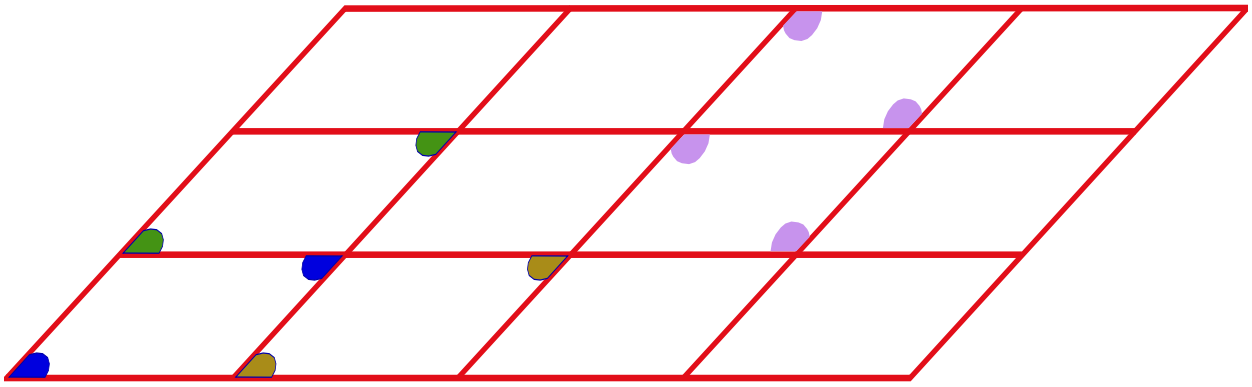
Geometria Elementar
gênese e desenvolvimento

Tomo I: A Geometria na Sociedade e na Escola

2ª. edição



Roberto Ribeiro Paterlini

UFSCar

Roberto Ribeiro Paterlini

Geometria Elementar
gênese e desenvolvimento

Tomo I: A Geometria na Sociedade e na Escola

um curso superior
para formação e atualização de
professores de Matemática



Data da primeira versão: 01 de março de 2010

2ª. edição, versão alpha do Tomo I: 30 de março de 2026

Departamento de Matemática

UFSCar

Copyright © março de 2010 by Roberto Ribeiro Paterlini
Departamento de Matemática, UFSCar.

A presente versão está disponível em um arquivo em formato .pdf que pode ser acessado a partir da minha página pessoal. Mantemos seções como *Errata*, *Comentários* e *Atualizações*.

Trata-se da construção de uma proposta para o ensino da Geometria Elementar em escolas superiores. Imaginamos o uso deste livro como texto principal ou de apoio em cursos de formação de professores de Matemática para o ensino básico. Para sugestões ou perguntas favor se comunicar com o autor no endereço paterlini@ufscar.br

As figuras aqui utilizadas e que não foram construídas pelo autor são de domínio público ou livres para uso não comercial. As referências às figuras estão no Apêndice B. Caso tenha havido algum engano solicitamos que sejamos alertados. Favor usar o endereço paterlini@ufscar.br

O *Copyright* © deste texto pertence ao autor, na forma da lei. É permitido o *download* dos arquivos para uso pessoal, com transferência para ledores eletrônicos ou para impressão, na forma da lei, sem qualquer ônus. É proibido o uso comercial em todo ou em parte de qualquer material aqui disponibilizado, por qualquer meio. É vedada a modificação desse texto, sob qualquer forma. Solicitamos que se forem feitas impressões em escala por agente educacional, público ou privado, que o material seja distribuído gratuitamente, e não sejam cobradas taxas, nem mesmo a título de "preço de custo".

Gratos.

Figura da capa: Realizada pelo autor com o Inkscape. Mostra paralelogramos construídos com dois feixes de retas paralelas e equidistantes. Assumindo que os paralelogramos menores são congruentes, estudantes podem deduzir desse esquema propriedades típicas dessa figura geométrica.

Este texto foi editado em LaTeX 2ε pelo autor, que agradece à comunidade TeX pelos meios disponibilizados.

