figura 13.30. Octógono regular.

Problema 13.8.24. O octógono regular tem três tipos de diagonais. Descreva-as e calcule suas medidas em função de seu lado.

Problema 13.8.25. Considere um decágono regular. Anotamos: ℓ = lado; d = diagonal; a = apótema e raio da circunferência inscrita; R = raio da circunferência circunscrita; A = área. Demonstre as seguintes fórmulas:

$$\ell = R\,\frac{\sqrt{5}-1}{2} = 2R\,\mathrm{sen}\,18^\circ; \quad R = \ell\,\frac{\sqrt{5}+1}{2};$$

$$a = \frac{\ell}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}} = \frac{R}{4}\sqrt{2(5+\sqrt{5})};$$

$$A = \frac{5}{2}\,\ell^2\,\sqrt{5+2\sqrt{5}} = \frac{5}{2}\,R^2\,\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}};$$

$$A = 5R^2\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{5}{2}\ell^2\,\mathrm{cotg}\left(\frac{\pi}{10}\right).$$

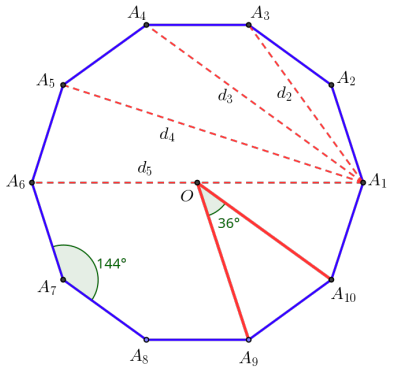


Figura 13.31. Decágono regular.

Solução (parcial). Para demonstrar a primeira fórmula consideremos o triângulo central OAB do decágono regular, com $OA = OB = R$ e $AB = \ell$. Esse triângulo é isósceles com ângulo do vértice $\angle AOB$ de medida 36° e, portanto, os ângulos da base medem 72°. Confira a Figura 13.32 à esquerda.

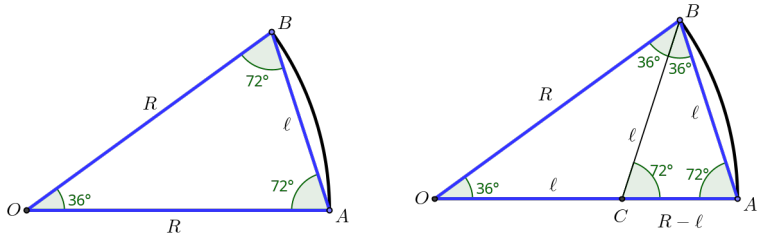


Figura 13.32. Propriedade do decágono regular.

Acompanhamos agora a Figura 13.32, desenho da direita. Marcamos C em OA tal que $BC = AB = \ell$. Então ABC e OBC são isósceles, e temos $AC = R - \ell$. Além disso $OAB \sim BAC$ pelo caso AA, o que implica $\frac{OA}{AB} = \frac{AB}{AC}$, ou $\frac{R}{\ell} = \frac{\ell}{R-\ell}$. Resolvendo obtemos $\ell = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\,R$. □

Problema 13.8.26. Estude os quatro tipos de diagonais do decágono regular e calcule suas medidas em função do lado.

Problema 13.8.27. Considere um pentágono regular. Anotamos: ℓ = lado; a = apótema e raio da circunferência inscrita; R = raio da circunferência circunscrita; A = área. Demonstre as seguintes fórmulas:

$$\ell = R\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} = 2R\operatorname{sen}36^\circ;\ R = \ell\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}};$$

$$a = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = \frac{\ell}{2}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}};$$

$$A = \frac{5R^2}{4}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} = \frac{5\ell^2}{4}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}.$$

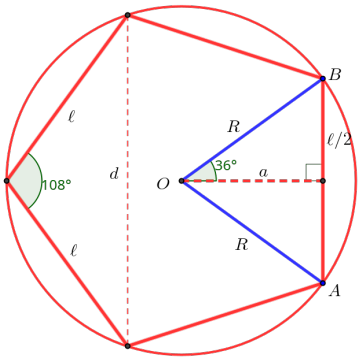


Figura 13.33. Pentágono regular.

Solução (parcial). Para demonstrar a primeira fórmula consideremos o triângulo central OAB do pentágono regular, com $OA = OB = R$ e $AB = \ell$. Esse triângulo é isósceles com ângulo do vértice $\angle AOB$ de medida 72°. Usando o apótema temos $\operatorname{sen}36^\circ = \ell/2R$, ou $\ell = 2R\operatorname{sen}36^\circ$. Confira a Figura 13.33.

No triângulo central do decágono regular, usando o apótema, temos $\operatorname{sen}18^\circ = \frac{\ell_{10}}{2R}$. Do resultado do Problema 13.8.25 vem $\operatorname{sen}18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Da fórmula trigonométrica $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ segue $\cos 18^\circ = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$. Da fórmula trigonométrica $\operatorname{sen}2x = 2\operatorname{sen}x\cos x$ temos $\operatorname{sen}36^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$. Disso resulta a primeira fórmula. □

Problema 13.8.28. Verifique que o pentágono regular tem apenas um tipo de diagonal, e a razão entre a diagonal e o lado é o número áureo $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Problema 13.8.29. Demonstre que as diagonais de um pentágono regular determinam outro pentágono regular em seu interior. Calcule o lado desse pentágono menor em função do lado do maior. Confira a Figura 13.34.

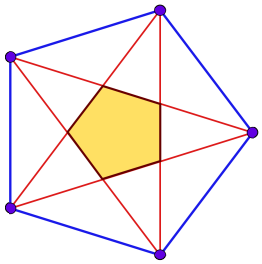


Figura 13.34. Pentágono regular dentro de pentágono regular.

Problema 13.8.30. Considere um dodecágono regular (12 lados). Anotamos: ℓ = lado; a = apótema e raio da circunferência inscrita; R = raio da circunferência circunscrita; A = área. Obtenha fórmulas relacionando esses elementos.

Problema 13.8.31. Considere um n-ágono regular. Anotamos: ℓ_n = lado; a_n = apótema e raio da circunferência inscrita; R_n = raio da circunferência circunscrita; A_n = área. Demonstre as seguintes fórmulas:

$$\ell_n = 2R_n \operatorname{sen}\tfrac{\pi}{n};\quad R_n = \tfrac{1}{2}\ell_n \operatorname{cossec}\tfrac{\pi}{n};$$

$$a_n = R_n \cos\tfrac{\pi}{n};\quad a_n = \tfrac{1}{2}\ell_n \operatorname{cotg}\tfrac{\pi}{n};$$

$$R_n^2 = a_n^2 + \tfrac{1}{4}\ell_n^2;$$

$$A_n = n\tfrac{1}{2}\ell_n a_n = \tfrac{n}{2}R_n^2 \operatorname{sen}\tfrac{2\pi}{n} = \tfrac{1}{4}n\ell_n^2 \operatorname{cotg}\tfrac{\pi}{n}.$$

Problema 13.8.32. Calcule a medida da menor diagonal de um n-ágono regular em função do lado e em função do circunraio. Use diversas abordagens.

Problema 13.8.33. Um *ladrilhamento* é uma cobertura do plano por regiões poligonais cujos interiores não se sobrepõem. Existe uma miríade de ladrilhamentos. Uma condição restritiva que fazemos aqui é que se duas regiões poligonais se intersectam, a interseção é um vértice ou um único lado comum. **a)** Explique por que, em um ladrilhamento qualquer, cada lado é lado de exatamente dois polígonos. **b)** Explique por que ao redor de um vértice de um ladrilhamento concorrem pelo menos três polígonos. **c)** Explique por que a soma das medidas dos ângulos com um mesmo vértice deve ser 360°. **d)** Um ladrilhamento se diz *regular simples* quando é constituído de um único tipo de polígono regular. Encontre todos os ladrilhamentos regulares simples.

Problema 13.8.34. Um ladrilhamento regular pode ser composto, isto é, o plano é recoberto por mais de um tipo de região poligonal regular. Continuamos exigindo que, se duas regiões poligonais se intersectam, a interseção é um vértice ou um lado comum. Verifique e faça desenhos de ladrilhamentos compostos por: (i) triângulos equiláteros e quadrados; (ii) quadrados e octógonos regulares; (iii) triângulos, quadrados e hexágonos regulares; (iv) triângulos equiláteros e dodecágonos regulares.

Problema 13.8.35. Na Figura 13.35 vemos um ladrilhamento do dodecágono regular (12 lados) formado por quadrados, triângulos e um hexágono. **a)** Prove que a figura é coerente com a realidade, isto é, dois quaisquer dos quadrados consecutivos desenhados nos lados do dodecágono têm um vértice em comum. **b)** Explique por que os triângulos formados são equiláteros. **c)** Explique por que o polígono formado dentro do dodecágono é um hexágono regular. **d)** O dodecágono regular tem outros ladrilhamentos formados por polígonos regulares variados?

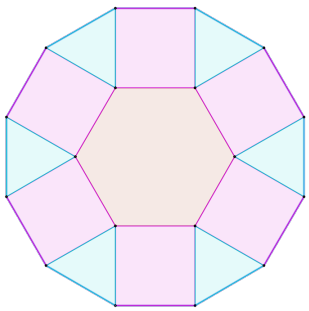


Figura 13.35. Um ladrilhamento do dodecágono regular.

Problema 13.8.36. Um ladrilhamento do plano pode ser obtido com regiões congruentes a um trapézio isósceles? Quais as condições sobre o trapézio para que isso seja possível?

Problema 13.8.37. A área de um polígono $P_1P_2P_3\ldots P_n$ em função das coordenadas de seus vértices $P_i = (x_i, y_i)$ é:

$$|x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4 + \ldots + x_ny_1 - x_2y_1 - x_3y_2 - x_4y_3 - \ldots - x_1y_n|$$

Essa expressão, às vezes denominada *fórmula de Gauss*, pode ser memorizada mais facilmente se usarmos a notação de um tipo de "determinante estendido"

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n & x_1 \\ y_1 & y_2 & \ldots & y_n & y_1 \end{vmatrix} = x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4 + \ldots + x_ny_1 - x_2y_1 - x_3y_2 - x_4y_3 - \ldots - x_1y_n$$

Observe ainda que se os pontos P_1, P_2, ..., P_n forem nomeados no sentido anti-horário, esse determinante é positivo, de modo que se pode retirar os sinais de valor absoluto na fórmula acima.

Problema 13.8.38. Demonstre que todo poligrama regular não composto, segundo a Definição 13.41, tem circunferência circunscrita. E quanto poligramas regulares compostos?

Problema 13.8.39. Demonstre que todo poligrama regular não composto tem circunferência inscrita, e seu centro é o mesmo do da circunscrita.

Problema 13.8.40. Na Figura 13.36 vemos o desenho de um pentagrama regular $\{5/2\}$ inscrito em uma circunferência. **a)** Explique por que os triângulos AFG, BGH, etc, são isósceles. **b)** Ache as medidas $\theta = m(\angle CAD)$ e $\alpha = m(\angle AFE)$. **c)** Qual é a medida do lado do pentagrama em função do raio R da circunferência?

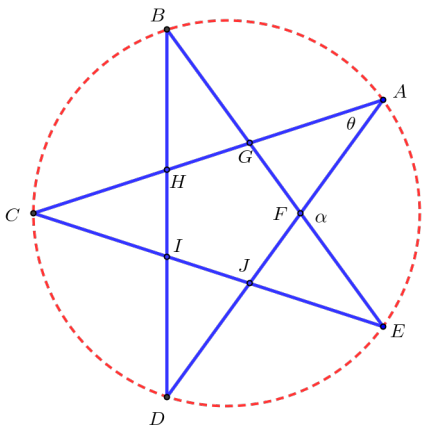


Figura 13.36. Propriedades do pentagrama regular $\{5/2\}$.

Problema 13.8.41. Sobre o octograma regular $\{8/3\}$, faça você mesmo um desenho. Nomeie seus oito vértices usando letras, liste seus oito lados e seus oito ângulos. Calcule: **a)** a medida de seus ângulos; **b)** a medida de seus ângulos externos, determinados nos vértices reentrantes de sua representação côncava; **c)** a medida ℓ de seus lados em função do raio R da circunferência circunscrita. Demonstre que: **d)** os vértices reentrantes de sua representação côncava formam um octógono regular; **e)** o polígono formado no interior do octograma $\{8/3\}$ é também um octógono regular. Calcule os lados desses dois octógonos em função de ℓ e de R.

13.9 Temas para investigação

Tema 13.9.1. Na Figura 13.37, à esquerda, vemos um *polígono estrelado* de 5 pontas. Seus ângulos internos estão indicados com os símbolos 1, 2, 3, 4 e 5. **a)** Um livro de Geometria traz o desenho da Figura 13.37, à direita, sem nenhuma explicação. Dê o enunciado do teorema que está sendo provado. Demonstre o teorema usando a sugestão do desenho. **b)** Investigue resultados similares para outros polígonos estrelados.

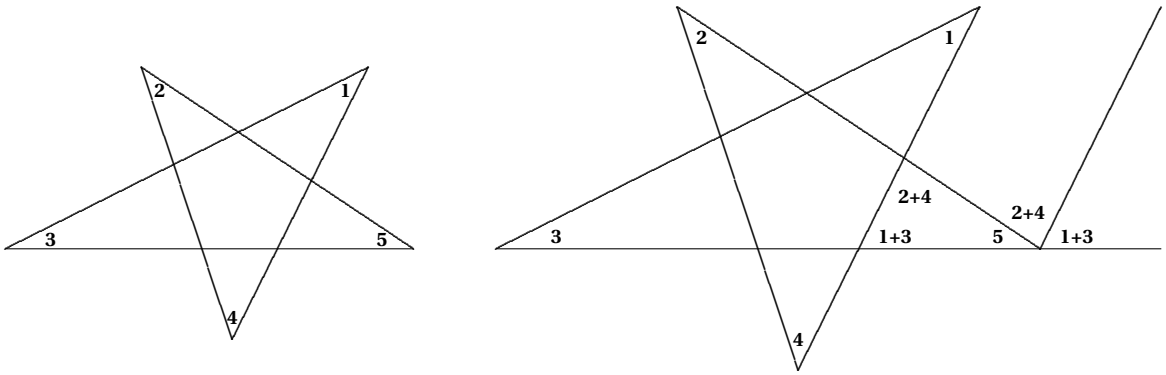


Figura 13.37. Um Teorema sobre polígonos estrelados.

Tema 13.9.2. Investigue propriedades das diagonais de um n-ágono regular qualquer. E quanto às suas medidas?

Tema 13.9.3. **a)** Para fins de investigação, faça uma tabela relacionando cada $n \geq 3$ com o ângulo e o ângulo central do n-ágono regular. Uma sugestão é considerar $n \leq 15$. Adote valores exatos inteiros e fracionários, e também valores decimais aproximados quando a fração for irredutível. **b)** Essa tabela sugere propriedades gerais?

Tema 13.9.4. **a)** Desenhe um recobrimento do plano usando quadrados de dois tipos (isto é, com lados diferentes). **b)** Desenhe pelo menos dois ladrilhamentos diferentes do plano usando losangos não quadrados. **c)** Desenhe um ladrilhamento do plano usando quadrados e losangos não quadrados. **d)** Desenhe pelo menos dois ladrilhamentos diferentes do plano usando paralelogramos que não sejam quadrados, retângulos ou losangos. **e)** Encontre um polígono não convexo com que se pode ladrilhar o plano. **f)** É possível ladrilhar o plano usando a versão côncava de poligramas regulares? quem sabe combinando com algum polígono regular.

Tema 13.9.5. Podemos formar anéis de polígonos regulares em volta de outro polígono regular. A Figura 13.38 mostra um exemplo de pentágonos regulares em volta de um decágono regular. Verifique o acerto do desenho. Ache outros casos.

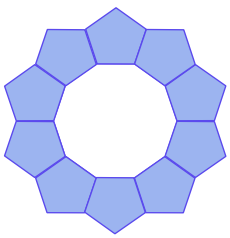


Figura 13.38. Anel de polígonos regulares.

Tema 13.9.6. Tendo em conta o Problema 13.8.35, investigue outros polígonos regulares que podem ser ladrilhados por polígonos regulares.

Tema 13.9.7. Investigue para quais valores de n é verdadeira a afirmação: "se o polígono é equiângulo então é equilátero". Investigue também a recíproca.

Tema 13.9.8. A Figura 13.39 mostra um ladrilhamento do plano com pentágonos regulares e triângulos. Se considerarmos apenas os pentágonos, é um "quase-ladrilhamento". Ele cobre

$$\frac{5-\sqrt{5}}{3} \approx 0,92131 \approx 92\%$$

do plano. Investigue como se pode verificar essa afirmação. É o ladrilhamento com maior densidade de área conhecido usando apenas pentágonos regulares congruentes.

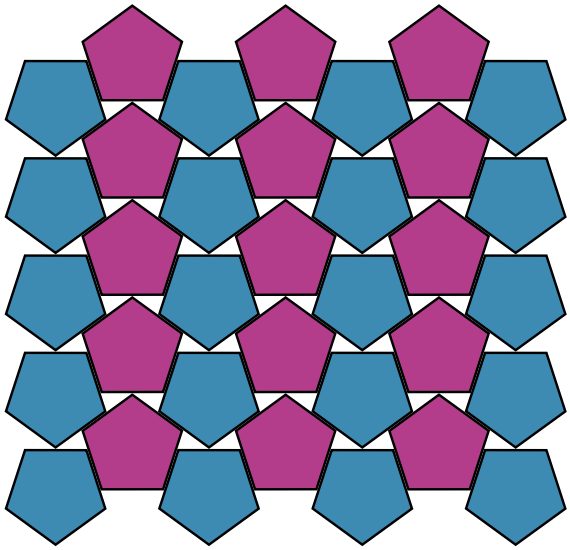


Figura 13.39. Ladrilhamento com pentágonos regulares e triângulos.

Tema 13.9.9. No texto, na lista de problemas, foram apresentadas as expressões algébricas das medidas dos elementos do n-ágonos regulares para $n = 5$, 6, 8 e 10. Veja como completar a lista pesquisando o mesmo para $n = 3$, 4, 7 e 9.

