Geometria Elementar
gênese e desenvolvimento

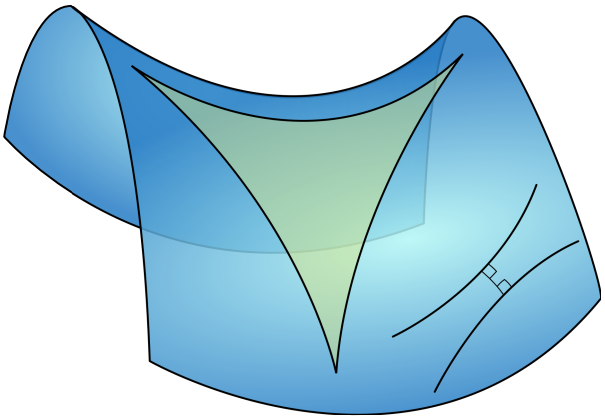
Tomo IV: Tópicos de Geometria Elementar

2ª. edição

Em fase de revisão

Sugestões:

paterlini@ufscar.br



Roberto Ribeiro Paterlini

UFSCar

Roberto Ribeiro Paterlini

Geometria Elementar
gênese e desenvolvimento

Tomo IV: Tópicos de Geometria Elementar

um curso superior
para formação e atualização de
professores de Matemática



Data da primeira versão: 01 de março de 2010

2ª. edição, versão alpha do Tomo IV em fase de revisão: 31 de outubro de 2026

Departamento de Matemática

UFSCar

Copyright © março de 2010 by Roberto Ribeiro Paterlini
Departamento de Matemática, UFSCar.

A presente versão está disponível em um arquivo em formato .pdf que pode ser acessado a partir da minha página pessoal.

Trata-se da construção de uma proposta para o ensino da Geometria Elementar em escolas superiores. Imaginamos o uso deste livro como texto principal ou de apoio em cursos de formação de professores de Matemática para o ensino básico. Para sugestões ou perguntas favor se comunicar com o autor no endereço paterlini@ufscar.br .

As figuras aqui utilizadas e que não foram construídas pelo autor são de domínio público ou livres para uso não comercial. As referências às figuras estão no Apêndice B. Caso tenha havido algum engano solicitamos que sejamos alertados. Favor usar o endereço paterlini@ufscar.br

O *Copyright* © deste texto pertence ao autor, na forma da lei. É permitido o *download* dos arquivos para uso pessoal, com transferência para ledores eletrônicos ou para impressão, na forma da lei, sem qualquer ônus. É proibido o uso comercial em todo ou em parte de qualquer material aqui disponibilizado, por qualquer meio. É vedada a modificação desse texto, sob qualquer forma. Solicitamos que se forem feitas impressões em escala por agente educacional, público ou privado, que o material seja distribuído gratuitamente, e não sejam cobradas taxas, nem mesmo a título de "preço de custo". É vedada a disponibilidade deste texto em outros endereços da internet, particularmente sítios que comercializam o acesso.

Gratos.

Figura da capa: Triângulo e retas paralelas em uma superfície hiperbólica. Informações sobre a imagem: Apêndice B.

Este texto foi editado em LaTeX 2ε pelo autor, que agradece à comunidade TeX pelos meios disponibilizados.

Sumário

Sumário i

Apresentação iii

20 Geometria euclidiana plana com coordenadas 3
20.1 Introdução . . . 3
20.2 Um modelo algébrico da Geometria Plana . . . 3
20.3 As retas no modelo algébrico . . . 4
20.4 Distância no modelo algébrico . . . 5
20.5 Paralelismo no modelo algébrico . . . 6
20.6 Outras propriedades do modelo algébrico . . . 8
20.7 Coordenadas cartesianas retangulares . . . 9
20.8 Problemas . . . 12
20.9 Temas para investigação . . . 13

21 Isometrias do plano 15
21.1 Introdução . . . 15
21.2 Transformações do plano . . . 15
21.3 Isometrias do plano . . . 17
21.4 Propriedades geométricas das isometrias . . . 18
21.5 Isometrias e congruência de triângulos . . . 22
21.6 Isometrias em coordenadas . . . 23
21.7 Isometrias e o modelo algébrico . . . 25
21.8 Problemas . . . 25
21.9 Temas para investigação . . . 28

22 Geometria da Superfície Esférica 29
22.1 Introdução . . . 29
22.2 Ideias iniciais . . . 29
22.3 Bases da Geometria da Superfície Esférica . . . 31
22.4 Um resultado não tão surpreendente na GSE . . . 33
22.5 Comparando a GSE com a GE . . . 34
22.6 Geometrias elípticas . . . 35
22.7 Problemas . . . 35
22.8 Temas para investigação . . . 37

23 Geometria hiperbólica 39
23.1 Introdução . . . 39
23.2 Axiomas da Geometria Hiperbólica Plana . . . 40

23.3 Propriedades de triângulos na GH . . . 42
23.4 Modelos euclidianos de GH . . . 45
23.5 Outras propriedades da GH . . . 46
23.6 Problemas . . . 48
23.7 Temas para investigação . . . 51

24 Outros Tópicos de Geometria Euclidiana 53
24.1 Introdução . . . 53
24.2 Os Princípios de Cavalieri para áreas e volumes . . . 53
24.3 Problemas . . . 56
24.4 Volumes e áreas de superfícies por integração . . . 57
24.5 Problemas . . . 59
24.6 Exemplos em Probabilidade Geométrica . . . 60
24.7 Alguns desafios da Geometria Plana . . . 60
24.8 Problemas . . . 61
24.9 Temas para investigação . . . 61
24.10 Atividades para licenciandos e professores . . . 61

A Respostas e sugestões 63

B Créditos das figuras 65

Referências Bibliográficas 67

Índice de autores 71

Índice de assuntos 73

Apresentação

Há um caminho fácil para a Geometria ? [1]

Sobre este texto



Este texto foi inicialmente escrito como uma tentativa de orientação para os estudos de Geometria a serem realizados na disciplina *Geometria - Teoria e Experimentação* do Programa de pós-graduação em Ciências Exatas (PPGECE) da UFSCar. Foi aplicado para as turmas de 2010, 2011 e 2012. Estamos agora fazendo ampliações e incluindo mais detalhes com o objetivo de preparar um texto para ser usado também em cursos de formação e atualização de professores do ensino básico.

Nossa concepção fundamental

A interação entre o ensinar e o aprender no campo das formas, em todos os reinos da natureza, gera a Geometria como força criativa.

Agradecimentos

Agradeço aos colegas professores do PPGECE e demais colegas do Departamento de Matemática da UFSCar que têm contribuído com esse texto. Agradeço principalmente aos estudantes de mestrado do PPGECE das turmas de 2010, 2011 e 2012, e aos estudantes do curso de licenciatura em Matemática da UFSCar.

Tudo que está escrito aqui (bem, quase tudo) aprendi com meus professores ou em livros e outros textos, a todos minha gratidão. Esforcei-me em fazer as referências corretas na Bibliografia. Uma observação especial: inúmeras informações e imagens que aqui utilizei eu as obtive na Wikipedia, um belo projeto coletivo.

São Carlos, 23 de abril de 2015.

Prof. Roberto Ribeiro Paterlini.

Sobre a 2ª. edição

Para facilitar as atualizações assim como o uso docente e discente, repartimos o texto da 1ª. edição em Tomos. Realizamos correções e completamos partes faltantes.

São Carlos, 31 de outubro de 2026.

Prof. Roberto Ribeiro Paterlini.

[1] Pergunta que teria sido feita a Euclides pelo Rei do Egito Ptolomeu I.

Apresentação do Tomo IV: Tópicos de Geometria Elementar

Neste Tomo IV de nosso texto "Geometria Elementar gênese e desenvolvimento", temos o objetivo de desenvolver alguns assuntos de interesse do futuro professor de Matemática. Nos cursos de Licenciatura, temas como Isometrias, Geometria da Superfície Esférica e Geometria Hiperbólica, são abordados em trabalhos de conclusão de curso ou em Iniciação Científica por um ou outro estudante. Nossos resumos têm a pretensão de apresentá-los a todos. Aproveitamos ainda para fazer uma conexão da Geometria Euclidiana Plana com a Geometria Analítica, mostrando que, essencialmente, tratam da mesma matéria, mas com métodos diferentes.

Segue um resumo bem suscinto de cada capítulo.

Capítulo 20: Geometria euclidiana com coordenadas. O sistema cartesiano de coordenadas proporciona um modelo para a Geometria Euclidiana. Ele é estudado, normalmente, em cursos de Geometria Analítica. No presente texto chamamos a atenção para alguns pontos de contato mais estreito entre a Geometria Euclidiana Axiomática e a Geometria com Coordenadas. Por simplicidade, limitamo-nos ao plano.

Capítulo 21: Isometrias do plano. As transformações do plano que preservam distância constituem um instrumento para o desenvolvimento e uso do conceito de congruência no ambiente da Geometria com Coordenadas. Alguns especialistas defendem o uso desse instrumento logo no início do aprendizado da Geometria. Claramente não foi assim que procedemos nesta coleção. Agora, no final de nosso curso, fazemos uma apresentação, identificamos as isometrias do plano e estudamos algumas de suas propriedades.

Capítulo 22: Geometria da Superfície Esférica (GSE). Comentada no Capítulo 8 do Tomo II, constitui interessante opção à Geometria Euclidiana. Aqui desenvolvemos os principais conceitos da GSE e estudamos algumas de suas propriedades.

Capítulo 23: Geometria Hiperbólica (GH). Geometria que, a cada dia, ganha mais importância. Seu estudo não é fácil, pois seus modelos são um tanto complicados. Neste texto apresentamos as propriedades mais elementares da GH.

Capítulo 24: Outros Tópicos de Geometria Euclidiana. Fazemos uma vista em volumes de sólidos e área de superfícies, trazendo sua conexão com métodos de Análise. Pode ser de interesse, ainda, alguns problemas de Geometria Discreta e de Probabilidade Geométrica.

Capítulo 20

Geometria euclidiana plana com coordenadas

20.1 Introdução

Estivemos estudando, nos Tomos II e III desta coleção, um sistema axiomático para a Geometria Euclidiana. Acompanhamos as ideias de alguns autores, como [38], e adotamos um sistema adaptado do que foi proposto pelo matemático George D. Birkhoff em 1932. Esse sistema assume que já foi construído o conjunto dos números reais e que são conhecidas suas propriedades básicas. Com isso obtemos uma grande simplificação e nos aproximamos da forma com que a Geometria costuma ser apresentada no Ensino Fundamental.

Neste Capítulo construímos um modelo para a Geometria Euclidiana, denominado *Geometria Analítica*. Consiste em considerar o conjunto $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e definir algebricamente os objetos geométricos. É um dos modelos mais utilizados da Geometria Euclidiana, pois permite o uso intensivo dos métodos algébricos, conferindo grande facilidade na manipulação dos objetos geométricos e na generalização para dimensões superiores.

O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais é utilizado para modelar a reta, $\mathbb{R}^2$ é utilizado para modelar o plano e $\mathbb{R}^3$, o espaço. Se $n > 3$, chamamos $\mathbb{R}^n$ de *espaço multidimensional*. Neste texto nos limitamos em considerar $\mathbb{R}^2$, e restringimos nossos estudos a alguns aspectos desse modelo. Para obter mais detalhes confira observações do autor [23], página 140 e seguintes.

20.2 Um modelo algébrico da Geometria Plana

O conjunto $\mathbb{R}^2$, chamado *produto cartesiano de* $\mathbb{R}$ *por* $\mathbb{R}$, pode ser assim representado:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

O símbolo (x, y), denominado *par ordenado*, significa que estamos tomando os números reais x e y em ordem, isto é, em (x, y), x é o primeiro número (chamado *abscissa*) e y é o segundo número (chamado *ordenada*). Entendemos que os pares ordenados obedecem à seguinte condição de identidade:

$$(x, y) = (w, v) \iff x = w \text{ e } y = v.$$

Para construir nosso modelo de geometria, consideramos esse conjunto como um plano euclidiano, e chamamos seus elementos de *pontos*. Dessa forma estamos admitindo o

Axioma Fundamental da Geometria Analítica: *(i) Os pontos da reta euclidiana são associados biunivocamente com os elementos de* $\mathbb{R}$. *(ii) Os pontos do plano euclidiano são associados biunivocamente com os elementos de* $\mathbb{R}^2$.

Portanto, em nosso modelo, temos um plano como um conjunto de pontos que podem ser expressos algebricamente. Para completar a definição de nosso modelo precisamos determinar que tipo de subconjuntos de pontos são as retas.

Definição 20.1. Dados números reais a, b e c, sendo a e b não simultaneamente nulos, a *reta de coeficientes a, b e c* é o subconjunto $R_{a,b,c}$ de $\mathbb{R}^2$ definido por

$$R_{a,b,c} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by + c = 0\}.$$

A expressão $ax + by + c = 0$ chama-se *equação geral da reta.* Observamos a diferença entre o modelo tradicional de geometria euclidiana e o modelo algébrico. No primeiro, as retas constituem um conceito espontâneo, construído pelos indivíduos através de seu contato com fenômenos naturais e sociais. Ali não temos propriamente uma definição para as retas: elas existem espontanemante e obedecem a certas condições, denominadas axiomas. Em nosso presente modelo as retas são definidas por uma expressão algébrica.

Todos os axiomas da Geometria Euclidiana que se referem ao plano podem ser demonstrados como teoremas em nosso modelo algébrico. Vemos, a seguir, alguns aspectos mais simples dessa correspondência.

20.3 As retas no modelo algébrico

Vamos no ocupar, nesta seção, em demonstrar o primeiro axioma da Geometria Euclidiana relacionado ao plano. Esse é o Axioma 2, apresentado na Seção 9.4 do Tomo II [44]:

Axioma 2 (da reta)

(a) Dados dois pontos diferentes, existe uma e uma única reta que os contém. (b) Toda reta contém pelo menos dois pontos.

Para verificar a parte b) basta notar que, se $a \neq 0$, os pontos $(-c/a, 0)$ e $(-(b+c)/a, 1)$ estão na reta. Por outro lado, se $a = 0$, os pontos $(0, -c/b)$ e $(1, -c/b)$ estão na reta.

Para verificar a parte a), começamos examinando melhor a definição de reta dada em 20.1. Notemos que a equação $ax + by + c = 0$ admite multiplicidades, ou seja, o conjunto de pontos (x,y) definido por $ax + by + c = 0$ é o mesmo que o definido por $kax + kby + kc = 0$, qualquer que seja o número $k \neq 0$. Isto é, as retas $R_{a,b,c}$ e $R_{ka,kb,kc}$ são iguais.

Reciprocamente, se $R_{a_1,b_1,c_1} = R_{a_2,b_2,c_2}$, então existe $k \neq 0$ tal que $(a_1,b_1,c_1) = k(a_2,b_2,c_2)$. O Problema 20.8.2 solicita a demonstração desse fato.

Uma consequência é que, se $a \neq 0$, podemos escrever $x + (b/a)y + (c/a) = 0$ em vez de $ax + by + c = 0$, e se $b \neq 0$, podemos escrever $(a/b)x + y + (c/b) = 0$. Como sempre temos $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, as retas são de pelo menos uma das formas:

$$R_{1,b,c} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + by + c = 0\} \quad \text{ou} \quad R_{a,1,c} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + y + c = 0\}.$$

Notemos também que os pontos $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ estão na reta $R_{a,b,c}$ quando

$$\begin{cases} ax_1 + by_1 + c &= 0 \quad \text{e} \\ ax_2 + by_2 + c &= 0. \end{cases} \tag{20.1}$$

Subtraindo as equações (20.1) vem $a(x_1 - x_2) + b(y_1 - y_2) = 0$. Se $y_1 \neq y_2$ podemos escrever

$$b = -a\frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2} \quad \text{e} \quad c = -ax_1 - by_1,$$

e se $x_1 \neq x_2$ temos

$$a = -b\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \quad \text{e} \quad c = -ax_1 - by_1.$$

Vejamos agora o

Teorema 20.2. *Dois pontos diferentes quaisquer determinam uma única reta.*

Demonstração. Sejam $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ pontos diferentes. Isso significa que $x_1 \neq x_2$ ou $y_1 \neq y_2$. Se $x_1 \neq x_2$, de acordo com as observações acima, podemos tomar $b = 1$ com $a = -\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ e $c = -ax_1 - y_1$. Vemos que a reta

$$R_{-\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}, 1, \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}x_1 - y_1}$$

contém A e B. Por outro lado, se $y_1 \neq y_2$, podemos tomar $a = 1$ com $b = -\frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2}$ e $c = -x_1 - by_1$. Vemos que a reta

$$R_{1, -\frac{x_1-x_2}{y_1-y_2}, -x_1 + \frac{x_1-x_2}{y_1-y_2}y_1}$$

contém A e B.

Notemos que se $x_1 \neq x_2$ e $y_1 \neq y_2$ as retas obtidas são iguais, pois seus coeficientes são os mesmos a menos do fator $k = -\frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2}$, que é $\neq 0$. Multiplicando os coeficientes da primeira por k obtemos os coeficientes da segunda. Concluímos que existe uma única reta que contém A e B. □

Demonstramos assim, em nosso modelo algébrico, o Axioma 2 da Geometria Euclidiana, conforme apresentado na Seção 9.4 do Tomo II. A parte c) do Axioma 3 ($\mathbb{R}^2$ tem três pontos não colineares) pode ser facilmente demonstrada. Confira o Problema 20.8.5. Os outros axiomas daquela Seção dizem respeito ao espaço.

20.4 Distância no modelo algébrico

Vejamos como ficam os axiomas de medida em nosso modelo algébrico. O primeiro axioma é o da distância, enunciado na Seção 9.6, do Tomo II [44]:

Axioma 6 (da distância)

A todo par de pontos diferentes corresponde um único número real positivo.

No nosso modelo algébrico definimos explicitamente uma distância através da função $d : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, dada por:

Definição 20.3. A *distância entre dois pontos* $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ quaisquer de $\mathbb{R}^2$ é o número

$$d(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}\,. \tag{20.2}$$

Temos motivos para considerar essa definição de distância, os quais comentaremos mais adiante. Admitimos que a distância em $\mathbb{R}^2$ esteja fixada com essa fórmula. Portanto a distância entre dois pontos A e B de $\mathbb{R}^2$ é única, dada pela expressão $d(A, B)$ acima. Deixamos para o estudante demonstrar a

Proposição 20.4. *Com as notações da Definição 20.3, temos: (i)* $d(A, B) = 0 \iff A = B$*; (ii) Se* $A \neq B$ *então* $d(A, B) > 0$.

Com isso vemos que vale, nesse modelo algébrico, o Axioma 6 da Geometria Euclidiana.

Surpreendentemente temos de imediato o

Teorema 20.5 (Desigualdade triangular)**.** *Quaisquer que sejam os pontos A, B e C de $\mathbb{R}^2$, temos $d(A,C) \leq d(A,B) + d(B,C)$.*

Igualmente deixamos para o estudante demonstrar esse resultado (Problema 20.8.8). Observamos que em nossa abordagem algébrica da Geometria obtivemos, logo de saída, a desigualdade triangular! Isso nos dá uma ideia das potencialidades do método algébrico. Na Geometria Euclidiana isso só aconteceu depois de muitos axiomas e teoremas.

20.5 Paralelismo no modelo algébrico

Vemos, nesta seção, que no modelo algébrico podemos demonstrar o Axioma 16, da unicidade da reta paralela, cuja afirmação é: "Em um plano, por um ponto fora de uma reta passa uma única paralela à reta dada.".

Já conhecemos a definição de retas paralelas em um plano: são duas retas que não se intersectam. Assim, para estudar retas paralelas e outras propriedades, precisamos conhecer condições algébricas sobre a posição relativa de duas retas. O resultado a seguir nos dá uma direção.

Teorema 20.6. *Sobre as retas $r = R_{a,b,c}$ e $s = R_{d,e,f}$ podemos afirmar que:*

i) *$r = s$ se e somente se* $\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} = 0.$

ii) *r intersecta s se e somente se* $\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \neq 0$ *e nesse caso a interseção é um único ponto.*

iii) *r é diferente e paralela a s se e somente se* $\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} = 0$ *e:*

$$\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} \neq 0 \quad ou \quad \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} \neq 0.$$

Demonstração. As retas dadas $r = R_{a,b,c}$ e $s = R_{d,e,f}$ têm o ponto $A = (x,y)$ em comum quando

$$\begin{cases} ax + by + c &= 0 \quad \text{e} \\ dx + ey + f &= 0. \end{cases} \tag{20.3}$$

Precisamos analisar (20.3) como um sistema de duas equações e duas incógnitas x e y. Para isso utilizamos a nomenclatura e os resultados de [4], pág. 33 e seguintes. O sistema (20.3) pode ter: (i) infinitas soluções (nesse caso as retas coincidem); (ii) uma única solução (nesse caso as retas se intersectam em um único ponto); (iii) nenhuma solução (nesse caso as retas são diferentes e paralelas).

Consideremos a *matriz dos coeficientes* A associada ao sistema e a *matriz ampliada* B dadas por

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}.$$

Observamos que A é matriz não nula, pois, por definição de reta, não podemos ter a e b simultaneamente nulos. Logo, se p é o posto de A, temos $1 \leq p \leq 2$. Ainda, $p = 1$ quando o determinante

de A é nulo. Se esse determinante é não nulo, então $p = 2$. De forma análoga, se q é o posto de B, temos $1 \leq q \leq 2$, e $q = 1$ se forem nulos todos os seus determinantes menores

$$\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} = 0 \quad \text{e} \quad \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} = 0 \quad \text{e} \quad \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} = 0.$$

Caso contrário, isto é, se um deles for não nulo, temos $q = 2$.

Aplicando o Teorema 2.5.4 de [4], pág. 45, temos:

i) $p = q = 1$. Esse caso ocorre quando os três determinantes menores acima são nulos, e, pelo Teorema citado, temos o caso em que o sistema (20.3) tem infinitas soluções. Isso equivale a $r = s$.

ii) $p = 2$. Esse caso ocorre quando o determinante de A é $\neq 0$. Temos necessariamente $q = 2$. Pelo Teorema citado, isso acontece quando o sistema (20.3) tem uma única solução, o que equivale a r intersecta s em um único ponto.

iii) $p = 1$ e $q = 2$. Esse caso ocorre quando o determinante de A é $= 0$ e um dos outros dois determinantes menores de B é $\neq 0$. Pelo Teorema citado, isso acontece quando o sistema (20.3) não tem solução, o que equivale a r diferente e paralelo a s. □

Já temos os instrumentos suficientes para demonstrar o axioma euclidiano das paralelas:

Teorema 20.7. *Por um ponto fora de uma reta passa uma e uma única paralela à reta.*

Demonstração. Sejam $r = R_{a,b,c}$ uma reta e $A = (p, q)$ um ponto fora dela. Assim $ap + bq + c \neq 0$. Queremos encontrar números d, e e f tais que a reta $s = R_{d,e,f}$ contém A e é paralela a r. Portanto as condições sobre os números d, e e f são $dp + eq + f = 0$ e, em virtude do Teorema 20.6, parte (iii),

$$\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} = 0 \quad \text{e} \quad \left(\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} \neq 0 \right).$$

Assim temos que ter $dp + eq + f = 0$ e $ae = db$ e ($af \neq cd$ ou $bf \neq ec$). Vamos considerar dois casos:

1º caso: $a \neq 0$.

Sejam $d = 1$, $e = b/a$ e $f = -p - (b/a)q$. Temos $dp + eq + f = 0$ e $ae = db$. Ainda, de $f = -p - (b/a)q$ vem $af = -ap - bq$. Como $ap + bq + c \neq 0$ segue que $c \neq -ap - bq$ ou $c \neq af$ e $cd \neq af$. Portanto a reta $s = R_{d,e,f}$, com $d = 1$, $e = b/a$ e $f = -p - (b/a)q$, contém A e é paralela a r.

2º caso: $b \neq 0$.

Sejam $e = 1$, $d = a/b$ e $f = -(a/b)p - q$. Temos $dp + eq + f = 0$ e $ae = db$. Ainda, de $f = -(a/b)p - q$ vem $bf = -ap - bq$. Como $ap + bq + c \neq 0$ segue que $c \neq -ap - bq$ ou $c \neq bf$ e $ce \neq bf$. Portanto a reta $s = R_{d,e,f}$, com $d = a/b$, $e = 1$ e $f = -(a/b)p - q$, contém A e é paralela a r.

Observemos que se $a \neq 0$ e $b \neq 0$, temos dois formatos para a reta paralela, mas são a mesma reta, pois

$$\left(\frac{a}{b}, 1, -\frac{a}{b}p - q\right) = \frac{a}{b}\left(1, \frac{b}{a}, -p - \frac{b}{a}q\right).$$

Portanto a reta paralela é única. □

Concluímos assim a demonstração do Axioma 16, da unicidade da reta paralela.

20.6 Outras propriedades do modelo algébrico

Fazemos alguns comentários adicionais sobre o modelo algébrico da Geometria Euclidiana.

Bastante útil é a *expressão vetorial* ou *paramétrica* da reta. Sejam $A_1 = (x_1, y_1)$ e $A_2 = (x_2, y_2)$ pontos diferentes de uma reta $R_{a,b,c}$. Usando as condições $ax_1 + by_1 + c = 0$ e $ax_2 + by_2 + c = 0$ (subtraindo membro a membro), temos $a(x_2 - x_1) = -b(y_2 - y_1)$. Chamando $v_x = x_2 - x_1$ e $v_y = y_2 - y_1$ temos $av_x = -bv_y$.

Queremos exprimir nesse esquema um ponto arbitrário $X = (x, y)$ dessa reta. Usando as condições $ax_1 + by_1 + c = 0$ e $ax + by + c = 0$, temos $a(x - x_1) = -b(y - y_1)$.

Suponhamos primeiro que $v_x \neq 0$. Seja t o número real tal que $t = \frac{x-x_1}{v_x}$. Observando que $b \neq 0$ temos $y - y_1 = \frac{-a}{b}(x - x_1) = \frac{-a}{b}tv_x = \frac{t}{b}(-av_x) = \frac{t}{b}(bv_y) = tv_y$. Portanto $X = A_1 + t(v_x, v_y)$ para algum número real t.