Sumário

Sumário i

Apresentação v

I Geometria como conhecimento espontâneo e social 1

1 Origem da Geometria 5
1.1 Introdução . . . 5
1.2 Gênese psicológica da Geometria . . . 6
1.3 Origem antropológica da Geometria . . . 7
1.4 A Geometria está em toda parte . . . 10
1.5 Problemas . . . 12
1.6 Temas para investigação . . . 13
1.7 Atividades para licenciandos e professores . . . 13

2 Gênese dos conceitos geométricos 15
2.1 Introdução . . . 15
2.2 As três fases iniciais da construção dos objetos geométricos . . . 15
2.3 Gênese da construção de medidas e de coordenadas . . . 18
2.4 Aspectos das representações figurais . . . 21
2.5 Problemas . . . 23
2.6 Temas para investigação . . . 24

3 Presença da Geometria na sociedade 25
3.1 Introdução . . . 25
3.2 Arquitetura . . . 25
3.3 Mecânica . . . 28
3.4 Artes . . . 30
3.5 Ciências Naturais . . . 31
3.6 Química . . . 32
3.7 Problemas . . . 33
3.8 Temas para investigação . . . 35
3.9 Atividades para licenciandos e professores . . . 36

II Presença da Geometria na escola 37

4 Investigações geométricas iniciais 41
4.1 Introdução . . . 41

4.2 Iniciando com sólidos geométricos . . . 42
4.3 Percepção de figuras geométricas planas . . . 44
4.4 Investigações sobre objetos geométricos planos . . . 45
4.4.1 Construindo triângulos . . . 45
4.4.2 Investigando losangos e paralelogramos . . . 45
4.4.3 Perímetro e área de quadrados . . . 46
4.4.4 Problema do sitiante . . . 47
4.4.5 Duplicação de áreas e volumes . . . 48
4.4.6 Ladrilhando o plano . . . 48
4.4.7 Dissecções . . . 48
4.4.8 Um experimento geométrico mecânico . . . 49
4.5 Problemas . . . 50
4.6 Temas para investigação . . . 53
4.7 Atividades para licenciandos e professores . . . 56

5 Início da construção da Geometria como Ciência 59
5.1 Introdução . . . 59
5.2 O conceito de ângulo . . . 59
5.3 Ângulos em feixes de paralelas . . . 61
5.4 Ângulos em triângulos . . . 62
5.5 Soma dos ângulos de um triângulo . . . 64
5.6 Outro experimento com o triângulo retângulo . . . 67
5.7 Uma aplicação da soma dos ângulos de um triângulo . . . 68
5.8 Retomando o experimento do ladrilhamento . . . 69
5.9 Problemas . . . 71
5.10 Temas para investigação . . . 73
5.11 Atividades para licenciandos e professores . . . 73

6 Construindo argumentações em Geometria 75
6.1 Introdução . . . 75
6.2 Percepção de congruências de triângulos . . . 75
6.3 Revendo propriedades do triângulo isósceles . . . 76
6.4 A mediatriz de um segmento . . . 78
6.5 Propriedades de paralelogramos . . . 79
6.6 O Teorema de Pitágoras . . . 81
6.7 Problemas . . . 82
6.8 Temas para investigação . . . 85
6.9 Atividades para licenciandos e professores . . . 86

7 Investigações sobre sólidos 87
7.1 Introdução . . . 87
7.2 O cubo e sólidos correlatos . . . 87
7.3 O tetraedro e sólidos correlatos . . . 89
7.4 Investigações sobre seções de sólidos . . . 90
7.5 Experimentos sobre volume . . . 90
7.6 Problemas . . . 92
7.7 Temas para investigação . . . 94
7.8 Atividades para licenciandos e professores . . . 95

A Respostas e sugestões a alguns problemas **97**

B Créditos das figuras **103**

Referências Bibliográficas **107**

Índice de autores **111**

Índice de assuntos **113**

Apresentação

Há um caminho fácil para a Geometria ? [1]

Sobre este texto

Inicialmente este texto foi escrito como uma tentativa de orientação para os estudos de Geometria a serem realizados na disciplina *Geometria - Teoria e Experimentação* do Programa de pós-graduação em Ciências Exatas (PPGECE) da UFSCar. Foi aplicado para as turmas de 2010, 2011 e 2012. Estamos agora fazendo ampliações e incluindo mais detalhes com o objetivo de preparar um texto para ser usado também em cursos de formação e atualização de professores do ensino básico.