Tema 13.9.10. Um hexágono convexo se diz inscrito em um triângulo quando tem três de seus lados, tomados alternadamente, contidos nos lados do triângulo. Nesse caso se diz também que o triângulo é circunscrito ao hexágono. **a)** Observe, desenhando exemplos, que um hexágono pode ser inscrito de duas formas, de uma única forma, ou de nenhuma forma. A Figura 13.40 mostra como o hexágono regular pode ser inscrito. **b)** Descubra (e justifique) condições necessárias e suficientes para que um hexágono tenha triângulo circunscrito. **c)** Investigue o que ocorre se o hexágono for equiangular. Descreva um processo para desenhar qualquer hexágono equiangular. **d)** Use esse processo para deduzir propriedades do hexágono equiangular. **e)** Investigue o que ocorre com outros polígonos.

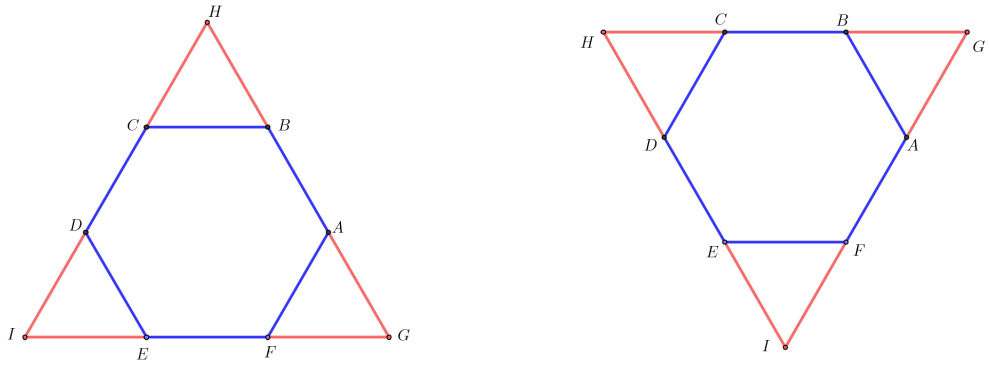


Figura 13.40. Dois modos de inscrever um hexágono regular em um triângulo.

Tema 13.9.11. Um número ilimitado de triângulos equiláteros unitários são usados para compor, por ajuntamento lado a lado, hexágonos equiangulares. Vemos, na Figura 13.41, três exemplos em que o número n de triângulos usados é $n = 6$, $n = 10$ e $n = 13$. Descubra um método de contagem para determinar os inteiros n. Obtenha outros valores de n e faça alguns desenhos.

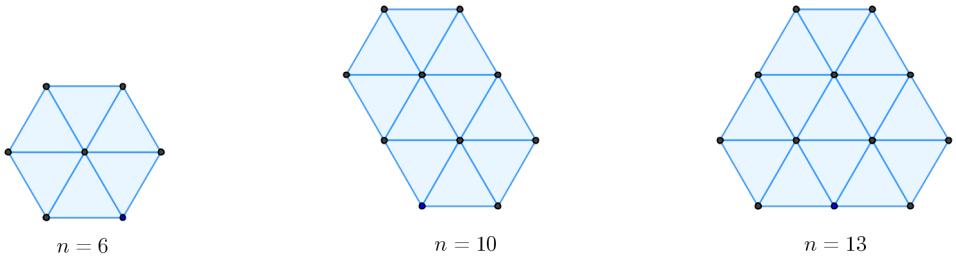


Figura 13.41. Hexágonos equiangulares construídos com triângulos unitários.

Tema 13.9.12. Na Figura 13.42 vemos uma circunferência de raio R rodeada por dez circunferências tangentes a ela exteriormente e tangentes entre si. **a)** Demonstre que essa figura é realmente possível, explique como pode ser construída, e ache um teorema relacionado. **b)** Generalize. Para quais $R > 0$ e $n \geq 3$ a circunferência de raio R pode ser rodeada por n circunferências? Generalize seu teorema.

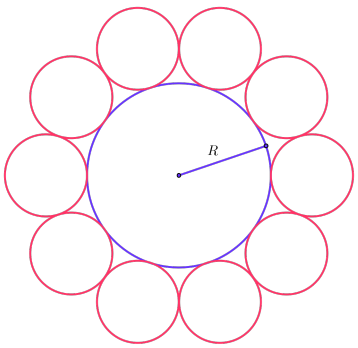


Figura 13.42. Circunferências tangentes externamente.

Tema 13.9.13. Polígonos estrelados podem ser construídos tomando-se um polígono convexo e desenhando triângulos externamente sobre seus lados. Tome os lados de n-ágonos regulares e coloque neles externamente triângulos equiláteros. Investigue propriedades dessas figuras. Faça um desenho usando os lados de um pentágono regular.

Tema 13.9.14. Construa poligramas regulares como $\{9/q\}$ e $\{10/q\}$. Estude e generalize suas propriedades para poligramas $\{p/q\}$. Dado $p \geq 3$, quantos poligramas regulares estrelados não compostos $\{p/q\}$ existem?

Tema 13.9.15. A partir do texto [2] estude várias condições equivalentes que definem convexidade de polígonos.

Tema 13.9.16. Informe-se sobre o que são os símbolos de Schläfli para polígonos. Por exemplo, o símbolo do pentágono regular é $\{5\}$.



Figura 13.43. Arte com polígonos. Desenho de Freepik.com. Figura redimensionada.

Capítulo 14

Construções com régua e compasso

14.1 Introdução

Creio ser consenso entre professores e educadores que no estudo da Geometria é de grande importância o aprendizado de técnicas de desenho. Nesse labor todos os instrumentos possíveis devem ser utilizados. Os mais comuns certamente são réguas, compassos, transferidores e esquadros, mas os estudantes podem também lançar mão de outros intrumentos para desenho de curvas, ampliação de figuras, etc. De uso mais recente e de grande importância se fazem presentes os aplicativos de desenho, especialmente aqueles dedicados à Geometria Elementar.

Por outro lado, a completa formação do futuro professor de Matemática exige um pequeno capítulo dedicado à matéria denominada "construções com régua e compasso". Consiste na realização de construções geométricas com o uso exclusivo da régua não metrizada e do compasso. Esse conteúdo tem forte apelo histórico, pois é inspirado na forma com que os antigos matemáticos gregos, durante algum tempo, construíram a Geometria. Mas, mais do que isso, esse estudo traz uma vertente especial no estudo da Geometria, aportando belas ideias e uma solicitação constante das propriedades geométricas mais detalhadas.

Neste capítulo trazemos apenas algumas pequenas pérolas desse estudo. Mais detalhes e maiores desafios podem ser obtidos de uma ampla literatura, da qual destacamos aqui os textos [57], [68] e [82].

14.2 Algumas construções iniciais

Para acompanhar nosso estudo é necessário estar munido de um compasso e de uma régua não metrizada, isto é, uma régua sem marcações, cuja única finalidade é desenhar a reta por dois pontos dados, ou o segmento que os une. O compasso, por sua vez, se destina não apenas a desenhar circunferências, mas também a transportar a medida de um segmento dado.

Começamos logo com um exemplo bem básico, e aproveitamos para explicar as três fases de uma construção com régua e compasso.

Exemplo 14.1. Construir a mediatriz de um segmento dado.

Protocolo da construção: 1. Abra o compasso com um raio um pouco maior do que a metade do segmento e fixe. 2. Com o centro num extremo do segmento, trace arcos dos dois lados do segmento. 3. Faça o mesmo no outro extremo do segmento, traçando arcos que intersectam os anteriores. 4. Marque os pontos de interseção nos dois lados do segmento, e trace a reta por eles. Ela é a mediatriz procurada.

Desenho: As etapas 2, 3 e 4 estão ilustradas na Figura 14.1.

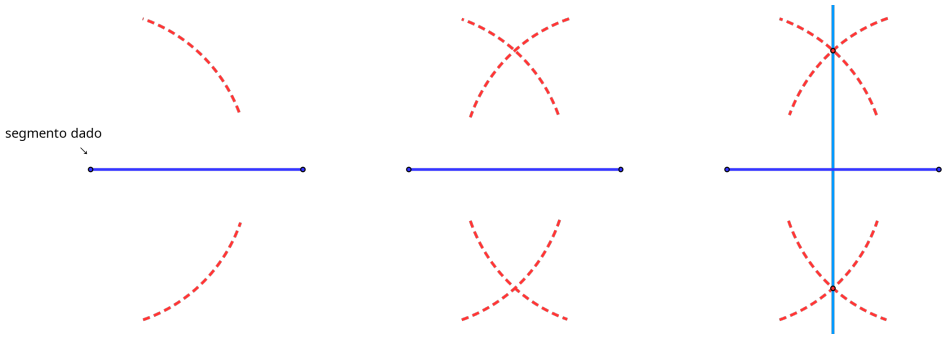


Figura 14.1. Três etapas da construção da mediatriz de um segmento dado.

Justificativas: Foi usada a caracterização da mediatriz de um segmento como o lugar geométrico dos pontos do plano que são equidistantes dos seus extremos. Esse lugar geométrico é uma reta, e para determiná-la bastam dois pontos. Esses pontos foram obtidos pela interseção de duas circunferências de mesmo raio e com centros nos extremos do segmento. Portanto esses pontos são equidistantes dos extremos. O raio das circunferências deve ser maior do que a metade do segmento para que elas tenham dois pontos de interseção. □

Os desenhos deste capítulo são elaborados com o aplicativo Geogebra, que imita muito bem as construções com régua e compasso.

Observamos que a ideia do Exemplo 14.1 pode ser utilizada também para:

Obter o ponto médio de um segmento. Basta seguir as mesmas etapas, sem a necessidade de desenhar a mediatriz. Usando a régua pode ser marcado o ponto médio.

Obter a reta perpendicular a um segmento por um ponto nele contido. Com a ponta do compasso no ponto, marca-se um segmento do qual o ponto dado é ponto médio. Então a mediatriz desse novo segmento é perpendicular a ele pelo ponto dado. Se o ponto dado estiver no extremo do segmento ou muito próximo dele, o segmento original pode ser prolongado.

Obter a reta perpendicular a um segmento por um ponto fora dele. Com a ponta do compasso no ponto, desenha-se um arco que intersecta o segmento em dois pontos. Esses dois pontos são equidistantes do ponto dado e formam um novo segmento cuja mediatriz é a reta procurada.

Obter a reta paralela a uma reta dada por um ponto dado. Basta aplicar duas vezes o protocolo da perpendicular.

Exemplo 14.2. Dado um segmento, desenhar o quadrado que o tem como diagonal.

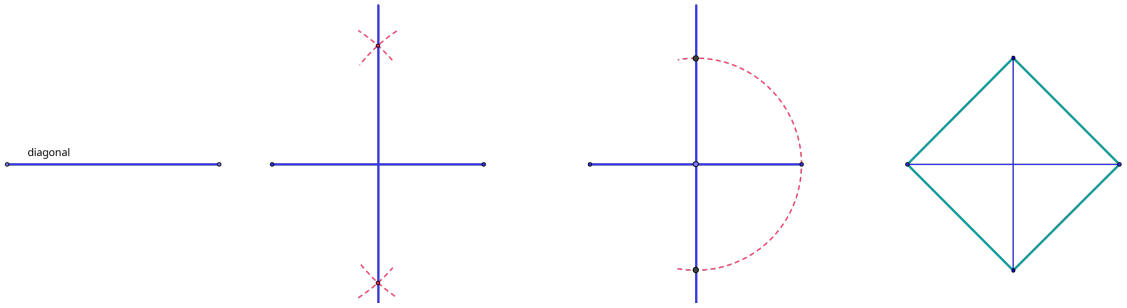


Figura 14.2. Construção do quadrado dada uma diagonal.

Protocolo da construção: 1. Desenhar a mediatriz do segmento. 2. Usando o compasso marcar nessa mediatriz pontos equidistantes do ponto de encontro, obtendo um segundo segmento congruente ao segmento dado. 3. Unir com segmentos os extremos dos dois anteriores. A figura formada é um quadrado e o segmento original é uma diagonal

Desenho: As etapas 1, 2 e 3 estão ilustradas na Figura 14.2.

Justificativas: Foi usada a propriedade de que, num quadrado, as diagonais são perpendiculares e se cortam ao meio. □

Essas mesmas ideias podem ser usadas para construir ângulos de 45°. Mas para isso é melhor aprendermos a desenhar a bissetriz de um ângulo.

Exemplo 14.3. Construir a bissetriz de um ângulo dado.

Protocolo da construção: 1. Com centro no vértice do ângulo desenhar um arco de circunferência, determinando nos lados do ângulo pontos equidistantes do seu vértice. 2. Construir a mediatriz do segmento determinado pelos dois pontos. Ela é a bissetriz.

Desenho: As etapas 1 e 2 estão ilustradas na Figura 14.3.

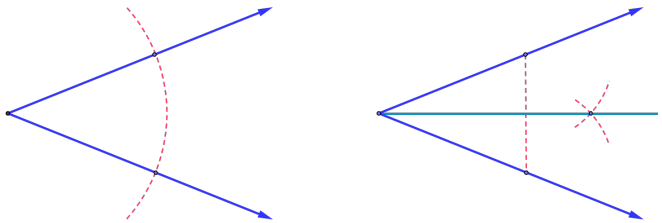


Figura 14.3. Construção da bissetriz de um ângulo arbitrário dado.

Justificativas: A mediatriz passa pelo vértice do ângulo pois ele é equidistante dos extremos do segmento. São formados dois triângulos retângulos que são congruentes pelo caso *HC*. Portanto a mediatriz divide o ângulo em dois de mesma medida, e assim ela é a bissetriz. □

Exemplo 14.4. Construir as duas tangentes a uma circunferência por um ponto em seu exterior.

Protocolo da construção: 1. Desenhar o segmento ligando o centro O da circunferência $\mathscr{C}$ ao ponto P no seu exterior e determinar seu ponto médio M. 2. Desenhar a circunferência auxiliar com centro em M passando por O. 3. Marcar os pontos T_1 e T_2 de encontro das duas circunferências. Esses são os pontos de tangência. Desenhar as retas por P e por esses pontos.

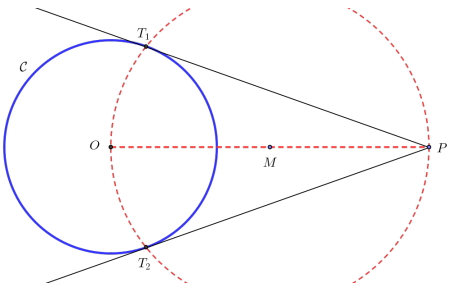


Figura 14.4. Construção das tangentes a uma circunferência por um ponto em seu exterior.

Desenho: A construção está ilustrada na Figura 14.4.

Justificativas: Sabemos que uma reta tangente a uma circunferência num ponto é perpendicular ao raio desse ponto. A circunferência auxiliar passa por P. Então os ângulos OT_1P e OT_2P inscrevem semicircunferências, e assim são retos. □

Exemplo 14.5. Desenhar a reta paralela a uma reta dada por um ponto dado.

Protocolo 1: 1. Desenhar a reta perpendicular à reta dada pelo ponto. 2. desenhar a reta perpendicular a essa última pelo ponto. Esse método já foi comentado.

Protocolo 2: Sejam r a reta e P o ponto. Fixamos uma abertura suficiente no compasso e traçamos três arcos de circunferências. 1. Arco $\mathscr{C}_1$ com centro em P, marcando um ponto A em r. 2. Arco $\mathscr{C}_2$ com centro em A, marcando um ponto B em r. 3. Arco $\mathscr{C}_3$ com centro em B, intersectando $\mathscr{C}_1$ num ponto Q. A paralela é $\overleftrightarrow{PQ}$.

Desenho: A construção está ilustrada na Figura 14.5.

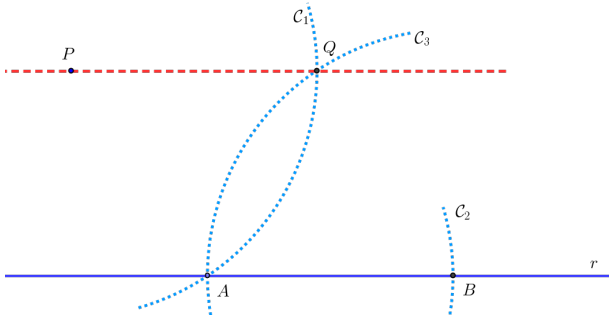


Figura 14.5. Construção da paralela: 2º método.

Justificativas: Como as três circunferências têm o mesmo raio, foi construído um losango, que é um paralelogramo, e assim lados opostos são paralelos. □

Observação 14.6. Na resolução de problemas que exigem construções em várias etapas, nem sempre apresentamos no desenho todos os passos. O objetivo é evitar "poluir" muito. Construções típicas que costumamos omitir são aquelas vistas até aqui: perpendiculares, mediatrizes, ponto médio, paralelas. O estudante, depois de haver aprendido essas construções, pode lançar mão de esquadros e outros intrumentos para economizar trabalho e evitar um desenho com muitos traços. Ângulos podem ser transportados com régua e compasso, mas na rotina pode ser usado um transferidor. Confira o Problema 14.3.1.

Exemplo 14.7. Desenhar o triângulo ABC dados o lado AB, o ângulo $\angle BAC$ de medida θ e a altura h_c relativa ao vértice C.

Protocolo: 1. Transportar o segmento AB para o lugar em que se deseja desenhar o triângulo, e construir o ângulo $\angle BAX$ congruente ao ângulo dado. 2. Do mesmo lado da reta $\overleftrightarrow{AB}$ em que se situa o lado AX do ângulo, construir a reta r paralela a $\overleftrightarrow{AB}$ à distância h_c. 3. Marcar o ponto de encontro C de r com $\overrightarrow{AX}$. Então ABC é o triângulo procurado.

Desenho: A Figura 14.6 traz os elementos dados e a construção.

Justificativas: Como a distância entre as paralelas é constante, a distância de C a $\overleftrightarrow{AB}$ é h_c, e obtivemos assim o triângulo pedido. □

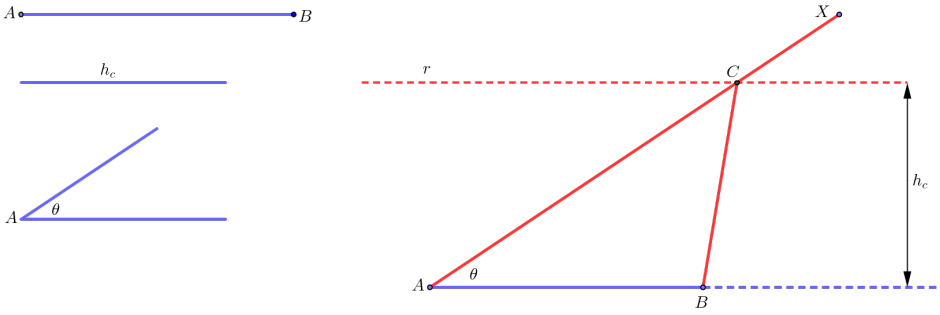


Figura 14.6. Construção de triângulo.