Suponhamos agora que $v_x = 0$. Então $v_y \neq 0$, pois $a_1 \neq A_2$. Seja t o número real tal que $t = \frac{y-y_1}{v_y}$. Temos $y - y_1 = tv_y$. De $av_x = -bv_y$ vem $b = 0$. Da definição de reta $R_{a,b,c}$ vale que $a \neq 0$. De $a(x - x_1) = -b(y - y_1)$ temos $x - x_1 = 0$. Portanto $x - x_1 = tv_x$. Obtivemos novamente $X = A_1 + t(v_x, v_y)$ para algum número real t.

Fica demonstrado que, para todo $X \in R_{a,b,c}$, existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $X = A_1 + t(v_x, v_y)$. Reciprocamente, dado $t \in \mathbb{R}$, $X = A_1 + t(v_x, v_y)$ é um ponto da reta $R_{a,b,c}$. Em outros termos,

$$R_{a,b,c} = \{(x_1, y_1) + t(v_x, v_y) | t \in \mathbb{R}\}.$$

Essa é a *expressão vetorial* ou *paramétrica* da reta. (v_x, v_y) denomina-se *vetor direcional* da reta. Note que $(v_x, v_y) = A_2 - A_1$. Portanto essa expressão pode ser escrita na forma $A_1 + t(A_2 - A_1)$. Confira o Problema 20.8.13 para mais detalhes.

Aproveitamos para definir segmento de reta. Dados pontos A e B, o segmento AB é o conjunto de pontos

$$AB = \{(1 - t)A + tB, \quad \text{para todo } t \in [0.1]\}.$$

Isso nos leva à definição algébrica de "estar entre": Um ponto C *está entre* os pontos A e B quando existe $t \in (0, 1)$ tal que $C = (1 - t)A + tB$.

Confira mais detalhes sobre segmentos no Problema 20.8.14. Por outro lado, o Problema 20.8.15 pede a definição de semirreta $\overrightarrow{AB}$.

Assim como na Geometria Euclidiana, um *ângulo* é a reunião de duas semirretas com origem comum e não colineares. Os axiomas de medida de ângulos da Geometria Euclidiana podem ser substituídos por construções. Para isso são usadas a funções trigonométricas, particularmente a tangente. No contexto dos números reais, elas são definidas como séries de potências. Confira, por exemplo, [34], página 392, ou [52], página 187.

Não desenvolvemos aqui esses detalhes. Para justificar a definição de retas perpendiculares, lançamos mão da seguinte propriedade, a qual comentamos mais adiante:

Se ϕ é o ângulo entre as retas concorrentes $R_{a,b,c}$ e $R_{d,e,f}$, então

$$\operatorname{tg}\phi = \pm\frac{ae - bd}{ad + be}, \quad \text{desde que } ad + be \neq 0. \tag{20.4}$$

Observando que, na expressão acima, a tangente de $\frac{ae-bd}{ad+be}$ não está definida para $ad + be = 0$, e lembrando que $\operatorname{tg}\phi$ não é definida para ϕ reto, fazemos a

Definição 20.8. As retas $R_{a,b,c}$ e $R_{d,e,f}$ se dizem perpendiculares quando $ad + be = 0$.

Com isso podemos provar o

Teorema 20.9. *Dados uma reta e um ponto (nela contido ou não), existe uma única perpendicular à reta contendo o ponto.*

A demonstração algébrica desse teorema é solicitada no Problema 20.8.12.

20.7 Coordenadas cartesianas retangulares

Estivemos desenvolvendo alguns aspectos do modelo algébrico da Geometria Euclidiana e, até o momento, não utilizamos desenhos. Mas eles são de grande auxílio para a compreensão e a investigação.

Um *eixo numérico* consiste de uma reta r com um sistema de coordenadas, proporcionado por uma bijeção $\mathbb{R} \leftrightarrows r$. Um *sistema de coordenadas retangulares* num plano é uma bijeção determinada por dois eixos numéricos perpendiculares que se intersectam em suas origens. O estudante conhece bem esse recurso, e vemos na Figura 20.1 um desenho desses eixos e a localização de um ponto genérico.

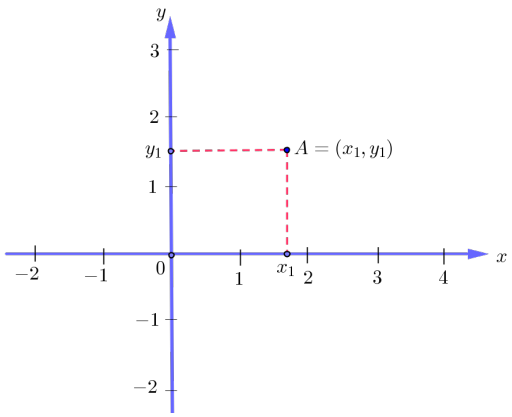


Figura 20.1. Desenho de um sistema de coordenadas retangulares.



Figura 20.2. René Descartes foi um importante filósofo e matemático francês. Como filósofo contribuiu com a epistemologia, metafísica e filosofia da mente. Sua frase mais famosa é "Penso, logo existo". Propunha o método sistemático de investigação, sempre permeado pela dúvida. Como matemático, juntamente com Pierre de Fermat, propôs o uso do sistema de coordenadas e a algebrização da Geometria, dando origem à Geometria Analítica. Mais detalhes sobre a imagem ao lado na página 65.

Vejamos como um desenho ajuda na compreensão da fórmula da distância que adotamos na Definição 20.3. Confira a Figura 20.3.

Dados dois pontos $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ e o segmento AB que os une, seu desenho evidencia o triângulo retângulo ABC com catetos $AC = x_2 - x_1$ e $BC = y_2 - y_1$. Mas desejamos que seja válido o Teorema de Pitágoras, que implica $AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$. Por isso adotamos a fórmula da distância (20.2).

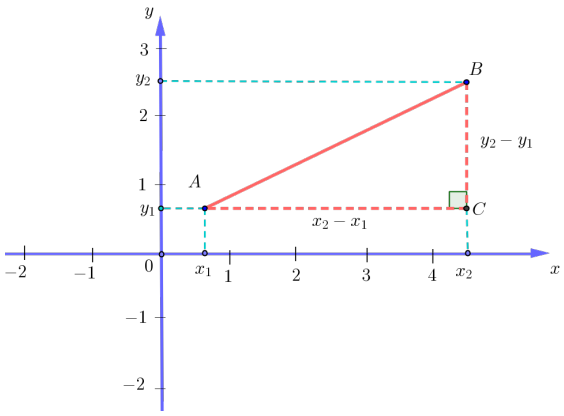


Figura 20.3. Fórmula da distância euclidiana no modelo algébrico.

Explicamos agora a ideia de ângulo entre retas para justificar a propriedade 20.4. Começamos explicando o que é a inclinação de uma reta $r = R_{a,b,c}$. Sejam $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ pontos dessa reta. Definimos sua *inclinação* (ou *declive*) I_r por:

$$I_r = \begin{cases} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} & \text{quando } x_1 \neq x_2; \\ \infty & \text{quando } x_1 = x_2. \end{cases} \tag{20.5}$$

Devido ao resultado do Problema 20.8.4, podemos escrever $r = R_{a,b,c} = R_{y_1 - y_2, x_2 - x_1, x_1 y_2 - x_2 y_1}$, com $a = y_1 - y_2$, $b = x_2 - x_1$ e $c = x_1 y_2 - x_2 y_1$. Temos então

$$I_r = \begin{cases} -\frac{a}{b} & \text{quando } b \neq 0; \\ \infty & \text{quando } b = 0. \end{cases} \tag{20.6}$$

Essas expressões não dependem dos pontos A e B escolhidos na reta $r = R_{a,b,c}$, e nem de seus coeficientes a, b e c. Confira o Problema 20.8.10.

Dado um sistema de coordenadas retangulares, dizemos que tem *direção horizontal* qualquer reta paralela ao eixo das abcissas Ox. Portanto, são retas da forma $R_{0,b,c}$. Observe que a inclinação dessas retas é zero. Ainda, a inclinação de uma reta é ∞ se, e somente se, ela é perpendicular às retas de direção horizontal.

Dada uma reta com inclinação nula, dizemos que seu ângulo de inclinação é nulo, e tem medida $0°$.

Seja agora uma reta $r = R_{a,b,c}$ com $a \neq 0$. Seja $A = (x_1, y_1) = (x_1, 0)$ o ponto em que essa reta intersecta o eixo Ox, e seja $B = (x_2, y_2)$ outro ponto dessa reta com $y_2 > 0$. Seja $C = (x_3, 0)$ um ponto do eixo Ox com $x_3 > x_1$. Definimos o *ângulo de inclinação* da reta r como $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{AC}$. Confira duas situações possíveis na Figura 20.4, em que o ângulo de inclinação está indicado por ϕ. Nesses desenhos faltou representar o caso em que a reta é perpendicular à direção horizontal.

Notemos que, na situação do desenho da esquerda da Figura 20.4, temos $x_2 - x_1 > 0$ e $\operatorname{tg} \phi = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = I_r$. Por outro lado, na situação da direita da mesma Figura, temos $x_1 - x_2 > 0$ e $\operatorname{tg}(\pi - \phi) = \frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2} = -I_r$. Sabendo que $\operatorname{tg}(\pi - \phi) = -\operatorname{tg} \phi$, temos novamente $\operatorname{tg} \phi = I_r$. Escrevendo de outra forma, $\operatorname{tg} \phi = \frac{-a}{b}$ em qualquer situação em que $b \neq 0$.

Por outro lado, na situação em que $b = x_2 - x_1 = 0$, a reta é perpendicular à direção horizontal, e ϕ é reto. Como tg de um ângulo reto não é definida, expressamos $\operatorname{tg} 90° = \infty$.

Notemos que esses valores não se modificam se o ponto A não estiver necessariamente no eixo Ox. Assim temos uma situação particular em que a medida de um ângulo em que um lado é a reta $R_{a,b,c}$ e o outro é uma semirreta horizontal é $\operatorname{arctg} \frac{-a}{b}$ se $b \neq 0$ e $90°$ se $b = 0$.

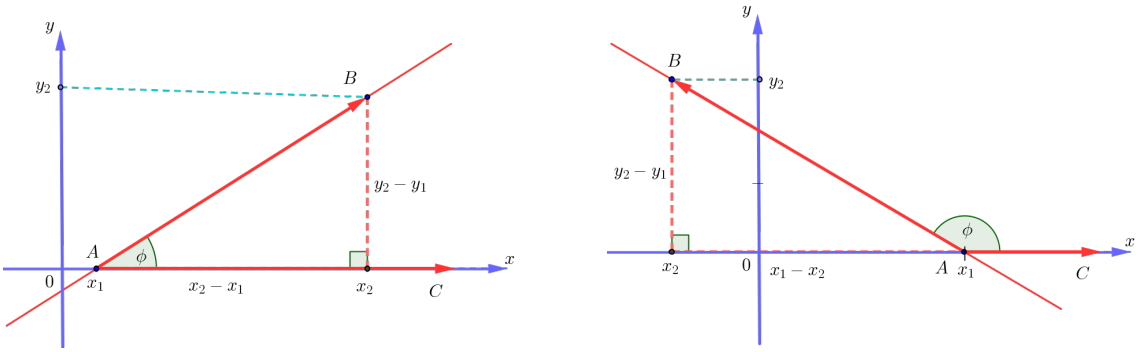


Figura 20.4. Ângulo de inclinação de uma reta.

Na situação geral, sejam $r = R_{a,b,c}$ e $s = R_{d,e,f}$ duas retas que se intersectam em $A = (x_1, x_2)$. Sejam ϕ_r e ϕ_s seus respectivos ângulos de inclinação. Na situação da Figura 20.5 o ângulo entre r e s é $\phi = \pm(\phi_s - \phi_r)$, sendo que o sinal depende da posição relativa das retas r e s.

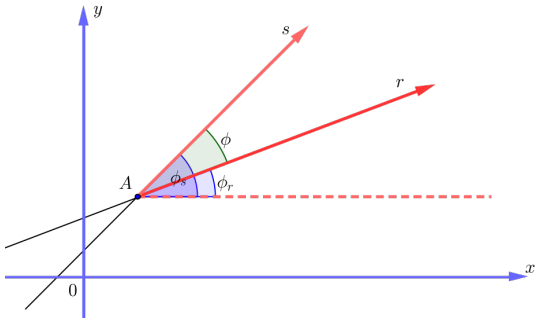


Figura 20.5. Ângulo entre retas.

Segue então

$$\operatorname{tg}\phi = \operatorname{tg}\pm(\phi_s - \phi_r) = \pm\operatorname{tg}(\phi_s - \phi_r) = \pm\frac{\operatorname{tg}\phi_s - \operatorname{tg}\phi_r}{1 + \operatorname{tg}\phi_s \operatorname{tg}\phi_r} = \pm\frac{\frac{-d}{e} - \frac{-a}{b}}{1 + \frac{-d}{e}\frac{-a}{b}} = \pm\frac{ae - bd}{ad + be},$$

desde que $ad + be \neq 0$. Justificamos assim a fórmula (20.4). Outras situações em que o posicionamento das retas r ou s admite perpendicularidade podem ser consideradas pelo estudante.

Um tópico muito importante do estudo algébrico da Geometria Euclidiana é a demonstração do caso *LAL* de congruência de triângulos. Para isso podemos usar a chamada "Lei dos Cossenos". Dado um triângulo ABC, temos $AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \cdot AC\cos\gamma$, em que $\gamma = m(\angle ACB)$. Essa fórmula pode ser demonstrada, e no Problema 20.8.18 solicitamos isso do estudante.

Vemos que a Geometria Analítica em $\mathbb{R}^2$ é um modelo algébrico para a Geometria Euclidiana Plana. Do mesmo modo procedemos com $\mathbb{R}^3$ e a Geometria Euclidiana Espacial. Portanto, fazendo uma construção inteiramente algébrica de $\mathbb{R}$ podemos, em seguida, construir a Geometria Euclidiana. Na Matemática isso é chamado de "aritmetização da Geometria". Em particular, do ponto de vista da Lógica, vemos que a Geometria Euclidiana é tão consistente quanto o conjunto $\mathbb{R}$.

20.8 Problemas

Problema 20.8.1. No texto definimos retas $R_{a,b,c}$ para números reais a e b não simultaneamente nulos. Por que foi feita essa restrição? O que é esse conjunto quando $a = 0$ e $b = 0$?

Problema 20.8.2. Complete as observações feitas no texto demonstrando que, se são iguais as retas $R_{a_1,b_1,c_1} = R_{a_2,b_2,c_2}$, então existe (um número real) $k \neq 0$ tal que $(a_2, b_2, c_2) = k(a_1, b_1, c_1)$.

Problema 20.8.3. Prove que três pontos diferentes $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ e $C = (x_3, y_3)$ são colineares se, e somente se, (é nulo o determinante)

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Em particular, o ponto (x, y) se encontra na reta que passa por dois pontos diferentes $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ se, e somente se,

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Problema 20.8.4. Explique por que, dados os pontos $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$, a única reta que os contém é $R_{y_1-y_2,x_2-x_1,x_1y_2-x_2y_1}$.

Problema 20.8.5. Demonstre que, no modelo algébrico de Geometria $\mathbb{R}^2$, vale a parte c) do Axioma 3, conforme apresentado na Seção 9.4 do Tomo II [44]: $\mathbb{R}^2$ tem (pelo menos) três pontos não colineares.

Problema 20.8.6. **a)** Com as notações da Definição 20.3, temos: (i) $d(A, B) = 0 \iff A = B$; (ii) Se $A \neq B$ então $d(A, B) > 0$. **b)** Vimos, na Geometria Euclidiana, que o comprimento de um segmento AB não depende da ordem com a qual os pontos são considerados, isto é, vale que $AB = BA$. Verifique que isso também vale no modelo algébrico, mostrando que $d(A, B) = d(B, A)$.

Problema 20.8.7. Defina a *norma* $||X|| = \sqrt{x^2 + y^2}$ para todo $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. **a)** Explique por que $||X|| \geq 0$ para todo $X \in \mathbb{R}^2$ e $||X|| = 0 \iff X = (0, 0)$. **b)** Explique por que $||tX|| = |t|\,||X||$ para todo $X \in \mathbb{R}^2$ e todo $t \in \mathbb{R}$. **c)** Explique por que $d(A, B) = ||B - A||$ quaisquer que sejam $A, B \in \mathbb{R}^2$. **d)** O seguinte resultado antecede a desigualdade triangular. Demonstre que $||X + Y|| \leq ||X|| + ||Y||$ quaisquer que sejam $X, Y \in \mathbb{R}^2$.

Problema 20.8.8. Prove o Teorema 20.5: Quaisquer que sejam os pontos A, B e C de $\mathbb{R}^2$, temos $d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)$. (Sugestão: no Problema 20.8.7 parte d) tome $X = C - B$ e $Y = B - A$.)

Problema 20.8.9. **a)** Prove que as retas $R_{a,b,c}$ e $R_{d,e,f}$ são paralelas se e somente se existe $k \neq 0$ tal que $d = ka$, $e = kb$ e $f \neq kc$. **b)** Prove que as retas $R_{a,b,c}$ e $R_{d,e,f}$ são paralelas se, e somente se, $R_{d,e,f} = R_{a,b,c'}$ para algum número c' diferente de c.

Problema 20.8.10. **a)** Demonstre que a inclinação de uma reta $r = R_{a,b,c}$, conforme definida em (20.5), não depende dos pontos escolhidos e nem dos coeficientes a, b e c. **b)** Explique por que retas paralelas têm a mesma inclinação.

Problema 20.8.11. Complete a Definição 20.8 provando que, se as retas $R_{a,b,c}$ e $R_{d,e,f}$ satisfazem à condição $ad + be = 0$, então elas se intersectam em um único ponto.

Problema 20.8.12. Demonstre que, dados um ponto $A = (p, q)$ e uma reta $r = R_{a,b,c}$, a reta $s = R_{b,-a,aq-bp}$ contém A e é perpendicular a r. Demonstre que a perpendicular é única.

Problema 20.8.13. Dada uma reta $R_{a,b,c}$, fixemos dois de seus pontos $A_1 = (x_1, y_1)$ e $A_2 = (x_2, y_2)$. Seja $(v_x, v_y) = A_2 - A_1$. **a)** Explique por que, dado $t \in \mathbb{R}$, $X = A_1 + t(v_x, v_y)$ é um ponto da reta $R_{a,b,c}$. **b)** Explique por que a expressão paramétrica dessa reta pode ser escrita na forma $X = A_1 + t(A_2 - A_1)$, ou $X = (1-t)A_1 + tA_2$, com $t \in \mathbb{R}$. **c)** Demonstre que é biunívoca a aplicação $\xi : \mathbb{R} \to R_{a,b,c}$ definida por $\xi : t \to A_1 + t(v_x, v_y)$.

Problema 20.8.14. Algumas propriedades de segmentos. Para demonstrar, use apenas recursos algébricos. **a)** Explique por que o segmento AB é um subconjunto da reta que contém A e B. **b)** $AB = BA$, quaisquer que sejam os pontos A e B. **c)** Se $C \in AB$, então $d(A,C) + d(C,B) = d(A,B)$. **d)** Defina ponto médio de um segmento AB, e encontre uma expressão para ele em função de A e B.

Problema 20.8.15. **a)** Defina algebricamente semirreta $\overrightarrow{AB}$ de origem A e contendo B. **b)** Explique por que sua definição não depende de B.

Problema 20.8.16. **a)** Dada uma reta $R_{a,b,c}$, defina algebricamente os semiplanos por ela determinados. **b)** Demonstre que cada semiplano é convexo. **c)** Explique por que se A está em um semiplano e B em outro, então AB intersecta a reta.

Problema 20.8.17. Demonstre que vale o Teorema de Pitágoras a partir da definição de distância 20.3. Em outros termos, sejam $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ e $C = (x_3, y_3)$ pontos tais que $AC \perp BC$ no ponto C. Verifique algebricamente que $d(A,B)^2 = d(A,C)^2 + d(B,C)^2$.

Problema 20.8.18. **a)** Demonstre a Lei dos Cossenos. **b)** Explique por que a Lei dos Cossenos implica que a correspondência *LAL* é uma congruência. Portanto, essa correspondência não precisa ser assumida como um Axioma em nosso modelo algébrico.

Problema 20.8.19. Demonstre algebricamente que todo triângulo tem baricentro (ponto de encontro das medianas), e ache sua distância aos vértices.

20.9 Temas para investigação

Tema 20.9.1. Consideremos o conjunto $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$, formado apenas pelos números 0 e 1, munido das seguintes operações de adição e multiplicação, diferentes das operações usuais:

$$0+0=0 \quad 0+1=1 \quad 1+0=1 \quad 1+1=0$$

$$0\cdot 0=0 \quad 0\cdot 1=0 \quad 1\cdot 0=0 \quad 1\cdot 1=1$$

Podemos compreender essa estrutura como uma representação do comportamento dos números pares e ímpares, com 0 representando os pares e 1, os ímpares. Por exemplo, ímpar mais ímpar é par, e isso está associado ao fato de que estamos considerando $1 + 1 = 0$.
a) Investigue a Geometria modelada pelo produto cartesiano $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Estude quais são as suas retas e suas propriedades.

b) Chamaremos de *ter* os números inteiros que têm resto zero quando divididos por 3, de *ínter* os que têm resto 1, e *alter* os que têm resto 2. Defina um conjunto $\mathbb{Z}_3 = \{0,1,2\}$ com operações de adição e multiplicação que reflita o comportamento recíproco dessas classes de números. Estude a Geometria representada por $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$.
c) Investigue generalizações dessas ideias para conjuntos $\mathbb{Z}_n = \{0,1,\ldots,n-1\}$.

Tema 20.9.2. Estude no artigo [39] fórmulas algébricas para o baricentro, o incentro, o ortocentro e o circuncentro de um triângulo qualquer.



Figura 20.6. Pierre de Fermat era francês, matemático amador, advogado, juiz, jurista e poliglota. Juntamente com René Descartes, inventou a Geometria Analítica. Deu uma contribuição significativa à Probabilidade e ao Cálculo Infinitesimal. É considerado o criador da moderna Teoria dos Números, tendo seu nome ligado, por exemplo, aos números de Fermat $2^{2^n}+1$, ao Pequeno Teorema de Fermat e ao Último Teorema de Fermat. Ao lado, foto de monumento a Pierre de Fermat (mais detalhes na página 65).

Tema 20.9.3. Estude em livros de História da Matemática, as origens da Geometria Analítica, e o papel que nela tiveram René Descartes e Pierre de Fermat. Em particular, Descartes se esforçou para convencer seus contemporâneos de que ele havia descoberto um método muito importante. Procure saber como ele fez isso.

Capítulo 21

Isometrias do plano

21.1 Introdução

Comentamos no Tomo II, Capítulo 9, Seção 9.12, como é importante, no estudo da Geometria, o conceito de congruência de figuras. Além de fornecer métodos para a investigação de propriedades geométricas, esse conceito traz a ideia de classificar as figuras e determinar as propriedades comuns às figuras de uma mesma classe.

Vimos que a congruência entre triângulos exerce um papel fundamental, e sua definição tradicional estabelece que dois triângulos são congruentes quando existe uma correspondência entre os seis pares de elementos desses triângulos (três lados e três ângulos), e os pares correspondentes têm a mesma medida. Esse é o denominado conceito estático de congruência.

Essa definição resolve bem essa questão no âmbito dos métodos da Geometria de Posição. Entretanto observamos que essa técnica não coincide com a noção espontânea de congruência, que envolve movimento. De acordo com essa noção, uma figura é congruente a outra quando podemos mover uma delas e fazê-la coincidir com a outra.

Vemos no presente Capítulo que a ideia de movimento em um plano pode ser operacionalizada pelas *transformações do plano*. Estudamos, em particular, um tipo especial de transformação, a *isometria*, que pode ser vista como um movimento no plano que transporta um triângulo qualquer sobre outro a ele congruente.

21.2 Transformações do plano

Começamos com a

Definição 21.1. Uma *transformação do plano* é uma função $T : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$. Dizemos que T *transporta* a figura $\mathscr{F}$ do plano sobre a figura $\mathscr{G}$ quando $T(\mathscr{F}) = \mathscr{G}$.

Vejamos alguns exemplos

Exemplo 21.2. A função $T : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y) = (2x,2y)$ é um exemplo de transformação do plano. Ela tem as seguintes particularidades: é uma bijeção do plano sobre o plano, transporta qualquer segmento AB sobre o segmento $T(A)T(B)$, sendo que o comprimento desse é o dobro do primeiro. Em particular T transporta um triângulo em outro triângulo semelhante ao primeiro, e a razão de semelhança é 2. Confira a Figura 21.1, em que vemos ilustrada a ação de T sobre um triângulo. Observe que podemos usar notação matricial para expressar T:

$$T(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

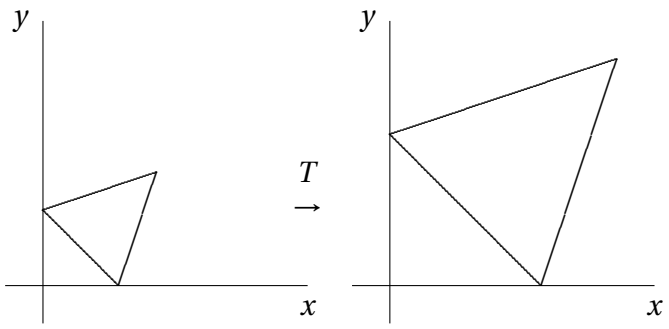


Figura 21.1. Ação de $T:\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$, $T(x,y)=(2x,2y)$ sobre um triângulo.

Definição 21.3. Uma *transformação linear do plano* é uma função $T:\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ da forma $T(x,y) = (ax+by, cx+dy)$, em que a, b, c e d são números reais. Em outros termos,

$$T(x,y) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Exemplo 21.4. Sejam k e l números reais não simultaneamente nulos. A função $T:\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y) = (x+k, y+l)$ é um exemplo de transformação do plano, denominada *translação*.