Nossa concepção fundamental

A interação entre o ensinar e o aprender no campo das formas, em todos os reinos da natureza, gera a Geometria como força criativa.

Agradecimentos

Agradeço aos colegas professores do PPGECE e demais colegas do Departamento de Matemática da UFSCar que têm contribuído com esse texto. Agradeço principalmente aos estudantes de mestrado do PPGECE das turmas de 2010, 2011 e 2012, e aos estudantes do curso de licenciatura em Matemática da UFSCar.

Tudo que está escrito aqui (bem, quase tudo) aprendi com meus professores ou em livros e outros textos, a todos minha gratidão. Esforcei-me em fazer as referências corretas na Bibliografia.

Uma observação especial: inúmeras informações e imagens que aqui utilizei eu as obtive na Wikipedia, um belo projeto coletivo.

São Carlos, 23 de abril de 2015.

Prof. Roberto Ribeiro Paterlini.

Sobre a 2ª. edição

Para facilitar as atualizações assim como o uso docente e discente, repartimos o texto da 1ª. edição em Tomos. Realizamos correções e completamos partes faltantes.

São Carlos, 30 de março de 2026.

Prof. Roberto Ribeiro Paterlini.

[1] Pergunta que teria sido feita a Euclides pelo Rei do Egito Ptolomeu I.

Parte I

Geometria como conhecimento espontâneo e social

Apresentação da Parte I

Nesta primeira parte de nosso curso refletimos sobre o que é Geometria e qual nossa posição perante ela como seres pensantes e sociais. Vemos que a Geometria constitui uma energia do Universo que trabalha para a evolução das formas e com a qual temos uma estreita relação desde nossos primeiros momentos de experiência de vida. Vemos que os objetos geométricos são muito importantes para a humanidade e por isso os estudamos e os manipulamos criativamente de várias maneiras.

No Capítulo 1 consideramos os três níveis com que percebemos a Geometria, a saber, o nível ontológico, o nível filogenético e o nível cosmológico. Dessa forma podemos situar melhor a relatividade de nossa visão sobre essa extraordinária ação do Espaço que assiste à evolução das formas.

No Capítulo 2 vemos que os seres humanos constroem conceitos abstratos sobre as formas geométricas e sobre o espaço mediante o desenvolvimento de suas capacidades biológicas e psíquicas e de sua participação nas atividades sociais, particularmente na escola. Para descrever alguns aspectos da experiência infantil utilizamos como referencial teórico a psicologia genética proposta por Jean Piaget e seus colaboradores.

No Capítulo 3 apresentamos alguns aspectos do uso da Geometria pela sociedade, mostrando a extensa gama de conceitos geométricos que ela manipula para construir objetos que lhe são úteis para a vida cotidiana ou para expressar a beleza. Fazemos também uma brevíssima exposição sobre a presença da Geometria nas Ciências Naturais.

Capítulo 1

Origem da Geometria

1.1 Introdução

Um dos aspectos criativos da natureza e que fazem parte do Espaço é o que trabalha com a evolução das formas. De nossa interação com essa ação surgem os *objetos geométricos*, que são representações mentais das formas naturais, frutos de nossa percepção e labor intelectual. A *Geometria* é a ciência que organiza esse conhecimento.

Uma maneira de descrever a *Geometria* é dizer que ela tem como meta criar objetos abstratos para representação das formas do espaço circundante e estudar relações desses objetos entre si e com os números. Além disso, como disciplina da Matemática, a Geometria participa de seus métodos, e sua estruturação lógico-dedutiva constitui, na atualidade, a principal forma de organização e autoverificação de suas proposições.