Exemplo 14.8. Construir um triângulo dado um lado e o ângulo oposto com medida $< 90°$.

Protocolo: 1. Desenhar o lado fornecido no lugar em que se deseja construir o triângulo. Chamamos esse lado de AB. 2. Transportar o ângulo dado com vértice em A e um lado contendo AB. Chamamos esse ângulo de $\angle BAX$. 3. Construir o arco capaz do ângulo dado sobre AB. Tomando qualquer ponto C do arco, o triângulo ABC satisfaz às condições apresentadas.

Desenho: A Figura 14.7 traz os elementos dados e a construção.

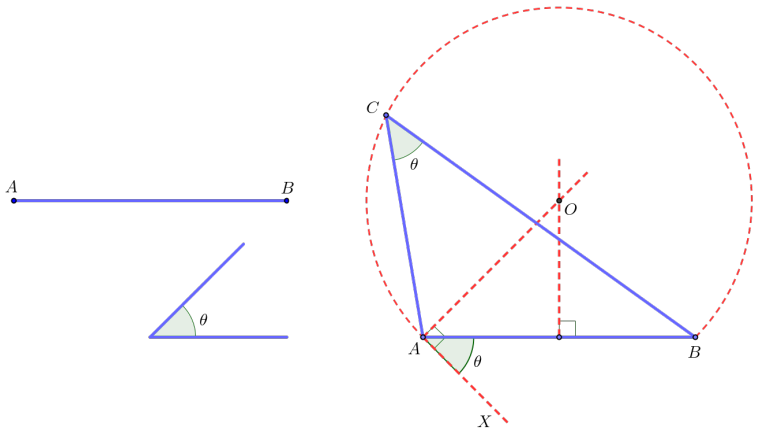


Figura 14.7. Construção de triângulo com arco capaz.

Justificativas: A construção do arco capaz foi explicada na Seção 11.11. Existem infinitas soluções. □

14.3 Problemas

Problema 14.3.1. Dado um ângulo, explique como ele pode ser transportado para outro lugar na folha de desenho.

Problema 14.3.2. **a)** Construa um triângulo equilátero dado seu lado. **b)** Construa um triângulo equilátero dada sua altura.

Problema 14.3.3. **a)** Construa um triângulo isósceles dadas sua base e sua altura. **b)** Construa um triângulo isósceles dados seu lado lateral e o ângulo do vértice. **c)** Construa um triângulo isósceles dados sua base e o ângulo do vértice.

Problema 14.3.4. Construir ângulos com medida 60°, 30°, 15°, 45°, 75°, 120° e 135°.

Problema 14.3.5. Construir um triângulo dados um lado, o ângulo oposto com medida $< 90°$ e um ângulo adjacente com medida 135°.

Problema 14.3.6. Construir um triângulo dados um lado e o ângulo oposto com medida 105°.

Problema 14.3.7. Construir um triângulo ABC dados os lados $a = BC$ e $b = AC$ e o ângulo $\hat{B}$ oposto a AC.

Problema 14.3.8. Construir um triângulo ABC dados o lado $a = BC$, a altura h_a e a mediana m_a relativas a esse lado.

Problema 14.3.9. Construir um paralelogramo no qual o ângulo obtuso seja o dobro do agudo.

Problema 14.3.10. Construir um trapézio $ABCD$ dados todos os lados: as bases paralelas $a = AB$ e $b = CD$, e os lados laterais $c = BC$ e $d = AD$. Quais são as condições sobre esses valores para que exista uma solução?

14.4 Aritmética das construções geométricas

Sim, existe uma aritmética no conjunto dos segmentos de reta que pode ser manejada com régua e compasso. Talvez seja por isso que os antigos matemáticos gregos usavam esse recurso com muito entusiasmo.

Dado um segmento AB, podemos multiplicá-lo e dividi-lo por qualquer inteiro positivo n, obtendo os segmentos nAB e AB/n. Dados os segmentos AB e CD, podemos somá-los e subtrair o menor do maior. É também possível multiplicá-los e existe uma forma de divisão. Dado um segmento, é possível extrair sua raiz quadrada. Vejamos como funciona.

A adição de segmentos assim como a multiplicação por um inteiro positivo se faz por justaposição em uma reta. A subtração, por sua vez, se obtém cortando do segmento maior um segmento equivalente ao menor. Confira a Figura 14.8.

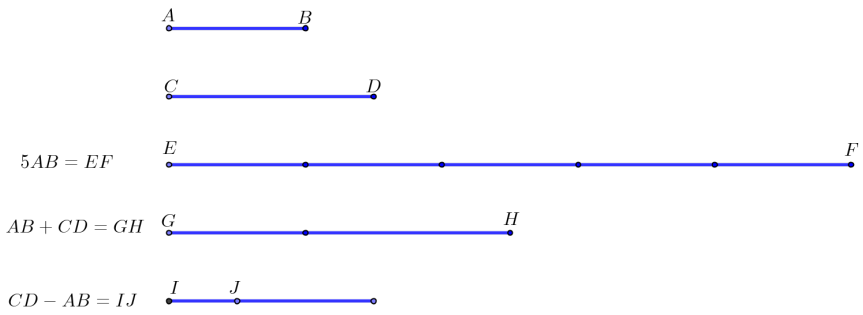


Figura 14.8. Adição e subtração de segmentos e multiplicação por um inteiro positivo.

A divisão de um segmento por um inteiro positivo n, também referida como "divisão de um segmento em n partes iguais", exige o aporte da Teoria das Semelhanças. Vemos na Figura 14.9

como o segmento AB é repartido em 5 partes iguais. A semirreta $\overrightarrow{AX}$ é provisória. Usando o compasso, nela marcamos os pontos X_i, $1 \le i \le 5$, igualmente espaçados. Desenhamos o segmento BX_5, e traçamos paralelas a ele por todo X_i, $1 \le i \le 4$. Essas paralelas determinam em AB quatro pontos. Pelo Teorema de Tales 10.22 esses quatro pontos repartem AB em cinco segmentos congruentes.

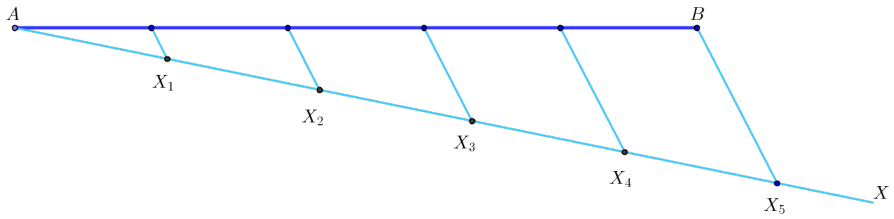


Figura 14.9. Divisão de um segmento em partes iguais.

A mesma Teoria de Semelhança é usada para multiplicar e dividir segmentos. A Figura 14.10 ilustra como é obtido o produto e a divisão dos segmentos AB e CD. Nesses procedimentos é dado, antes de tudo, um segmento referência, que faz o papel de unidade.

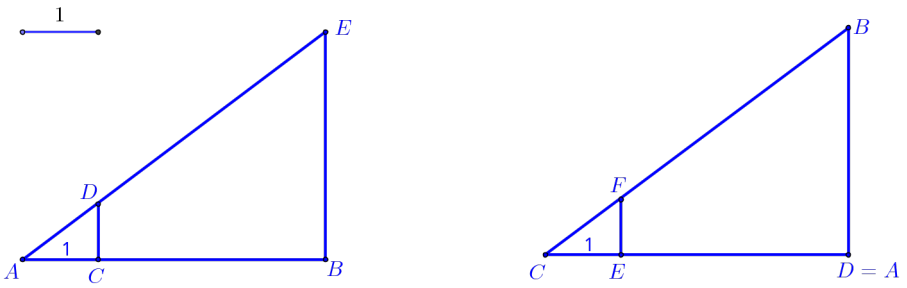


Figura 14.10. Multiplicação e divisão de segmentos.

Na Figura 14.10, à esquerda, vemos como é obtido o produto $AB \times CD$. Começamos desenhando AB. Na semirreta $\overrightarrow{AB}$ marcamos o ponto C tal que $AC = 1$ (o ponto C pode estar entre A e B ou não). Traçamos o segmento CD perpendicular a $\overrightarrow{AB}$. Seja E o ponto de encontro entre a semirreta $\overrightarrow{AD}$ e a reta perpendicular a $\overrightarrow{AB}$ por B. Temos $ABE \sim ACD$, e

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CD} \quad \Rightarrow \quad BE = AB \cdot CD.$$

Definimos $AB \times CD = BE$.

A Figura 14.10, desenho da direita, por sua vez, ilustra como é obtida a divisão $AB \div CD$. Desenhamos $AB \perp CD$ identificando $A = D$. Marcamos em $\overrightarrow{CD}$ o ponto E tal que $CE = 1$ (E pode ou não estar entre C e D). O ponto F é encontro da perpendicular a $\overrightarrow{CD}$ por E com $\overrightarrow{CB}$. Temos $CEF \sim CAB$ e

$$\frac{EF}{CE} = \frac{AB}{CA} \quad \Rightarrow \quad \frac{EF}{CE} = \frac{AB}{CD} \quad \Rightarrow \quad EF = \frac{AB}{CD}.$$

Definimos $AB \div CD = EF$.

Vejamos agora como obter a raiz quadrada de segmentos. É dado um segmento unitário e um segmento AB do qual desejamos a raiz quadrada. Acompanhando pela Figura 14.11, desenhamos o segmento AB, e na semirreta $\overrightarrow{AB}$ marcamos o ponto C tal que $A - B - C$ e $BC = 1$. Determinamos o ponto médio M de AC e desenhamos uma semicircunferência com centro nesse ponto e

diâmetro AC. O ponto D é marcado no encontro dessa semicircunferência com a perpendicular a AC por B. Notemos que ACD é retângulo em D, pois $\hat{D}$ inscreve uma semicircunferência. Sejam $h = BD$, $m = AB$ e $n = BC$. Da Proposição 10.26 temos $h^2 = mn$. Isso significa $\sqrt{AB} = BD$.

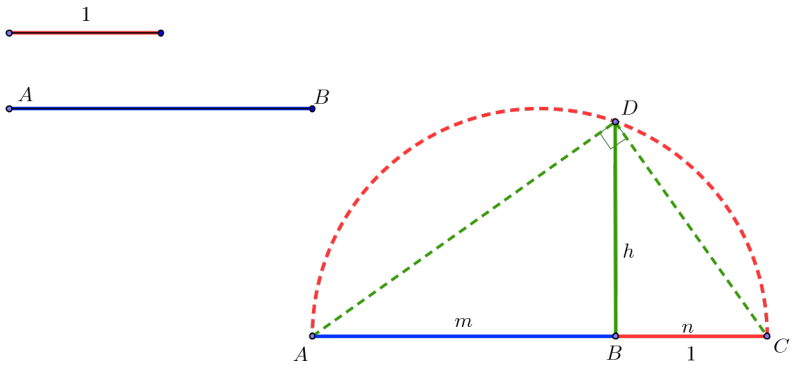


Figura 14.11. Obtenção da raiz quadrada de um segmento.

Observações 14.9. (i) Em nosso contexto, quando se pede, por exemplo, construir $\sqrt{6}$, isso deve ser interpretado da seguinte forma: determina-se um segmento unitário UV, depois o segmento $AB = 6UV$, e em seguida se aplica o procedimento explicado acima para obter $\sqrt{AB}$. Um expediente prático consiste em adotar uma régua metrizada em cm e assumir a unidade de 1 cm.
(ii) Certas raízes quadradas podem ser obtidas com mais facilidade com o Teorema de Pitágoras. Por exemplo, para construir $\sqrt{5}$ podemos desenhar um triângulo retângulo com catetos de medidas 1 e 2. Sua hipotenusa é um segmento de medida $\sqrt{5}$.
(iii) O Teorema de Tales 10.22 tem uso mais geral no desenho geométrico. Dados segmentos de medidas a, b e c, construímos o esquema da Figura 14.12, obtendo o segmento de medida x. Temos $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$. Nessa relação x chama-se "4ª. proporcional de a, b e c", um nome tradicional.

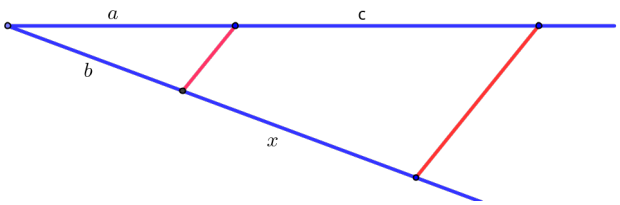


Figura 14.12. Obtenção da quarta proporcional.

Observação 14.10. Iniciando com um segmento unitário UV, podemos, com o método da régua e compasso, construir os racionais positivos e suas raízes quadradas. Pode-se perguntar se é possível construir outros números, como $\sqrt[3]{2}$. Não é possível. Fazemos comentários sobre esse assunto no final do capítulo.

14.5 Problemas

Problema 14.5.1. Dados segmentos de medidas a e b, com $a > b$, construa o de medida $\sqrt{a^2 - b^2}$.

Problema 14.5.2. Dados segmentos de medidas a, b e c, construa o de medida $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

Problema 14.5.3. Dados segmentos de medidas a e b, construa o de medida $\sqrt{a^2+3b^2}$.

Problema 14.5.4. Dados segmentos de medidas a e b, construa sua média geométrica $\sqrt{ab}$.

Problema 14.5.5. Dado o segmento unitário, construa o de medida $\sqrt{2+\sqrt{5}}$.

14.6 Construção de alguns polígonos regulares

Já sabemos construir com régua e compasso dois polígonos regulares, o triângulo equilátero e o quadrado. Para isso usamos métodos que funcionam particularmente para cada um deles.

Um método mais geral deriva do fato de que todo polígono regular pode ser inscrito em uma circunferência. Assim, o polígono de n lados pode, a princípio, ser obtido tomando-se uma circunferência e dividindo-a em n partes iguais. Ou, de forma equivalente, construindo o ângulo de $2\pi/n$ radianos (ou $360°/n$) com vértice no centro da circunferência. Esse ângulo determina um arco que pode ser reproduzido com o compasso.

Em determinadas situações alguma economia no movimento da régua e compasso pode ser obtida. Para desenhar um quadrado inscrito em uma circunferência basta construir dois diâmetros perpendiculares. Sabemos que o lado do hexágono regular tem a mesma medida que o raio da circunferência circunscrita, de modo que basta abrir o compasso na medida do raio e marcar nela seis pontos. Para obter o triângulo equilátero inscrito podemos sim construir o ângulo de $360°/3 = 120°$, mas é mais fácil marcar os vértices de um hexágono regular e depois uni-los alternadamente.

Confira ilustração dessas ideias na Figura 14.13.

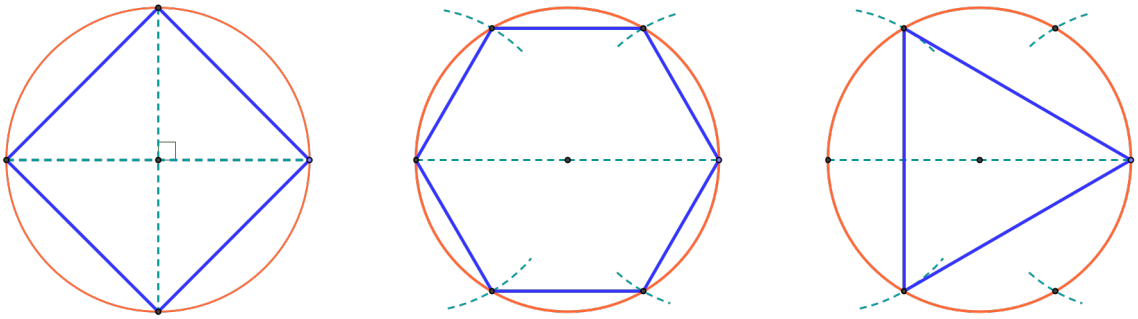


Figura 14.13. Construção do quadrado, do hexágono regular e do triângulo equilátero inscritos.

Uma construção clássica é a do decágono regular. Fazemos isso no

Exemplo 14.11. Construir um decágono regular inscrito em uma circunferência.

Protocolo: 1. Desenhar uma circunferência de centro O e raio R, e dois diâmetros perpendiculares AB e CD. 2. Com centro no ponto médio M do raio OA, traçar um arco de circunferência de D ao raio OB, marcando nele o ponto E. 3. A medida do lado do decágono regular é OE.

Desenho: A Figura 14.14 ilustra a construção.

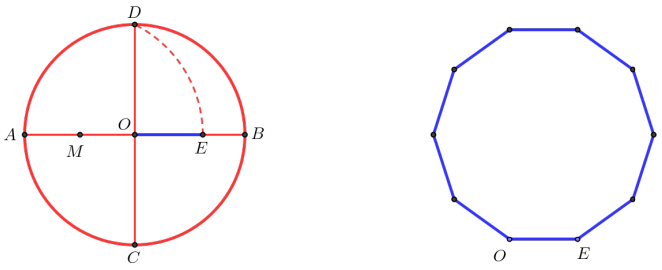


Figura 14.14. Construção do decágono regular.

Justificativas: Sejam $a = MD = ME$ e $x = OE$. Temos $a = MO + x = \frac{R}{2} + x$. Por outro lado, $a^2 = R^2 + (R/2)^2 = \frac{5R^2}{4}$, e temos $a = \frac{R}{2}\sqrt{5}$. Igualando vem $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}R$. Aplicando o resultado do Problema 13.8.25 vemos que x é o lado do decágono regular. □

Para construir o pentágono regular basta, em uma circunferência, dispor os vértices do decágono regular e uni-los alternadamente. Se quiser desenhar o pentágono diretamente, na Figura 14.14, à esquerda, o segmento DE é congruente ao seu lado.