Exemplo 21.5. A função $T:\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y) = (x,0)$ é um exemplo de transformação do plano, denominada *projeção ortogonal sobre o eixo Ox*.

Exemplo 21.6. Seja r uma reta. Se (x,y) é um ponto fora de r, seu *simétrico em relação a r* é o único ponto $(\overline{x},\overline{y})$ tal que r é a mediatriz do segmento de extremos (x,y) e $(\overline{x},\overline{y})$. Por outro lado, se $(x,y) \in r$ dizemos que seu simétrico em relação a r é ele mesmo. Definimos agora a função $T_r:\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ tal que $T_r(x,y)$ é o simétrico de (x,y) em relação a r. Essa transformação do plano é denominada *reflexão em relação a r*. A reta r é denominada *reta de simetria* da reflexão.

Exemplo 21.7. Fixemos um ângulo de medida $\theta \neq 0$. A *rotação de ângulo θ em relação a* $(0,0)$ é a transformação do plano $T_\theta:\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ definida da seguinte forma. Primeiro, $T(0,0) = (0,0)$. Se $(x,y) \neq (0,0)$, consideramos o segmento $(0,0)(x,y)$, e o rotacionamos em um ângulo de valor $|\theta|$ no sentido anti-horário se $\theta > 0$, e no sentido horário se $\theta < 0$. Obtemos dessa forma um segmento $(0,0)(\overline{x},\overline{y})$. Definimos então $T_\theta(x,y) = (\overline{x},\overline{y})$.

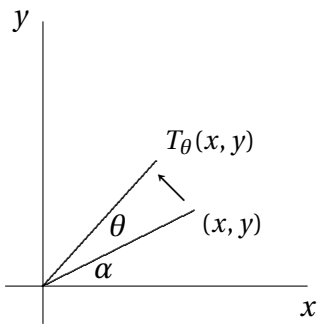


Figura 21.2. Ação de uma rotação de ângulo $\theta > 0$ sobre um ponto.

Para calcular a expressão de T_θ em coordenadas, fixemos $(x,y) \neq (0,0)$, e seja α o ângulo determinado pelo segmento $(0,0)(x,y)$ e o semieixo positivo Ox, no sentido anti-horário. Então $\theta+\alpha$ é o ângulo determinado pelo segmento $(0,0)T_\theta(x,y)$ e o semieixo positivo Ox (confira ilustração na

Figura 21.2 para o caso em que $\theta > 0$). Usando o Teorema de Pitágoras e escrevendo $d = \sqrt{x^2 + y^2}$ temos

$$(x, y) = (d\cos\alpha, d\,\mathrm{sen}\,\alpha)$$

e

$$T_\theta(x, y) = (d\cos(\theta + \alpha), d\,\mathrm{sen}(\theta + \alpha)).$$

Usando as fórmulas $\cos(\theta + \alpha) = \cos\theta\cos\alpha - \mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\alpha$ e $\mathrm{sen}(\theta + \alpha) = \cos\theta\,\mathrm{sen}\,\alpha + \mathrm{sen}\,\theta\cos\alpha$ vem

$$T_\theta(x, y) = (x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\,\theta, x\,\mathrm{sen}\,\theta + y\cos\theta).$$

Observe que T_θ é uma transformação linear, pois pode ser escrita na forma

$$T_\theta(x, y) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

21.3 Isometrias do plano

Conforme já comentamos, estamos interessados, nesta exposição de nosso modelo algébrico de Geometria, em estudar movimentos do plano que transportam um triângulo sobre outro congruente. Naturalmente o principal requisito para esse tipo de transformação é que ela deve transportar um segmento sobre outro segmento de mesmo comprimento. Veremos que é suficiente definir

Definição 21.8. Uma transformação do plano $T : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ chama-se *isometria euclidiana* ou, simplesmente, *isometria*, quando $d(T(A), T(B)) = d(A, B)$ para quaisquer pontos A e B do plano.

Em outros termos, as isometrias são transformações que preservam distâncias. Em particular, aqui estamos pensando na distância euclidiana d, definida em 20.3, página 5.

Vejamos, antes de mais nada, exemplos de isometrias. Uma isometria trivial é a identidade $Id : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$, dada por $Id(x, y) = (x, y)$. Outros exemplos são:

Exemplo 21.9. Toda translação $T : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$, dada por $T(x, y) = (x + k, y + l)$, definida no Exemplo 21.4, é uma isometria. De fato, se $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ são pontos quaisquer do plano, temos

$$d(T(A), T(B)) = \sqrt{(x_1 + k - (x_2 + k))^2 + (y_1 + l - (y_2 + l))^2} =$$

$$= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = d(A, B).$$

Exemplo 21.10. Toda reflexão $T_r : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ em relação a uma reta r, conforme definida no Exemplo 21.6, é uma isometria. A demonstração desse fato está solicitada no Problema 21.8.7.

Exemplo 21.11. Toda rotação $T_\theta : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ de ângulo θ em relação a $(0,0)$, definida no Exemplo 21.7, é uma isometria. Isso pode ser verificado usando-se sua expressão em coordenadas (a demonstração desse fato está solicitada no Problema 21.8.8). Esse fato também é consequência do Teorema 21.13 demonstrado logo abaixo.

No Exemplo 21.7 definimos rotação de ângulo θ em relação a $(0,0)$, mas podemos definir rotação de ângulo θ em relação a um ponto qualquer C do plano.

Definição 21.12. Sejam C um ponto de $\mathbb{R}^2$ e $\theta \neq 0$ um ângulo. A rotação de ângulo θ em relação a C é a transformação do plano $R = T_{C,\theta} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida da seguinte forma: $R(C) = C$, e, se $P \neq C$ é um ponto qualquer de $\mathbb{R}^2$, $R(P)$ é o ponto tal que $CR(P) = CP$ e a medida do ângulo $\widehat{PCR(P)}$ é $|\theta|$, medida contada a partir da semirreta $\overrightarrow{CP}$ no sentido horário se $\theta > 0$ e no sentido anti-horário se $\theta < 0$.

Temos

Teorema 21.13. *Toda rotação é uma isometria.*

Demonstração. Seja R a rotação de centro C e ângulo θ. Sejam P e Q dois pontos quaisquer do plano. Para provar que R é uma isometria devemos verificar que $PQ = R(P)R(Q)$.

Se $P = C$ e $Q \neq C$, temos $R(P)R(Q) = CR(Q) = CQ = PQ$, por definição de rotação. O mesmo ocorre se $P \neq C$ e $Q = C$.

Suponhamos $P \neq C$ e $Q \neq C$. Se C, P e Q forem colineares, então C, $R(P)$ e $R(Q)$ são colineares, e suas posições relativas na reta são respectivamente as mesmas que as daqueles três pontos. Como $CP = CR(P)$ e $CQ = CR(Q)$, então $R(P)R(Q) = PQ$.

Suponhamos que C, P e Q não sejam colineares. Temos uma situação como a que está ilustrada na Figura 21.3. Os triângulos PCQ e $R(P)CR(Q)$ são congruentes pelo caso LAL, pois $CP = CR(P)$, $CQ = CR(Q)$ e $\widehat{PCQ} \cong \widehat{R(P)CR(Q)}$. Logo $R(P)R(Q) = PQ$, e R é uma isometria. □

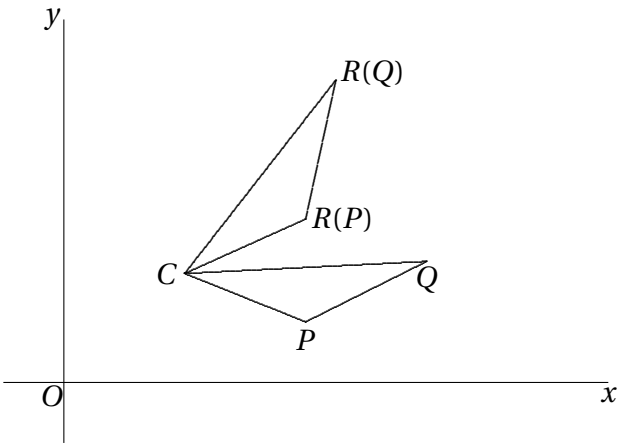


Figura 21.3. Ilustração do Teorema 21.13.

21.4 Propriedades geométricas das isometrias

Estamos interessados em compreender como as isometrias transformam as figuras. A figura mais elementar (depois do ponto) é o segmento. Por definição, toda isometria preserva a distância de pontos. Portanto, dados A e B, temos $d(T(A), T(B)) = d(A, B)$. Mas isso não significa de imediato que o segmento AB é transportado no segmento $T(A)T(B)$. A imagem de AB por T poderia ser uma curva. Mas podemos esperar que segmento vai em segmento, pois todo $X \in AB$ tem suas distâncias até A e até B preservadas.

Vamos investigar essas questões começando com a

Proposição 21.14. *Toda isometria $T : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ é injetiva.*

Demonstração. É uma consequência imediata da definição de isometria. Se $A \neq B$ então $d(T(A), T(B)) = d(A, B) > 0$, portanto $T(A) \neq T(B)$. □

Proposição 21.15. *Seja $T : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ uma isometria e sejam A e B pontos diferentes quaisquer. Então T transporta o segmento AB sobrejetivamente no segmento $T(A)T(B)$.*

Demonstração. Não custa observar inicialmente que $T(A)T(B)$ é realmente um segmento, pois $T(A) \neq T(B)$.

Provemos primeiro que se X é um ponto do segmento AB então $T(X)$ é um ponto do segmento $T(A)T(B)$. Como X está em AB temos $d(A, X) + d(X, B) = d(A, B)$, em virtude da Definição **??**, página **??**. Em virtude de T ser uma isometria temos

$$d(T(A), T(X)) + d(T(X), T(B)) = d(A, X) + d(X, B) =$$

$$= d(A, B) = d(T(A), T(B)).$$

Portanto $T(X)$ é um ponto do segmento $T(A)T(B)$. Provamos assim que a imagem $T(AB)$ do segmento AB por T está contida em $T(A)T(B)$.

Seja agora Y um ponto do interior do segmento $T(A)T(B)$. Pelo Axioma da colocação da régua aplicado à reta $\overleftrightarrow{T(A)T(B)}$ podemos supor que a coordenada de $T(A)$ é zero, a de $T(B)$ é $z > 0$ e a de Y é y. Como Y está entre $T(A)$ e $T(B)$ então $0 < y < z$. Pelo mesmo Axioma da colocação da régua, mas agora aplicado à reta $\overleftrightarrow{AB}$ podemos supor que a coordenada de A é zero e a de B é $b > 0$. Como T é uma isometria temos $b = z$. Logo $0 < y < b$, e existe no segmento AB um ponto X de coordenada y. Como T é uma isometria, a coordenada de $T(X)$ na reta $\overleftrightarrow{T(A)T(B)}$ é y, portanto $T(X) = Y$. Isso prova a afirmação. □

Na demonstração da Proposição acima vimos que se $A - X - B$ então $T(A) - T(X) - T(B)$, e as distâncias são preservadas. Podemos ver assim que vale o

Escólio 21.16. *Seja $T : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ uma isometria. Então T transporta pontos colineares em pontos colineares, preservando sua ordem na reta e suas distâncias.*

Corolário 21.17. *A imagem de três pontos não colineares por uma isometria $T : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ são três pontos não colineares.*

Demonstração. Sejam A, B e C três pontos não colineares. Se $T(A)$, $T(B)$ e $T(C)$ fossem colineares, com $T(B)$ entre $T(A)$ e $T(C)$, por exemplo, teríamos $d(T(A), T(B)) + d(T(B), T(C)) = d(T(A), T(C))$. Mas, pela desigualdade triangular, temos $d(A, B) + d(B, C) > d(A, C)$, contrariando a definição de isometria. □

Vejamos agora o

Proposição 21.18. *Seja $T : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ uma isometria. Então T transporta reta sobre reta.*

Demonstração. Seja r uma reta, e sejam A e B pontos de r. Seja s a reta determinada por $T(A)$ e $T(B)$. Afirmamos que T transporta r sobre s.

Vamos provar primeiro que T transporta r em s. Consideremos um ponto arbitrário X de r. Como A, B e X são colineares, segue que $T(A)$, $T(B)$ e $T(X)$ são colineares. Dessa forma $T(X)$ está em s, e temos $T(r) \subset s$.

Vamos provar agora que T transporta r sobrejetivamente em s. Para provar isso, colocamos em r um sistema de coordenadas de forma que a coordenada de A seja 0 e a de B seja $b > 0$. De forma análoga, colocamos em s um sistema de coordenadas de forma que a coordenada de $T(A)$

seja 0. Observe que, pelo fato de ser T uma isometria, a coordenada de $T(B)$ tem que ser b ou $-b$; escolhemos que seja b.

Consideremos um ponto arbitrário Y de s, e seja y sua coordenada. Podemos supor $Y \neq T(A)$ e $Y \neq T(B)$, pois esses pontos já estão na imagem de T. Logo $y \neq 0$ e $y \neq b$. Seja X o ponto de r de coordenada y. Então $X \neq A$ e $X \neq B$. Afirmamos que $T(X)$ também tem coordenada y. De fato, se $A-X-B$ ou $A-B-X$, temos respectivamente $T(A)-T(X)-T(B)$ e $T(A)-T(B)-T(X)$, e a coordenada c de $T(X)$ é positiva. Ainda, $c = d(T(X),T(A)) = d(X,A) = y$, e a coordenada de $T(X)$ é y. Se $X-A-B$, a coordenada c de $T(X)$ é negativa, e $-c = d(T(X),T(A)) = d(X,A) = -y$, e novamente a coordenada de $T(X)$ é y. Então $T(X) = Y$, e terminamos. □

O estudante pode observar que a demonstração da Proposição acima contém a do

Escólio 21.19. *Toda isometria $T : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ transporta semirreta sobre semirreta.*

Sendo assim temos o

Corolário 21.20. *A imagem de um ângulo por uma isometria $T : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ é um ângulo de mesma medida.*

Demonstração. Seja $T : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ uma isometria e $\widehat{BAC}$ um ângulo. Como A, B e C são não colineares, $T(A)$, $T(B)$ e $T(V)$ também não são colineares, de modo que $T(B)\widehat{T(A)}T(C)$ é um ângulo. Ainda, as semirretas $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BC}$ são levadas, respectivamente, sobre as semirretas $\overrightarrow{T(B)T(A)}$ e $\overrightarrow{T(B)T(C)}$. Portanto a imagem de $\widehat{BAC}$ por T é o ângulo $T(B)\widehat{T(A)}T(C)$. Notemos agora que os triângulos ABC e $T(B)T(A)T(C)$ são congruentes pelo caso LLL pois, sendo T uma isometria, preserva a medida dos lados. Segue que os ângulos $\widehat{BAC}$ e $T(B)\widehat{T(A)}T(C)$ têm a mesma medida. □

Vamos provar agora o

Proposição 21.21. *Toda isometria $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é sobrejetiva (sua imagem é $\mathbb{R}^2$).*

Demonstração. Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma isometria e Q um ponto de $\mathbb{R}^2$. Queremos mostrar que existe $P \in r$ tal que $T(P) = Q$.

Sejam A e B pontos diferentes de $\mathbb{R}^2$. Sabemos que toda isometria é injetiva, assim $T(A) \neq T(B)$. Se $T(A) = Q$ ou $T(B) = Q$, terminamos. Suponhamos $T(A) \neq Q$ e $T(B) \neq Q$. Ponhamos $T(A) = A'$ e $T(B) = B'$. Existem apenas duas possibilidades para os pontos A', B' e Q: eles são colineares ou não.

Suponhamos primeiro que A', B' e Q sejam colineares. Então estão em uma reta s, que é imagem da reta r que contém A e B. Em virtude da Proposição 21.18 existe $P \in r$ tal que $T(P) = Q$.

Suponhamos agora que A', B' e Q não sejam colineares, e consideremos o triângulo $QA'B'$. Construímos no lado AB os triângulos PAB e RAB congruentes a $QA'B'$, com P e R em semiplanos opostos em relação à reta AB. As semirretas $\overrightarrow{AP}$ e $\overrightarrow{AR}$ são levadas em semirretas diferentes com origem A', pois T é injetiva, $P \neq R$ e $AP = AR$. Além disso elas formam ângulos de mesma medida que $\widehat{QA'B'}$ com a semirreta $\overrightarrow{A'B'}$. Logo, como T preserva distância, $T(P) = Q$ ou $T(R) = Q$. □

Com essa propriedade temos a

Proposição 21.22. *Toda isometria é invertível, e a inversa de qualquer isometria é também uma isometria.*

Demonstração. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma isometria. Como T é bijetiva, ela tem uma transformação inversa $T^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Provemos que T^{-1} também preserva distância. Sejam A e B pontos de $\mathbb{R}^2$. Então $d(T^{-1}(A),T^{-1}(B)) = d(T(T^{-1}(A),T(T^{-1}(B)) = d(A,B)$. Logo T^{-1} é uma isometria. □

Aproveitamos a oportunidade para demonstrar a

Proposição 21.23. *A composta de duas isometrias é também uma isometria.*

Demonstração. Sejam $T, S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ isometrias, e A e B pontos de $\mathbb{R}^2$. Temos $d((T \circ S)(A), (T \circ S)(B)) = d(T(S(A)), T(S(B)) = d(S(A), S(B)) = d(A, B)$. Portanto a composta de isometrias é uma isometria. □

Na Definição 21.12 vimos o que é uma rotação $T_{C,\theta} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de ângulo θ em relação a um ponto C, e no Teorema 21.13 vimos uma demonstração geométrica de que essas rotações são isometrias. Essa demonstração pode ser feita de outra forma. Sabemos que a rotação $T_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de ângulo θ em relação à origem é uma isometria. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a translação que leva a origem a C. Então $T_{C,\theta} = T \circ T_\theta \circ T^{-1}$. Usando as Proposições 21.22 e 21.23 vemos que $T_{C,\theta}$ é uma isometria.

Pelas propriedades geométricas das isometrias, estudadas acima, vemos que a condição de preservar distância é bastante restritiva. Podemos prever que existem poucos tipos de isometrias. Uma forma de fazer esse estudo é considerar seus pontos fixos. Veremos que a quantidade e o posicionamento dos pontos fixos de uma isometria determinam seu tipo.

Definição 21.24. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação. Chamamos de *ponto fixo* de T a todo ponto P tal que $T(P) = P$.

Para estudar os pontos fixos de uma isometria começaremos com a seguinte propriedade:

Proposição 21.25. *Se A e B são pontos fixos de uma isometria T, então todos os pontos da reta que passa por A e B são fixos.*

Demonstração. Sabemos que T transforma a reta r que passa por A e B na reta que passa por $T(A)$ e $T(B)$. Uma vez que A e B são pontos fixos, a reta r é levada sobre si mesma. Seja P um ponto qualquer de r. Suponha que P está entre A e B. Sabemos que $T(P)$ está entre A e B. Como $AP = T(A)T(P) = AT(P)$ e como P e $T(P)$ estão na mesma semirreta com origem A, são o mesmo ponto, isto é, $T(P) = P$. A demonstração para P em outras posições é análoga. □

Proposição 21.26. *Sejam S e T isometrias e r uma reta do plano. Se existirem pontos $A \neq B$ em r tais que $S(A) = T(A)$ e $S(B) = T(B)$ então $S(X) = T(X)$ para todo $X \in r$.*

Demonstração. Com efeito, nesse caso a isometria $R = T^{-1} \circ S$ é tal que $R(A) = A$ e $R(B) = B$. Pela Proposição 21.25, todo ponto de r é fixado por R, ou seja $S = T$ em r. □

Lembremos que a transformação $Id : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $Id(P) = P$ para todo $P \in \mathbb{R}^2$ chama-se *identidade*. Portanto a identidade do plano é uma isometria que fixa todos os pontos.

Veremos que isometrias diferentes podem fixar, simultaneamente, no máximo, os pontos de uma reta. Para ver isso façamos primeiro o

Teorema 21.27. *Se uma isometria T fixa três pontos não colineares, então T é a identidade.*

Demonstração. Sejam A, B e C três pontos fixos não colineares da isometria T. Do teorema anterior concluímos que T fixa as retas que contêm AB, AC e BC. Seja P um ponto fora dessas retas e seja Q um ponto entre A e B (diferente de A e B). A reta r determinada por P e Q intercepta um dos outros dois lados do triângulo ABC em um ponto R (Teorema de Pasch, página **??**). Logo r tem dois pontos fixados por T, a saber, Q e R. Pelo teorema anterior T fixa a reta r e portanto fixa o ponto P. Uma vez que P foi escolhido arbitrariamente, T fixa todos os pontos do plano, ou seja, T é a identidade. □

Teorema 21.28. *Se as isometrias T e S coincidem em três pontos não colineares, então $T = S$.*

Demonstração. Vimos que toda isometria é uma bijeção do plano, logo tem inversa, e sua inversa é uma isometria. Sabemos também que a composta de duas isometrias é uma isometria. Logo $T \circ S^{-1}$ é uma isometria.

Sejam então A, B e C os três pontos não colineares fixados por T e S simultaneamente. Notemos que S^{-1} também fixa esses três pontos. Logo $T \circ S^{-1}$ fixa esses três pontos. Pelo Teorema 21.27 $T \circ S^{-1} = Id$. Concluímos que $T = S$. □

Com esses resultados podemos classificar as isometrias em quatro tipos diferentes:

i) a identidade, que fixa todos os pontos;

ii) as isometrias com dois pontos fixos (e, portanto, com uma reta fixa);

iii) as isometrias com um ponto fixo;

iv) as isometrias com nenhum ponto fixo.

Já temos exemplos de todos esses casos. As reflexões são isometrias que têm um reta de pontos fixos, e apenas eles. As rotações são isometrias com um único ponto fixo. As translações são isometrias sem pontos fixos.

21.5 Isometrias e congruência de triângulos

Observamos no início deste Capítulo que estamos interessados em ver como transformações do plano podem movimentar triângulos sobre triângulos congruentes. Estamos interessados nas duas questões seguintes:

Questão 1 A imagem de um triângulo por uma isometria é um triângulo congruente ao primeiro?

Questão 2 Se dois triângulos são congruentes, existe uma isometria que transporta um sobre o outro?

A Questão 1 praticamente já foi respondida na Seção anterior. Temos

Proposição 21.29. *Sejam $T : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ uma isometria e ABC um triângulo. Então a imagem $T(ABC)$ de ABC por T é o triângulo $T(A)T(B)T(C)$, que é congruente a ABC.*

Demonstração. Como A, B e C não são colineares vimos, na Seção anterior, que $T(A)$, $T(B)$ e $T(C)$ não são colineares, e formam um triângulo. Vimos também que $T(AB)$ é o segmento $T(A)T(B)$, $T(AC)$ é o segmento $T(A)T(C)$ e $T(BC)$ é o segmento $T(B)T(C)$. Logo a imagem $T(ABC)$ de ABC é o triângulo $T(A)T(B)T(C)$. Como T preserva distâncias, esses triângulos são congruentes pelo caso LLL. □

Respondemos agora a Questão 2:

Teorema 21.30. *Sejam $ABC \cong DEF$ triângulos congruentes. Existe uma isometria T de modo que $T(A) = D$, $T(B) = E$ e $T(C) = F$. Portanto T transporta ABC sobre DEF.*

Demonstração. Construímos no plano um sistema de coordenadas cartesianas de modo que $A = (0,0)$ e $B = (b,0)$, com $b > 0$. Confira a Figura 21.4. Seja T_{AD} a translação do plano tal que $T_{AD}(A) = D$. Essa transformação é uma isometria e transporta o semieixo positivo de Ox no semieixo positivo Ox' e o semieixo positivo de Oy no semieixo positivo Oy'. Sejam $A' = T_{AD}(A)$, $B' = T_{AD}(B)$ e $C' = T_{AD}(C)$. Portanto $A' = D$.

Seja α a medida do ângulo entre semieixo positivo de Ox' e a semirreta $\overrightarrow{DE}$, medido no sentido antihorário. Consideremos a rotação T_α de ângulo α em torno da origem A'. Como T_α é uma isometria temos $T_\alpha(B') = E$ e $T_\alpha(C') = F$, pois o ângulo entre $\overrightarrow{DC'}$ e $\overrightarrow{DF}$ também mede α.

Para encerrar a demonstração da afirmação basta considerar a isometria $T = T_\alpha \circ T_{AD}$. □

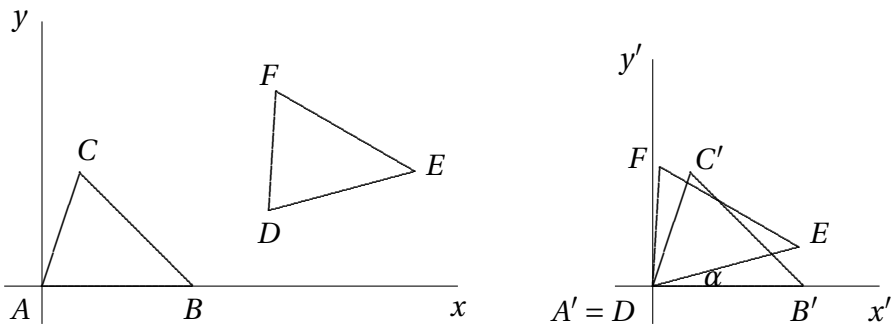


Figura 21.4. Construção de uma isometria que transporta um triângulo sobre outro congruente.