Figura 1.1

Etimologicamente o termo Geometria significa "medir terras" (do grego geo = terra, e metria = medida). Trata-se de uma palavra utilizada desde o tempo dos antigos matemáticos gregos, há três mil anos, época em que os estudiosos procuravam compreender o universo tendo como referência a própria Terra. Hoje, com a evolução de sua consciência, o homem começa a estudar o espaço em que ela se insere. Considerando esse aspecto o termo Geometria poderia ser trocado por "Cosmometria" para representar essa evolução no caminho do conhecimento. Mas, por uma questão de prudência e também de tradição, continuamos a usar o nome Geometria para denominar essa extraordinária ciência.

Estudamos neste Capítulo os três níveis de percepção da Geometria exercidos pelos homens. Discorremos primeiro sobre o nível ontológico, segundo o qual o conhecimento geométrico se desenvolve nos indivíduos pela força de seus recursos biológicos e anímicos. Depois abordamos o nível filogenético, em que o desenvolvimento do conhecimento ocorre ao longo das gerações através do labor dos grupos humanos. Finalmente temos o nível cosmológico, em que o homem observa as formas que se desenvolvem no espaço considerado em seus aspectos micro, meso e macrocósmico.

Dessas três vertentes construímos nosso conhecimento geométrico, que é assim fruto de duas tensões opostas, uma interna, exercida de dentro para fora pela força do mecanismo psicológico, e outra externa, que é a soma das solicitações da vida social e da evolução do espaço.

1.2 Gênese psicológica da Geometria

A psicologia genética estuda os primeiros passos da criança no desenvolvimento das noções de espaço e de objeto. Observações de seu comportamento ([25], pág. 13) sugerem que ela constrói pouco a pouco esses conceitos. Parece que, nas primeiras semanas, a criança não percebe o universo próximo repartido em objetos, concebidos como coisas permanentes, substanciais, exteriores ao eu. Sua percepção é um ato elementar de assimilação sensório-motora, provavelmente sem a formação de uma imagem mental dos objetos, suscetível de evocação na ausência dos mesmos. A criança começa, através dos sentidos, a reconhecer coisas, sons ou figuras familiares que se lhe apresentam repetidamente, e a diferenciá-las de sons ou figuras inabituais, apresentando, diante dessas, uma expressão de surpresa. Quando a criança busca um objeto que escapou de seu tato, faz isso por reflexo ou por um hábito nascente. Observam-se comportamentos análogos com os sentidos da audição e da visão. Se um objeto desaparece de sua visão, ela desiste logo de esperar que ele reapareça pois para ela o objeto que desaparece não é algo permanente que se deslocou.

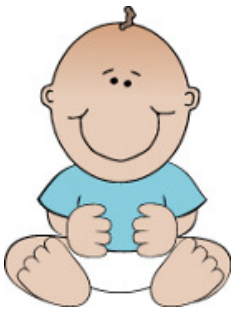


Figura 1.2

Por volta de nove a dez meses de idade a criança adquiriu comportamentos que lhe conferem um progresso na construção da noção de objeto. Ela exercita um acomodamento visual que lhe permite antecipar a posição futura de um objeto que cai diante de seus olhos, e aprende a seguir com a mão um objeto que lhe escapa. Consegue recomeçar um ato que foi anteriormente interrompido por alguma circunstância. O autor ([25], pág. 30) relata que observou uma criança de oito meses ocupar-se em arranhar um estojo colocado à sua esquerda. Abandona o jogo quando vê o pai à sua direita e brinca um pouco com ele. Bruscamente volta-se para apanhar o estojo, o que significa que ela, de certo modo, acredita na permanência do objeto: ele não desapareceu por que ela deixou de vê-lo ou de tocá-lo. Outro comportamento característico é que a criança torna-se capaz de procurar um objeto invisível a partir de uma fração visível: se a mãe se esconde atrás do berço e lhe mostra as mãos, ela a procura com os olhos. A criança também exerce a capacidade de deslocar um obstáculo que lhe impede a visão de alguma coisa. São habilidades que indicam um início da construção da ideia de permanência dos objetos, mas não testemunham a existência dessa noção. Trata-se mais de uma permanência global e prática, os objetos estão "à disposição" da criança quando ela realiza certos atos.