Sempre que soubermos construir com régua e compasso um polígono regular de n lados, podemos obter o de $2n$ lados, bastando para isso desenhar a bissetriz de seu ângulo central. Outra propriedade é que se os polígonos regulares com p e q lados podem ser construídos, sendo $\text{mdc}(p,q) = 1$, então pode ser construído o de pq lados. Assim podemos construir os polígonos regulares de 2^n lados, de $2^n \cdot 3$ lados, de $2^n \cdot 5$ lados e de $2^n \cdot 15$ lados, e eventualmente outros que não comentamos aqui.

Entretanto, descobriu-se que nem todos os polígonos regulares podem ser construídos, e os casos com menor número de lados são: o heptágono, o eneágono e o undecágono.

14.7 Números construtíveis

Atualmente denominamos *número construtível* àquele que é medida de algum objeto geométrico que pode ser desenhado com régua e compasso com um número finito de passos. Partindo de um segmento estabelecido como unidade, todos os números racionais positivos são construtíveis. O número irracional $\sqrt{2}$ também é pois é medida da diagonal de um quadrado unitário.

Um problema bastante popular em tempos antigos era: dado um quadrado de área 1, construir um quadrado com o dobro da área. A solução pode ser obtida construindo-se um quadrado sobre a diagonal do primeiro. Ainda na antiguidade o problema que lhe seguiu foi: dado um cubo de volume 1, construir um cubo com o dobro do volume. Esse problema testou os limites da teoria vigente, e ficou sem solução por mais de 2000 anos. Equivale a saber se $\sqrt[3]{2}$ é construtível.

Como vimos é fácil bissectar um ângulo, mas a trissecção de um ângulo qualquer desafiou os matemáticos por muito tempo. Com a compreensão da existência do número π abriu-se também a questão da sua construtibilidade. Do ponto de vista da Geometria equivale a retificar a circunferência ou quadrar o disco. Outro problema é o da construção de polígonos regulares como o heptágono, questão que também permaneceu em aberto por mais de 2 milênios.

Vale observar que foi difícil demonstrar que esses problemas são insolúveis. O fato de centenas de estudiosos tentarem construir esses números e polígonos com régua e compasso e falharem não é uma comprovação de que eles não são construtíveis. A constatação da negativa exigiu o aporte de novas teorias. Foi necessária a algebrização da geometria com o uso de coordenadas

cartesianas e o desenvolvimento de novos métodos da Álgebra e da Análise. Um resultado chave foi a compreensão de que os números construtíveis são algébricos de grau 2^n, $n \geq 0$.

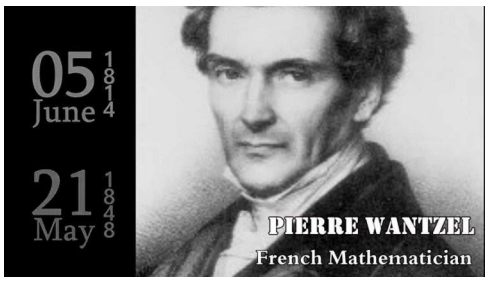


Figura 14.15. Pierre Laurent Wantzel foi um matemático francês conhecido por ter resolvido dois dos famosos problemas da antiguidade: a não construtibilidade de $\sqrt[3]{2}$ (portanto a impossibilidade de duplicar um cubo) e a impossibilidade de trissectar um ângulo arbitrário com régua e compasso. Completou ainda um teorema de Johann C. F. Gauss sobre a construtibilidade de polígonos regulares.

Essa propriedade foi demonstrada em 1837 por Pierre L. Wantzel [51]. Ela elimina a construtibilidade de $\sqrt[3]{2}$, pois esse número é algébrico de grau 3 (confira mais detalhes em [61]). Ela também está relacionada com o famoso problema da antiguidade da duplicação do cubo, cuja impossibilidade ficou assim demonstrada. Wantzel também observou com esse teorema que o ângulo (construtível) de 60° não pode ser trissectado com régua e compasso (Johann C. F. Gauss, em 1801, já havia observado isso para o ângulo de 120°).

Em 1796 F. Gauss construiu o polígono regular de 17 lados. Em 1801 formulou uma condição suficiente. Em 1837 P. Wantzel provou que essa condição era também necessária. Temos o

Teorema 14.12 (Johann C. F. Gauss 1801, Pierre L. Wantzel 1837)**.** *Um polígono regular de n lados é construtível se, e somente se, n é produto de uma potência de 2 e de primos de Fermat diferentes.*

Sobre primos de Fermat consulte [60]).

Por outro lado, se fosse possível quadrar um disco, digamos de raio 1, poderíamos obter um quadrado de área π, portanto de lado $\sqrt{\pi}$, e esse número seria construtível. Então π, como produto de números construtíveis, seria construtível, e assim seria algébrico. Mas Carl Lindemann provou em 1882 que π é transcendente, portanto não é algébrico. Isso responde negativamente à possibilidade de quadrar o disco. Vemos ainda que não é possível retificar uma dada circunferência com régua e compasso, pois o comprimento da circunferência é proporcional a π.

Para ler mais sobre números construtíveis consulte o Apêndice de [82]. Mais informações sobre números algébricos e transcendentes em [61]), Capítulos 8 e 10.



Figura 14.16. Johann Carl Friedrich Gauss, importante matemático alemão que contribuiu nas áreas de Teoria dos Números, Álgebra, Estatística, Análise, Geometria Diferencial, Geofísica, Mecânica, Eletrostática, Astronomia, Ótica, dentre outras. Teve grande influência no desenvolvimento da Matemática e de outras ciências. Considerado um prodígio, sua maior obra, *Disquisitiones Arithmetica*, foi terminada quando tinha 21 anos, em 1798. Detalhes da foto na pág. 216.

14.8 Problemas finais

Problema 14.8.1. Dado um quadrado, construir outro com o dobro da área (usando régua e compasso).

Problema 14.8.2. Explique por que, em nosso contexto, duplicar um cubo é o mesmo que construir $\sqrt[3]{2}$.

Problema 14.8.3. Foi dado um segmento AB a um estudante, e lhe foi solicitado construir a perpendicular a ele por A. O estudante desenhou alguns arcos, como na Figura 14.17, e por fim desenhou o segmento AC, afirmando ser ele perpendicular a AB. Explique o que foi feito.

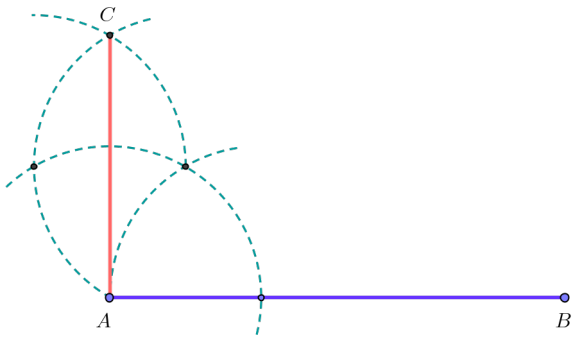


Figura 14.17. Construção diferente da perpendicular.

Problema 14.8.4. Usando régua e compasso reconstrua o quadrado do qual são conhecidos apenas os pontos médios de dois lados consecutivos, como na Figura 14.18. Siga o procedimento de 3 fases proposto em nossos exemplos: protocolo, desenho e justificativa.



Figura 14.18. Recupere o quadrado.

Problema 14.8.5. Demonstre que o segmento DE no desenho da esquerda da Figura 14.14 mede $DE = R\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$. Por outro lado, essa é exatamente a relação entre o lado do pentágono regular e o raio da circunferência circunscrita, de modo que DE é o lado do pentágono regular inscrito na circunferência.

Problema 14.8.6. Explique por que, dado um número positivo x, o seguinte protocolo permite construir o número positivo y, com $y < x$, de modo que o retângulo de lados x e y seja áureo. A definição de retângulo áureo está no Problema 10.5.24.

Protocolo: Construa um triângulo retângulo ABC com catetos $AB = x$ e $BC = x/2$. Marque na hipotenusa AC um ponto G tal que $CG = x/2$. Então $AG = y$.

Faça um desenho usando régua e compasso. Prove que a razão x/y desse retângulo é o número áureo.

Problema 14.8.7. Reconstrua um triângulo dados os pontos médios de seus três lados.

Apêndice A

Respostas e sugestões

Observações: Nem sempre as respostas dadas estão completas. Fique atento ao enunciado do problema para ver se é necessário completar. Muitas vezes não apresentamos nenhum argumento, o que significa que ficou por conta do estudante. Portanto, muitas respostas devem ser vistas apenas como dicas. Lembramos que, na resolução de um problema, apenas encontrar a resposta correta não é suficiente. O processo de descoberta e uma justificativa adequada são muito importantes, e o estudante deve aprender a descrevê-los. Examine bem os exemplos que demos no texto, eventualmente eles podem servir de inspiração.

Problemas 8.9

8.9.1 A resposta correta é a).
8.9.2 Lembrete: a soma dos termos de uma progressão geométrica com primeiro termo igual a 1 e razão x é $1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n=\frac{x^{n+1}-1}{x-1}$.
8.9.3 A proposta do estudante não está correta. Escreva uma proposição condicional correta.
8.9.4 Lembrete: os números naturais são zero e os inteiros positivos.
8.9.5 Se $\sqrt{2}$ é um número real cujo quadrado é 2 então $\sqrt{2}$ não é racional.
8.9.6 Faça você mesmo, pode ser divertido.
8.9.7 Ao construir uma afirmação completa, considere qualquer número real a.
8.9.8 A contrapositiva da afirmação 1 é igual à recíproca da afirmação 2, e a contrapositiva da afirmação 2 é igual à recíproca da afirmação 1.
8.9.9 Chame as letras de a, b, c, etc. Descubra todas as letras e todas as palavras, resolvendo a teoria por completo.
8.9.10 O estudante não argumentou corretamente.
8.9.11 Para fazer outra conjectura, observe como são os divisores de n^2+8 para n ímpar e não múltiplo de 3.

Problemas 9.3

9.3.1 Por exemplo, o ponto abstrato não tem extensão, mas no desenho precisa ter.
9.3.2 Examine todos os casos.
9.3.3 Uma geometria possível é a que tem como modelo os quatro vértices de um tetraedro.
9.3.4 A afirmação tenta traduzir alguns aspectos da noção espontânea que podem ter as pessoas sobre o conceito de reta, mas usa termos de difícil definição, como “entortar”, “linha”, “contínua“, “prossegue”, “lado”.
9.3.5 Mesma observação anterior.
9.3.6 A definição não é adequada, um helicóide também tem essa propriedade.
9.3.7 Fique à vontade para fazer suas tentativas.

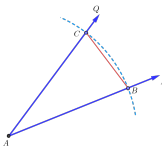
Problemas 9.5

9.5.3 Para retas são necessários os Axiomas 1 e 2.
9.5.4 Sim. Justifique.
9.5.5 Use o Teorema 9.4.
9.5.8 Além dos axiomas, use o resultado do Problema 9.5.5.
9.5.9 a) Considere um plano. c) Lembre-se de que o espaço não se reduz a um plano.

9.5.10 a) Dado um ponto A, use o axioma E1 e o Problema 9.5.5. b) e e) Comece tomando dois pontos na reta.
9.5.11 Não é possível demonstrar qualquer uma dessas propriedades. Como você justifica isso?
9.5.12 Comece considerando o plano que contém a reta e o ponto.
9.5.13 Não é possível. Como você justifica isso?
9.5.14 Use que quatro pontos não são necessariamente coplanares.
9.5.15 Dê as condições para que sejam formadas: 6 retas; 4 retas; uma única reta.
9.5.16 Use uma fórmula da Análise Combinatória.
9.5.17 Faça um desenho ou use uma fórmula.
9.5.18 Tome a reta determinada pelos dois pontos, e argumente que ela está nos dois planos. Depois demonstre que essa reta é única.
9.5.19 Para cada axioma, examine todos os casos. Existem quatro planos e seis retas.

Problemas 9.7

9.7.1 Justifique citando todos os axiomas necessários.
9.7.2 Uma forma é designar os sistemas de coordenadas de uma reta r através de funções injetivas $\sigma : r \to \mathbb{R}$.
9.7.3 b) Ache um contraexemplo.
9.7.4 Use o resultado do Problema 9.7.3.
9.7.5 a) Sejam a, b e m as coordenadas de A, B e M, respectivamente. Suponha que $a < b$ e use o Problema 9.7.3. c) Se M é um ponto médio qualquer de AB, temos $AM = MB$ e $AM + MB = AB$, logo $AM = AB/2 = MB$. Conclua que $m = (a+b)/2$.
9.7.6 Use os axiomas de medida.
9.7.7 Use os resultados do Problema 9.7.3.
9.7.8 Use extensivamente os resultados do Problema 9.7.3.
9.7.9 Considere no plano uma reta que não contém o ponto.
9.7.11 Similar ao Problema 9.7.10.
9.7.12 a) Considere na reta um sistema de coordenadas no qual a coordenada do centro da circunferência seja 0.
9.7.13 No plano da circunferência, considere os pontos que estão a uma distância do centro menor do que o raio, e depois a uma distância maior.
9.7.14 Dado um diâmetro, considere um sistema de coordenadas na reta que o contém.
9.7.15 Como provar que o interior da corda está no interior da circunferência? (Cuidado com argumentos circulares!)
9.7.16 Os axiomas adotados até aqui são suficientes para demonstrar a existência de triângulos isósceles. Confira sugestão no desenho.



9.7.17 c) Use que dois pontos não formam um conjunto convexo. d) Um triângulo é formado apenas pelos seus lados, não inclui seu interior.
9.7.18 Argumente com detalhes.
9.7.20 b) No momento não é possível, falta um resultado sobre cevianas de triângulos. Qual é?
9.7.21 a) Use as definições de conjunto convexo e de interseção de conjuntos. b) Desenhe um contraexemplo.

Problemas 9.9

9.9.1 Fixe uma das retas e considere os semiplanos por ela determinados. Considere na outra reta um sistema de coordenadas conveniente.
9.9.2 Proceda por contradição.
9.9.4 Use o resultado do Problema 9.9.2.
9.9.5 Use o resultado do Problema 9.9.4.
9.9.6 Comece supondo $r \neq s$. Demonstre que $r \cap s = \emptyset$ procedendo por contradição,
9.9.7 Use que a interseção de conjuntos convexos é convexo.
9.9.8 Pense bem.
9.9.9 Tome uma reta transversal à origem dos semiplanos.
9.9.10 Proceda por contradição.
9.9.11 Em um plano contendo r, tome uma reta s cruzando r em O. Defina os conjuntos interseção de r com os lados de s no plano.

9.9.12 Siga a sugestão do enunciado.
9.9.13 Considere a situação da Figura 9.17, e inicie a solução construindo uma boa notação para todos os elementos.
9.9.15 Use que a interseção de conjuntos convexos é convexo.
9.9.16 Comece construindo uma boa notação e depois use que a interseção de conjuntos convexos é convexo.
9.9.17 Considere os lados de r no plano.

Problemas 9.11

9.11.1 Como conjuntos temos $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE}$, logo $\angle BAC = \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} \cup \overrightarrow{AE} = \angle DAE$.
9.11.2 $AB \cup \{C\}$.
9.11.3 Use os axiomas E11 e E12.
9.11.5 Para ver que é não vazio use o resultado do Problema 9.11.4.
9.11.6 Estabeleça as notações e use as definições de interior de triângulo e interior de ângulo.
9.11.7 Use (e cite) resultados anteriores sobre o ponto médio de um segmento e sobre existência e unicidade de perpendiculares.
9.11.8 Para justificar sua resposta, use (e cite) os axiomas de medidas de ângulos.
9.11.9 Para qualquer número real positivo ξ, podemos estabelecer que as medidas dos ângulos estão entre 0 e ξ. Com as devidas adaptações, essencialmente nada muda. O limite 180 aqui estabelecido é tradicional e inteiramente arbitrário. Pode-se notar, ademais, que 180 tem muitos divisores inteiros, o que torna mais agradável certos cálculos.
9.11.11 Observe primeiro que B e C estão em lados opostos em relação à reta $\overleftrightarrow{AD}$, do que segue que BC intersecta $\overleftrightarrow{AD}$ num ponto E interior de BC. Mostre depois que $E \in \overrightarrow{AD}$ usando o resultado do Problema 9.9.4.
9.11.12 Seja x a medida do ângulo. Use o Axioma E12 para ver que existe um ponto D tal que $m(\angle BAD) = x/2$. Prove depois que D está no interior de $\angle BAC$ e que $m(\angle BAD) = m(\angle CAD)$.
9.11.13 Use o resultado do Problema 9.11.11 (Teorema crossbar).
9.11.14 Sejam $\angle AOC$ e $\angle BOC$ ângulos tais que $A - O - B$. Observe primeiro que C está no interior do ângulo formado pelas bissetrizes. Depois faça os cálculos.

Problemas 9.13

9.13.1 Verifique a congruência de dois triângulos adequados e dela conclua o que foi pedido.
9.13.2 b) A correspondência *LALLLAL* significa que todos os lados correspondentes são congruentes assim como dois ângulos não adjacentes. Repartindo os pentágonos em três triângulos adequados é possível concluir sua congruência.
9.13.3 a) Seja $\angle BAC$ com $AB = AC$. Tome o ponto médio de BC. b) Use que o ponto médio de um segmento é único.
9.13.5 São os mesmos triângulos do Problema 9.13.4 (Figura 9.46).
9.13.6 Sim, reduz-se a casos já conhecidos.
9.13.7 Sim, reduz-se a caso já conhecido.
9.13.8 Usando um pequeno truque é possível construir um triângulo conhecendo-se um lado, a medida de um ângulo a ele adjacente e a do ângulo oposto àquele lado.
9.13.10 Use a caracterização da mediatriz.
9.13.11 Faça um desenho para esclarecer as duas afirmações.
9.13.12 Muitas vezes a unicidade das coisas é importante.
9.13.13 Primeiro faça um desenho e estabeleça a notação.
9.13.14 Novamente primeiro faça um desenho e estabeleça a notação.
9.13.15 Argumente diretamente ou use o resultado do Problema 9.13.9.
9.13.16 Considere a afirmação contrapositiva.
9.13.18 Uma ideia é tomar um ângulo $\angle ABC$ e um ponto D em seu interior.
9.13.19 Use desenhos.
9.13.20 Use desenhos. Para formalizar considere os axiomas de existência e posição, e seus teoremas.
9.13.21 Dado $ABCD$, suponha que C não está no interior do $\angle BAD$. Estude cada uma das posições possíveis de C.
9.13.22 Use contradição.
9.13.23 Se $ABCD$ é convexo, use contradição para ver que A e C estão em semiplanos opostos em relação a $\overleftrightarrow{BD}$. Para demonstrar a recíproca, use a definição de quadrilátero convexo e o resultado do Problema 9.9.2.
9.13.24 Para a afirmação direta, use os resultados dos Problemas 9.13.21 e 9.13.23. Para a afirmação reversa, use o resultado do Problema 9.13.22.
9.13.25 Para a afirmação direta, use o Teorema crossbar. Para a afirmação reversa, use os resultados dos Problemas 9.13.21 e 9.13.23.
9.13.26 Para a afirmação direta, use o Teorema croobar e o resultado do Problema 9.13.23. Para a afirmação reversa, use os resultados dos Problemas 9.13.21 e 9.13.23.