21.6 Isometrias em coordenadas

Não é difícil obter uma expressão em coordenadas para qualquer isometria. Isso é dado pelo

Teorema 21.31. *Seja $T : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ uma isometria. Então existem números reais k, l, m e n tais que $m^2 + n^2 = 1$ e*

$$T(x, y) = (mx - ny + k, nx + my + l) \tag{21.1}$$

ou

$$T(x, y) = (mx + ny + k, nx - my + l). \tag{21.2}$$

Demonstração. Seja OXY o sistema cartesiano de coordenadas (x, y). Os eixos numéricos $\overleftrightarrow{OX}$ e $\overleftrightarrow{OY}$ são perpendiculares e se encontram no ponto $O = (0,0)$, e seus semieixos positivos são $\overrightarrow{OX}$ e $\overrightarrow{OY}$, respectivamente. A isometria T transporta essas retas em um sistema cartesiano $O'X'Y'$, pois T transporta reta em reta e conserva a medida do ângulo. As retas $\overleftrightarrow{O'X'}$ e $\overleftrightarrow{O'Y'}$ são perpendiculares e se encontram no ponto $O' = T(0,0)$. Consideremos em $\overleftrightarrow{O'X'}$ um sistema de coordenadas de forma que o semieixo positivo $\overrightarrow{O'X'}$ seja imagem por T de $\overrightarrow{OX}$. Feita essa escolha, a imagem $\overrightarrow{O'Y'}$ do semieixo positivo $\overrightarrow{OY}$ pode ser qualquer uma das semirretas de $T(\overleftrightarrow{OY})$ com origem em O'. Temos assim duas opções.

Suponhamos que o ângulo do semieixo positivo $\overrightarrow{OX}$ ao semieixo positivo $\overrightarrow{OX'}$, medido no sentido anti-horário, seja θ. Então o ângulo do semi-eixo positivo $\overrightarrow{OY}$ ao semi-eixo positivo $\overrightarrow{O'Y'}$, também medido no sentido anti-horário, pode ser θ ou $180 + \theta$.

Vamos examinar separadamente cada um desses casos. Escrevemos $T(0,0) = (k, l)$.

Caso 1. O ângulo do semieixo positivo $\overrightarrow{OY}$ ao semieixo positivo $\overrightarrow{O'Y'}$, medido no sentido anti-horário, é θ.

Nesse caso a isometria T é uma mudança de coordenadas que leva o sistema OXY, de coordenadas (x, y), no sistema $O'X'Y'$, de coordenadas (x', y'), preservando a orientação. O ponto $P = (x, y)$ é levado no ponto $P' = (x', y')$ por T. Confira ilustração na Figura 21.5.

Nesse caso, as equações da mudança de coordenadas, segundo demonstrado em [33], página 117 e seguintes, são

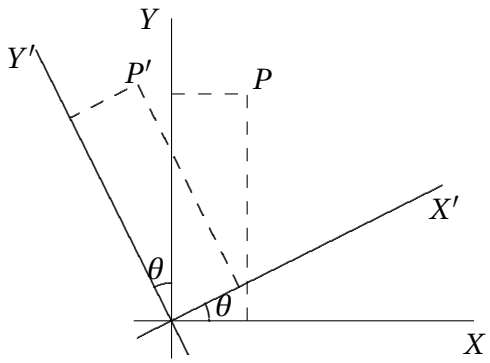


Figura 21.5. Ação de uma isometria que preserva orientação.

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\,\theta + k \\ \text{e}\quad y' &= x\,\mathrm{sen}\,\theta + y\cos\theta + l. \end{aligned}$$

Chamando $\cos\theta = m$ e $\mathrm{sen}\,\theta = n$ obtemos a expressão (21.1), com $m^2 + n^2 = 1$.

Caso 2. O ângulo do semieixo positivo $\overleftrightarrow{OY}$ ao semieixo positivo $\overrightarrow{O'Y'}$, medido no sentido anti-horário, é $180 + \theta$.

Nesse caso a isometria T é uma mudança de coordenadas que leva o sistema OXY, de coordenadas (x, y), no sistema $O'X'Y'$, de coordenadas (x', y'), invertendo a orientação. O ponto $P = (x, y)$ é levado no ponto $P' = (x', y')$ por T. Confira ilustração na Figura 21.6.

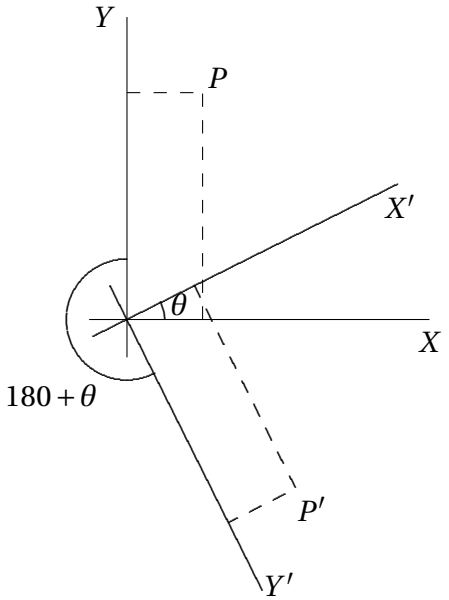


Figura 21.6. Ação de uma isometria que não preserva orientação.

Nesse caso, as equações da mudança de coordenadas, segundo demonstrado em [33], página 117 e seguintes, são

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\theta + y\,\mathrm{sen}\,\theta + k \\ \text{e}\quad y' &= x\,\mathrm{sen}\,\theta - y\cos\theta + l. \end{aligned}$$

Chamando $\cos\theta = m$ e $\mathrm{sen}\,\theta = n$ obtemos a expressão (21.2), com $m^2 + n^2 = 1$. □

Da demonstração do Teorema 21.31 vemos que existem dois tipos de isometrias: as que preservam orientação e as que invertem. As primeiras são da forma (21.1), e as outras da forma (21.2).

Está claro que as translações e as rotações preservam a orientação. No Problema 21.8.27 é solicitado do estudante verificar que as reflexões invertem a orientação.

21.7 Isometrias e o modelo algébrico

Comentamos no Capítulo 20 que a Geometria Analítica Plana constitui um modelo algébrico da Geometria Euclidiana Plana. Nesse contexto podemos definir as isometrias através de sua expressão em coordenadas e demonstrar suas propriedades de forma independente dos axiomas da Geometria Euclidiana. Nesse contexto podemos fazer uma definição algébrica de congruência da seguinte forma:

Definição 21.32. Os subconjuntos $\mathscr{F}$ e $\mathscr{G}$ do plano se dizem *congruentes* quando existe uma isometria $T : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ tal que $T(\mathscr{F}) = \mathscr{G}$.

Com essa definição vemos que as isometrias realizam a noção espontânea de congruência entre triângulos, que consiste em considerar congruentes triângulos que podem ser movimentados um sobre o outro, coincidindo como conjunto de pontos.

21.8 Problemas

Problema 21.8.1. Estude a transformação do plano $T(x,y) = (x, y/2)$. Observe que ela tem o efeito de reduzir verticalmente qualquer figura do plano. Como exemplo, determine a imagem por T da circunferência $\mathscr{C} = \{(x,y) | x^2 + y^2 = 1\}$. Mostre que T é injetiva e sobrejetiva. Dê a expressão transformação da inversa de T.

Problema 21.8.2. Dada a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y) = (x+2y, 2x+y)$, descreva a imagem por T da circunferência $x^2 + y^2 = 1$.

Problema 21.8.3. Verifique todas as afirmações do Exemplo 21.2 usando diretamente a expressão de T em coordenadas.

Problema 21.8.4. Estude as propriedades das translações, definidas no Exemplo 21.4. Em particular: **a)** prove que toda translação leva reta sobre reta, e calcule qual é a reta que é imagem da reta $R_{a,b,c}$; **b)** prove, usando a fórmula (20.4), que toda translação conserva a medida de ângulos.

Problema 21.8.5. Considere a reta $r = R_{a,-1,0}$. Determine a expressão em coordenadas da transformação do plano $T : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ denominada "projeção ortogonal sobre r", isto é, para qualquer $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $T(x,y)$ é o pé da projeção de (x,y) sobre r.

Problema 21.8.6. Considere a reta $r = R_{a,-1,0}$. Determine a expressão em coordenadas da reflexão em relação a essa reta.

Problema 21.8.7. Mostre que a reflexão $T_r : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ em relação a uma reta r, conforme definida no Exemplo 21.6, é uma isometria. Sugestão: tome um reta r e pontos quaisquer A e B do plano. Sejam A' e B' os pontos simétricos respectivamente de A e B em relação à reta r. Prove que $A'B' = AB$ usando congruências de triângulos. Considere os vários casos necessários, como $A \in r$, $a \notin r$, o mesmo para B, e ainda se A e B estão do mesmo lado de r, ou não.

Problema 21.8.8. Prove que toda rotação $T_\theta : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ de ângulo θ em relação a $(0,0)$, definida no Exemplo 21.7, é uma isometria, usando sua expressão em coordenadas.

Problema 21.8.9. Vimos, no Exemplo 21.7, que toda rotação $T_\theta : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ de ângulo θ em relação a $(0,0)$, é uma transformação linear e uma isometria. Considere agora uma transformação linear qualquer do plano $T : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$, da forma $T(x,y) = (ax+by, cx+dy)$, em que a, b, c e d são números reais. **a)** Encontre condições sobre os números a, b, c e d para que T seja uma isometria. **b)** Investigue se existem transformações lineares que sejam isometrias mas não são rotações.

Problema 21.8.10. Prove que a transformação do plano $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y) = \left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}, \frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)$ é uma isometria. Ache a imagem da reta diagonal $\{(x,y) | x = y\}$ por T.

Problema 21.8.11. Prove que toda isometria transporta retas paralelas em retas paralelas.

Problema 21.8.12. Sejam $T : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ uma isometria e r uma reta. Mostre que T transporta semiplano determinado por r sobre semiplano determinado por $T(r)$.

Problema 21.8.13. Prove que toda isometria $T : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ transporta o interior do ângulo $\widehat{ABC}$ sobre o interior do ângulo $T(A)\widehat{T(B)T}(C)$.

Problema 21.8.14. Prove que toda isometria $T : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ transporta o interior do triângulo ABC sobre o interior do triângulo $T(A)T(B)T(C)$.

Problema 21.8.15. Prove, usando a recíproca do Teorema de Pitágoras, que toda isometria $T : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ transporta ângulo reto em ângulo reto.

Problema 21.8.16. Demonstre que toda isometria transporta qualquer circunferência em uma circunferência de mesmo raio.

Problema 21.8.17. Considere um triângulo isósceles não equilátero. Encontre duas isometrias que transportam esse triângulo em si mesmo. Existem outras isometrias?

Problema 21.8.18. Considere um triângulo equilátero. Encontre seis isometrias que transportam esse triângulo em si mesmo. Existem outras isometrias?

Problema 21.8.19. Sejam A e B pontos (diferentes) de $\mathbb{R}^2$. Prove que existe uma única reflexão $R : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ tal que $R(A) = B$.

Problema 21.8.20. Prove que se uma isometria $T : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ fixa todos os pontos de uma reta r, então T é a identidade ou a reflexão em relação a r. Sugestão: tome um ponto P fora de r e mostre que $T(P) = P$ ou $T(P)$ é o simétrico de P em relação a r.

Problema 21.8.21. Sejam $ABC \cong DEF$ triângulos congruentes. Mostre que existe uma isometria que transporta um sobre o outro composta de no máximo três reflexões.

Problema 21.8.22. Prove que toda isometria é a composição de no máximo três reflexões.

Problema 21.8.23. Demonstre que toda translação é a composição de duas reflexões cujas retas de simetria são paralelas.

Problema 21.8.24. Prove a recíproca do Teorema 21.31. Isto é, se $T : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ é de uma das formas (21.1) ou (21.2), então T é uma isometria.

Problema 21.8.25. Explique por que as translações e as rotações preservam a orientação.

Problema 21.8.26. Demonstre que as equações da reflexão $R(x,y) = (x_1, y_1)$ em relação à reta $y = ax + b$ são

$$\begin{cases} x_1 &= \dfrac{1-a^2}{1+a^2}\,x + \dfrac{2a}{1+a^2}(y-b), \\ y_1 &= \dfrac{2a}{1+a^2}\,x - \dfrac{1-a^2}{1+a^2}(y-b) + b. \end{cases}$$

Problema 21.8.27. Prove que as reflexões invertem a orientação.

Problema 21.8.28. **a)** Encontre a imagem da reta reta $R_{a,b,c}$ pela isometria $T : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y) = (mx - ny + k, nx + my + l)$. **b)** Encontre a imagem da reta reta $R_{a,b,c}$ pela isometria $T : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y) = (mx + ny + k, nx - my + l)$.

Problema 21.8.29. Usando a expressão em coordenadas das isometrias e a fórmula (20.4), dê outra demonstração de que qualquer isometria conserva a medida de ângulos.

Problema 21.8.30. Dado um número real positivo t, uma *semelhança de razão t* no plano é uma transformação $T : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ tal que $d(T(A), T(B)) = td(A,B)$ quaisquer que sejam os pontos A e B do plano. Mostre que toda semelhança é uma bijeção do plano do plano sobre o plano. Ainda transporta o segmento AB sobre o segmento $T(A)T(B)$, sendo que o comprimento desse é t vezes o comprimento do primeiro. Em particular T transporta um triângulo em outro triângulo. Mostre que T transporta retas em retas, e retas paralelas em retas paralelas. Prove que T transporta triângulos retângulos em triângulos retângulos, e, em consequência, transporta retas perpendiculares em retas perpendiculares. Prove que a transformação inversa de uma semelhança de razão t é uma semelhança de razão $1/t$. Prove que a composta de duas semelhanças é uma semelhança, e calcule sua razão. Demonstre que toda semelhança conserva a medida de ângulos.

Problema 21.8.31. Mostre que toda transformação linear da forma

$$T(x,y) = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

sendo t um número real positivo, é uma semelhança, mas nem toda semelhança é dessa forma.

Problema 21.8.32. Dizemos que duas figuras F e G do plano são semelhantes se existe uma semelhança $T : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ tal que $T(F) = G$. Se t é a razão de T, dizemos que t é a razão de semelhança de F para G. Prove que se dois triângulos têm ângulos correspondentes congruentes, então são semelhantes.

Problema 21.8.33. A transformação $T : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definida por $T(x,y) = (kx, ky)$ para algum número real positivo k chama-se *homotetia* de razão k e centro O. **a)** Prove que toda homotetia leva segmento sobre um segmento cujo comprimento é k vezes o comprimento do primeiro segmento. Ainda, leva ângulo sobre ângulo, preservando sua medida. **b)** Como é a imagem de uma circunferência por uma homotetia? **c)** E de um polígono regular?

Problema 21.8.34. Chamamos de *reflexão com deslizamento* à composição de uma reflexão em relação a uma reta r com uma translação com vetor de deslocamento não nulo e paralelo à reta r. Prove que as isometrias do plano são: a identidade, as translações, as rotações, as reflexões e as reflexões com deslizamento. Sugestão: seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma isometria diferente da identidade e seja $A \in \mathbb{R}^2$ tal que $A' = T(A) \neq A$. Seja $A'' = T(A')$. Então $d(A', A'') = d(A, A') > 0$. Considere os três casos relativos ao posicionamento dos pontos A, A' e A'': (i) A, A' e A'' são não colineares; (ii) A, A' e A'' são pontos diferentes e colineares; (iii) $A'' = A$.

21.9 Temas para investigação

Tema 21.9.1. Investigue como são as imagens de elipses, hipérboles e parábolas por transformações lineares do plano.

Tema 21.9.2. Investigue como são as isometrias que são compostas por duas reflexões.

Tema 21.9.3. Estude as isometrias que preservam o triângulo equilátero. Mostre que elas formam um grupo algébrico em relação à operação de composição. Estude as propriedades desse grupo.

Tema 21.9.4. Identifique todas as isometrias que preservam o quadrado. Mostre que elas formam um grupo algébrico em relação à operação de composição. Estude as propriedades desse grupo.

Tema 21.9.5. Identifique todas as isometrias que preservam um polígono regular com $n \geq 5$ lados. Mostre que elas formam um grupo algébrico em relação à operação de composição. Estude as propriedades desse grupo.

Tema 21.9.6. Dizemos que uma figura do plano tem *simetria bilateral* quando existe uma reta tal que a reflexão em relação a essa reta transporta a figura sobre si mesma. Investigue figuras com simetria bilateral. Um bom começo pode ser polígonos regulares.

Capítulo 22

Geometria da Superfície Esférica

22.1 Introdução

Até o início do Século XVII existia uma forte concepção na mente dos intelectuais de que a Geometria Euclidiana era a única possível. Certamente que essa ideia advinha de nossa forma de olhar o espaço e o movimento das coisas. Embora vivemos em um planeta cuja superfície tem a forma aproximada de uma esfera, no dia a dia não nos damos conta disso, e, quando andamos nessa superfície imaginamos que estamos nos movimentando em um plano. Isso talvez ocorra por que a superfície da Terra é, para nós, imensa, e não temos quotidianamente a consciência de que ela tem o formato de uma esfera. Hoje temos maior facilidade em compreender essa situação devido ao progresso no conhecimento e na exploração do espaço. Todos temos em nosso imaginário aquela famosa foto do planeta Terra obtida pelos astronautas da Apollo 17 em sua viagem à Lua. Ao contrário do que ocorria antigamente, não temos mais dúvida de que moramos na superfície de uma esfera, e podemos até nos conscientizar desse fato no dia a dia, embora isso cause pouco efeito em nossa movimentação diária.



Figura 22.1

Fotografia da Terra tirada em 7 de dezembro de 1972 a partir da espaçonave Apollo 17, a uma distância de 29 000 km. A foto mostra a África, a Antártida e a Península Arábica. Essa foi a sexta e última viagem do programa Apollo, em que astronautas deixaram a órbita da Terra e pousaram na Lua.

Essa imagem passou a fazer parte de nossos livros escolares e foi reproduzida amplamente nos meios de comunicação. Ela modificou definitivamente a forma como vemos o lugar onde moramos e sua posição relativa dentro do espaço.

Vemos, neste Capítulo, como podemos construir uma geometria diferente da euclidiana simplesmente imaginando um mundo constituído pela superfície da esfera. Essa Geometria, que denominamos Geometria da Superfície Esférica, abreviadamente GSE, tem aplicações na Matemática, na Astronomia e na Geografia.

22.2 Ideias iniciais

Imaginemos, como um exercício de abstração, que vivemos restringidos à superfície de uma

esfera e que, ao nos movimentarmos, ficamos limitados a ela, sem poder nos mover para o espaço circundante, seja para o interior, seja para o exterior dessa esfera. Ou então, se for mais fácil, imagine um pequeno ser de duas dimensões que tem sua vida delimitada à superfície de uma esfera.

Essa ideia não é original! No livro *Flatland: A Romance of Many Dimensions*, escrito pelo professor Edwin Abbott Abbott e publicado em 1884 na Inglaterra, o autor descreve uma sociedade que funciona em duas dimensões. Os personagens são figuras como segmentos e polígonos, e o próprio autor se coloca nela como um quadrado. Na estória o quadrado descobre a existência de um ser de três dimensões, uma esfera, mas essa ideia não é aceita pelo grupo dominante daquela sociedade.

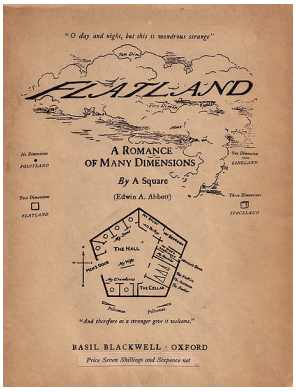


Figura 22.2

Esse romance sobre um mundo de duas dimensões teve uma continuação em *Sphereland: A Fantasy About Curved Spaces and an Expanding Universe*, escrito em 1965 por Dionys Burger.

Imaginemos então que o ser que mora na superfície da esfera precisa ir do ponto A ao ponto B. Se ele deseja percorrer o menor caminho possível, que trajetória deve seguir? Não é difícil percebermos que o menor caminho que conecta dois pontos em uma superfície esférica é o menor arco do círculo máximo que contém esses dois pontos. Vimos, na Seção 17.7 do Tomo III, que sempre existe um círculo máximo ligando dois pontos dados de uma superfície esférica. Veja ilustração na Figura 22.3.

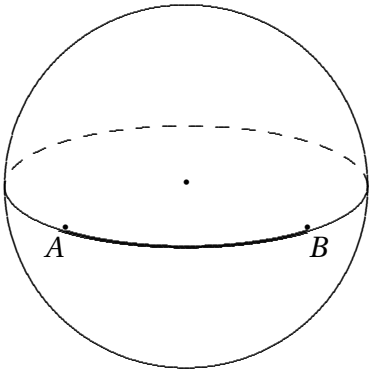


Figura 22.3. Círculo máximo passando por dois pontos na superfície esférica, com destaque para o caminho mais curto.

A percepção dessa propriedade pode ser feita experimentalmente. Tomamos uma esfera de isopor e desenhamos em sua superfície um círculo máximo. Fixamos dois alfinetes nessa curva e esticamos de um ao outro um elástico, deixando-o tensionado. Vemos que a tendência do elástico é se acomodar ao longo do círculo máximo. Isso significa que essa curva proporciona o lugar geométrico de menor tensão para o elástico e, portanto, é seu formato mais curto.

Uma demonstração mais formal dessa propriedade utiliza recursos de Cálculo Diferencial e Integral. O estudante pode consultar [36], páginas 117 e 128. Para constar enunciamos esse resultado como o

Teorema 22.1. *Sejam A e B pontos não antípodas de uma esfera. O menor caminho sobre a esfera ligando A a B é o menor arco do único círculo máximo que os contém. Se A e B são antípodas,*

o menor caminho sobre a esfera ligando A a B é qualquer um dos semicírculos máximos que os contém.

Na Geometria Euclidiana, uma das noções que temos agregada ao campo conceitual "reta" é a de que o segmento de reta que une dois pontos é o menor caminho de um ao outro. Essa é uma noção que pouco exploramos aqui, mas é muito utilizada na Física, por exemplo, na Ótica. Isso nos dá a ideia de construir uma geometria na superfície esférica em que as retas são os círculos máximos. Vemos, na próxima seção, o que ocorre nessa geometria.

22.3 Bases da Geometria da Superfície Esférica

Consideremos uma esfera $\mathbb{S}$ de raio r e centro O. Denominamos *Geometria da Superfície Esférica*, ou, simplesmente, GSE, ao conjunto $\mathbb{S}$ em que consideramos seus pontos como os pontos de $\mathbb{S}$ e como retas os subconjuntos distinguidos, denominados *geodésicas*, definidos como segue:

Definição 22.2. Chamamos de *geodésica* da esfera a qualquer um de seus círculos máximos.

Nosso objetivo é investigar as propriedades das figuras formadas na esfera por suas geodésicas. Procedemos de forma similar ao que fizemos na Geometria Euclidiana, sendo que agora as geodésicas fazem o papel que as retas tinham naquela geometria.

Lembremos que dados dois pontos não antípodas A e B da esfera, eles e o centro O são não colineares, portanto determinam um único plano no espaço. A interseção desse plano com a esfera é uma circunferência de raio r no plano, denominada *círculo máximo* da esfera, e que agora passamos a chamar de geodésica determinada por A e B.

Dois pontos não antípodas A e B de uma geodésica a repartem em dois arcos, um menor e outro maior (ambos contendo os pontos A e B). Isso nos dá a ideia de definir segmentos nessa Geometria.

Definição 22.3. Dados dois pontos não antípodas A e B de uma geodésica, o arco menor por eles determinado é chamado de *segmento geodésico* de extremidades A e B, e indicado por $\overset{\frown}{AB}$. Também dizemos que $\overset{\frown}{AB}$ é o segmento geodésico que liga A a B. Se for necessário o arco maior determinado por A e B pode ser chamado de *segmento geodésico oposto* de extremidades A e B.

Vemos que, dados dois pontos não antípodas da esfera, existe um único segmento geodésico que os liga. Por outro lado, se A e B são pontos antípodas, existem infinitos semicírculos máximos com extremidades nesses pontos.

Dado um segmento geodésico $\overset{\frown}{AB}$ podemos associar a ele o ângulo $\angle AOB$. Esse é o ângulo central determinado pelo arco $\overset{\frown}{AB}$ na circunferência de raio r e centro O que contém os pontos A e B. Se estivermos usando a unidade graus para medir ângulos, diremos que $\alpha = m(\angle AOB)$ é a *medida angular em graus* do segmento geodésico $\overset{\frown}{AB}$. Sabemos que o comprimento desse arco é $\pi r\alpha/180$, que chamamos de *comprimento em graus* do segmento geodésico $\overset{\frown}{AB}$. Se estivermos usando a unidade radiano para medir ângulos, α é a *medida angular em radianos* do segmento geodésico $\overset{\frown}{AB}$, e o seu *comprimento em radianos* é $r\alpha$.

Na GSE definimos o equivalente a semirretas da Geometria Euclidiana da seguinte forma. Sejam A um ponto de $\mathbb{S}$ e B seu antípoda. Consideremos um círculo máximo contendo A (e, portanto, B). Então esse círculo máximo é repartido por A e B em dois semicírculos máximos, digamos $\mathscr{C}_1$ e $\mathscr{C}_2$ (ambos os semicírculos contêm A e B). Então $\mathscr{C}_1 - \{B\}$ e $\mathscr{C}_2 - \{B\}$ são chamados *semigeodésicas* de origem A.

Imitando o que é feito na Geometria Euclidiana, definimos ângulo como subconjunto de $\mathbb{S}$ da seguinte forma. Sejam $\mathscr{C}$ e $\mathscr{C}'$ duas semigeodésicas de mesma origem A e não contidas na mesma geodésica. Dizemos que $\mathscr{C} \cup \mathscr{C}'$ é um *ângulo* de vértice A. Sejam B um ponto de $\mathscr{C}$ diferente de A e C um ponto de $\mathscr{C}'$ diferente de A. O ângulo $\mathscr{C} \cup \mathscr{C}'$ pode ser indicado por $\angle BAC$, se estiver claro que se trata de um ângulo em $\mathbb{S}$. A *medida* desse ângulo é a medida do diedro definido pelos arcos $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{AC}$. Mais exatamente, esse diedro tem como aresta a reta r determinada pelo ponto A e por seu antípoda, uma das faces desse diedro é o semiplano determinado por r e por B, e a outra face é o semiplano determinado por r e por C.

Dado um ponto A em uma geodésica, existe a reta tangente a essa circunferência em A, contida no plano determinado pela geodésica. Essa reta será denominada *reta tangente* à geodésica em A.

Consideremos duas geodésicas que se encontram em um ponto A e, portanto, também se encontram no antípoda de A, e em mais nenhum outro ponto. Podemos associar a essas geodésicas um *ângulo* da seguinte forma. Consideramos os dois planos definidos por essas geodésicas. Eles formam quatro diedros com aresta comum contendo o centro O da esfera. Se esses diedros não são retos, o *ângulo associado* às duas geodésicas é o menor ângulo normal determinado por eles. Se os diedros são retos, o *ângulo associado* às duas geodésicas é qualquer um desses diedros retos. Dizemos também que o ângulo associado entre duas geodésicas é o *ângulo entre* as geodésicas.

Outra forma equivalente de definir o ângulo entre duas geodésicas é considerar as duas retas tangentes a elas num de seus pontos de encontro. Essas retas formam quatro ângulos, opostos pelo vértice aos pares, e, se foram diferentes, escolhemos o menor deles, ou qualquer um se forem retos. Se considerarmos o outro ponto de encontro das geodésicas, os ângulos correspondentes determinados pelas retas tangentes nesse ponto são congruentes aos anteriores. A medida desse ângulo é igual à medida do menor diedro determinado por essas geodésicas. Confira o Problema 22.7.3, em que são solicitadas as demonstrações dessas afirmações.

Definição 22.4. Sejam A, B e C pontos de uma esfera não contidos em uma mesma geodésica (em particular dois quaisquer desses pontos não são antípodas). O *triângulo esférico* de *vértices* A, B e C e *lados* $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$ e $\overset{\frown}{AC}$ é o conjunto $\overset{\frown}{AB} \cup \overset{\frown}{BC} \cup \overset{\frown}{AC}$. Indicamos esse conjunto por ABC, desde que esteja claro que se trata de uma figura na superfície esférica. Os *ângulos* desse triângulo são $\angle BAC$, $\angle ABC$ e $\angle ACB$, que podem ser indicados respectivamente por $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$.

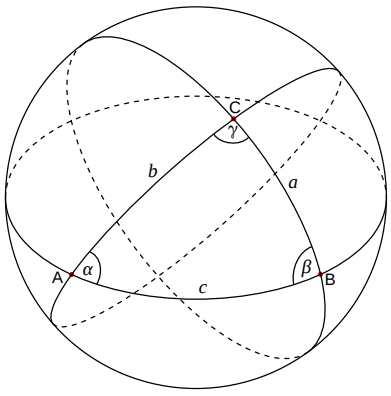


Figura 22.4. Desenho de um triângulo esférico mostrando as geodésicas que contêm os lados.

Enunciamos algumas propriedades elementares dos triângulos na GSE. Confira [58], página 57 e seguintes.

Na GSE podemos definir triângulo isósceles. Valem as seguintes propriedades: os ângulos da base são congruentes, e a mediana relativa à base também é bissetriz e é perpendicular à base.

Na GSE podemos definir congruência entre triângulos e demonstrar os casos de congruência *LAL*, *ALA* e *LLL*. Diferentemente da Geometria Euclidiana, na GSE a correspondência *AAA* implica em congruência. Portanto não é possível desenhar dois triângulos com três pares de ângulos correspondentes congruentes e que não sejam, eles mesmos, congruentes.

Na GSE vale uma versão mais fraca da desigualdade do ângulo externo. Se α, β e γ são as medidas dos ângulos de um triângulo, então

$$180 - \gamma > |\alpha - \beta|. \tag{22.1}$$

Na GSE vale: em um triângulo qualquer, ao maior ângulo se opõe o maior lado.

Na GSE vale a desigualdade triangular: em qualquer triângulo, qualquer um dos lados é menor do que a soma dos outros dois.

Não vamos continuar nossos estudos sobre a GSE por "imitação" com a GE. O estudante pode investigar outros resultados por conta própria ou consultando textos especializados. Por exemplo em [50] e [47] pode obter mais informações.

Fazemos aqui apenas mais uma intervenção: como é a soma dos ângulos de um triângulo esférico? Estudamos essa questão a seguir.

22.4 Um resultado não tão surpreendente na GSE

Investigando como são os triângulos esféricos, um fato nos chama de imediato a atenção: em $\mathbb{S}$ existem triângulos com dois ângulos retos. Vemos um exemplo na Figura 22.5. Escolhemos uma geodésica e nela tomamos dois pontos não antípodas A e B. Tomamos a reta perpendicular ao plano da geodésica que passa por O. Essa reta intersecta $\mathbb{S}$ em dois pontos. Escolhemos um deles, digamos N. Então o triângulo esférico ABN tem dois ângulos retos, em A e em B.

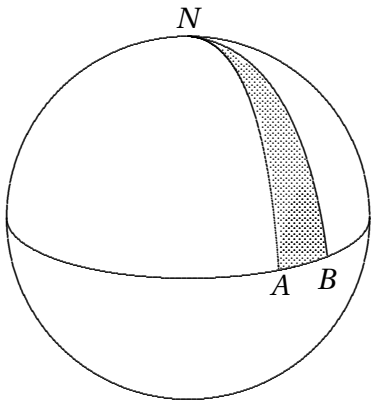


Figura 22.5. Triângulo esférico com dois ângulos retos.

Está claro que os ângulos de triângulos esféricos não se comportam como seus correspondentes da Geometria Euclidiana. Não é difícil compreender isso se olharmos diversas figuras de triângulos esféricos. Parece que eles sempre tem algum lado "curvado para fora", e o próprio interior do triângulo também tem essa característica.

Vamos investigar essa percepção. Consideremos um triângulo esférico ABC. Desenhando por completo as geodésicas determinadas pelos seus lados, vemos que elas formam outros triângulos. Em particular, um desses triângulos é formado pelos antípodas dos pontos A, B e C, e é congruente a ABC.

Vemos na Figura 22.6 uma ilustração desse fenômeno. Nessa Figura, em que indicamos o antípoda de P por $-P$, vemos a esfera segundo a perspectiva da reta que é perpendicular ao plano

determinado pelo círculo máximo que passa por $\overset{\frown}{AB}$. Observemos o triângulo esférico ABC e seu antípoda $(-A)(-B)(-C)$, e que ambos são congruentes.

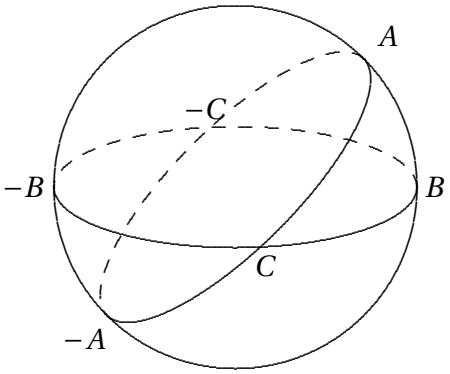


Figura 22.6. Fusos determinados por um triângulo esférico.

Teorema 22.5. *Dados uma esfera de raio r e um triângulo esférico ABC, a soma, em radianos, de seus ângulos é*

$$m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = \pi + \frac{\text{área}(ABC)}{r^2}. \tag{22.2}$$

Demonstração. Na Figura 22.6 $[AC(-C)B]$ é o diedro cuja aresta contém o diâmetro $C(-C)$ e lados que contêm os pontos A e B. Esse diedro determina na esfera um fuso que chamaremos de *fuso C*. Note que esse fuso tem ângulo $\hat{C}$. Portanto a área do fuso C é $2r^2 m(\hat{C})$. De modo análogo temos os fusos A e B cujas áreas são, respectivamente, $2r^2 m(\hat{A})$ e $2r^2 m(\hat{B})$. Portanto

$$\text{área fuso } A + \text{área fuso } B + \text{área fuso } C = 2r^2\left(m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C})\right).$$

Por outro lado,

$$\text{área fuso } A + \text{área fuso } B + \text{área fuso } C =$$

$$= \text{área da semiesfera } + 2\,\text{área}(ABC) + \text{área}\,(AB(-C)) - \text{área}\,((-A)(-B)C).$$

Como área $(AB(-C))$ = área $((-A)(-B)C)$, segue o resultado. □

Observemos que na fórmula (22.2) do Teorema 22.5 o fator área$(ABC)/r^2$ é sempre positivo. Portanto, na GSE, a soma dos ângulos de qualquer triângulo excede π radianos, ou 180 graus. Vamos destacar esse resultado no

Teorema 22.6. *Na GSE, a soma dos ângulos de qualquer triângulo excede π radianos, ou* 180°.

22.5 Comparando a GSE com a GE

Pudemos ver, nas seções anteriores, que a Geometria da Superfície Esférica (GSE) tem várias diferenças em relação à Geometria Euclidiana (GE). A mais marcante é que, na GSE, a soma dos ângulos de qualquer triângulo excede 180°. Mas existem mais diferenças, algumas das quais comentamos agora. Outras serão objeto de problemas da Seção 22.7.

a) Não vale na GSE a afirmação: "Dados dois pontos diferentes, existe exatamente uma reta que os contém". Essa afirmação tem que ser modificada para: "Dados dois pontos diferentes e não

antípodas, existe exatamente uma geodésica que os contém". Dois pontos antípodas quaisquer estão em infinitas geodésicas.

b) Não vale na GSE a afirmação: "Os pontos de uma reta podem ser postos em correspondência biunívoca com os números reais". Essa afirmação tem que ser modificada para: "Os pontos de uma geodésica podem ser postos em correspondência biunívoca com os números reais do intervalo $[0,2\pi)$.".

c) A GSE não tem um resultado correspondente ao Axioma das paralelas: "por um ponto dado fora de uma reta passa uma única paralela à reta dada". Não vale nem mesmo a afirmação da GE: "por um ponto fora de uma reta passa uma paralela à reta dada", pois não existem retas paralelas.

Conforme comentamos anteriormente, dados uma reta e um ponto fora dela podemos, a princípio, considerar as seguintes possibilidades:

(i) não existe uma reta paralela à reta dada contendo o ponto dado;

(ii) existe uma única reta paralela à reta dada contendo o ponto dado;

(iii) existe mais de uma reta paralela à reta dada contendo o ponto dado.

Vemos que a possibilidade (i) corresponde à GSE, e a possibilidade (ii) à GE. Estudaremos, no Capítulo 23, a Geometria Hiperbólica, que satisfaz à condição (iii).

22.6 Geometrias elípticas

Para encerrar esta seção observamos que nossa apresentação da Geometria da Superfície Esférica depende do fato de a estarmos modelando com a esfera $\mathbb{S}$ como um objeto do espaço euclidiano tridimensional. Portanto nessa geometria não temos axiomas, pois todas as propriedades podem ser provadas usando os recursos da Geometria Euclidiana. O que fizemos foi, na verdade, apresentar um modelo de uma das chamadas *Geometrias Elípticas*.

Existem versões intrínsecas de Geometrias Elípticas em que não se utiliza o espaço euclidiano. Elas começam com uma lista de axiomas, e o primeiro deles pode ser: "duas retas quaisquer se intersectam".

Para obter mais detalhes o estudante pode consultar [10], página 84 e seguintes, assim como [36], página 129 e seguintes.

22.7 Problemas

Problema 22.7.1. Explique a observação feita na Definição 22.4, que afirma que se os pontos A, B e C não estão na mesma geodésica então dois quaisquer deles não são antípodas.

Problema 22.7.2. Prove que as retas tangentes a uma geodésica em pontos antípodas são paralelas.

Problema 22.7.3. Considere duas geodésicas que se encontram em um ponto A e em seu antípoda $-A$. **a)** Explique por que as retas tangentes às geodésicas em A determinam ângulos congruentes àqueles correspondentes determinados pelas tangentes em $-A$. **b)** Prove que a medida do ângulo entre duas geodésicas é a mesma considerando as duas possibilidades definidas no texto (medida do diedro ou medida do ângulo dado pelas retas tangentes).

Problema 22.7.4. Explique por que dados pontos não antípodas A e B da esfera de raio r, existe uma correspondência biunívoca entre os pontos da geodésica que os contém e os números reais

do intervalo $[0,2\pi r)$, de modo que ao ponto A corresponde o valor 0 e ao ponto B um valor b tal que $b \in [0,\pi r)$. Explique por que essa propriedade substitui, na GSE, os axiomas de medida da GE, e qual a diferença das duas geometrias nesse aspecto.

Problema 22.7.5. Defina o que é conjunto convexo na GSE. Depois prove o seguinte. Seja g uma geodésica qualquer. Então $\mathbb{S} - g$ é a união de dois conjuntos (chamadas *semiesferas abertas* determinadas por g) tais que: (i) cada um deles é convexo; (ii) se um ponto A está em um desses conjuntos e B no outro, então $\overset{\frown}{AB}$ intersecta g.

Problema 22.7.6. Explique por que na GSE vale o Teorema de Pasch.

Problema 22.7.7. Seja $\mathscr{C}$ uma semirreta de origem A e $\mathscr{H}$ uma das semiesferas abertas determinada pela geodésica que contém $\mathscr{C}$. Seja $x \in (0,180)$. Explique por que existe um ponto $C \in \mathscr{H}$ de forma que x é a medida em graus do ângulo determinado por $\mathscr{C}$ e pela semigeodésica de origem A que contém C. Explique por que na GSE valem os axiomas sobre ângulos adotados na GE.

Problema 22.7.8. Dada uma geodésica, consideremos o plano por ela determinado e o diâmetro da esfera perpendicular a ele. Os extremos desse diâmetro chamam-se *polos* da geodésica. Prove que, dada uma geodésica e um ponto que não é um de seus polos, existe uma única geodésica que contém o ponto e é perpendicular à geodésica dada. O que ocorre se o ponto for um polo da geodésica?

Problema 22.7.9. Justifique por que o triângulo esférico dado na Figura 22.5 tem dois ângulos retos, em A e em B. A construção usada nessa Figura está explicada no texto que a precede.

Problema 22.7.10. Explique por que um triângulo esférico ABC e o triângulo antípoda $(-A)(-B)(-C)$ são congruentes.

Problema 22.7.11. Defina interior de um ângulo da GSE, e descreva esse conjunto.

Problema 22.7.12. Na GSE três pontos não colineares (isto é, que não estão na mesma geodésica) determinam um único triângulo? É possível definir interior de um triângulo?

Problema 22.7.13. Dada uma geodésica da GSE, prove que todas as geodésicas perpendiculares a ela se encontram em dois pontos.

Problema 22.7.14. Prove que na GSE todo triângulo está contido em uma semiesfera.

Problema 22.7.15. Prove que na GSE a soma dos lados de qualquer triângulo é menor do que 2π. Sugestão: dado um triângulo ABC, para mostrar que a soma de seus lados satisfazem à propriedade requerida, aplique a desigualdade triangular ao triângulo $(-A)BC$, em que $-A$ é o antípoda de A.

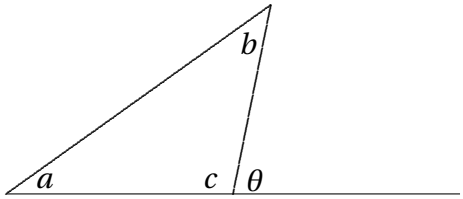
Problema 22.7.16. Dê exemplo de um triângulo equilátero retângulo na GSE.

Problema 22.7.17. Explique por que na GSE não vale o Teorema de Pitágoras.

Problema 22.7.18. Na GSE, qual é o maior valor que pode atingir a soma dos ângulos de um triângulo?

Problema 22.7.19. Existem retângulos na GSE?

Problema 22.7.20. Prove que na GSE os ângulos do topo de um quadrilátero de Saccheri qualquer são congruentes e obtusos.



$\theta < a + b$ na GSE

$\theta = a + b$ na GE

Figura 22.7. Figura do Problema 22.7.22.

Problema 22.7.21. Prove que na GSE a área do triângulo ABC é

$$\text{área}(ABC) = r^2[m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) - 180$$

se os ângulos estão medidos em graus.

Problema 22.7.22. Interprete e explique a Figura 22.7.

Problema 22.7.23. Verifique se na GSE vale um resultado correspondente ao Teorema do ângulo externo **??** da GE.

Problema 22.7.24. Verifique se na GSE vale o caso de congruência *LAA*.

Problema 22.7.25. No Tomo II, Capítulo 10, foi provado que "Por um ponto fora de uma reta passa uma paralela à reta dada". Esse resultado naturalmente não vale na GSE. Identifique em quais passos falha a demonstração utilizada ali.

Problema 22.7.26. Calcule a soma dos ângulos de um polígono esférico.

Problema 22.7.27. Explique o que ocorre na fórmula (22.2) do Teorema 22.2 quando $r \to \infty$.

22.8 Temas para investigação

Tema 22.8.1. Na Geometria da Superfície Esférica (GSE) existem figuras poligonais de dois lados, que chamaremos de *diágonos*. Estude as propriedades dessas figuras.

Tema 22.8.2. Na GSE existem triângulos esféricos isósceles? Se existirem, investigue suas propriedades.

Tema 22.8.3. Defina quadrilátero na GSE e estude suas propriedades.

Tema 22.8.4. Defina circunferência na GSE e estude suas propriedades. Dada uma circunferência, ela tem um único centro?

Tema 22.8.5. O termo "Geometria Elíptica", utilizado na Seção 22.6, sugere que essa geometria pode ser modelada na superfície de um elipsoide. Investigue como são as "retas" nessa superfície.

Tema 22.8.6. Existe uma trigonometria esférica, descoberta pelos matemáticos árabes do Século X, que estuda propriedades trigonométricas dos triângulos esféricos. Investigue isso. Por exemplo, em um triângulo ABC vale a seguinte fórmula (lei dos senos da trigonometria esférica):

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}a}=\frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}b}=\frac{\operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}c}$$

sendo: α a medida do ângulo interno $\hat{A}$, a a medida angular do lado $\overset{\frown}{BC}$, etc, conforme notações da Figura 22.4.

Tema 22.8.7. Neste projeto o estudante está convidado a estudar ladrilhamentos da esfera com polígonos da GSE. Assim como ladrilhamos o plano, figuras planas, o espaço, etc., podemos ladrilhar a esfera. Os lados desses polígonos devem ser segmentos geodésicos.

Observe que todo poliedro inscritível em uma esfera pode ser projetado na esfera e gerar um ladrilhamento com polígonos regulares. O exemplo mais conhecido é o do icosaedro truncado, cuja estrutura é utilizada em bolas de futebol. Confira a Figura 22.8. Descreva que poliedros estão nessa categoria. Faça desenhos desses ladrilhamentos na esfera.

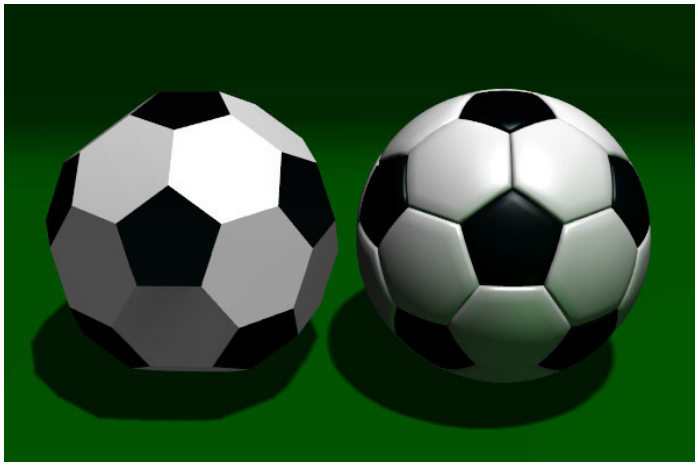


Figura 22.8. Ilustrações do icosaedro truncado e o correspondente ladrilhamento na esfera.

Existem ladrilhamentos da esfera que não têm correspondentes com poliedros inscritos. São os hosoedros. Confira as Figuras 22.9 e 22.10. Descreva esses ladrilhamentos e explique por que não existem como poliedros.

Informações podem ser obtidas na *Wikipedia*, através das palavras chaves “spherical polyhedron” e “spherical tiling”.

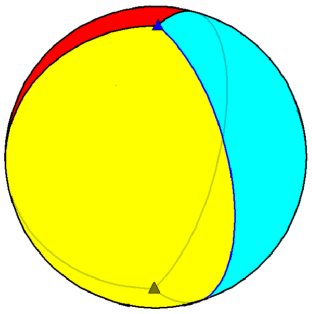


Figura 22.9 Hosoedro trigonal

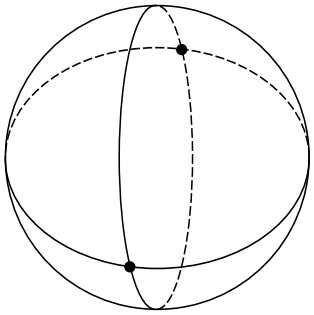


Figura 22.10 Hosoedro quadrigonal.

Capítulo 23

Geometria hiperbólica

23.1 Introdução

Neste capítulo estudamos alguns aspectos da chamada *Geometria Hiperbólica* (GH). Essa Geometria admite todos os axiomas da Geometria Euclidiana com exceção de um, o axioma das paralelas. Em seu lugar estabelece que "por um ponto fora de uma reta existe mais de uma paralela à reta dada".

Desde a antiga civilização grega até meados do Século XIX o modelo euclidiano de geometria era o único vigente. Todo cientista, ao medir ou estudar fenômenos no espaço circundante, admitia, implicitamente, que a organização geométrica desse espaço obedecia aos axiomas euclidianos. Essa concepção era tão forte na mente de todas as pessoas que não era nem mesmo questionada, contrariando o antigo aforisma da Filosofia: "duvide de tudo". Muitos filósofos afirmavam que a geometria (como a descrevia Euclides, pois não havia outra) era a geometria natural do universo.

De fato, algumas propriedades da geometria euclidiana parecem ser bem naturais. Por exemplo, existe uma única reta contendo dois pontos dados. Outra propriedade, que é o chamado "axioma das paralelas": dada uma reta e um ponto fora dela, existe uma única reta paralela à reta dada passando pelo ponto.

Os matemáticos do tempo de Euclides e os que vieram depois dele tampouco questionavam a existência de outra geometria. Para eles aquela era a única que existia. Os matemáticos simplesmente estudavam a geometria, expandindo seus resultados e melhorando a estrutura proposta por Euclides. Foi esse estudo minucioso que levou à descoberta de outras geometrias. Isso se deu da seguinte forma.

Conforme já comentamos, a estrutura da geometria proposta por Euclides era composta de definições, axiomas e teoremas. Esses elementos eram dispostos em uma ordem, do mais simples para o mais complexo. Assim, Euclides inicia com as definições e os axiomas mais simples possíveis. Depois de cada grupo de definições e axiomas, demonstra o maior número de teoremas que é possível deduzir desses elementos.

Observando a ordem com que Euclides dispôs esses elementos, vemos que ele postergou o axioma das paralelas o máximo possível, e demonstrou todos os teoremas que pôde sem usar esse axioma. Os matemáticos perceberam que Euclides teria tentado admitir o axioma das paralelas não como um postulado, mas como um teorema, mas não conseguiu uma demonstração. Assim se perguntava: o axioma das paralelas poderia ser demonstrado usando apenas os axiomas e definições anteriores a ele? Seria possível descobrir alguma demonstração que teria passado despercebida a Euclides e seu grupo de matemáticos da Escola de Alexandria?

O fato é que, por muitos séculos, os matemáticos tentaram descobrir essa demonstração. Por vezes acharam que a haviam encontrado, mas depois sempre se percebia algum defeito, alguma pequena afirmação que fora usada mas não demonstrada. Depois de tanto esforço e com poucos resultados, começaram a desconfiar que essa demonstração não existia. Aos poucos os matemáticos aprenderam a olhar com mais maleabilidade para uma estrutura axiomática, e perceber que essas estruturas podiam variar, cada uma com seus axiomas e resultados. Começaram então a se perguntar o que significaria uma estrutura geométrica sem o axioma das paralelas, ou com um enunciado diferente daquele de Euclides. Perceberam que se obtinha outra estrutura lógica, perfeitamente coerente, mas com propriedades geométricas diferentes das usuais.

Esses estudos levaram à descoberta de outras geometrias. Num primeiro momento se pensava que essas geometrias constituiam um mero exercício lógico, mas logo se percebeu que existiam espaços matemáticos nos quais essas geometrias eram naturais. Assim se foi modificando a mente humana, e a geometria euclidiana deixou de ser a única estrutura geométrica residente em nosso mecanismo psicológico, tendo esse se ampliado para abarcar outras possibilidades. Esse amadurecimento levou à descoberta da teoria da relatividade, a qual propõe que a geometria natural do espaço não é necessariamente a euclidiana.

Essas descobertas tiveram outra consequência. Os matemáticos compreenderam que era importante estudar teoricamente as estruturas axiomáticas, sem se importar, a princípio, com sua correlação com a realidade física ou com pré-concepções psicológicas. Essa nova forma de investigar trouxe muitas descobertas através das estruturas geométricas, algébricas e analíticas. A Matemática passou por um grande avanço, que ocorre até hoje. Com isso se explica a importância que os matemáticos dão às estruturas axiomáticas. É necessário observar, entretanto, que o estudo da Matemática através de estruturas axiomáticas exige muito amadurecimento mental, e por isso esse método não deve, em geral, ser utilizado para estudantes do ensino básico.

23.2 Axiomas da Geometria Hiperbólica Plana

Nesta seção estudamos uma geometria diferente da Geometria Euclidiana. Admitimos a existência de um plano como conjunto de pontos, de subconjuntos desse plano chamados retas, que obedecem a determinadas propriedades, que são seus axiomas. Esses axiomas são equivalentes aos da Geometria Euclidiana, exceto um. Apresentamos os seus enunciados e não vamos repetir aqui as definições e teoremas que deles decorrem.

Axioma H1 (da incidência da reta)
Dados dois pontos diferentes, existe uma única reta que os contém.