9.13.27 Use congruências. Considere os casos convexo e não convexo.

Problemas 9.15

9.15.1 Use desenhos para se orientar.
9.15.2 Dessa vez tome o ponto médio de AC.
9.15.3 Desenhe contraexemplos.
9.15.4 Use o Corolário 9.38.
9.15.5 Use o Corolário 9.38.
9.15.6 Tome uma linha auxiliar e aplique o Teorema do Ângulo Externo duas vezes.
9.15.7 Para o caso convexo, use o Teorema 9.43. Para o caso não convexo, use desenhos.
9.15.8 Depende do posicionamento do pé da altura na reta $\overleftrightarrow{BC}$.
9.15.10 Considere primeiro o caso $BM \perp AM$ ou $CM \perp AM$.
9.15.12 Estabeleça as notações e a tese. Em seguida proceda por contradição.
9.15.13 a) Proceda por contradição.
9.15.14 Proceda por contradição, e considere os dois casos possíveis.
9.15.15 A ideia mais direta é usar o resultado do Problema 9.15.14.
9.15.16 a) Proceda por contradição. b) Use o resultado do Problema 9.15.14.
9.15.17 Essas situações podem ser reduzidas a casos já considerados.
9.15.19 Para a afirmação direta use o caso de congruência *HC*.
9.15.20 Use o Teorema do Ângulo Externo e o Teorema 9.44. Essencialmente ocorrem dois casos.
9.15.21 Se a corda não passa pelo centro, use os resultados dos Problemas 9.13.11 e 9.15.20.
9.15.23 Para (i) e (ii) use o Teorema 9.47. Para (iii) esse Teorema não impede mas não garante a recíproca; use então régua e compasso, ou um aplicativo de Geometria.
9.15.24 Use o Teorema 9.37 e outras coisinhas.
9.15.25 Use o Teorema da Dobradiça.
9.15.26 Use o Teorema da Dobradiça.
9.15.27 Considere triângulos auxiliares (use um desenho).
9.15.28 a) Construa, ao lado de ABC, um triângulo ACD com $B-C-D$ e $BC = CD$.
9.15.29 Três condições devem ser verificadas.
9.15.30 Trace uma diagonal conveniente.
9.15.31 Considere triângulos convenientes.
9.15.32 Considere dois casos: (i) os pontos são colineares; (ii) os pontos não são colineares.

Problemas adicionais 9.16

9.16.1 Pessoas podem ter noções diferentes, mas o sistema axiomático deve usar a linguagem mais exata possível.
9.16.2 Como deve ser a intersecção de três retas quaisquer?
9.16.3 Estude os casos que dependem da posição de C em relação a B.
9.16.4 Os axiomas adotados até aqui não são suficientes para demonstrar a existência de triângulos equiláteros. Confira sugestão no desenho da Figura A.1. Identifique qual é a afirmação faltante.

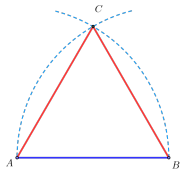


Figura A.1. Método de obtenção de triângulos equiláteros.

9.16.5 Metade do trabalho foi feito no Problema 9.9.13. Para a outra metade use o Teorema de Pasch.
9.16.6 Sugestão para começar: Dado um plano α, seja P um ponto fora dele. Considere os conjuntos: $\mathscr{A}$, formado pelo ponto P e pelos pontos $X \neq P$ do espaço tais que XP não intersecta α, e $\mathscr{B}$ formado pelos pontos $Y \neq P$ tais que YP intersecta α em um ponto interior de YP.
9.16.7 Faça um desenho e use resultados da lista de problemas dos axiomas de separação.
9.16.8 Sejam D e E pontos tais que $D-O-A$ e $E-O-C$. Considere primeiro o caso $m(\angle AOC) = 90°$, e use a unicidade da perpendicular. Suponha depois $m(\angle AOC) < 90°$ (sem perda de generalidade) e prove que $B \in \overrightarrow{OD}$ eliminando as outras possibilidades.

9.16.9 Se AB não é perpendicular a r, são duas afirmações: (i) dado $C \in AB$, sua projeção $C' \in AB$; (ii) todo $D \in A'B'$ é a projeção de um ponto de AB.
9.16.10 Use resultados sobre perpendicularismo e axiomas de medida.
9.16.11 Uma ideia é usar a definição de quadrilátero convexo.
9.16.12 Faça um desenho e considere segmentos auxiliares.
9.16.13 Faça desenhos e considere segmentos auxiliares.
9.16.15 Use cuidadosamente o resultado do Problema 9.16.14.
9.16.16 b) Três casos devem ser considerados a respeito do posicionamento do pé da altura.
9.16.17 Para a primeira parte, dada uma ceviana, use uma das desigualdades triangulares nos dois triângulos. Manipule os dados obtidos com as três cevianas. Para a segunda parte, use outra desigualdade triangular nos mesmos triângulos.
9.16.18 Inspire-se imaginando um espelho.
9.16.19 Use dois espelhos.
9.16.20 Use dois espelhos.

Temas para investigação 9.17

9.17.1 Prepare cuidadosamente as perguntas e converse com pessoas.
9.17.2 Essencialmente nada muda com essa definição alternativa de ângulo.
9.17.3 Consulte livros didáticos da escola básica.
9.17.4 Escolha uma possibilidade e investigue como fazer as demonstrações.
9.17.5 Comece com desenhos para perceber as condições necessárias.
9.17.6 Existe o ponto de encontro das três alturas, denominado *ortocentro*. Use o Geogebra para investigar.
9.17.7 Considere separadamente os casos convexo e não convexo.
9.17.9 Tentar não custa.
9.17.10 Suponhamos que seja válida a condição: não existem duas retas paralelas nem três retas concorrentes no mesmo ponto. Ou, como se costuma dizer, as retas estão em posição geral. Dadas t retas, o que ocorre ao acrescentarmos uma reta? Usando isso obtenha uma fórmula.
9.17.11 Faça suas definições e axiomas, e obtenha alguns teoremas.
9.17.13 Num contexto informal, usando desenhos ou varetas, uma ideia é construir triângulos retângulos isósceles diferentes e colocar um sobre o outro. No contexto formal, o que falta na teoria para uma demonstração?
9.17.14 b) Use o Geogebra para encontrar contraexemplos. Portanto esse não é um método de obtenção da trissetriz.
9.17.15 a) Use congruência. b) Se você resolveu a parte a) certamente usou um argumento que ainda não foi validado pela teoria desenvolvida até aqui.
9.17.16 Sim, foi visto no Problema 9.15.14. A construção da Figura 9.60 só depende do Axioma 12. O argumento depende do Teorema do Ângulo Externo 9.37.
9.17.17 Precisamos. Mas, estando os axiomas bem sedimentados em nossa mente, não precisamos mais citá-los.
9.17.18 Como diz o ditado, quem trabalha muito obtém recompensas.

Problemas 10.3

10.3.1 Releia a definição de reta reversa e o resultado do Teorema 9.5.
10.3.2 Examine todas as retas e planos.
10.3.3 Proceda por contradição.
10.3.4 Use o Axioma 16.
10.3.5 Comece observando que a primeira reta é, na verdade, uma transversal às duas retas paralelas.
10.3.6 Para a primeira parte, use o Teorema de Pasch. Para a segunda, siga a sugestão.
10.3.7 Não é possível. Justifique.
10.3.8 Use a Proposição 10.7 duas vezes.
10.3.9 Um jeito é ligar os pontos médios de dois lados de um triângulo.
10.3.10 Novamente use a Proposição 10.7 duas vezes.
10.3.11 Uma forma é usar diretamente a definição 9.34 de quadrilátero convexo.
10.3.13 Agora é possível demonstrar que o quadrilátero de Sacheri é um retângulo.
10.3.14 Use o Corolário 10.5.
10.3.15 Use propriedades dos paralelogramos.
10.3.17 Um jeito é usar o Teorema 10.16.
10.3.19 Primeiro use o resultado do Problema 9.15.6 para ver que o quadrilátero é convexo.
10.3.21 Para construir paralelogramos não retângulos, construa paralelogramos com ângulos $\neq 90°$.
10.3.22 Você considerou trapézios?

10.3.23 Para as duas afirmações use congruências e propriedades dos paralelogramos.
10.3.24 a) Use congruências e propriedades. b) A recíproca, como está posta, é falsa. Arrume a recíproca para que se torne uma afirmação verdadeira.
10.3.25 a) Use congruências e propriedades. b) A recíproca é falsa.
10.3.26 Faça um desenho para perceber os argumentos.
10.3.27 É um retângulo.
10.3.28 Use congruências e propriedades. A recíproca é verdadeira.
10.3.29 Desenhe o segmento e uma diagonal. Use o Teorema 10.17.
10.3.30 Um jeito é usar o Teorema 10.17.
10.3.31 Construa primeiro o ângulo.
10.3.32 Use o Teorema 10.8 e o Problema 10.3.30. Para a recíproca, faça uma cópia do triângulo retângulo ao lado do ângulo de 30°.
10.3.33 Use o Teorema 10.17. Você se lembrou de considerar o caso não convexo?
10.3.34 a) A frase é: o ponto é equidistante dos três vertices do triângulo.
10.3.35 Obtenha a desigualdade para uma mediana, e depois some as três.
10.3.36 Use as Proposições 9.26 e 10.7.
10.3.37 Considere uma das alturas, e tome a projeção de P sobre ela, repartindo-a em dois segmentos.
10.3.38 Um jeito é começar usando o Teorema 10.16.
10.3.39 O método descrito fornece uma única paralela, mas poderia haver outra paralela obtida por outro método.
10.3.40 Dado um triângulo, ligue os pontos médios dos três lados.
10.3.41 O erro está logo no começo.
10.3.42 Nas condições da Figura apresentada, aproxime o ponto 2 do rio perpendicularmente em um valor igual à largura do rio.

Problemas 10.5

10.5.1 Chame $a/b = k$, e manipule as frações.
10.5.2 A razão de semelhança é 2, e os lados medem 10, 16 e 22.
10.5.3 Una dois pontos médios. Que propriedades tem esse segmento?
10.5.4 Se m e n não são paralelas e se encontram em um ponto, use várias vezes a observação feita em seguida ao Teorema 10.21.
10.5.5 Sim, vale.
10.5.7 Usando triângulos semelhantes mostre que $\frac{DF}{DE} = \frac{BD}{CD}$.
10.5.8 Use semelhança de triângulos.
10.5.9 $x = \frac{ad}{a+b}$ e $y = \frac{bd}{a+b}$.
10.5.10 a) lado= a, $d = a\sqrt{2}$. b) Lados a e b, $d = \sqrt{a^2+b^2}$. c) lado= a, $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$. d) Laterais= a e base= b, altura do vértice= $\frac{1}{2}\sqrt{4a^2-b^2}$ e alturas dos lados = $\frac{b}{2a}\sqrt{4a^2-b^2}$.
10.5.11 a) $\operatorname{sen}(45°) = \cos(45°) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. b) e c) $\operatorname{sen}(60°) = \cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\operatorname{sen}(30°) = \cos(60°) = \frac{1}{2}$.
10.5.12 Marque os pontos C e D como na Figura 10.29, e use semelhança de triângulos.
10.5.13 a, $a\sqrt{2}$ e $a\sqrt{5}$.
10.5.14 Use as relações da Proposição 10.26.
10.5.15 Com as anotações da Figura 10.38, temos $m = \frac{c^2+b^2-a^2}{2c}$ e $n = \frac{c^2-b^2+a^2}{2c}$. Calcule os outros casos.
10.5.16 Basta demonstrar para um dos lados. Escolha uma altura conveniente e use o Teorema de Pitágoras (ou os resultados do Problema 10.5.15). Considere os três casos gerados pela posição do pé da altura.
10.5.17 Um jeito é construir um triângulo retângulo congruente ao triângulo dado.
10.5.18 Use que a média aritmética de dois números positivos é menor ou igual à sua média quadrática, e que a igualdade ocorre se, e somente se, os números são iguais.
10.5.20 $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$.
10.5.21 a) Desenhe os triângulos e suas alturas. Suponha que G não esteja no interior de EF (essencialmente são dois casos). Examine os ângulos e obtenha contradição. b) Seja $k = AB/DE$ a razão de semelhança. Demonstre que $AH/DG = k$ (essencialmente são três casos).
10.5.22 Use o caso LAL de semelhança.
10.5.23 a) Mostre primeiro que $a/2 < b$ (use contradição). A razão é $\sqrt{2}$.
10.5.24 a) Mostre primeiro que $a > b$. b) Mostre primeiro que $a/(a-b) = a/b$. Portanto $b/(a-b)$ é a razão do terceiro retângulo remanescente. c) $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$. d) Se $ABCD$ é um retângulo com $AD = x$ e $AB = y$, sendo $x > y$ e $x/y = \phi$, mostre que $x/y = y/(x-y)$.

10.5.25 Se o lado do triângulo é a, o lado do quadrado é $a(2\sqrt{3}-3)$. No lado do triângulo que contém o lado do quadrado, a distância entre os vértices é $a(2-\sqrt{3})$.
10.5.26 Sugestão: com as notações da Figura 10.40, considere a paralela a AD por C que encontra $\overleftrightarrow{AB}$ em E.
10.5.27 Sugestão: com as notações da Figura 10.41, considere a paralela a AD por C que encontra $\overleftrightarrow{AB}$ em E.

Problemas adicionais 10.6

10.6.1 Parece que a melhor forma é considerar vários casos: 1. $\overleftrightarrow{AB} \perp r$; 2. $\overleftrightarrow{AB} \not\perp r$ e $A, B \in r$; 3. $\overleftrightarrow{AB} \not\perp r$, $A \in r$ e $B \notin r$ (ou vice-versa); 4. $\overleftrightarrow{AB} \not\perp r$ e os pontos A e B estão em lados opostos da reta r; 5. $\overleftrightarrow{AB} \not\perp r$ e os pontos A e B estão do mesmo lado de r.
10.6.2 Em cada uma das duas situações, considere os vários casos que se fazem necessários. Mas, se não quiser lidar com muitos formalismos, pode proceder através de desenhos.
10.6.3 Use contradição e o Axioma 12 da construção de ângulos.
10.6.4 Novamente proceda por contradição.
10.6.6 Siga a sugestão do enunciado.
10.6.8 Se as paralelas por T e M encontram AC nos pontos S e U, respectivamente, então S é ponto médio de AN e U de CN.
10.6.9 Use semelhança de triângulos. A distância é $bc/(b+c)$.
10.6.10 Primeiro use a condição $AB > AC$ para determinar a posição de E. Para obter a proporção use os resultados dos Problemas 10.5.26 e 10.5.27. Depois use o resultado do Problema 9.11.14 para ver que $AD \perp AE$.
10.6.11 $b_a = \frac{1}{b+c}\sqrt{bc[(b+c)^2-a^2]} = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcs(s-a)}$ (s é o semiperímetro).
10.6.12 É possível. Para investigar e se orientar, use o Geogebra. Para fazer cálculos, use o Teorema de Pitágoras.

Temas para investigação 10.7

10.7.1 Elabore as perguntas.
10.7.2 A reflexão de cada uma dessas figuras é a ela congruente.
10.7.3 Use o Geogebra para fazer suas investigações.
10.7.4 a) Um jeito é começar construindo um ângulo $\angle AOB$ de medida 60° usando o Axioma 12 da construção de ângulos e tal que $OA = OB$.
10.7.5 b) Um trapézio se diz *isósceles* quando os dois lados opostos não paralelos têm a mesma medida. c) Por exemplo, as diagonais de um trapézio se encontram em um ponto e os segmentos determinados por esse ponto em uma diagonal são proporcionais aos segmentos determinados na outra. Exemplos de propriedades do trapézio isósceles: (i) os ângulos contíguos à mesma base são congruentes; (ii) as diagonais são congruentes; (iii) os quatro ângulos que as diagonais determinam com as bases são congruentes; (iv) os lados paralelos têm a mesma mediatriz; (v) se em um quadrilátero dois lados opostos têm a mesma mediatriz então ele é um retângulo ou um trapézio isósceles.
10.7.6 Use desenhos para descobrir as condições. O Geogebra pode ajudar bastante.
10.7.7 Considere os casos $a > b$ (como na Figura), e $a = b$. Para resolver observe triângulos com segmentos unindo pontos médios de dois lados.
10.7.8 a) Faça desenhos para descobrir propriedades. b) O retângulo inscrito de área máxima tem área igual à metade da área do triângulo. c) Todo triângulo tem quadrado inscrito.
10.7.9 Faça suas investigações.
10.7.10 Faça suas leituras.
10.7.11 a) $(n-1)(m-1)$. b) $\frac{m(m-1)n(n-1)}{4}$.
10.7.12 A recíproca vale nos dois casos. Faça bons desenhos e use o resultado do Teorema 10.23.
10.7.13 a) Considere OP e PG e mostre que os ângulos com vértice em P somam 180°. b) Use que $OAP \sim OCG$. c) Use que $OPP' \sim OGG'$.
10.7.14 a) Considere AB e BC e mostre que os ângulos com vértice em B somam 180°. O mesmo ocorre em C e D. b) Use que $AJB \cong BKC$, etc. c) Use que $ABB' \sim AEE'$.
10.7.15 Dado um paralelogramo, o segmento que une os pontos médios de dois lados opostos quaisquer tem uma propriedade que o autor deste livro se esqueceu de colocar nas listas de problemas.
10.7.16 Uma dica é fazer o desenho no Geogebra para descobrir o teorema. Para demonstrar, use congruência de triângulos.
10.7.17 a) Use o Teorema de Pitágoras. b) Qual é a fórmula que substitui o Teorema de Pitágoras em um triângulo qualquer?
10.7.18 a) Traduza os passos da dobradura em condições algébricas, e use o Problema 10.3.6. Este, por sua vez, usa o Axioma 16. b) Seja ABC um triângulo retângulo com hipotenusa AB. Comece tomando o ponto médio D de AC e r a reta perpendicular a AC por D.