Axioma H2 (da régua)
1) *Dados dois pontos diferentes A e B, existe um número positivo a eles associado chamado distância de A a B e indicado por AB.*
2) *Os pontos de uma reta qualquer podem ser postos em correspondência com os números reais de modo que:*
(i) a cada ponto da reta corresponde um único número real, chamado coordenada do ponto;
(ii) a cada número real corresponde um único ponto da reta;
(iii) a distância entre dois pontos quaisquer é o valor absoluto da diferença de suas coordenadas.
3) *Dados dois pontos A e B em uma reta, o sistema de coordenadas pode ser escolhido de tal modo que a coordenada de A seja zero e a de B seja positiva.*

A partir desses axiomas podemos definir *estar entre*, *segmento AB*, *semirreta*, *ângulo $\angle BAC$*, *triângulo*, *conjunto convexo*, etc, e obter várias propriedades, como “dados três pontos colineares,

exatamente um deles está entre os outros dois".

Axioma H3 (da separação do plano)
Dada uma reta em um plano, os pontos do plano que não estão na reta formam dois conjuntos chamados semiplanos, que satisfazem as seguintes condições:
(i) *Cada semiplano é não vazio e convexo;*
(ii) *Se o ponto A está em um semiplano e o ponto B no outro, então o segmento AB intersecta a reta.*

A partir desse axioma podemos definir *interior* de triângulo e obter muitos resultados sobre a posição relativa entre pontos e retas.

Axioma H4 (da medida de ângulos)
A todo ângulo $\angle BAC$ corresponde um número real a tal que $0 < a < 180$, chamado medida em graus do ângulo, *ou, simplesmente*, medida, *e indicado por $m(\angle BAC)$.*

Axioma H5 (da construção de ângulos)
Seja $\overrightarrow{AB}$ uma semirreta contida na origem de um semiplano. Para todo número real a tal que $0 < a < 180$, existe uma única semirreta $\overrightarrow{AC}$, com C no semiplano dado, tal que $m(\angle BAC) = a$.

Axioma H6 (da adição de ângulos)
Se o ponto D está no interior de $\angle BAC$ então $m(\angle BAC) = m(\angle BAD) + m(\angle DAC)$.

Axioma H7 (do suplemento)
Quaisquer dois ângulos que formam um par linear são suplementares.

Axioma H8 (da congruência *LAL*)
Toda correspondência LAL é uma congruência.

Axioma H9 (da não unicidade da reta paralela)
Por um ponto dado fora de uma reta passa mais de uma reta paralela à reta dada.

Em nossa breve exposição da geometria hiperbólica poderemos eventualmente usar também os seguintes axiomas:

Axioma H10 (da área)
A toda região poligonal corresponde um número positivo, denominado área da região poligonal.

Axioma H11 (da adição de áreas)
Se uma região poligonal é a união de duas ou mais regiões poligonais tais que duas a duas não têm ponto interior em comum, então a área da região poligonal é a soma das áreas das regiões que a formam.

Axioma H12 (da área de triângulos)
As áreas de regiões triangulares delimitadas por triângulos congruentes são iguais.

Definição 23.1. O sistema de axiomas H1-H12 e o conjunto de propriedades que podem ser obtidas deles chama-se *Geometria Hiperbólica Plana* (GH), e é um exemplo de *geometria não-euclidiana.*

Esperamos que na Geometria Hiperbólica apareçam propriedades e resultados diferentes da Geometria Euclidiana. Certamente que um deles diz respeito à soma dos ângulos de um triângulo qualquer. Vamos provar que, na Geometria Hiperbólica, a soma dos ângulos de qualquer triângulo é ≤ 180, e que existem triângulos para os quais a soma é < 180. Devido às dificuldades técnicas, para não alongar demasiadamente este texto, deixamos para o estudante provar que, na

Geometria Hiperbólica, a soma dos ângulos de um triângulo qualquer é < 180. Confira o Problema 23.6.29 e o Tema 23.7.4.

23.3 Propriedades de triângulos na GH

Observemos inicialmente que na GH (Geometria Hiperbólica) valem todas as definições e resultados demonstrados até (inclusive) o Teorema 10.6, visto no início da Seção 10.2 (Retas paralelas em um plano) do Tomo II. Destacamos que o Teorema do Ângulo Externo e suas consequências, estudadas na Seção 9.14 do Tomo II (Teorema 9.37), valem nas duas geometrias. Em particular, nas duas geometrias vale que: "Em todo triângulo, a soma das medidas de quaisquer dois ângulos internos é menor do que 180°."

Os três primeiros resultados que estudamos logo a seguir são atribuídos a Giovanni Saccheri e a Adrien-Marie Legendre, e ainda valem na GE e na GH, pois se baseiam nos axiomas H1 a H8, admitidos em ambas.

Teorema 23.2. *Dado um triângulo qualquer ABC, existe outro tal que a soma dos seus ângulos internos é igual à soma dos ângulos do anterior mas tem um ângulo que mede $\frac{1}{2}m(\hat{A})$ ou menos.*

Demonstração. Consideremos, como referência, a Figura 23.1. Dado o triângulo ABC, seja M o ponto médio do lado BC e seja AE o segmento do qual M é também o ponto médio.

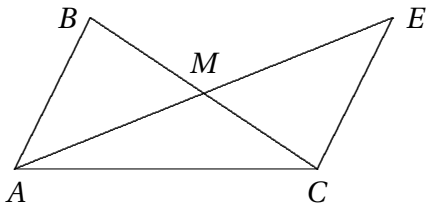


Figura 23.1. Figura ilustrativa do Teorema 23.2.

Afirmamos que o triângulo AEC é o outro triângulo procurado. Vamos mostrar primeiro que a soma dos ângulos desses triângulos são iguais. Temos $BAM \cong CEM$, o que implica que $m(\hat{B}) = m(\angle ECM)$ e $m(\angle BAM) = m(\hat{E})$. Portanto

$$\text{soma dos ângulos do triângulo } ABC =$$

$$m(\angle MAC) + m(\angle BAM) + m(\hat{B}) + m(\angle BCA) = m(\angle MAC) + m(\hat{E}) + m(\angle ECM) + m(\angle BCA) =$$

$$= m(\angle MAC) + m(\hat{E}) + m(\angle ECA) = \text{soma dos ângulos do triângulo } AEC.$$

Notemos agora que pelo menos um dos ângulos $\angle BAM$ e $\angle EAC$ tem medida $\leq (1/2)m(\hat{A})$. Como $BAM \cong CEM$, temos $\angle BAM \cong \hat{E}$. Portanto pelo menos um dos ângulos $\hat{E}$ e $\angle EAC$ tem medida $\leq (1/2)m(\hat{A})$. □

Como consequência obtemos o teorema abaixo, ainda válido igualmente na GE e na GH.

Teorema 23.3. *A soma dos ângulos de um triângulo qualquer é* ≤ 180.

Demonstração. Seja ABC um triângulo, e suponhamos que a soma de seus ângulos seja > 180. Então

$$m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 180 + r$$

para algum número $r > 0$. Aplicando n vezes o Teorema 23.2, encontramos um triângulo DEF tal que a soma de seus ângulos é igual à soma dos ângulos de ABC e que tem um ângulo que mede $\leq \frac{1}{2^n} m(\hat{A})$. Digamos que esse ângulo seja $\hat{D}$. Se n for suficientemente grande para que $\frac{1}{2^n} m(\hat{A}) < r$ podemos admitir que $m(\hat{D}) < r$. Temos então

$$m(\hat{D}) + m(\hat{E}) + m(\hat{F}) = 180 + r \quad \text{e} \quad m(\hat{D}) < r.$$

Combinando esses dois resultados temos $m(\hat{E}) + m(\hat{F}) > 180$. Mas isso contraria o Teorema do Ângulo Externo. □

Teorema 23.4. *A medida de um ângulo externo qualquer de um triângulo arbitrário é maior ou igual à soma das medidas dos dois ângulos internos não adjacentes.*

Demonstração. Tomando a Figura 23.2 como referência, temos $a + b + c \leq 180$ (Teorema 23.3). Como c e θ são suplementares temos $c + \theta = 180$. Juntando essas informações vem $a + b \leq \theta$. □

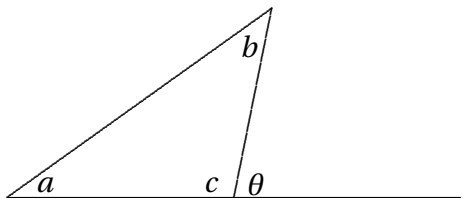


Figura 23.2. Figura do Teorema 23.4

Chegou o momento em que mostramos que na GH existe um triângulo com ângulos que somam menos do que 180. Naturalmente para isso precisamos usar o Axioma H9. A ideia inicial é a seguinte.

Consideremos a Figura 23.3 em que temos uma reta r, um ponto A em r, um segmento AB perpendicular a r em A e uma reta s perpendicular a AB em B. As retas r e s são paralelas pois, se não o fossem, se encontrariam em um ponto P, e o triângulo ABP teria dois ângulos retos, contrariando o Teorema 23.3.

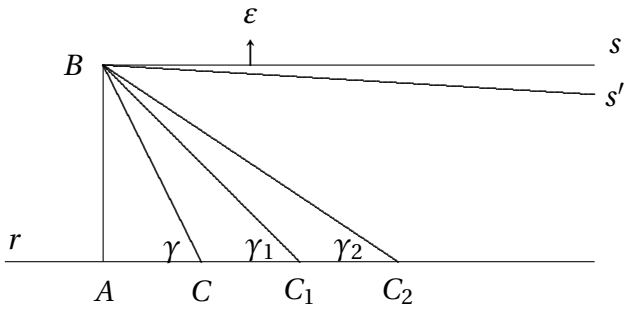


Figura 23.3. Figura referente ao Teorema 23.5.

Em virtude do Axioma H9, existe outra reta paralela a AB por B, a qual chamaremos de s'. Seja ε a medida do ângulo determinado por s e s'. Vamos trabalhar no lado de $\overleftrightarrow{AB}$ em que a medida do ângulo determinando por $\overrightarrow{BA}$ e s' é $90 - \varepsilon$.

Consideremos um ponto C em r e movimentemos esse ponto para a direita, assim C assume posições C_1, C_2, ... Sejam γ a medida do ângulo $\angle ACB$, γ_1 a medida do ângulo $\angle AC_1B$, etc. A soma dos ângulos dos triângulos ABC_i é

$$S_i = m(\angle BAC_i) + \gamma_i + m(\angle ABC_i).$$

Notemos que $m(\angle BAC_i) = 90$ e $m(\angle ABC_i) < 90 - \varepsilon$. Logo

$$S_i < 90 + \gamma_i + 90 - \varepsilon,$$

ou

$$S_i < 180 + \gamma_i - \varepsilon.$$

Se conseguirmos um triângulo ABC_i para algum i em que $\gamma_i - \varepsilon \leq 0$, encontramos um triângulo em que a soma dos ângulos é $< 180°$.

Teorema 23.5. *Na GH existe um triângulo tal que a soma de seus ângulos é* $< 180°$.

Demonstração. Consideremos a construção iniciada acima com a Figura 23.3, sendo que agora tomamos C_1 de modo que $CC_1 = BC$, tomamos C_2 de modo que $C_1C_2 = BC_1$, e assim por diante. Obtemos a Figura 23.4.

Agora o triângulo BCC_1 é isósceles com base BC_1, logo $m(\angle CBC_1) = \gamma_1$, o triângulo BC_1C_2 é isósceles com base BC_2, logo $m(\angle C_1BC_2) = \gamma_2$, etc. Por causa do Teorema 23.4 temos $\gamma_1 + \gamma_1 \leq \gamma$, logo $\gamma_1 \leq (1/2)\gamma$, e depois temos $\gamma_2 + \gamma_2 \leq \gamma_1$, logo $\gamma_2 \leq (1/2^2)\gamma$, e assim por diante, no i-ésimo triângulo obtemos $\gamma_i \leq (1/2^i)\gamma$. Se i é suficientemente grande para que $(1/2^i)\gamma < \varepsilon$, temos $\gamma_i < \varepsilon$. Então a soma S dos ângulos do triângulo ABC_i é

$$S < 180 + \gamma_i - \varepsilon < 180$$

□

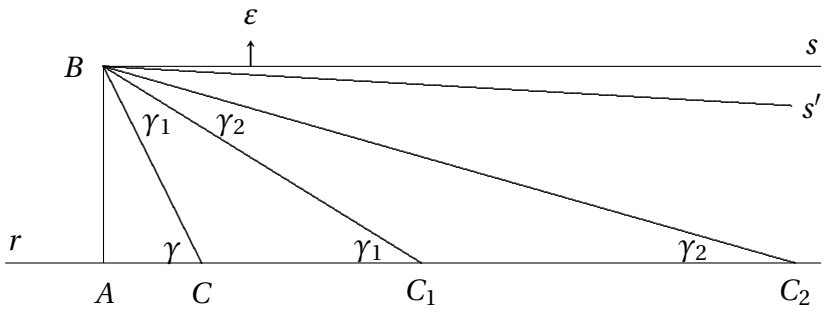


Figura 23.4. Figura 2 referente ao Teorema 23.5.

Vemos que é possível construir logicamente uma geometria em que são válidos os axiomas euclidianos com exceção do axioma das paralelas. A pergunta que surge é se essa geometria é um mero exercício especulativo ou se tem existência como ente matemático ou natural. Vemos, na próxima Seção, que podemos construir modelos euclidianos de GH. Com isso podemos afirmar que a GH é tão consistente quanto a GE.

23.4 Modelos euclidianos de GH

Existem muitos modelos de Geometria Hiperbólica construídos como objetos euclidianos. Esses modelos não são simples e, a princípio, parecem bem estranhos. Mas têm a função de nos convencer de que a GH tem existência na Matemática. Quanto à existência da GH no mundo físico, esse é um problema cujo entendimento ainda está por ser aprofundado.

Exemplo 23.6. O seguinte exemplo de geometria não-euclidiana é atribuído a Felix C. Klein e Eugenio Beltrami. Sejam $\mathscr{C}$ uma circunferência e $\mathscr{D}$ o disco aberto formado pelos pontos interiores de $\mathscr{C}$. O espaço de nossa geometria é $\mathscr{D}$. As "retas" dessa geometria são as cordas abertas de $\mathscr{C}$, isto é, são todas as cordas de $\mathscr{C}$ sem os pontos extremos. A Figura 23.5 mostra uma reta r nessa geometria, um ponto P fora dessa reta e retas que passam por P e não intersectam r. Portanto, são retas paralelas a r. Dessa forma essa geometria obedece ao Axioma H9 e é um exemplo de geometria não-euclidiana. Se usarmos o conceito de distância usual não vale o Axioma H2, e esse modelo não é uma geometria hiperbólica no sentido que definimos neste texto. Mas é possível redefinir distância e medida de ângulo de modo que estejam satisfeitos os axiomas da geometria hiperbólica.

Vamos comentar apenas a definição de distância nesse modelo. Sejam P e Q pontos de $\mathscr{D}$ e sejam S e T os pontos extremos da corda que contém P e Q na ordem $S-P-Q-T$ ou na ordem $S-Q-P-T$. Definimos a distância entre P e Q por

$$d(P,Q) = \frac{1}{2}\left|\log \frac{PT\cdot QS}{PS\cdot QT}\right|.$$

Nessa fórmula XY é a distância euclidiana entre os pontos X e Y, log é o logaritmo neperiano e se $S-P-Q-T$ podemos dispensar o sinal de valor absoluto nessa fórmula. Os Problemas 23.6.20 e 23.6.22 complementam esse estudo.

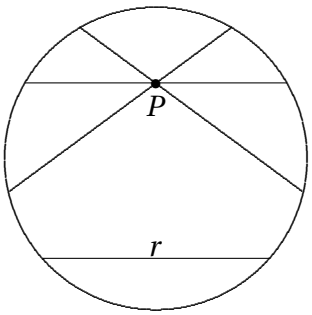


Figura 23.5. Ilustração do modelo de GH de Klein-Beltrami.

Exemplo 23.7. O seguinte exemplo de geometria não-euclidiana é atribuído a Jules H. Poincaré. Seja $\mathscr{C}$ uma circunferência e $\mathscr{D}$ o disco aberto formado pelos pontos interiores de $\mathscr{C}$. O espaço de nossa geometria é $\mathscr{D}$. As "retas" dessa geometria são os diâmetros de $\mathscr{C}$ e os arcos de circunferência que intersectam $\mathscr{C}$ em ângulos retos, isto é, a tangente a $\mathscr{C}$ e a tangente ao arco nos pontos de interseção são perpendiculares.

É fácil observar, antes de mais nada, que essa Geometria obedece ao Axioma H9. Isso está ilustrado na Figura 23.6, em que vemos uma reta r, um ponto P fora de r, e duas retas s e t passando pelo ponto P e ambas paralelas a r.

A distância entre dois pontos na GH do disco de Poincaré é dada pela mesma fórmula da distância do modelo da Klein-Beltrami. Portanto os resultados dos Problemas 23.6.20 e 23.6.22 também se aplicam aqui. Podemos definir semirretas (que são arcos de circunferências) e ângulos, e

tomar como medida de um ângulo a medida euclidiana do ângulo correspondente formado pelas tangentes às semirretas no vértice.

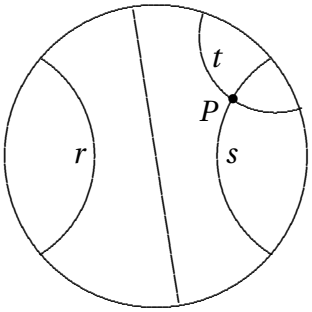


Figura 23.6. Ilustração do modelo de GH do disco de Poincaré.

Exemplo 23.8. O seguinte exemplo de geometria não-euclidiana é denominado "modelo do semiplano de Poincaré". Dado um sistema de coordenadas cartesianas Oxy, consideremos o semiplano superior $\mathscr{H} = \{(x, y) | y > 0\}$. O conjunto de pontos de $\mathscr{H}$ é o nosso espaço. As "retas" dessa geometria são as semirretas abertas $\{(a, y) | y > 0\}$, $a \in \mathbb{R}$, perpendiculares ao eixo Ox, e as semicircunferências abertas com centro no eixo Ox e contidas em $\mathscr{H}$. Confira a Figura 23.7, em que vemos uma reta r, um ponto P fora de r, e três retas s, t e u passando pelo ponto P e paralelas a r.

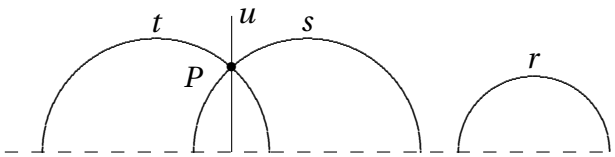


Figura 23.7. Ilustração do modelo de GH do semiplano de Poincaré.

23.5 Outras propriedades da GH

Para informação do estudante enunciamos sem demonstração outras propriedades da GH. Certamente a que mais chama a atenção é

Teorema 23.9. *Na GH em qualquer triângulo a soma dos ângulos é* < 180.

O Problema 23.6.29 e o Tema 23.7.4 trazem mais detalhes sobre esse resultado.

Uma bela figura disponibilizada na Wikipedia. Mostra um triângulo hiperbólico desenhado na superfície de um parabolóide hiperbólico. Vemos também (parte de) duas retas paralelas mostrando uma perpendicular comum.

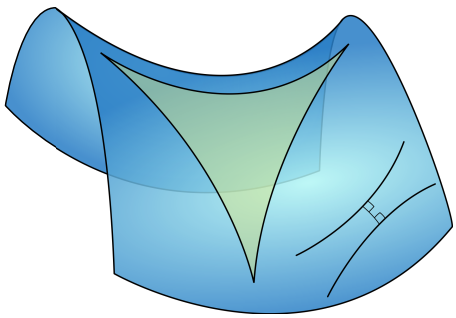


Figura 23.8

As áreas de triângulos na GH têm também um comportamento peculiar. Vemos abaixo uma sequência de resultados. Confira mais detalhes em [10], página 74 e seguintes, [37], página 345, e [23], página 297 e seguintes.

Lema 23.10. *Se dois triângulos têm a mesma soma dos ângulos e um par de lados congruentes, então eles têm a mesma área.*

Lema 23.11. *Seja ABC um triângulo, seja E o ponto médio de AC e seja F um ponto de AB tal que EF é perpendicular à mediatriz de BC. Então F é ponto médio de AB.*

Lema 23.12. *Têm a mesma área dois triângulos quaisquer cuja soma dos ângulos é a mesma.*

Definição 23.13. Chama-se *deficiência angular*, ou simplesmente *deficiência*, de um triângulo ABC ao número $d(ABC) = 180 - [m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C})]$.

Teorema 23.14. *Na GH existe uma constante k tal que área$(ABC) = k^2 d(ABC)$, qualquer que seja o triângulo ABC.*

Dado um triângulo retângulo de hipotenusa a e catetos b e c, vale a fórmula

$$\cosh a = \cosh b \cosh c.$$

Essa fórmula é considerada o "Teorema de Pitágoras" da GH, pois é uma relação algébrica entre os lados de um triângulo retângulo qualquer. Confira ilustração na Figura 23.9.

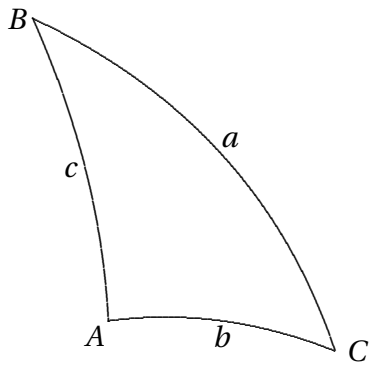


Figura 23.9. Um triângulo retângulo hiperbólico.

Dado um triângulo qualquer ABC, sejam a a medida do lado oposto ao vértice A, b a medida do lado oposto ao vértice B e c a medida do lado oposto ao vértice C. Vale a seguinte versão da lei dos senos:

$$\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{senh} a} = \frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{senh} b} = \frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{senh} c}.$$

Para o estudante que não conhece, definimos as funções cosh (denominada *cosseno hiperbólico*) e senh (denominada *seno hiperbólico*):

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

23.6 Problemas

Problema 23.6.1. Sejam r e s retas da GH perpendiculares. Toda paralela a r encontra s?

Problema 23.6.2. Seja r uma reta da GH, P um ponto de r e s uma reta perpendicular a r por P. Seja T um ponto de s diferente de P. Explique por que existem por T uma paralela a r que é perpendicular a s, e uma paralela que não é perpendicular a s.

Problema 23.6.3. Explique por que na GH não vale o seguinte resultado da GE: "Em um plano, se duas retas são paralelas a uma terceira, então elas são paralelas entre si".

Problema 23.6.4. Existem retângulos na GH? Justifique. (lembrete: retângulos são quadriláteros com quatro ângulos retos.)

Problema 23.6.5. Explique por que na GH não vale a seguinte afirmação: "dadas duas retas paralelas, qualquer transversal determina ângulos correspondentes congruentes".

Problema 23.6.6. Na GH, qual é o número máximo de ângulos retos que um quadrilátero pode ter? Faça uma construção que exemplifique sua proposta.

Problema 23.6.7. Prove que na GH duas retas não podem ter mais de uma reta perpendicular comum.

Problema 23.6.8. Prove que na GH não existem duas retas equidistantes.

Problema 23.6.9. Explique como se pode construir, na GH, um quadrilátero no qual a soma dos ângulos é menor do que 360. Faça isso sem usar o Teorema 23.9.

Problema 23.6.10. Tendo em vista o Teorema 23.9, o que se pode afirmar, na GH, a respeito da soma dos ângulos de quadriláteros, pentágonos, etc?

Problema 23.6.11. Prove que, na GH, dois triângulos que têm ângulos correspondentes congruentes são congruentes. Portanto, na GH, a similaridade AAA é sempre uma congruência.

Problema 23.6.12. Lembramos que, segundo a Definição 23.13, $d(ABC)$ é a deficiência angular do triângulo ABC. Dado um triângulo ABC, seja D um ponto entre A e B. Mostre que $d(ABC) = d(ACD) + d(BCD)$.

Problema 23.6.13. Na GH construa, a partir de qualquer triângulo retângulo, um triângulo cuja deficiência é o dobro da do triângulo original.

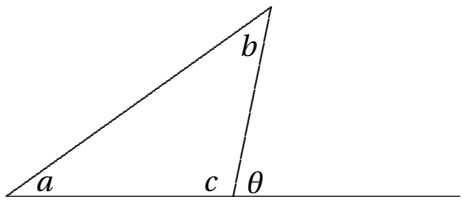
Problema 23.6.14. Seja k a constante definida no Teorema 23.14. Explique por que na GH a área de qualquer triângulo é menor do que $180k^2$ (ou πk^2 se os ângulos são medidos em radianos).

Problema 23.6.15. Na GH dê uma definição apropriada de deficiência de quadrilátero convexo, de modo que se tomarmos um quadrilátero e o dividirmos em dois quadriláteros com um segmento que liga um lado ao lado oposto, então a soma das deficiências dos novos quadriláteros é igual à deficiência do quadrilátero original. Com essa definição, o que ocorre com a deficiência de um quadrilátero quando o dividimos em dois triângulos com uma diagonal? E se dividimos o quadrilátero em um triângulo e um quadrilátero ligando um vértice com um lado?

Problema 23.6.16. De uma certa geometria sabe-se que valem os axiomas de H1 a H8. Sabe-se também que em qualquer triângulo a soma dos ângulos é 180. Prove que vale o Axioma 16 da GE (unicidade da reta paralela).

Problema 23.6.17. De uma certa geometria sabe-se que valem os axiomas de H1 a H8. Sabe-se também que em qualquer triângulo a soma dos ângulos é < 180. Prove que vale o Axioma H9 (não unicidade das paralelas).

Problema 23.6.18. Complementando o Problema 22.7.22, interprete e explique a Figura 23.10.



$\theta > a + b$ na GH

$\theta = a + b$ na GE

$\theta < a + b$ na GSE

Figura 23.10. Figura do Problema 23.6.18.

Problema 23.6.19. Sabemos que na GE qualquer ângulo inscrito em uma semicircunferência é reto. Explique por que, na GH, esses ângulos são agudos.

Problema 23.6.20. Explique por que o modelo de Klein de GH, descrito no Exemplo 23.6, satisfaz o Axioma H2.

Problema 23.6.21. Explique por que o modelo de Poincaré de GH, descrito no Exemplo 23.8, satisfaz o Axioma H1.