10.7.19 Primeiro mostre como vincar uma altura com um pé no interior do lado (use o resultado do Problema 9.15.9).
10.7.20 Dado um triângulo retângulo ABC com hipotenusa AB, na reta perpendicular a BC por B marcamos o ponto C' do mesmo lado que A em relação a $\overleftrightarrow{BC}$ e tal que $C'B = AC$. Usando a Proposição 10.7 obtenha o resultado. Observe, para concluir, que BAC' é uma cópia de ABC.
10.7.21 Inicie tomando pelo ponto uma paralela a um dos lados do ângulo.
10.7.22 São equivalentes, mas não é fácil demonstrar. Consulte `https://www.cut-the-knot.org/triangle/pythpar/PTimpliesPP.shtml#IXtoI`
10.7.23 Implica. Consulte o mesmo endereço acima.

Problemas 11.3

11.3.1 Se uma corda não é um diâmetro, seus extremos formam um triângulo com o centro da circunferência.
11.3.3 Use que a menor distância de um ponto a uma reta é dada pelo pé da perpendicular.
11.3.4 Use que a menor distância de um ponto a uma reta é dada pelo pé da perpendicular.
11.3.5 Use a parte (iii) do Teorema 11.2.
11.3.6 Use a caracterização da mediatriz como lugar geométrico.
11.3.8 Um jeito de justificar é usar diretamente o Teorema 11.2.
11.3.9 Em a) e em b) use congruências de triângulos.
11.3.10 Use o Teorema de Pitágoras.
11.3.11 Use congruência de triângulos, ou, alternativamente, o resultado do Problema 9.13.11.
11.3.12 Mostre primeiro que $AC = BD$. Demonstre em seguida que $AB \cap CD$ é o centro da circunferência menor.
11.3.14 a) Mostre que $OAC \cong OBD$ pelo caso LAA. b) Use o Axioma da Construção do Ângulo.
11.3.15 Para todo $\rho > AB/2$ existem duas circunferências de raio ρ que contêm A e B. Se $\rho = AB/2$, existe uma única. Se $\rho < AB/2$, não existe tal circunferência.
11.3.16 Primeiro resolva os casos $T = A$ ou $T = B$. Após isso demonstre que $A'T = TB'$. Depois considere $A'OB'$.
11.3.17 Examine os valores de todos os ângulos.

Problemas 11.5

11.5.1 Existem três situações possíveis, dependentes da comparação entre o raio da circunferência e da distância do ponto ao seu centro.
11.5.2 Considere os dois casos possíveis e use os lemas da seção.
11.5.3 Examine os triângulos formados por P, Q e pelos centros das duas circunferências.
11.5.5 Considere separadamente os casos em que as circunferências são tangentes interna e externamente. Examine os triângulos formados por A, P e B e pelos centros das circunferências. Examine o caso em que esses pontos não formam triângulos.
11.5.6 Examine as congruências dos diversos triângulos envolvidos.

Problemas 11.7

11.7.1 Considere a mediatriz da corda.
11.7.2 $a\sqrt{3}$.
11.7.3 Considere os lados da reta $\overleftrightarrow{AB}$ no plano. Em algum momento você vai usar o Teorema Crossbar.
11.7.4 Adicione os ângulos centrais correspondentes e use a Definição 11.12.
11.7.5 Existem casos em que a afirmação é verdadeira, e casos em que não é. O ângulo central correspondente a um inscrito pode inscrever o arco complementar,
11.7.6 Sejam O o centro da circunferência e D sua interseção com CO. Examine os triângulos ACB e ADB.
11.7.7 Existem três triângulos semelhantes.
11.7.8 Comece observando que $\angle ACB$ é inscrito em uma semicircunferência.
11.7.9 Use que $\angle BAC \cong \angle BOD$.
11.7.10 Seja $\mathscr{C}_1$ uma circunferência de centro O e raio ρ_1 e seja P um ponto fora dela. Seja $\mathscr{C}_2$ a circunferência de diâmetro OP. Use a parte (iv) do Teorema 11.11.
11.7.12 Para a primeira afirmação use congruências ou a caracterização da bissetriz como lugar geométrico. Para a segunda afirmação use que num quadrilátero convexo a soma dos ângulos é 360°.
11.7.13 a) Dado $E = AD \cap BC$, mostre que $ABE \cong CDE$. b) Use que $AEC \sim BED$.
11.7.14 Considere o diâmetro AC da circunferência maior. Estude o triângulo ABC.
11.7.15 Use congruência de triângulos, igualmente para a recíproca.
11.7.16 Primeiro ache $m(\hat{C})$.
11.7.18 Considere o segmento BC.

11.7.19 a) r é secante em A e B, de modo que $P-A-B$, e s é tangente em C. Temos $m(\hat{P}) = (1/2)[m(\overset{\frown}{BC}) - m(\overset{\frown}{AC})]$. b) r é tangente em A e s é tangente em C. Temos $m(\hat{P}) = 180° - m(\overset{\frown}{AC})$, ou $m(\hat{P}) = \frac{1}{2}m(\overset{\frown}{AXC}) - \frac{1}{2}m(\overset{\frown}{AC})$, em que $\overset{\frown}{AXC}$ é o arco complementar de $\overset{\frown}{AC}$.

11.7.20 Introduza a corda auxiliar BC.

Problemas finais 11.12

11.12.1 Comece provando que $ADO \cong AEO$.
11.12.2 $ABDC$ já é um paralelogramo. Mostre que todos os seus lados são congruentes.
11.12.4 Comece procedendo como na demonstração do Lema 11.18.
11.12.5 Dada uma circunferência de centro O e raio ρ circunscrita a um triângulo, argumente que O é único, assim como o valor ρ.
11.12.6 Desenhe um triângulo e sua circunferência circunscrita, e examine os arcos subtendidos pelos ângulos em relação ao posicionamento de seu centro.
11.12.7 $\frac{b}{2}\sqrt{\frac{2a-b}{2a+b}}$.
11.12.8 Comece observando que $M_BM_C \parallel BC$.
11.12.9 $bc/(a+b+c)$.
11.12.10 Dica: em que capítulo foi colocado esse problema?
11.12.11 a) Use a caracterização de convexidade vista no Problema 9.13.26. b) Proceda por contradição.
11.12.13 Use o resultado do Lema 11.19.
11.12.14 Comece com as desigualdades triangulares nos triângulos formados pelo baricentro e pelos lados do triângulo dado.
11.12.15 Considere o vértice do quadrilátero cuja medida é $\leq 90°$.
11.12.16 O lugar geométrico na semirreta dos pontos P são os que satisfazem $OP > \rho$.
11.12.17 Observe que é necessário considerar separadamente o triângulo retângulo.
11.12.18 Se o ângulo do vértice do triângulo equilátero for agudo temos $a^2 = 2R^2 + R\sqrt{4R^2-b^2}$; se for reto temos $a = R\sqrt{2}$; se for obtuso temos $a^2 = 2R^2 - R\sqrt{4R^2-b^2}$.
11.12.19 Use as definições de H, O e I, e congruências de triângulos.
11.12.20 Pode usar diagonal de quadrado ou medida de ângulo inscrito.
11.12.21 a) O_1 deve ser posto na bissetriz de $\angle AOB$ e sua distância d_1 a O é $d_1 = \frac{R}{\operatorname{sen}\alpha/2}$. b) $r = \frac{R(d_1-R)}{d_1+R}$ e $O_1O_2 = R + r$.
11.12.22 Considere o quadrilátero $ABOC$.

Temas para investigação 11.13

11.13.1 Em várias situações os resultados do Teorema 11.11.
11.13.2 Por exemplo, o ortocentro de um triângulo está no interior de um lado se, e somente se, o triângulo é isósceles e o lado referido é a base.
11.13.3 Por exemplo, uma condição necessária e suficiente para que um paralelogramo tenha uma circunferência circunscrita é que ele seja um retângulo.
11.13.4 Comece sua investigação com desenhos de triângulos acutângulos.
11.13.5 Assuntos interessantes são o triângulo de Gergonne e o ponto de Gergonne.
11.13.6 Se ρ é o raio da circunferência, as medidas das cordas são os valores de $(0, 2\rho]$. Toda corda tem como medida um valor nesse intervalo, e para todo valor desse intervalo existe uma corda com essa medida.
11.13.7 a) Parece óbvio, mas primeiro é preciso demonstrar que o centro da semicircunferência é ponto médio do lado do quadrado. $\ell = 2r/\sqrt{5}$. b) $\ell = 2r/\sqrt{2}$.
11.13.8 Ache os raios das duas circunferências menores em função do raio da maior e da medida da corda.
11.13.9 a) Demonstre que o centro é o ponto médio do lado e que $R = \ell\sqrt{3}/4$. b) $R = \frac{b}{4a}\sqrt{4a^2-b^2}$.
11.13.10 Junte de forma conveniente duas cópias do triângulo. $r = \frac{bc}{a+b}$.
11.13.11 Primeiro inscreva um quadrado com dois lados nos catetos. $r = \frac{bc}{b+c}$.
11.13.12 A condição dada implica que o quadrilátero é convexo? Na literatura essa hipótese costuma ser incluída. Estude `https://www.cut-the-knot.org/proofs/InscriptibleQuadrilateral.shtml#anotherProof`
11.13.13 Existem tais pontos, denominados *exincentros*. Use o Geogebra para investigar.
11.13.14 Um trapézio é inscritível sss é isósceles. O circuncentro está na mediatriz comum dos lados paralelos. Para localizá-lo faça desenhos dos três casos possíveis e use o Teorema de Pitágoras.
11.13.15 a) Existe apenas um tipo. b) Comece observando que todo trapézio isósceles é inscritível. Depois encontre uma condição necessária e suficiente para que seja circunscritível. c) Para construir outros quadriláteros bicêntricos consulte [58].

11.13.16 (i) Essa configuração é possível. Num arranjo simétrico, as três circunferências têm raio ρ e a quarta tem raio $\rho(\frac{2}{3}\sqrt{3}+1)$. (ii) Essa configuração é possível. Num arranjo simétrico três circunferências têm raio x e a menor tem raio $x(\sqrt{2}-1)$. (iii) A configuração é possível. Num arranjo simétrico três circunferências têm raio ρ e a menor $\rho(\frac{2}{3}\sqrt{3}-1)$.
11.13.17 Com a notação da Figura 11.63, dados AB, BC e o ângulo $\hat{B}$, construa o arco capaz desse ângulo sobre AC.
11.13.18 Hum ... estou com uma sensação de *déjà vu*!
11.13.19 Hum ... já vi isso antes.
11.13.21 Use o Geogebra para descobrir propriedades. Em particular, a razão entre os lados do retângulo é constante.
11.13.20 Sugestão: comece demonstrando que a reta tangente às circunferências no ponto de contato é necessariamente a bissetriz do triângulo equilátero.
11.13.22 Comece com um desenho geométrico da situação.

Problemas 12.6

12.6.1 Considere quadriláteros convexos e não convexos.
12.6.2 a) A congruência entre quadriláteros é equivalente às oito congruências entre seus elementos correspondentes, quatro lados e quatro ângulos. b) Use contradição. c) Reparta os quadriláteros (convexos ou não) usando suas diagonais internas correspondentes.
12.6.3 Escolha a altura de forma conveniente.
12.6.4 Use o resultado do Problema 10.3.28.
12.6.5 Se ainda não fez, demonstre primeiro que as diagonais de um retângulo são congruentes e se cortam ao meio.
12.6.6 $a/4$.
12.6.7 b) Faça uma hipótese conveniente sobre as retas suportes das diagonais.
12.6.9 Use o resultado do Problema 12.6.8.
12.6.10 Escolha AC como base e considere os quatro casos possíveis.
12.6.11 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$. Use o Teorema de Pitágoras ou o resultado do Problema 12.6.10.
12.6.12 a) Mostre que a área do triâgulo equilátero de lado 10 cm é maior do que $16\sqrt{3}$ cm^2. Mostre que depois do corte resulta um triângulo equilátero. b) $\sqrt{3}$.
12.6.13 $\frac{1}{4}b\sqrt{4a^2-b^2}$.
12.6.14 Mede 24. Pode-se fazer cálculos, mas a solução mais rápida usa recortes.
12.6.16 a) O pé da altura cai fora do lado de medida c, mas a expressão da altura é a mesma da do Lema.
12.6.15 b) $x = a/2$.
12.6.17 Aplique a um paralelogramo qualquer a fórmula da área do trapézio.
12.6.18 Escreva as fórmulas de K e L.
12.6.19 O que faz uma mediana com a área do triângulo?
12.6.20 c) Quando a reta corta o paralelogramo formando dois trapézios, observe que suas alturas são iguais.
12.6.21 São duas retas.
12.6.22 $a/2$
12.6.23 Use a fórmula do Problema 12.6.10.
12.6.24 Use o resultado do Problema 12.6.10.
12.6.25 Use a última fórmula do Problema 12.6.23.
12.6.26 Use o resultado do Problema 12.6.18.
12.6.27 Considere um triângulo $P_1P_2P_3$ em um sistema Oxy com $P_i = (x_i, y_i)$, $1 \le i \le 3$. Seja H o pé da altura do triângulo em relação ao lado P_2P_3. Use resultados de Geometria Analítica para calcular a área $\frac{1}{2}P_2P_3 \cdot P_1H$.
12.6.28 Reparta o quadrilátero (convexo ou não) em dois triângulos, seguindo os vértices no mesmo sentido (anti-horário, por exemplo).
12.6.30 Use a definição de similaridade e o resultado do Problema 10.5.21.
12.6.31 Um jeito é demonstrar primeiro que $IJKL$ é um quadrado.
12.6.32 Às vezes se obtém uma facilidade quando trocamos algo de lugar.
12.6.33 b) $\frac{5\sqrt{3}(2-\sqrt{2})}{2} \approx 2{,}5365$.
12.6.34 Sejam x e y os lados de um retângulo arbitrário, e seja p o perímetro fixado. Equacione a área como uma função de uma variável. Outra forma é usar a desigualdade das médias geométrica e aritmética.
12.6.35 Em b) use o resultado do Problema 12.6.34.
12.6.36 Um jeito é usar que $(x-\sqrt{a})^2 \ge 0$. Outro jeito é usar a desigualdade das médias geométrica e aritmética.
12.6.37 É o quadrado. Para demonstrar um jeito é usar a desigualdade das médias aritmética e quadrática.
12.6.38 Um jeito é usar o resultado do Problema 12.6.10.
12.6.39 A área máxima é $361\sqrt{15}/4$. Um jeito de resolver é usar a fórmula de Herão 12.13. Outra forma consiste em considerar uma elipse com distância focal 19 e eixo maior 76.

12.6.40 É o triângulo equilátero. Para demonstrar use a fórmula de Herão do Teorema 12.13 e a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica.
12.6.41 Se for usar o resultado do Problema 12.6.18 ligue os pés das cevianas para repartir o quadrilátero em dois triângulos. Alternativamente pode ser usado o resultado do Problema 10.5.9 parte c).
12.6.42 630.
12.6.43 Calcule a área de duas maneiras.
12.6.44 $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}{a+b+c}}$.
12.6.45 Considere posicionamentos diferentes do ponto. Se os lados do retângulo são a e b, a constante é $ab/\sqrt{a^2+b^2}$.
12.6.46 a) Use o Lema 11.19. c) Use o resultado de b) para as três circunferências. d) Use áreas.
12.6.48 Demonstre que a soma só depende do triângulo, e não da particular posição do ponto no interior do mesmo.

Temas para investigação 12.7

12.7.1 O Problema 12.6.19 pode servir de inspiração.
12.7.2 Uma possibilidade é considerar retas paralelas a um dos lados.
12.7.3 Um caso fácil ocorre quando de um disco se retira um disco menor.
12.7.4 Você pensou no triângulo equilátero? O resultado do Tema 12.7.2 talvez possa ajudar.
12.7.5 Calcule as áreas das partes em função da área do paralelogramo.
12.7.6 Todas as medidas (comprimentos e áreas) devem ser expressas em função do lado do quadrado dado.
12.7.7 Com as notações da Figura 12.26 sua área é $\frac{1}{2}h\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$.
12.7.8 Problema similar ao 12.7.3.
12.7.9 Comece examinando as próprias retas suportes da diagonais.
12.7.10 $\sqrt{abcd}$.
12.7.11 Propriedades das diagonais e ângulos, fórmulas para a área.
12.7.12 a) Naturalmente M é o ponto médio de AB. Estude os ângulos e use congruências. e) Em geral parece que é melhor tomar uma diagonal como base.
12.7.13 Consulte [28] para mais detalhes.
12.7.14 Consulte os livros sugeridos.

Problemas 13.8

13.8.1 Dado $\mathscr{P} = A_1A_2A_3\ldots A_n$, liste seus lados e seus ângulos, e conte.
13.8.2 Trabalhe com as definições de semiplano, ângulo e interior de ângulo.
13.8.3 Escreva o que é a interseção dos interiores de todos os ângulos, e verifique que é o mesmo conjunto da Definição de polígono convexo 13.3.
13.8.4 Use o resultado do Problema 9.9.2.
13.8.5 Admita $n \geq 4$, pois o triângulo não tem diagonal. Construa uma boa notação para configurar a afirmação.
13.8.6 Fixe um vértice e conte quantas diagonais ele determina.
13.8.7 Primeiro calcule a medida de um ângulo do pentágono regular.
13.8.8 Use uma circunferência com raio $\rho = \ell/2\,\mathrm{sen}(\pi/n)$.
13.8.9 Calcule primeiro a medida do ângulo central do pentágono regular.
13.8.10 Para o octógono ser equilátero os catetos dos triângulos devem medir $\frac{20}{2+\sqrt{2}} \approx 5{,}85786$. E quanto a ser equiângulo?
13.8.11 Em cada trapézio a base maior mede 100, a menor, 50, e a altura é $25\sqrt{3}$.
13.8.12 a) é falsa. Para verificar use 13.19 para escrever as coordenadas dos vértices.
13.8.13 Use 13.19 ou outra ideia.
13.8.14 Um desenho ajuda bastante.
13.8.15 O perímetro é 120. Lembrando que o hexágono é equiângulo, faça primeiro um desenho.
13.8.16 Desenhe o octógono e a circunferência circunscrita com os lados em uma distribuição qualquer. Depois redesenhe escolhendo uma conveniente ordem cíclica para os lados. A medida do circunraio é $\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{a^2+b^2+ab\sqrt{2}}$.
13.8.17 Use desenhos. Para n par são $(n-2)/2$, e para n ímpar são $(n-3)/2$.
13.8.18 Comece com a área do triângulo central.
13.8.19 Estude o triângulo central do hexágono regular.
13.8.20 A diagonal maior mede 2ℓ, e a menor, $\sqrt{3}\,\ell$.
13.8.21 Reparta o quadrilátero em dois triângulos. A área é $\frac{\sqrt{3}}{4}\ell(\ell-1)$.
13.8.22 Uma forma é usar o resultado do Problema 13.8.4.
13.8.23 Estude a figura apresentada, particularmente o triângulo central do octógono regular.