Problema 23.6.22. Retomando o modelo de Klein de GH descrito no exemplo 23.6, prove que se P, Q e R são pontos de uma reta dessa geometria, com $P - Q - R$, então $d(P,Q) + d(Q,R) = d(P,R)$.

Problema 23.6.23. Desenhe circunferências e seus centros no modelo de Poincaré de GH, descrito no exemplo 23.7.

O *quadrilátero de Saccheri* foi definido no Tomo II. Relembramos aqui sua definição e as propriedades já estudadas.

O quadrilátero $ABCD$ chama-se *quadrilátero de Saccheri* se $AD = BC$ e se $\hat{A} = \hat{B} = 90$. A medida de AD chama-se *lado lateral*, AB chama-se *base*, CD chama-se *cume*, e $\hat{C}$ e $\hat{D}$ chamam-se *ângulos do cume*. Confira a Figura 23.11.

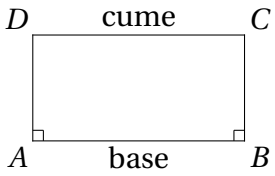


Figura 23.11. O quadrilátero de Saccheri.

No Tomo II foi visto que o segmento que liga os pontos médios da base e do cume de um quadrilátero de Saccheri é perpendicular a ambos. Foi provado também que $AC = BD$ e que os ângulos do cume são congruentes. Para provar esses resultados foram utilizados os Axiomas de 1 a 15, portanto valem na GE e na GH.

Por outro lado, para provar que todo quadrilátero de Saccheri é um retângulo foi usado o Axioma 16 (unicidade da paralela).

Problema 23.6.24. Explique por que, na GH, é possível construir quadriláteros de Saccheri. Faça isso teoricamente, isto é, usando os axiomas. Desenhe esses quadriláteros nos modelos 23.7 e 23.8 de GH de Poincaré. Explique por que, em qualquer quadrilátero de Saccheri, o cume é paralelo à base.

Problema 23.6.25. Explique por que, na GH, os ângulos do cume de qualquer quadrilátero de Saccheri não são retos, mas são agudos. Explique por que, usando apenas os axiomas de 1 a 15 da GE, não é possível mostrar que um quadrilátero de Saccheri qualquer é um retângulo.

Problema 23.6.26. Mostre que na GH todo quadrilátero de Saccheri tem base menor do que o cume. Prove também que o segmento que une os pontos médios da base e do cume é menor do que o lado lateral.

Problema 23.6.27. Chamamos de *quadrilátero de Lambert* a qualquer quadrilátero com três ângulos retos. Explique por que na GE todo quadrilátero de Lambert é um retângulo, mas na GH qualquer quadrilátero de Lambert não é um retângulo. Verifique que uma forma de obter quadriláteros de Lambert é "dividir ao meio" um quadrilátero de Sacheri, e que todo quadrilátero de Lambert está dessa forma associado a um quadrilátero de Sacheri. Explique por que num quadrilátero de Lambert é agudo o ângulo não reto. Prove que num quadrilátero de Lambert cada um dos lados contíguos ao ângulo agudo é maior do que o respectivo lado oposto.

Problema 23.6.28. Mostre que na GH existem pentágonos quadriretângulos, isto é, com quatro ângulos retos. Desenhe esses pentágonos nos modelos 23.7 e 23.8 de GH de Poincaré.

Problema 23.6.29. Suponha que em uma certa geometria valem os axiomas H1 a H9 e que os ângulos do cume de qualquer quadrilátero de Saccheri são agudos. Prove que em qualquer triângulo a soma dos ângulos é < 180.
Sugestão: Siga os seguintes passos. Seja ABC um triângulo qualquer. Sejam D e E os pontos médios de AB e AC, respectivamente. Sejam F, G e H pontos de $\overleftrightarrow{DE}$ tais que BF, AG e CH são perpendiculares a essa reta. **a)** Prove que $G = D = F$ ou que F e G estão em lados opostos em relação à reta $\overleftrightarrow{AB}$. Portanto ocorrem apenas os casos descritos na Figura 23.12. **b)** Vamos provar o resultado no caso (1) da Figura 23.12. Complete os detalhes. Temos $BDF \cong ADG$ logo $BF = AG$. Ainda $HCE \cong GAE$ logo $AG = CH$. Portanto $BF = CH$ e $BCHF$ é um quadrilátero de Saccheri com base HF e cume BC. Por hipótese os ângulos do cume são agudos, e sua soma é $m(\angle FBC) + m(\angle HCB) < 180$. Mas essa soma é igual à soma dos ângulos do triângulo ABC. **c)** Prove o resultado nos casos (2) e (3) da Figura 23.12.

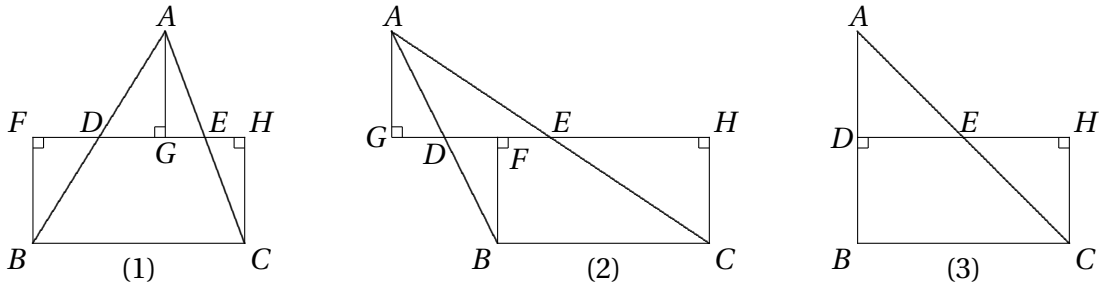


Figura 23.12. Figura do Problema 23.6.29.

23.7 Temas para investigação

Tema 23.7.1. Leia em livros de História da Matemática qual foi o papel dos seguintes pesquisadores no descobrimento das geometrias não-euclidianas: Gerolamo Saccheri, Nicolai Lobachevski, Johann Bolyai e Karl F. Gauss, dentre outros.

Tema 23.7.2. O matemático William K. Clifford, referindo-se ao trabalho de Lobachevski sobre geometrias não-euclidianas, teria escrito que ele está para Euclides assim como Nicolau Copérnico está para Cláudio Ptolomeu ([19], pág. 125). Explique esse comentário.

Tema 23.7.3. Estude as implicações filosóficas e científicas da descoberta das geometrias não euclidianas. Uma possibilidade é o Capítulo 8 de [20].

Tema 23.7.4. O Problema 23.6.29 encaminha a demonstração do Teorema 23.9. Está faltando provar que "se valem os axiomas H1 a H9, então os ângulos do cume de todo quadrilátero de Saccheri são agudos". Estude uma demonstração desse resultado em algum livro de Geometria Hiperbólica.

Tema 23.7.5. Investigue sobre a conveniência ou não de abordar conceitos de geometrias hiperbólicas no ensino básico, e, se for o caso, como isso poderia ser feito.

Tema 23.7.6. Professores do ensino fundamental devem aprender geometrias não-euclidianas? Se sim, como e o que assuntos.

Capítulo 24

Outros Tópicos de Geometria Euclidiana

EM CONSTRUÇÃO

24.1 Introdução

24.2 Os Princípios de Cavalieri para áreas e volumes

O estudo de volumes de sólidos no ensino médio tem como base o Princípio de Cavalieri. Esse princípio também pode ser usado para áreas de regiões do plano. Existem, inclusive, versões mais gerais desse princípio, tanto para áreas como para volumes, em que a razão entre os comprimentos ou áreas das fatias não precisa ser 1, mas pode ser uma razão positiva qualquer.

Não nos esqueçamos de que o Princípio de Cavalieri, normalmente adotado como postulado nos textos para ensino da Matemática Elementar, é na verdade um teorema. Para demonstrá-lo é suficiente usar alguns poucos conceitos da teoria de integração de funções reais. O Princípio de Cavalieri é adotado sem demonstração para evitar as dificuldades de se apresentar precocemente essa teoria. As dificuldades ficam concentradas em uma única afirmação, que é assumida como plausível mediante uma boa explicação do professor. A ideia traduzida por esse princípio é fácil de entender, e parece que os estudantes do ensino médio não têm resistência em aceitá-la.

Esses princípios levam o nome do matemático italiano Bonaventura Francesco Cavalieri, que os chamava de *método dos indivisíveis*, e os divulgou (em versões mais restritas) através de seu famoso livro *Geometria Indivisibilibus*, de 1635. Mas, na verdade, esse método é muito anterior a Cavalieri. Era conhecido dos antigos gregos, como Demócrito e Arquimedes, que o utilizavam para obter volumes de sólidos. Esses resultados eram depois demonstrados pelo método da dupla redução ao absurdo, já que na época não tinham uma teoria de integração. O mesmo faziam muitos matemáticos dos séculos XVI e XVII.

Vejamos duas versões desse princípio, uma para áreas e outra para volumes.

Princípio de Cavalieri para áreas Sejam $\mathscr{R}$ e $\mathscr{S}$ regiões limitadas de um plano, e seja r uma reta desse plano. Suponha que, para toda reta s paralela a r, as interseções de $\mathscr{R}$ e $\mathscr{S}$ com s sejam vazias ou segmentos tais que a razão entre seus comprimentos é constante. Então a razão entre as áreas de $\mathscr{R}$ e $\mathscr{S}$ é essa mesma constante.

Princípio de Cavalieri para volumes Sejam $\mathscr{P}$ e $\mathscr{Q}$ sólidos limitados, e seja α um plano. Suponha que, para todo plano β paralelo a α, as interseções de $\mathscr{P}$ e $\mathscr{Q}$ com β sejam vazias ou regiões tais que a razão entre suas áreas é constante. Então a razão entre os volumes de $\mathscr{P}$ e $\mathscr{Q}$ é essa mesma

constante.

Veremos agora como ficam as versões dos Princípios de Cavalieri como teoremas.

Consideremos inicialmente o Princípio de Cavalieri para áreas. É possível demonstrar esse resultado desde que as regiões não sejam muito complicadas. Em particular, vale para discos e regiões elípticas. A ideia inicial da demonstração é simples: estamos "fatiando" as duas regiões. Se a quantidade de fatias for finita e se cada fatia de uma região tiver área sempre na mesma razão que a fatia correspondente da outra região, então somamos as áreas das fatias de cada região e obtemos o resultado. A dificuldade é que, no Princípio de Cavalieri para áreas, as "fatias" são segmentos. Portanto não têm área, mas comprimentos, e sua quantidade é infinita. Assim, para a demonstração, precisamos de uma técnica que permita obter a área de uma região através da soma dos comprimentos de infinitos segmentos. Essa técnica é fornecida pela teoria de integração de funções reais, estudada nos cursos de Cálculo Diferencial e Integral.

Considerações semelhantes podem ser feitas para o Princípio de Cavalieri para volumes. Portanto as demonstrações dos dois princípios de Cavalieri constituem uma aplicação direta da teoria de integração de funções reais. Observamos inicialmente que os enunciados desses princípios feitos acima não se preocupam em definir condições sobre as fronteiras das regiões e dos sólidos. Mas sabemos que é necessário impor condições de integrabilidade. Entendemos que isso não é feito nos livros textos do ensino básico, primeiro para não desviar a atenção do estudante, segundo por que, naqueles contextos, os princípios são aplicados para regiões e sólidos muito simples, que satisfazem naturalmente as condições de integrabilidade.

Vejamos então como podemos enunciar os princípios de Cavalieri na forma de teoremas. Se $\mathscr{R}$ é uma região do plano, indicaremos sua área por $a(\mathscr{R})$.

Princípio de Cavalieri para áreas Consideremos em um plano um sistema de coordenadas cartesianas Oxy, e seja $\mathscr{R}$ a região delimitada por $y=0$, $y=b>0$ e pelos gráficos das funções contínuas $x=f_1(y)$ e $x=f_2(y)$, $0\le y\le b$, com $f_1(y)\le f_2(y)$ para todo y. Seja $\mathscr{S}$ a região delimitada por $y=0$, $y=b$ e pelos gráficos das funções contínuas $x=g_1(y)$ e $x=g_2(y)$, $0\le y\le b$, com $g_1(y)\le g_2(y)$ para todo y. Suponhamos que exista $k>0$ tal que $f_2(y)-f_1(y)=k\left[g_2(y)-g_1(y)\right]$ para todo y. Então $a(\mathscr{R})=ka(\mathscr{S})$.

Demonstração. Da teoria de integração de funções reais temos:

$$a(\mathscr{R})=\iint_{\mathscr{R}}dxdy=\int_0^b\left[\int_{f_1(y)}^{f_2(y)}dx\right]dy=\int_0^b\left[f_2(y)-f_1(y)\right]dy=$$

$$=\int_0^b k\left[g_2(y)-g_1(y)\right]dy=k\int_0^b\left[g_2(y)-g_1(y)\right]dy=\cdots=ka(\mathscr{S}),$$

o que demonstra a afirmação.

Se $\mathscr{P}$ é um sólido, indicaremos seu volume por $v(\mathscr{P})$.

Princípio de Cavalieri para volumes Consideremos um sistema de coordenadas cartesianas $Oxyz$, e seja $\mathscr{P}$ um sólido finito delimitado por $z=0$, $z=c>0$ e por uma quantidade finita de gráficos de funções contínuas do tipo $y=f(x,z)$ e $x=g(y,z)$. Para cada t tal que $0\le t\le c$, seja $\mathscr{P}_t$ a interseção de $\mathscr{P}$ com o plano $z=t$. Seja $\mathscr{Q}$ outro sólido finito delimitado por $z=0$, $z=c>0$ e por uma quantidade finita de gráficos de funções contínuas do tipo $y=f(x,z)$ e $x=g(y,z)$. Para cada t tal que $0\le t\le c$, seja $\mathscr{Q}_t$ a interseção de $\mathscr{Q}$ com o plano $z=t$. Suponhamos que exista $k>0$ tal que $a(\mathscr{P}_t)=ka(\mathscr{Q}_t)$ para todo t. Então $v(\mathscr{P})=kv(\mathscr{Q})$.

Demonstração. Da teoria de integração de funções reais temos:

$$v(\mathscr{P}) = \iiint_{\mathscr{P}} dxdydz = \int_0^c \left[\iint_{\mathscr{P}_z} dxdy \right] dz = \int_0^c a(\mathscr{P}_z)dz =$$

$$= \int_0^c ka(\mathscr{Q}_z)dz = k\int_0^c a(\mathscr{Q}_z)dz = \cdots = kv(\mathscr{Q}),$$

o que demonstra a afirmação.

Vejamos agora dois exemplos não usuais de aplicação dos princípios de Cavalieri, um para áreas, e outro para volumes.

Área da elipse A área da região elíptica de semieixos a e b é πab.
Demonstração. Consideremos, em um sistema de coordenadas Oxy, a região semielíptica $\mathscr{R}$ dada por $x^2/a^2 + y^2/b^2 \leq 1$ e $y \geq 0$, sendo $b \geq a > 0$.

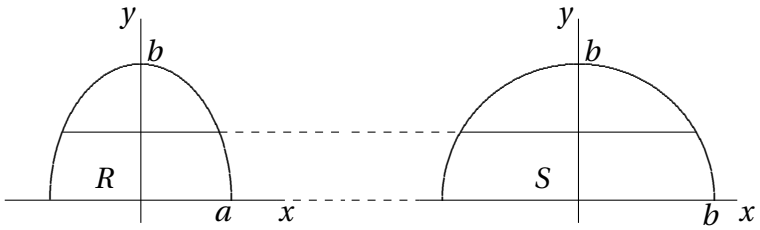


Figura 24.1. Área da região elíptica

Sejam $f_1(y) = -a\sqrt{1-y^2/b^2}$ e $f_2(y) = a\sqrt{1-y^2/b^2}$, para $0 \leq y \leq b$. Consideremos o semidisco $\mathscr{S}$ dado por $x^2 + y^2 \leq b^2$ e $y \geq 0$. Sejam $g_1(y) = -\sqrt{b^2-y^2}$ e $g_2(y) = -\sqrt{b^2-y^2}$, para $0 \leq y \leq b$. Notemos que

$$f_2(y) - f_1(y) = 2a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}} = \frac{2a}{b}\sqrt{b^2-y^2} = \frac{a}{b}\left[g_2(y) - g_1(y)\right].$$

Estamos assim em condições de aplicar o Princípio de Cavalieri para áreas, com $k = a/b$. Com isso temos

$$a(\mathscr{R}) = \frac{a}{b}a(\mathscr{S}) = \frac{a}{b}\frac{\pi b^2}{2} = \frac{\pi ab}{2}.$$

Essa é a área da região semielíptica. Duplicando, segue o resultado.

volume do elipsóide O volume do elipsóide de semieixos a, b e c é $\frac{4}{3}\pi abc$.

Demonstração. Suponhamos $c \geq b \geq a > 0$, e consideremos o semielipsóide $\mathscr{P}$ definido por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1, \quad z \geq 0.$$

É fácil ver que esse sólido é delimitado pelos planos $z = 0$, $z = c$ e pelos gráficos de duas funções contínuas do tipo $y = f(x,z)$ (ou do tipo $x = g(y,z)$). Além disso, para cada t tal que $0 \leq t \leq c$, a interseção $\mathscr{P}_t$ de $\mathscr{P}$ com o plano $z = t$ é dada por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{t^2}{c^2} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 - \frac{t^2}{c^2} = \frac{c^2-t^2}{c^2}.$$

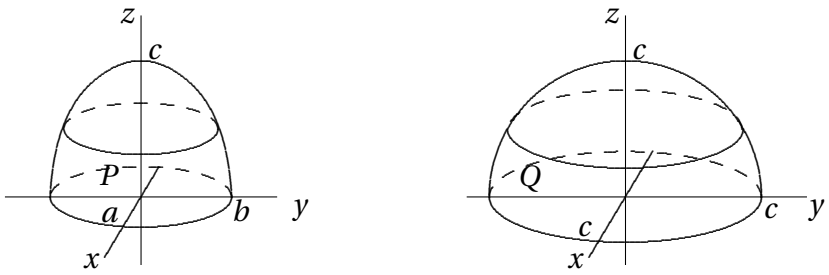


Figura 24.2. Volume do elipsóide

Seja $d = \sqrt{(c^2 - t^2)/c^2} = (1/c)\sqrt{c^2 - t^2}$. Então $\mathscr{P}_t$ é dado por

$$\frac{x^2}{(ad)^2} + \frac{y^2}{(bd)^2} \leq 1$$

e, em virtude do resultado anterior, sua área é

$$\pi(ad)(bd) = \pi abd^2 = \frac{ab}{c^2}\pi(c^2 - t^2).$$

Consideremos agora a semiesfera $\mathscr{Q}$ definida por

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq c^2, \quad z \geq 0.$$

É fácil ver que esse sólido é delimitado pelos planos $z = 0$, $z = c$ e pelos gráficos de duas funções contínuas do tipo $y = f(x,z)$ (ou do tipo $x = g(y,z)$). Além disso, para cada t tal que $0 \leq t \leq c$, a interseção $\mathscr{Q}_t$ de $\mathscr{Q}$ com o plano $z = t$ é dada por

$$x^2 + y^2 + t^2 \leq c^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 \leq c^2 - t^2.$$

Seja $r = \sqrt{c^2 - t^2}$. Então $\mathscr{Q}_t$ é dado por

$$x^2 + y^2 \leq r^2,$$

e sua área é $\pi r^2 = \pi(c^2 - t^2)$.

Notemos que, para cada t tal que $0 \leq t \leq c$,

$$a(\mathscr{P}_t) = \frac{ab}{c^2}\pi(c^2 - t^2) = \frac{ab}{c^2}a(\mathscr{Q}_t).$$

Estamos assim em condições de aplicar o Princípio de Cavalieri para volumes com $k = ab/c^2$. Temos então

$$v(\mathscr{P}) = kv(\mathscr{Q}) = \frac{ab}{c^2}\frac{1}{2}\frac{4}{3}\pi c^3 = \frac{1}{2}\frac{4}{3}\pi abc.$$

Esse é o volume do semielipsóide. Duplicando, segue o resultado desejado.

24.3 Problemas

Problema 24.3.1. Use o Princípio de Cavalieri para áreas para deduzir a área de um paralelogramo qualquer a partir da área de um retângulo conveniente.

Problema 24.3.2. Deduza a área de um triângulo retângulo qualquer a partir da área de um retângulo conveniente. Usando o Princípio de Cavalieri para áreas deduza a área de um triângulo qualquer a partir da área de um triângulo retângulo conveniente.

24.4 Volumes e áreas de superfícies por integração

Vimos que a Matemática Elementar aborda o conceito de área de algumas superfícies, como as dos cones, de cilindros e da esfera. Esse conceito é mais complicado do que o de áreas de regiões planas, e para demonstrar algumas fórmulas relativas a áreas de superfícies o melhor caminho é usar técnicas de Cálculo Diferencial e Integral.

Comecemos com superfícies de revolução. Seja $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ uma função positiva e diferenciável, com derivada $f' : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ contínua. Se existir o número

$$2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

ele se chama *área* da superfície obtida pela rotação do gráfico de f em torno do eixo Ox.

Como primeira aplicação vamos demonstrar a fórmula da área da superfície esférica.

Teorema 24.1. *A área da esfera de raio ρ é $4\pi\rho^2$.*

Demonstração. A esfera pode ser considerada como a superfície gerada pela rotação em torno do eixo Ox do gráfico da função $f : [-\rho,\rho] \mapsto \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{\rho^2 - x^2}$. Confira a Figura 24.3.

A área é então

$$2\pi \int_{-\rho}^{\rho} f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx = 2\pi \int_{-\rho}^{\rho} \sqrt{\rho^2-x^2}\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{\rho^2-x^2}}\right)^2}\,dx =$$

$$= 2\pi \int_{-\rho}^{\rho} \sqrt{\rho^2-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{\rho^2-x^2}}\,dx = 2\pi \int_{-\rho}^{\rho} \sqrt{\rho^2-x^2+x^2}\,dx =$$

$$= 2\pi \int_{-\rho}^{\rho} \rho\,dx = 2\pi\rho\,[1]_{-\rho}^{\rho} = 4\pi\rho^2.$$

□

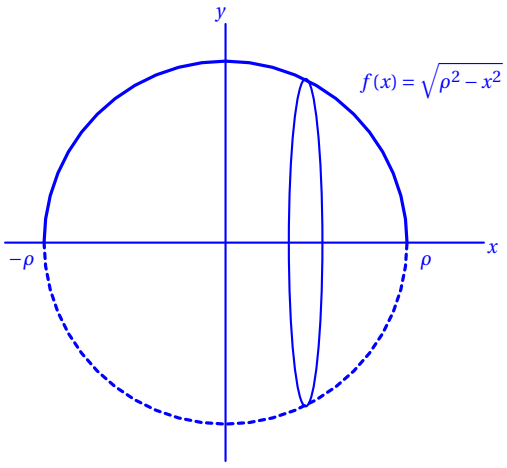


Figura 24.3. A esfera de raio ρ como um sólido de revolução.

Usando esses mesmos recursos técnicos demonstremos agora a fórmula da área de uma calota esférica.

Teorema 24.2. *A área de uma calota esférica de altura h em uma esfera de raio ρ é $2\pi\rho h$.*

Demonstração. Seja $d = \rho - h$ a distância do plano da base da calota ao centro da esfera. A calota esférica é obtida pela rotação em torno de OX do gráfico da função $f : [d, \rho] \mapsto \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{\rho^2 - x^2}$. Confira a Figura 24.4.

A área de superfície é então

$$2\pi \int_d^\rho f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx = 2\pi \int_d^\rho \sqrt{\rho^2 - x^2}\sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{\rho^2 - x^2}}\right)^2}\,dx =$$

$$= 2\pi \int_d^\rho \sqrt{\rho^2 - x^2}\sqrt{1 + \frac{x^2}{\rho^2 - x^2}}\,dx = 2\pi \int_d^\rho \sqrt{\rho^2 - x^2 + x^2}\,dx =$$

$$= 2\pi \int_d^\rho \rho\,dx = 2\pi\rho\big[1\big]_d^\rho = 2\pi\rho(\rho - d) = 2\pi\rho h.$$

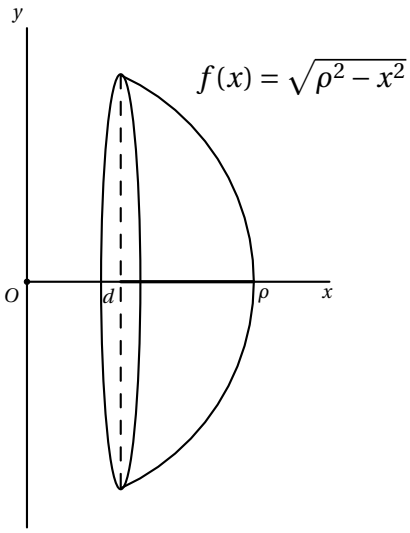


Figura 24.4. Área de uma calota esférica de altura h em uma esfera de raio ρ.

□

Volumes de sólidos de revolução também podem ser calculados através de uma integral. Seja $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ uma função positiva. Se existir o número

$$\pi \int_a^b f(x)^2\,dx$$

ele se chama *volume* do sólido obtido pela rotação do gráfico de f em torno do eixo Ox.

Vejamos outra demonstração da fórmula do volume da esfera.

Teorema 24.3. *O volume da esfera de raio ρ é $\frac{4}{3}\pi\rho^3$.*

Demonstração. A esfera sólida pode ser obtida pela rotação do gráfico da função $f : [-\rho, \rho] \mapsto \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{\rho^2 - x^2}$ em torno de Ox. Confira a Figura 24.3.

O volume é então

$$\pi \int_{-\rho}^\rho f(x)^2\,dx = 2\pi \int_{-\rho}^\rho \rho^2 - x^2\,dx =$$

$$= \pi\big[\rho x - \frac{x^3}{3}\big]_{-\rho}^\rho = \frac{4}{3}\pi\rho^3.$$

□

Para obter as fórmulas de volume e área de superfície de uma cunha (ou fuso) de ângulo α em uma esfera de raio ρ, o melhor é usar integração múltipla em coordenadas polares.