13.8.24 Ajuda muito desenhar um octógono regular usando esse recurso do Geogebra e examinar os ângulos dos triângulos formados pela diagonais. Suas medidas, da menor para a maior: $\sqrt{2+\sqrt{2}}\ell$, $(1+\sqrt{2})\ell$ e $\sqrt{4+2\sqrt{2}}\ell$.
13.8.25 Para as outras relações use o triângulo central do decágono regular.
13.8.26 Desenhe as diagonais em sequência e examine os triângulos assim formados. A Lei dos Cossenos pode ser útil. As diagonais medem, da maior para a menor: $(1+\sqrt{5})\,\ell$, $\sqrt{5+2\sqrt{5}}\,\ell$, $\frac{3+\sqrt{5}}{2}\,\ell$, e $\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\,\ell$.
13.8.27 Para as outras relações use o triângulo central do pentágono regular.
13.8.28 Desenhe uma diagonal e examine as propriedades do triângulo formado.
13.8.29 Desenhe três diagonais e examine os ângulos dos triângulos formados. O lado do pentágono menor é $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ vezes o lado do maior.
13.8.30 $\ell = R\sqrt{2-\sqrt{3}}$; $R = \ell\sqrt{2+\sqrt{3}}$; $a = R\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$; $a = \ell\frac{2+\sqrt{3}}{2}$; $\ell = 2a(2-\sqrt{3})$; $A = 3\ell^2(2+\sqrt{3})$; $A = 12a^2(2-\sqrt{3})$; $A = 3R^2$.
13.8.31 Use propriedades trigonométricas no triângulo central.
13.8.32 Mede $2\ell_n \cos\frac{\pi}{n} = 2R_n \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}$, sendo ℓ_n o lado e R_n o circunraio.
13.8.33 b) Apenas triângulos equiláteros, quadrados e hexágonos regulares podem compor ladrilhamentos regulares simples.
13.8.34 Em cada caso, desenhe primeiro um arranjo possível em torno de um vértice. Depois verifique se esse arranjo se propaga, isto é, repetindo o arranjo é possível recobrir todo o plano.
13.8.35 a) Um jeito é começar desenhando um quadrado. Depois ligue um de seus vértices ao vértice seguinte do polígono.
13.8.36 Sim, é possível.
13.8.37 Proceda com o Método da Indução Completa usando o Problema 12.6.27 e o Teorema 13.9.
13.8.38 Dado um poligrama regular $A_1A_2\ldots A_n$ não composto, tome a circunferência determinada por A_1, A_2 e A_3. Demonstre que A_4 também pertence a ela.
13.8.39 Tome o centro da circunferência circunscrita, e os segmentos perpendiculares desse centro aos lados do poligrama.
13.8.40 a) e b) Use o resultado do Problema 11.7.20 para calcular ângulos. Temos $\theta = 36°$ e $\alpha = 108°$. c) É a diagonal do pentágono regular. A medida é $\frac{R}{2}\sqrt{2(5+\sqrt{5})}$.
13.8.41 a) Os ângulos do octograma regular medem 45°. b) Os ângulos dos vértices reentrantes medem 90°. c) $\ell = R\sqrt{2+\sqrt{2}}$. e) O lado do octógono interior é $\ell(3-2\sqrt{2})$ (verbete *Octagram* de [84]).

Temas para investigação 13.9

13.9.1 Considere poligramas estrelados com n vértices, n ímpar, e de densidade 2.
13.9.2 O número de diagonais já foi visto no Problema 13.8.17. A medida é $d_k = 2R_n \operatorname{sen}\frac{k\pi}{n}$, sendo d_k a medida da diagonal que abrange k lados inscritos no arco menor.
13.9.3 b) O que ocorre com as medidas dos ângulos quando $n \to \infty$?
13.9.4 a) É possível mas sem obedecer à regra de que as interseções entre os quadrados sejam lados inteiros de ambos. f) {6/2} combinado com hexágonos regulares. Encontre outras possibilidades.
13.9.6 Um caso fácil é o hexágono regular.
13.9.5 Confira se vale o seguinte: um n-ágono regular pode rodear um m-ágono regular se $n = 4m/(m-2)$. Os casos possíveis são: $(n,m) = (5,10)$, (6,6), (8,4) e (12,3).
13.9.7 Investigue as mesmas afirmações sob a hipótese de que o polígono é inscritível em uma circunferência. E quanto a polígonos circunscritíveis?
13.9.9 Sobre $n = 7$ e 9 já li alguma coisa por aí, só preciso me lembrar.
13.9.10 a) Use o Geogebra para fazer experimentos e desenhar as várias possibilidades. e) Uma boa ideia é investigar o mesmo problema para octógonos convexos. Outras possibilidades podem ser consideradas.
13.9.11 Use o que você descobriu na parte d) do Tema 13.9.10. Comece calculando quantos quadrados unitários são necessários para compor um triângulo equilátero de lado inteiro.
13.9.12 a) As circunferências externas têm raio $R/\sqrt{5}$.
13.9.13 Algo interessante pode ocorrer se ligarmos os centros dos triângulos.
13.9.14 Por exemplo, $\{10/4\} = \{5/2\} \cup \{5/2\}$. Os casos {14/4} e {14/6} também são interessantes.

Problemas 14.3

14.3.1 Trace um arco com centro no vértice do ângulo, marque um ponto em cada lado, e meça com o compasso a distância entre esses dois pontos. Transporte essas medidas para outro lugar que queira.

14.3.2 a) Desenhe o lado e construa sua mediatriz. Marque na mediatriz o ponto que dista dos extremos do segmento a medida do lado. b) Em uma reta construa um ângulo de 60°, com um lado nessa reta. O vértice do ângulo é um vértice do triângulo. Desenhe a paralela a essa reta a uma distância igual à medida de sua altura. O ponto de encontro dessa paralela com o lado do ângulo é outro vértice do triângulo.
14.3.3 a) Desenhe a base, sua mediatriz, e marque nela a altura. b) Desenhe o ângulo e marque em seus lados segmentos com medida igual à do lado dado. c) Desenhe a base e o arco capaz do ângulo sobre ela. Escolha no arco capaz o ponto adequado.
14.3.4 Comece com o ângulo de 60°. Depois use bissetrizes e soma de ângulos.
14.3.5 Estude o Exemplo 14.8.
14.3.6 Construa o arco capaz de $180° - 135° = 45°$, e use o arco complementar.
14.3.7 Desenhe o segmento BC e o ângulo $\angle XBC$ congruente ao ângulo dado. Depois localize o vértice A. Existem, em geral, duas posições.
14.3.8 Desenhe o segmento $a = BC$ e uma paralela à distância h_a. Depois localize o vértice A usando m_a. Existem, em geral, duas posições.
14.3.9 Primeiro calcule o valor do ângulo agudo, e depois construa um triângulo adequado. A solução não é única.
14.3.10 Ao estabelecer os segmentos que serão os lados, tome $b < a$. Para a solução, construa primeiro o triângulo AED, com $AE = a - b$, $DE = c$ e $AD = d$. A condição é a mesma da existência desse triângulo: $|c - d| < a - b < c + d$.

Problemas 14.5

14.5.1 Use o Teorema de Pitágoras.
14.5.2 Use o Teorema de Pitágoras duas vezes.
14.5.3 Construa primeiro um triângulo retângulo com um cateto de medida b e hipotenusa de medida $2b$. Resulta que o outro cateto mede $b\sqrt{3}$.
14.5.4 Use a mesma ideia da raiz quadrada de um segmento, adaptando a Figura 14.11.
14.5.5 Use os métodos estudados.

Problemas finais 14.8

14.8.1 Um jeito é usar a diagonal do quadrado. Outro é reunir quatro cópias do quadrado e desenhar o quadrado determinado por diagonais convenientemente escolhidas (nessa última solução não é necessário o Teorema de Pitágoras).
14.8.3 Foi construído um ângulo de 60° e depois um de 30° contíguo.
14.8.4 Primeiro desenhe um quadrado e una os pontos médios de dois lados consecutivos. Estude as propriedades dessa figura e crie um protocolo. Faça o desenho com régua e compasso e justifique. Existe mais de uma posição para o quadrado. Existe mais de uma solução.
14.8.5 Usando a notação da Figura 14.14, à esquerda, e o Teorema de Pitágoras, segue que $DE = R\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$. Pelo resultado do Problema 13.8.27 essa é a relação no pentágono regular.
14.8.6 Para demonstrar que a razão x/y é o número áureo faça o desenho e use o resultado do Problema 10.5.24.
14.8.7 Primeiro desenhe um triângulo e estude as propriedades gerais dos pontos médios de seus lados. Depois resolva o problema.

Apêndice B

Créditos das figuras

Observação: As figuras aqui não referidas foram construídas pelo autor com o uso do aplicativo Geogebra, do programa gráfico vetorial Inkscape, do PicTex e do Tikz. Às vezes usamos o GIMP para manipular figuras.

Capa e Apresentação

Figura da capa externa Construída pelo autor com o Inkscape.

Figura da capa interna Clip Art Inkscape `http://www.openclipart.org/` Autor: Kattekrab. Domínio público. Consultado em outubro de 2010.

Figura da Apresentação, página v Clip Art Inkscape `http://www.openclipart.org/` Autor: Krauskopf Tom Machovka. Domínio público. Consultado em outubro de 2010.

Capítulo 8: A Geometria como Ciência

Figura 8.2 Desenho da esquerda: Imagem criada em 23 de setembro de 2026 pelo modelo de IA Gemini desenvolvido pelo Google.

Figura 8.2 Desenho da direita: Imagem de Wikimedia Commons `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Octant_of_a_sphere.png` Autor: Jacob Rus. Data: 21/04/2026. Licença sob Creative Commons Attribution-Share Alike 4.0 International license. Consultado em 23 de setembro de 2026.

Figura 8.3 Digitalização da capa da primeira edição de Sir Henry Billingsley em língua inglesa de *Os Elementos* de Euclides de Alexandria, datada de 1570. Imagem disponibilizada no endereço `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Title_page_of_Sir_Henry_Billingsley's_first_English_version_of_Euclid's_Elements,_1570_(560x900).jpg` Domínio público. Consultado em 6 de novembro de 2016.

Figura 8.4 Euclides de Alexandria. Imagem disponibilizada no endereço `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Euklid-von-Alexandria_1.jpg` Domínio público. Consultado em 5 de novembro de 2016.

Capítulo 9: Início da Geometria Euclidiana Plana

Figura 9.21 Desenho de Wikimedia Commons `http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Protractor_Rapporteur_Degrees_V3.jpg` Autor: Scientif38. Data: 25/01/2011 Licença sob Creative Commons CC0 1.0 Universal Public Domain Dedication.

Capítulo 11: A Circunferência

Figura 11.42 Desenho adaptado de Wikimedia Commons `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Triangle.EulerLine.svg` Autor: Herbee. Data: fevereiro de 2006. Licença sob domínio público.

Capítulo 13: Polígonos

Figura 13.23: Arte de iluminação atribuída a Ibrahim al-Amidi (1314-1394) em uma página do manuscrito "Alcorão do Sultão Barquq" do Século XIV. Disponível na Wikipedia no endereço `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Sultan_Barquq%27s_Qur%27an_decagram.jpg` Consultado em setembro de 2026. Domínio público.

Figura 13.39: Desenho de um ladrilhamentodo plano com pentágonos regulares, disponível na Wikipedia https://commons.wikimedia.org/wiki/File:2-d_pentagon_packing_dual.svg Autor: Toby Hudson. Consultado em junho de 2010. Licença: Creative Commons. Consultado em março de 2015.

Figura 13.43: Desenho artístico com polígonos, disponível em http://www.freepik.com/free-photos-vectors/design Desenho vetorial de Freepik. Permitido o uso sob referência. Consultado em abril de 2015.

Capítulo 14: Construções com régua e compasso

Figura 14.16: Foto de pintura de autoria de Christian Albrecht Jensen retratando Johann Carl Friedrich Gauss. Disponibilizada em https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Carl_Friedrich_Gauss_1840_by_Jensen.jpg sob domínio público. Consultado em 21 de janeiro de 2017.

Figura 14.15: Selo comemorativo de Pierre Laurent Wantzel, disponibilizado em https://alchetron.com/Pierre-Wantzel Direitos autorais não referidos. Consultado em 13 de fevereiro de 2026.

Referências Bibliográficas

[1] Aaboe, A. *Episódios da História Antiga da Matemática.* Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1984.

[2] André, L. e Aguiar, R. *Caracterizações de convexidade para polígonos simples.* PMO, v.7, n.1, 2019, 95-121.

[3] Baldin, Y. Y. e Furuya, Y. S. *Geometria Analítica para todos e atividades com Octave e Geogebra.* São Carlos: EdUFSCar, 2012.

[4] Barbeau, E. J., Klamklin, M. S. e Moser, W. O. J. *Five Hundred Mathematical Challenges.* Washington: Mathematical Association of America, 1995.

[5] Barbosa, J. L. M. *Geometria Euclidiana Plana.* 10ª. Edição. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

[6] Bass, L. E. *et alii. Geometry.* Boston, Massachusetts: Pearson, 2004.

[7] Boldrini, J. L. et *alii. Álgebra Linear.* 3ª. edição. São Paulo: Editora Harbra LTDA, 1986.

[8] Boulos, P. e Camargo, I. *Geometria Analítica, um tratamento vetorial.* São Paulo: Makron Books, 1987.

[9] Boyd, C. J. *et alii. Geometry.* New York: McGraw Hill, 2004.

[10] Boyer, C. B. *História da Matemática.* Tradução de Gomide, E. F. São Paulo: Editora Edgard Blücher LTDA, 1974.

[11] Braden, B. *The Surveyor's Area Formula.* The College Mathematics Journal, v. 17, n. 4, 1986, 326-337.

[12] Brasil-MEC. *Base Nacional Comum Curricular.* Brasil: Ministério da Educação, 2025. `https://basenacionalcomum.mec.gov.br/` Consultado em agosto de 2025.

[13] Brass, P., Moser W. e Pach, J. *Research Problems in Discrete Geometry.* New York: Springer Verlag, 2005.

[14] Caetano, P. A. S. e Paterlini, R. R. *O Antiparalelogramo.* Revista do Professor de Matemática, n. 107, 2023, 24-30.

[15] Caminha, A. M. N. *Geometria.* Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.

[16] Cederberg, J. N. *A Course in Modern Geometries.* New York: Springer Verlag, 2001.

[17] Cooke, R. *The History of Mathematics. A brief course.* New York: John Wiley & Sons, 1997.

[18] Costa, I. M. e Villagra, G. A. L. *Caracterizações de triângulos retângulos*. Revista do Professor de Matemática, n. 70, 2009, 37-40.

[19] Croft, H. T. e Falconer, K. J. *Unsolved Problems in Geometry.* New York: Springer Verlag, 1991.

[20] Cundy, H. M. e Rollett, A. P. *Mathematical Models.* Oxford: Oxford University Press, 1961.

[21] Dolce, O. e Pompeo, J. N. *Geometria Plana.* Coleção Fundamentos de Matemática Elementar, v. 9. São Paulo: Atual Editora, 1980.

[22] Dunlap, R. A. *Regular Polygon Rings*. The College Mathematics Journal, Vol. 29, nº4 (1998), Mathematical Association of America.

[23] Eisenhart, L. P. *Coordinate Geometry.* New York: Dover Publications, 1967.

[24] Eves, H. *Foundations and Fundamentals Concepts of Mathematics.* New York: Dover Publications, 1967.

[25] Eves, H. *Introdução à História da Matemática.* Tradução de Domingues, H. H. Campinas, Editora UNICAMP, 2004.

[26] Faber, R. L. *Foundations of Euclidean and Non-Euclidean Geometry.* New York: Marcel Dekker, 1983.

[27] Fowler, D. H. *The Mathematics of Plato's Academy. A new reconstruction.* Oxford: Clarendon Press, 1990.

[28] Garcia, C. *Sobre dissecções de Loyd e Dudeney.* Revista do Professor de Matemática, n. 108, 2023, 7-13.

[29] Gomes, C. A. e Macêdo, A. *Heron para quadriláteros ... Brahmagupta.* Revista do Professor de Matemática, n. 64, 2007, 14-17.

[30] Greenberg, M. J. *Euclidean and Non-Euclidean Geometries.* Third Edition. New York: W. H. Freeman Company, 1993.

[31] Guidorizzi, H. L. *Um Curso de Cálculo.* volumes 1 e 3, 5ª. edição. Rio de Janeiro: LTC Editora, 2002.

[32] Guimarães, F. F. e Rosado, M. *Desenhando estrelas.* Revista do Professor de Matemática, n. 107, 2023, 8-11.

[33] Henderson, D. W. e Taimina, D. *Experiencing Geometry.* Upper Saddle River: Pearson, 2005.

[34] Hille, E. *Analytic Function Theory.* Volume 1. Segunda Edição. New York: Chelsea Publishing Company, 1973.

[35] Hvidsten, M. *Geometry.* Boston: McGrawHill, 2006.

[36] Iezzi, G. *Trigonometria.* Coleção Fundamentos de Matemática Elementar, v. 3. São Paulo: Atual Editora, 1978.

[37] Ignatiev, E. I. *En el reino del ingenio.* Moscou: Mir, 1986.

[38] Jacobs, H. R. *Geometry.* Third Edition. New York: W. H. Freeman Company, 2003.

[39] Karpinski, L. C. *The History of Mathematics.* New York: Russel & Russel, 1965.

[40] Kline, M. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times.* Oxford: Oxford University, 1972.

[41] Krulik, S. e Reys, R. E. *A Resolução de Problemas na Matemática Escolar.* Trad. Domingos, H. H. e Corbo, O. São Paulo: Atual Editora, 1998.

[42] Kupitz, S. Martini, H. e Perles, M. *On the polygonal diameter of the interior, resp. exterior, of a simple closed polygon in the plane.* ArXiv:1012.3541v1, 2010. `http://arxiv.org/abs/1012.3541`

[43] Lang, S. e Murrow, G. *Geometry.* New York: Springer-Verlag, 1988.

[44] Larson, R. E., Boswell, L. e Stiff, L. *Geometry.* Evanston, Illinois: McDougal Littell, 1998.

[45] Kin Y Li, *Vector Geometry.* Mathematical Excalibur, v6, n5, 2002. `www.math.ust.hk/excalibur/v6_n5.pdf`

[46] Legendre, A. M. *Elementos de Geometria.* Trad. Guimarães, M. F. A. Org. Guimarães L. C. Rio de Janeiro: Editora LIMC-UFRJ, 2009.

[47] Lima, E. L. *Áreas e Volumes.* Coleção Fundamentos da Matemática Elementar. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1985.

[48] Lima, E. L. *Polígonos equidecomponíveis.* Revista do Professor de Matemática, n. 11, 1987, 19-25.

[49] Lima, E. L. *Qual é a soma dos ângulos (internos ou externos) de um polígono (convexo ou não)?* Revista do Professor de Matemática, n. 19, 1991, 31-38.

[50] Lima, E. L. *et alii. A Matemática do Ensino Médio.* Volumes 1, 2 e 3. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1996.

[51] Lützen, J. *Why was Wantzel overlooked for a century? The changing importance of an impossibility result.* Historia Mathematica 36 (2009) 374-394.

[52] Marques, E. C. *Tópicos sobre polígonos.* São Carlos: UFSCar, Trabalho de Conclusão de Curso. 2012.

[53] Meyer, W. *Geometry and its Applications.* Second Edition. Amsterdan: Elsevier, 2006.

[54] Moise, E. E. *Elementary Geometry from an advanced standpoint.* Reading, Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, 1974.

[55] Moise, E. E. e Downs, F. L. *Geometria Moderna.* Volumes 1 e 2. Tradução de Watanabe, R. e Mello. D. A. Brasília: Editora Universidade de Brasília e Editora Edgard Blücher, 1971.

[56] Monteiro, L. H. J., *Elementos de Álgebra.* Coleção Elementos de Matemática. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Universidade de São Paulo e Ao Livro Técnico, 1969.

[57] Netto, S. L. *Construções Geométricas: Exercícios e Soluções*. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2009.

[58] Novaes, G. P. *Quadriláteros bicêntricos*. Revista do Professor de Matemática n. 109, 2024, 6-13.

[59] Obmep. *Banco de Questões 2010 e banco de provas*. https://www.obmep.org.br/

[60] Paterlini, R. R. *Aritmética dos números inteiros*. 3ª. ed. http://www.dm.ufscar.br/~ptlini/livros/ Consultado em 30 de março de 2026.

[61] Paterlini, R. R. *Aritmética dos números reais*. 2ª. ed. http://www.dm.ufscar.br/~ptlini/livros/ Consultado em 30 de março de 2026.

[62] Paterlini, R. R. *Geometria Elementar gênese e desenvolvimento. Tomo I: A Geometria na Sociedade e na Escola*. 2ª. ed. http://www.dm.ufscar.br/~ptlini/livros/ Consultado em 30 de março de 2026.

[63] Paterlini, R. R. *Investigações sobre um tipo especial de quadrilátero*. Revista do Professor de Matemática, n. 100, 2019, 24-30.

[64] Pedro, J. C. *Conexões da Geometria Analítica com a Geometria Plana de Posição*. Trabalho de Conclusão de curso de graduação. DM/UFSCar, 2017. https://www.dm.ufscar.br/~ptlini/TCC_Jheniffer_Camila_Pedro.pdf Consultado em 20 de junho de 2019.

[65] Pogorelov, A. V., *Geometria elemental*. Tradução de Vega, C. Moscou: Editora Mir, 1974.

[66] Polking, J. C. *The Geometry of the Sphere*. http://math.rice.edu/~pcmi/sphere/ Consultado em abril de 2011.

[67] PROFMAT - Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional. *Provas e Exames*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática. https://profmat-sbm.org.br/ Consultado em 2020-2026.

[68] Queiroz, M. L. B. e Rezende, E. Q. F. *Geometria Euclidiana Plana e construções geométricas*. 2ª. edição. Campinas: Editora Unicamp, 2008.

[69] Royster, D. C. *Spherical Geometry*. http://www.math.uncc.edu/~droyster/math3181/notes/hyprgeom/node5.html Consultado em abril de 2011.

[70] Revista do Professor de Matemática. *Seção de Problemas*. Diversos números. Rio de Janeiro e São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática e Universidade de São Paulo.

[71] Rudin, W. *Princípios de Análise Matemática*. Tradução de Brito, E. R. H. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico S. A. e Editora Universidade de Brasília, 1971.

[72] Sallum, E. M. *Ladrilhamentos*. 2007. https://www.ime.usp.br/~matemateca/textos/ladrilhamentos.pdf. Consultada cópia particular.

[73] Sampaio, J. C. V. e Dias, C. *Desafio Geométrico*. Módulo I, Curso de Especialização Matemática na Prática. Cuiabá: Central de Texto, 2013.

[74] Sánchez, J. E. S. *On Periodic Tilings with Regular Polygons*. Tese de Doutorado. Rio de Janeiro: IMPA, 2020. 158 p.

[75] Severi, F. *Elementos de Geometría*. Tomos primeiro e segundo. Tradução para o espanhol por Escobar, T. M. Barcelona/Buenos Aires, Editorial Labor, 1929.

[76] Smith, D. E. *History of Mathematics*. volumes I e II. New York: Dover Publications, 1958.

[77] Stillwell, J. *Numbers and Geometry*. New York: Springer-Verlag, 1998.

[78] Struik, D. J. *A Concise History of Mathematics*. 3ª. edição. New York Dover Publications, 1967.

[79] Truffault, B. *Géométrie Élémentaire*. Paris: Ellipses Éditions, 2001.

[80] Vinberg, E. B. (ed.) *Geometry II*. Encyclopaedia of Mathematical Sciences, volume 29. Berlin: Springer Verlag, 1993.

[81] Waerden, B. L. van der. *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations*. Berlin: Springer Verlag, 1983.

[82] Wagner, E. *Construções Geométricas*. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1993.

[83] Weisstein, Eric W. *MathWorld–A Wolfram Web Resource*. Itens consultados: *Triangle;* Endereço geral: `https://mathworld.wolfram.com/` Consulta no período 2016-2026.

[84] Wikipedia. Informações e figuras. Itens consultados: *Al-Biruni; Bisection; Bissetriz; Bretschneider's formula; Circumcircle; Circumference; Dodecagon; Encyclopedia of Triangle Centers; Estrela (polígono); Euclidean tilings by convex regular polygons; Euclides; Geometria esférica; Henry Billingsley; Hexagon; Incircle and excircles; Linha de Euler; Median (geometry); Octagram; Octant of a sphere; Octogone (versão em francês); Orthocenter; Os Elementos; Pentágono; Pitot theorem; Polygram (geometry); Proclus; Proporção áurea; Regular polygon; Quadrilateral; Star polygon; Terence Tao; Triangle; Triangle center.* Endereço geral: `https://en.wikipedia.org/wiki/` Consultas no período 2007-2026.

Índice de autores

Alexandre III (356-323 a.C.), 7
Aristóteles (384-322 a.C.), 10
Arquimedes (287-212 a.C.), 169, 171, 172

Birkhoff, G. D. (1884-1944), 8
Bourbaki, 98
Brahmagupta (598-c. 670), 147

Dudeney, E. H. (1851-1930), 159
Dumont, A. S. (1873-1932), 12

Escola
    Alexandria, 14
    de Alexandria, 98
    Pitagórica, 1, 5
    Platônica, 1
Euclides (c. 300 a.C.), v, 1, 4, 7, 8, 14, 215
Euler, L. (1707-1783), 126

Gauss, J. C. F. (1777-1855), 153, 184, 199, 216

Henry Billingsley (c.1538-1606), 8, 215
Herão (c. 10-80), 145, 146
Higgs, P. W. (1929-2024), 3
Hilbert, D. (1862-1943), 8

Ibrahim al-Amidi (1314-1394), 177

Jensen, C. A. (1792-1870), 216

Kepler, J. (1571-1630), 154

Lindemann, C. L. F. (1852-1939), 199

Os Elementos, 1, 4, 7, 98

Pasch, M. (1843-1930), 33, 68
Pitágoras (c. 585-500 a.C.), 1, 5, 14, 87, 156
Platão (c. 428-427 a.C.), 7
Proclus L. Diadochus (412-485), 1
Ptolomeu I Sóter (c. 367-283 a.C.), v, 7, 14

Roberval, Gilles P. de, (1602-1675), 99

Saccheri, G. G. (1667-1733), 2, 47

Tales, c. 546 a.C., 5, 157

Wantzel, P. L. (1814-1848), 199, 216

Índice de assuntos

$A-B-C$, 25
AB, 24, 25
$AB < CD$, 52
ABC, 25
$ABCD$, 46
$AB \cong CD$, 25
$\angle BAC$, 33
$\cap$, 9
$\cup$, 9
$\emptyset$, 8
$\hat{A} < \hat{B}$, 52
$\in$, 8
$\notin$, 8
$\overleftrightarrow{AB}$, 18
$\overrightarrow{AB}$, 25
$\perp$, 35
$\subset$, 9
$\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{AXB}$, 114
$d(A,B)$, 24
$m(\angle BAC)$, 34

ângulo, 33
  agudo, 35
  alterno externo, 70
  alterno interno, 70
  bissetriz, 35, 63
  complementar, 35
  congruência, 35
  correspondente, 70, 72
  exterior, 33
  interior, 33
  lado, 33
  medida, 34
  medida em radianos, 173
  obtuso, 35
  oposto ao lado, 33
  oposto pelo vértice, 35
  par linear, 35
  replementar, 175
  reto, 35
  suplementar, 35
  trissetriz, 67
  vértice, 33
antiparalelogramo, 158
área
  axiomas, 139
  paralelogramo, 144
  regiões poligonais, 139
  retângulo, 141
  trapézio, 144
  triângulo, 143
Axioma das Paralelas, 102
axioma, o que é, 6, 15
Axioma 1 (não trivialidade), 17
Axioma 2 (da reta), 18
Axioma 3 (incidência entre pontos e planos), 18
Axioma 4 (incidência entre reta e plano), 18
Axioma 5 (incidência entre planos), 20
Axioma 6 (da distância), 23
Axioma 7 (da régua), 24
Axioma 8 (da colocação da régua), 24
Axioma 9 (da separação do plano), 29
Axioma 10 (da separação do espaço), 30
Axioma 11 (da medida de ângulos em graus), 34
Axioma 12 (da construção de ângulos), 34
Axioma 13 (da adição de ângulos), 34
Axioma 14 (do suplemento), 35
Axioma 15 (da congruência *LAL*), 41
Axioma 16 (da unicidade da reta paralela), 71
Axioma 17 (da área), 140
Axioma 18 (da soma de áreas), 140
Axioma 19 (da área de triângulos congruentes), 140
Axioma 20 (da área de quadrados), 140
Axioma 20 (da unidade de área), 149

bissetriz, 35

cateto, 35
ceviana, 42, 64
circunferência, 25, 103
  ângulo central, 114
  ângulo inscrito, 114
  arco, 114
    medida em graus, 172
    medida em radianos, 173
  circunraio, 124
  circunscrita, 124
  comprimento, 169, 170
  corda, 25
  diâmetro, 25
  e ângulos, 114
  exterior, 28, 103
  fórmula do comprimento, 171
  inraio, 124

inscrita, 124
interior, 28, 103
medida em graus de um arco, 114
posição relativa com outra circunferência, 108
posição relativa com uma reta, 103
potência de um ponto, 122
raio, 25
reta tangente, 104
tangente a circunferência, 108
circunraio, 156
conceitos primitivos, 6
conjunto, 8
convexo, 26
diferença, 9
disjunto, 9
interseção, 9
subconjunto, 9
união, 9
unitário, 26
vazio, 8
construção
aritmética, 194
bissetriz, 191
decágono regular, 197, 198
mediatriz, 189
paralela, 192
paralelogramo, 194
polígonos regulares, 197
quadrado, 190
raiz quadrada, 195
tangentes, 191
transporte ângulo, 193
trapézio, 194
triângulo, 192–194
triângulo equilátero, 193
triângulo isósceles, 193
Construções com régua e compasso, 189
contraexemplo, 10
coordenada de um ponto, 24
correspondência
ALA, 41
HC, 54
LAA, 53
LAL, 41
LLL, 41, 43
cosseno, 87

decomposição
Dudeney, 159
triângulo, 159
dedução, 1, 4
demonstração, 9
direta, 9
por contraposição, 10
por redução ao absurdo, 10
desigualdade triangular, 56, 62
disco
área, 169, 171
fórmula da área, 172
setor
medida em graus, 173
medida em radianos, 173
distância
entre ponto e reta, 56
entre pontos, 24
distância entre parapelas, 73
dividir na mesma razão, 82

elemento, 8
espaço, 15
estar entre, 25
experimentos
ladrilhamento, 185, 186
mecânico, 98, 99, 137

Fórmula
Brahmagupta, 147
Herão, 146
fórmula
Gauss, 153

Geometria
como ciência, 3
de três pontos, 16
Geometria da Superfície Esférica, 6, 21, 71
Geometria Euclidiana, 15
história, 7
o que é, 6, 15
geometrias não euclidianas, 6

hipotenusa, 35

incentro, 124
indução, 4
inraio, 155

ladrilhamento, 183
Lei dos cossenos, 88, 91
Lei dos senos, 133
linha poligonal, 62, 161
Lógica, 9
losango, 78

método axiomático, 6
método científico, 3
método matemático, 3, 5
mediatriz, 37

número
áureo, 92, 200
número π
definição, 171
número perfeito, 4
números construtíveis, 198

ortocentro, 125

pantógrafo, 98

paralela
    retas, 69
paralelas
    axioma, 71
paralelogramo, 73
    área, 144
    altura, 144
pé da perpendicular, 45
perpendicular, 35
    pé, 45
pertence, 8
plano, 15
polígono
    linha poligonal, 62
polígono, 161
    área com coordenadas, 184
    ângulo, 161
    ângulo externo, 165
    circunscrito, 167
    convexo, 162
    diagonal, 161
    diagonal interior, 164, 174
    estrelado, 176
    inscrito, 167
    lado, 161
    não convexo, 174
    octograma, 176
    perímetro, 161
    regular, 166
    triangulação, 164, 174
    vértice, 161
polígono regular
    apótema, 168
    circunferência circunscrita, 167
    circunferência inscrita, 167
    elementos, 168
    triângulo central, 168
polígonos, 161
poligrama, 176, 177
    p-grama, 177
    composto., 177
    regular, 177
ponto, 15
    simétrico, 45
pontos
    colineares, 17
    coplanares, 17
projeção
    conjunto sobre reta, 45
    ponto sobre reta, 45
proporção, 82
proposição, 9
    condicional ou implicativa, 9
    contrária, 9
    contrapositiva, 9
    recíproca, 9

quadrado, 77
quadrilátero, 2, 46, 51
    área, 147, 152, 153
    ângulos consecutivos, 46
    bicêntrico, 136, 159
    côncavo, 46
    circuncentro, 128, 132
    circunscritível, 127
    circunscrito, 127
    convexo, 46, 51
    diagonal, 46, 51
    especial, 136
    fórmula de Brahmagupta, 147
    incentro, 128, 132
    inscritível, 127
    inscrito, 127
    lados consecutivos, 46
    pipa, 159
    plano, 46
    reta suporte, 46
    trapézio, 97
    unicêntrico, 136
    vértice reentrante, 52
    vértice saliente, 52
    vértices consecutivos, 46
quadrilátero de Saccheri, 47, 63, 77
quarta proporcional, 196

radiano, 173
razão de semelhança, 84
região
    poligonal, 139
    triangular, 139
região poligonal
    área, 140
retângulo, 66, 77
    área, 141
    áureo, 92, 200
    razão, 92
    semelhante, 92
reta, 15
reta suporte, 25
retas
    concorrentes, 18
    paralelas, 68, 69
    perpendiculares, 36, 44
    reversas, 69
retas paralelas, 69

segmento, 25
    comprimento ou medida, 25
    congruência, 25
    extremidades, 25
    interior, 25
    liga ponto e reta, 45
    ponto médio, 27
semelhança, 69, 84
semicircunferência, 87, 114
    medida em graus, 114
semiespaço, 30

lado, 30
oposto, 30
origem, 30
semiplano, 30
lado, 30
oposto, 30
origem, 30
semirreta, 25
oposta, 25
origem, 25
seno, 87
separação da reta, 30, 32
sequência dedutiva, 10
simétrico, 45
sistema de coordenadas, 24

tangente, 87
Teorema
de Tales, 82–84
Fundamental da Proporcionalidade, 82
Pitágoras, 87, 147, 156
tetraedro, 32
trapézio, 97, 144
altura, 144
área, 144
triângulo, 25
acutângulo, 35
altura, 42
ângulo, 33
ângulo adjacente, 52
ângulo externo, 52, 72
área, 143, 146, 151, 153
baricentro, 126
bissetriz, 42
cálculo altura, 145, 152
cálculo mediana, 92
cálculo bissetriz, 96
centro de equilíbrio, 127
centro de massa, 127
centro geométrico, 127
centróide, 126, 127
centróide ou baricentro, 95
ceviana, 42
circuncentro, 79, 97, 124
circunscrito, 124
congruência, 39
equilátero, 62, 97
escaleno, 25
exincentro, 136
fórmula de Herão, 146
incentro, 64
inscrito, 124
interior, 32, 62
isósceles, 25, 42
lado, 25
mediana, 42
obtusângulo, 35
órtico, 135
ortocentro, 66
perímetro, 25
pontos notáveis, 123
reta de Euler, 126
retângulo, 35, 54, 59, 72, 86
semelhança, 84
semiperímetro, 25
soma dos ângulos, 5, 6, 72
soma dos ângulos internos, 80, 100, 101
vértice, 25