Teorema 24.4. *Em uma esfera de raio ρ, a área do fuso cujo ângulo mede α radianos é $2\rho^2\alpha$, e o volume é $\frac{2}{3}\rho^3\alpha$.*

Demonstração. Em coordenadas polares (r,θ,ϕ) suponhamos que a cunha (sólido) esteja dada por $r \in [0,\rho]$, $\theta \in [0,\alpha]$ e $\phi \in [0,\pi]$. Então seu volume é

$$\int_0^\alpha \int_0^\pi \int_0^\rho r^2 \operatorname{sen}\phi\, dr\, d\phi\, d\theta = \int_0^\alpha \int_0^\pi \left[\int_0^\rho r^2 dr\right] \operatorname{sen}\phi\, d\phi\, d\theta =$$

$$= \frac{\rho^3}{3}\int_0^\alpha \left[\int_0^\pi \operatorname{sen}\phi\, d\phi\right] d\theta = \frac{2\rho^3}{3}\int_0^\alpha d\theta = \frac{2}{3}\rho^3\alpha.$$

Para calcular a área de superfície notemos que $r = \rho$ está fixado. Sua área é

$$\int_0^\alpha \int_0^\pi \rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\phi\, d\theta = \rho^2 \int_0^\alpha \left[\int_0^\pi \operatorname{sen}\phi\, d\phi\right] d\theta = 2\rho^2 \int_0^\alpha d\theta = 2\rho^2\alpha.$$

□

24.5 Problemas

Problema 24.5.1. Usando integração mostre que a área da superfície lateral do cilindro circular reto de raio ρ e altura h é $2\pi\rho h$.

Problema 24.5.2. Usando integração mostre que a área da superfície lateral do cone circular reto de raio ρ e altura h é $\pi\rho\sqrt{\rho^2+h^2}$.

Problema 24.5.3. Usando integração dê uma demonstração do Teorema **??**, que afirma que o volume de um segmento esférico sólido de uma base de altura h em uma esfera de raio ρ é

$$\frac{1}{3}\pi h^2(3\rho - h).$$

Problema 24.5.4. A base de uma capa esférica em uma esfera de raio ρ é também base de um cone circular reto com vértice no centro da esfera. Sabendo-se que a metade a abertura desse cone é ϕ, mostre que o volume dessa capa (ou segmento esférico sólido) se escreve como

$$\frac{\pi}{3}\rho^3(2+\cos\phi)(1-\cos\phi)^2.$$

Sugestão: ao calcular o volume da capa como o de um sólido de rotação, tome $x \in [d,\rho]$ mas escrevendo d em função de ϕ.

24.6 Exemplos em Probabilidade Geométrica

O jogo dos discos
A agulha de Buffon
O Método de Monte Carlo
Lançamentos no quadrado unitário

24.7 Alguns desafios da Geometria Plana

Mesmo um assunto tão antigo como a Geometria Elementar tem inúmeros problemas dos quais não conhecemos a solução. Uma lista desses problemas, com pequena descrição de cada um, pode ser consultada em [12].

Apresentamos aqui apenas um deles para apreciação de nosso leitor. Trata-se de um problema de Geometria Discreta, chamado "espalhamento de pontos em um quadrado". Outros problemas dessa área podem ser estudados em [**?**].

Dados n pontos espalhados em um quadrado de lado 1, consideremos a menor das distâncias entre dois quaisquer desses pontos. Tomando todos os espalhamentos possíveis de n pontos, seja d_n a maior dentre essas menores distâncias.

Por exemplo, espalhando dois pontos em um quadrado unitário, a maior distância possível entre eles é obtida quando os pontos estão em vértices opostos. Confira a Figura 24.5. Portanto $d_2 = \sqrt{2}$. Pode-se ainda ver na mesma Figura as configurações para $n = 4$, 5 e 9.

São conhecidos valores exatos de d_n para $2 \leq n \leq 9$, assim como para $n = 14$, 16, 25 e 36. Outros valores até 28 foram obtidos com a ajuda de algoritmos computacionais. Para mais detalhes confira [**?**] págs. 28 a 43 e [12] págs. 108 a 110.

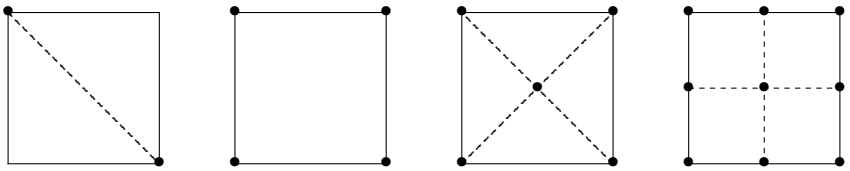


Figura 24.5. Espalhamento de pontos em um quadrado unitário.

Alguns valores conhecidos:

$d_2 = \sqrt{2}$
$d_3 = \sqrt{6} - \sqrt{2}$
$d_4 = 1$
$d_5 = \sqrt{2}/2$
$d_6 = \sqrt{13}/6$
$d_7 = 2(2 - \sqrt{3})$
$d_8 = (\sqrt{6} - \sqrt{2})/2$
$d_9 = 1/2$
$d_{10} \approx 0,42127$
$d_{11} \approx 0,398$
$d_{12} \approx \sqrt{34}/15$
$d_{13} \approx (\sqrt{3} - 1)/2$

$d_{14} = (\sqrt{6} - \sqrt{2})/3$

Alguns valores sugeridos:
$d_{15} = 4/(8 + \sqrt{2} + \sqrt{6})$
$d_{20} = (6 - \sqrt{2})/16$
$d_{23} = (\sqrt{6} - \sqrt{2})/4$
$d_{24} = 2/(4 + \sqrt{2} + \sqrt{6})$

Para n suficientemente grande vale o seguinte:

$$d_n \sim \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}\sqrt{n}}$$

24.8 Problemas

Problema 24.8.1. Estude alguns casos do problema de espalhamento de pontos em um quadrado. Por exemplo, para $n = 3, 6, 25$.

Problema 24.8.2. Seja $s(n)$ o lado do menor quadrado no qual se pode empacotar n quadrados unitários. Prove que $s(n) = \sqrt{n}$ se n for um quadrado perfeito. Prove que $\sqrt{n} \leq s(n) \leq \lceil n \rceil$ para todo n. Estude os seguintes valores: $s(2) = s(3) = 2$, $s(5) = 2 + \frac{1}{2}\sqrt{2}$ e $s(7) = s(8) = s(9) = 3$.

24.9 Temas para investigação

Tema 24.9.1. Examine os livros didáticos que são ou foram adotados para o estudo da Matemática no ensino médio e analise como eles apresentam o Princípio de Cavalieri e exatamente em que pontos da teoria de volumes esse princípio é utilizado.

Tema 24.9.2. Uma das mais belas aplicações do Princípio de Cavalieri é no cálculo do volume da esfera. Por que não vemos um cálculo similar para a área do disco?

24.10 Atividades para licenciandos e professores

Atividade 24.10.1. Comente a afirmação feita nesse texto (início da Seção 24.2), de que a ideia traduzida pelo Princípio de Cavalieri é fácil de entender e parece que os estudantes do ensino médio não têm resistência em aceitá-la. Ela está de acordo com sua experiência pessoal?

Atividade 24.10.2. No ensino médio o Princípio de Cavalieri é aceito como uma afirmação plausível, isto é, o professor dá uma boa explicação, que é suficiente para os estudantes entenderem, mas a afirmação não é demonstrada. Dê exemplos de outras afirmações matemáticas plausíveis que costumam aparecer no ensino básico.

Apêndice A

Respostas e sugestões

Observações: Nem sempre as respostas dadas estão completas. Fique atento ao enunciado do problema para ver se é necessário completar. Na maioria das vezes não apresentamos nenhum argumento, o que significa que ficou por conta do estudante. Portanto, muitas respostas devem ser vistas como dicas. Lembramos que, na resolução de um problema, apenas encontrar a resposta correta não é suficiente. O processo de descoberta e uma justificativa adequada são muito importantes, e o estudante deve aprender a descrevê-los.

Problemas 20.8

20.8.1 O conjunto $R_{0,0,c}$ seria vazio ou todo o plano, e não nos interessa chamar de retas esses conjuntos.
20.8.2 Comece com o caso em que $a_1 \neq 0$ e $a_2 \neq 0$, e então os pontos $(-c_1/a_1, 0)$ e $(-(b_1+c_1)/a_1, 1)$ estão em ambas as retas.
20.8.3 Para mostrar que a condição é necessária, use propriedades dos determinantes. Para mostrar que a condição é suficiente, considere o sistema de equações lineares homogêneo nas incógnitas a, b e c e com coeficientes $(x_i, y_i, 1)$, e verifique que ele tem solução não nula.
20.8.4 Use as expressões obtidas no Teorema 20.2. Ou então use o resultado do Problema 20.8.3.
20.8.5 Use a condição do Problema 20.8.3.
20.8.6 Use diretamente a expressão da distância dada em 20.4.
20.8.7 d) Num rascunho desenvolva $||X+Y|| \leq ||X|| + ||Y||$ em coordenadas até chegar a uma relação verdadeira. Para redigir, caminhe do fim para o começo.
20.8.8 Siga a sugestão.
20.8.9 a) Examine separadamente os três casos definidos pelas condições sobre a e b.
20.8.10 a) Use o resultado do Problema 20.8.4. c) Use o resultado do Problema 20.8.9 parte b).
20.8.11 Use o Teorema 20.6 parte (ii).
20.8.12 Para ver que $r \perp s$ use a definição 20.8. Para ver que é única, use as condições para escrever um sistema de equações lineares homogêneo 3×2, e observe que a característica da matriz dos coeficientes é 2.
20.8.13 a) Ache as coordenadas de X e verifique as condições para que $X \in R_{a,b,c}$. c) Veja que ξ está bem definida e é sobrejetiva e injetiva.
20.8.14 c) Expresse os pontos em coordenadas e calcule $d(A,B) + d(B,C)$.
20.8.15 a) Inspire-se na expressão paramétrica da reta. b) Demonstre que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ para todo $C \in \overrightarrow{AB} - \{A\}$.
20.8.16 a) Use a equação geral da reta. b) Expresse o segmento usando um parâmetro. c) Pode usar continuidade.
20.8.17 Use o resultado do Problema 20.8.4 e a condição de perpendicularidade 20.8.
20.8.18 a) Use o Teorema de Pitágoras considerando a altura oposta ao ângulo, ou a seu suplemento.
20.8.19 Deduza que o baricentro é $\frac{1}{3}(A+B+C)$ e sua distância a qualquer vértice é $\frac{2}{3}$ do comprimento da mediana correspondente. Não é necessário usar coordenadas.

Temas para investigação 20.9

20.9.1

Problemas 21.8

21.8.1
21.8.2

Temas para investigação 21.9
21.9.1
21.9.2

Problemas 22.7
22.7.1
22.7.2

Temas para investigação 22.8
22.8.1
22.8.2

Problemas 23.6
23.6.1
23.6.2

Temas para investigação 23.7 23.7.1
23.7.2

Problemas 24.3
24.3.1
24.3.2

Problemas 24.5
24.5.1
24.5.2

Problemas 24.8
24.8.1
24.8.2

Temas para investigação 24.9
24.9.1
24.9.2

Apêndice B

Créditos das figuras

Observação: As figuras aqui não referidas foram construídas pelo autor com o uso do aplicativo Geogebra, do programa gráfico vetorial Inkscape, do PicTex e do Tikz. Às vezes usamos o GIMP para manipular figuras.

Capa e Apresentação

Figura da capa externa Imagem de domínio público, obtida em http://en.wikipedia.org/wiki/Hyperbolic_geometry Autor: LucasVB. Consultado em abril de 2011.

Figura da capa interna Clip Art Inkscape http://www.openclipart.org/ Autor: Kattekrab. Domínio público. Consultado em outubro de 2010.

Figura da Apresentação, página iii Clip Art Inkscape http://www.openclipart.org/ Autor: Krauskopf Tom Machovka. Domínio público. Consultado em outubro de 2010.

Capítulo 20: Geometria euclidiana plana com coordenadas

Figura 20.2: Foto de André Hatala de cópia de retrato de René Descartes, depositada no Museu do Louvre. A pintura, de 1649, é atribuída ao artista holandês Frans Hals. Disponibilizada no endereço https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Frans_Hals_-_Portret_van_Ren%C3%A9_Descartes.jpg Domínio público. Consultado em 13 de outubro de 2026.

Figura 20.6: Foto de monumento a Pierre de Fermat realizado por Alexandre Falguière em Beaumont-de-Lomagne Tarn-et-Garonne, France, em 1881. Disponibilizada no endereço https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Beaumont-de-Lomagne_-_Monument_a_Fermat.jpg Fonte: Didier Descouens. Licenciado sob Creative Commons Attribution-Share Alike 4.0 International license. Consultado em 16 de junho de 2025.

Capítulo 22: Geometria na superfície esférica

Figura 22.1: Imagem dos astronautas Harrison Schmitt ou Ron Evans da Apollo 17, disponível em NASA Goddard Space Flight Center http://nssdc.gsfc.nasa.gov/imgcat/midres/a17_h_148_22727.gif Consultado em abril de 2011. Imagem de domínio público.

Figura 22.2: Capa da sexta edição do livro *Flatland: A Romance of Many Dimensions*, escrito pelo professor Edwin Abbott Abbott e publicado em 1884 na Inglaterra. Imagem de domínio público, obtida em http://en.wikipedia.org/wiki/Flatland Consultado em abril de 2011.

Figura 22.8: Imagem de domínio público, obtida em http://en.wikipedia.org/wiki/File:Trunc-icosa.jpg Consultado em abril de 2011.

Figura 22.9: Imagem de domínio público, obtida em http://en.wikipedia.org/wiki/File:Trigonal_hosohedron.png Consultado em abril de 2011.

Figura 22.10: Obtida em http://en.wikipedia.org/wiki/File:4hosohedron.svg Consultado em abril de 2011. Autor: Papa November. Data da imagem: 2008-03-08. Permissão de cópia, distribuição e modificação sob a GNU Free

Documentation License.

Capítulo 23: Geometria hiperbólica

Figura 23.8, e capa: Imagem de domínio público, obtida em `http://en.wikipedia.org/wiki/Hyperbolic_geometry` Autor: LucasVB. Consultado em abril de 2011.

Referências Bibliográficas

[1] Aaboe, A. *Episódios da História Antiga da Matemática.* Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1984.

[2] Baldin, Y. Y. e Furuya, Y. K. S. *Geometria Analítica para todos.* São Carlos: Edufscar, 2011.

[3] Bass, L. E. *et alii. Geometry.* Boston, Massachusetts: Pearson, 2004.

[4] Boldrini, J. L. et alii. *Álgebra Linear.* 3ª edição. São Paulo, Editora Harbra LTDA, 1986.

[5] Boyd, C. J. *et alii. Geometry.* New York: McGraw Hill, 2004.

[6] Boyer, C. B. *História da Matemática.* Tradução de Gomide, E. F. São Paulo: Editora Edgard Blücher LTDA, 1974.

[7] Brasil-MEC. *Base Nacional Comum Curricular.* Brasil: Ministério da Educação, 2025. `https://basenacionalcomum.mec.gov.br/` Consultado em agosto de 2025.

[8] Caminha, A. M. N. *Geometria.* Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.

[9] Carvalho, P. C. P. *Introdução à Geomeria Espacial.* Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática, 1993.

[10] Cederberg, J. N. *A Course in Modern Geometries.* New York: Springer Verlag, 2001.

[11] Cooke, R. *The History of Mathematics. A brief course.* New York: John Wiley & Sons, 1997.

[12] Croft, H. T. e Falconer, K. J. *Unsolved Problems in Geometry.* New York: Springer Verlag, 1991.

[13] Cundy, H. M. e Rollett, A. P. *Mathematical Models.* Oxford: Oxford University Press, 1961.

[14] Dolce, O. e Pompeo, J. N. *Geometria Espacial, posição e métrica.* São Paulo: Atual Editora, 1995.

[15] Dolce, O., Iezzi, G. e Guelli, C. A. *Álgebra II.* Coleção Matemática Moderna. São Paulo: Editora Moderna Ltda, sem data.

[16] Dolce, O., Iezzi, G. e Guelli, C. A. *Geometria Analítica.* São Paulo: Editora Moderna Ltda, sem data.

[17] Eves, H. *Foundations and Fundamentals Concepts of Mathematics.* New York: Dover Publications, 1967.

[18] Eves, H. *Introdução à História da Matemática.* Tradução de Domingues, H. H. Campinas, Editora UNICAMP, 2004.

[19] Faber, R. L. *Foundations of Euclidean and Non-Euclidean Geometry.* New York: Marcel Dekker, 1983.

[20] Greenberg, M. J. *Euclidean and Non-Euclidean Geometries.* Third Edition. New York: W. H. Freeman Company, 1993.

[21] Guidorizzi, H. L. *Um Curso de Cálculo.* volumes 1 e 3, 5ª. edição. Rio de Janeiro: LTC Editora, 2002.

[22] Henderson, D. W. e Taimina, D. *Experiencing Geometry.* Upper Saddle River: Pearson, 2005.

[23] Hvidsten, M. *Geometry.* Boston: McGrawHill, 2006.

[24] Iezzi, G. e Hazzan, S. *Sequências, Matrizes, Determinantes, Sistemas.* Coleção Fundamentos de Matemática Elementar, n. 4, 6ª. ed. São Paulo: Atual Editora, sem data.

[25] Jacobs, H. R. *Geometry.* Third Edition. New York: W. H. Freeman Company, 2003.

[26] Karpinski, L. C. *The History of Mathematics.* New York: Russel & Russel, 1965.

[27] Kline, M. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times.* Oxford: Oxford University, 1972.

[28] Lang, S. e Murrow, G. *Geometry.* New York: Springer-Verlag, 1988.

[29] Larson, R. E., Boswell, L. e Stiff, L. *Geometry.* Evanston, Illinois: McDougal Littell, 1998.

[30] Kin Y Li, *Vector Geometry.* Mathematical Excalibur, v6, n5, 2002. `www.math.ust.hk/excalibur/v6_n5.pdf`

[31] Legendre, A. M. *Elementos de Geometria.* Trad. Guimarães, M. F. A. Org. Guimarães L. C. Rio de Janeiro: Editora LIMC-UFRJ, 2009.

[32] Lima, E. L. *et alii. A Matemática do Ensino Médio.* Volumes 1, 2 e 3. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1996.

[33] Lima, E. L. *Coordenadas no Plano.* Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática, 2002.

[34] Lima, E. L. *Curso de Análise.* Vol. 1. 11ª. edição. Projeto Euclides. Rio de Janeiro: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2004.

[35] Mancini, N. H. *Conexões da Geometria Analítica e Vetorial com a Geometria Espacial de Posição e Métrica.* Trabalho de Conclusão de curso de graduação. DM/UFSCar, 2018. `https://www.dm.ufscar.br/~ptlini/TCC_Nycolas_Hendrigo_Mancini.pdf` Consultado em 20 de junho de 2019.

[36] Meyer, W. *Geometry and its Applications.* Second Edition. Amsterdan: Elsevier, 2006.

[37] Moise, E. E. *Elementary Geometry from an advanced standpoint.* Reading, Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, 1974.

[38] Moise, E. E. e Downs, F. L. *Geometria Moderna.* Volumes 1 e 2. Tradução de Watanabe, R. e Mello. D. A. Brasília: Editora Universidade de Brasília e Editora Edgard Blücher, 1971.

[39] Morgado, A. C. *Coordenadas para os centros do triângulo.* Revista do Professor de Matemática, número 43 (2000), 26 a 30.

[40] Obmep. *Banco de Questões 2010 e banco de provas.* https://www.obmep.org.br/

[41] Paterlini, R. R. *Aritmética dos números inteiros.* 3ª. ed. http://www.dm.ufscar.br/~ptlini/livros/ Consultado em 30 de março de 2026.

[42] Paterlini, R. R. *Aritmética dos números reais.* 2ª. ed. http://www.dm.ufscar.br/~ptlini/livros/ Consultado em 30 de março de 2026.

[43] Paterlini, R. R. *Geometria Elementar gênese e desenvolvimento. Tomo I: A Geometria na Sociedade e na Escola.* 2ª. ed. http://www.dm.ufscar.br/~ptlini/livros/ Consultado em 30 de março de 2026.

[44] Paterlini, R. R. *Geometria Elementar gênese e desenvolvimento. Tomo II: Geometria Euclidiana Plana.* 2ª. ed. http://www.dm.ufscar.br/~ptlini/livros/ Consultado em 13 de outubro de 2026.

[45] Paterlini, R. R. *Geometria Elementar gênese e desenvolvimento. Tomo III: Geometria Euclidiana Espacial.* 2ª. ed. http://www.dm.ufscar.br/~ptlini/livros/ Consultado em 13 de outubro de 2026.

[46] Paterlini, R. R. *Os "Teoremas" de Cavalieri.* Revista do Professor de Matemática, número 72 (2010), 43-47.

[47] Polking, J. C. *The Geometry of the Sphere.* http://math.rice.edu/~pcmi/sphere/ Consultado em abril de 2011.

[48] PROFMAT - Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional. *Provas e Exames.* Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática. https://profmat-sbm.org.br/ Consultado em 2020-2026.

[49] Rocha, L. F. C. *Introdução à Geometria Hiperbólica Plana.* Rio de Janeiro, IMPA, 1987.

[50] Royster, D. C. *Spherical Geometry.* http://www.math.uncc.edu/~droyster/math3181/notes/hyprgeom/node5.html Consultado em abril de 2011.

[51] Revista do Professor de Matemática. *Seção de Problemas.* Diversos números. Rio de Janeiro e São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática e Universidade de São Paulo.

[52] Rudin, W. *Princípios de Análise Matemática.* Tradução de Brito, E. R. H. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico S. A. e Editora Universidade de Brasília, 1971.

[53] Saraiva, J. C. V. *O volume do elipsóide no ensino médio.* Revista do Professor de Matemática, número 52 (2003), 21-24.

[54] Severi, F. *Elementos de Geometría.* Tomos primeiro e segundo. Tradução para o espanhol por Escobar, T. M. Barcelona/Buenos Aires, Editorial Labor, 1929.

[55] Smith, D. E. *History of Mathematics.* volumes I e II. New York: Dover Publications, 1958.

[56] Struik, D. J. *A Concise History of Mathematics.* 3ª. edição. New York Dover Publications, 1967.

[57] Truffault, B. *Géométrie Élémentaire*. Paris: Ellipses Éditions, 2001.

[58] Vinberg, E. B. (ed.) *Geometry II*. Encyclopaedia of Mathematical Sciences, volume 29. Berlin: Springer Verlag, 1993.

[59] Waerden, B. L. van der. *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations*. Berlin: Springer Verlag, 1983.

[60] Weisstein, Eric W. *MathWorld–A Wolfram Web Resource*. Itens consultados: *Net;* Endereço geral: `https://mathworld.wolfram.com/` Consulta no período 2016-2026.

[61] Wikipedia. Informações e figuras. Itens consultados: *Hyperbolic geometry; Pierre de Fermat; René Descartes;* Endereço geral: `https://en.wikipedia.org/wiki/` Consultas no período 2007-2026.

[62] Williams, R. *The Geometrical Foundation of Natural Structure*. New York, Dover Publication, 1979.

Índice de autores

Arquimedes (287-212 a. C.), 53

Beltrami, E. (1835-1900), 45
Birkhoff, G. D. (1884-1944), 3
Bolyai, J. (1802-1860), 51

Cavalieri, B. F. (1598-1647), 53
Clifford, W. K. (1845-1879), 51
Copérnico, N. (1473-1543), 51

Demócrito (460-370 a.C.), 53
Descartes, R. (1596-1650), 9, 14, 65

Euclides (c. 300 a.C.), iii

Fermat, P. (1601?-1665), 14, 65

Gauss, K. F. (1777-1855), 51

Hals, F. (1582-1666), 65

Klein, F. C. (1849-1925), 45

Lambert, J.H. (1728 - 1777), 50
Legendre, A.M. (1752-1833), 42
Lobachevski, N. (1793-1856), 51

Pitágoras (c. 585-500 a.C.), 13
Poincaré, J. H. (1854-1912), 45, 46
Ptolomeu I Sóter (c. 367-283 a.C.), iii
Ptolomeu, C. (c. 85-165), 51

Saccheri, G. (1667-1733), 42, 49, 51

Índice de assuntos

|| · ||, 12

ângulo, 8, 9, 11
Axioma Fundamental da Geometria Analítica, 4
Axioma 2 (da reta), 4
Axioma 6 (da distância), 5

baricentro, 13

colinearidade, 12
coordenadas cartesianas, 9
correspondência *LAL*, 13

deficiência angular, 47
desigualdade triangular, 6, 12
distância entre dois pontos, 5, 9

elipsóide
    volume, 55
elipse
    área, 55
esfera
    área, 57
    área da calota, 57
    área do fuso, 59
    triângulo, 32
    volume, 58
    volume do fuso ou cunha, 59
    volume segmento, 59

Geometria com coordenadas, 3
Geometria da Superfície Esférica, 29
    geodésica, 31
    segmento geodésico, 31
Geometria Discreta, 60
Geometria Hiperbólica, 39, 41
geometria não-euclidiana, 41

isometrias do plano, 15

Lei dos Cossenos, 11, 13

modelo algébrico da Geometria Plana, 3

norma, 12

paralelas
    axioma hiperbólico, 41
Princípios de Cavalieri, 53

quadrilátero de Lambert, 50
quadrilátero de Saccheri, 49

reta
    equação geral, 4, 12
    expressão vetorial ou paramétrica, 8, 13
    inclinação, 12
    paralelismo, 6, 12
    paralelismo (unicidade), 7
    perpendicularismo, 8, 13
    por dois pontos, 12

segmento, 13
semiplano, 13
semirreta, 13

Tópicos de Geometria Euclidiana, 53
Teorema de Pitágoras, 13
transformações no plano, 15
triângulo
    esférico, 32