Jean Piaget, cientista suiço, especialista em psicologia do desenvolvimento. Criou a epistemologia genética, que estuda o conhecimento a partir de sua história e da psicologia.



Figura 1.3

Na fase seguinte, dos 10 aos 12 meses, a criança aprende a buscar um objeto desaparecido mas sem levar em conta seu deslocamento antes de desaparecer. O pai coloca o objeto desejado sob uma manta, à esquerda da criança. Ela levanta a manta, apanha o objeto e o leva à boca. Em seguida o pai coloca o objeto sob o cobertor, que está à direita da criança, bem devagar, de modo que ela veja o movimento. Quando o objeto desaparece de sua vista, ela o procura novamente sob

a manta. Isso significa que a criança não distingue o objeto como algo permanente, mas o que existe é o "objeto sob a manta". Depois, dos 12 aos 18 meses, a criança está mais à vontade em seu espaço, e ela aprende a observar os deslocamentos do objeto, e o procura mesmo após vários deslocamentos. Esse é o momento em que o objeto é abstraído de seu contexto e adquire uma permanência.

Por fim, depois dos 18 meses, a criança aprende a procurar um objeto cujo deslocamento é parcialmente invisível para ela. Dessa forma o objeto libertou-se da percepção, passando a ter existência própria. Pressupõe-se que a criança seja capaz de construir, nessa fase, uma imagem mental de um objeto de seu interesse, suficientemente clara para ser evocada em sua ausência.

Concomitantemente à construção da noção de objeto, a criança inicia a organização do seu campo espacial através de processos paralelos aos utilizados no primeiro caso. No início, o espaço, para a criança, é uma propriedade de sua ação: ele existe apenas como um espaço prático, centrado no eu, no qual o sujeito não se sente como uma parte. Segue uma sucessão de fases experimentais, nas quais a criança aprende a lidar com os deslocamentos das coisas e de si própria. A organização desses deslocamentos, primeiro sensório-motora e depois mental, a leva a construir a noção de espaço como uma propriedade das coisas e do qual ela mesmo faz parte.

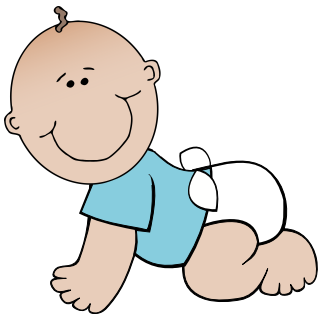


Figura 1.4

A criança, com o passar dos anos, processando com maestria sua vivência experencial e participando da cultura, refina os objetos geométricos, tornando-os objetos mentais cada vez mais claros e exatos. Dentre esses objetos estão os que servem de partida para a construção da Geometria, como o ponto, o segmento, a reta, o ângulo, o quadrado, a circunferência, etc., e suas medidas, como comprimento, área, volume e medida de ângulos.

Diversas linhas da psicologia procuram explicar os processos intelectuais através dos quais a criança progride, transitando da inteligência sensório-motora para o pensamento conceitual, e dando início à maravilhosa construção dos objetos abstratos geométricos. Trata-se de um assunto bastante complexo, e não vamos nos deter nessas explicações, tanto que existem muitas discussões a esse respeito. Para nós o que importa é observar por um momento que os objetos geométricos são construídos através de nossos recursos biológicos e anímicos, e podemos constatar as propriedades que essa construção lhes confere. Elas constituem o ponto de partida da ciência que estamos estudando.

Ficamos maravilhados ao certificar que seres "que vieram da poeira das estrelas" sejam capazes de tais feitos, mas de imediato um alerta se nos apresenta: essas construções abstratas são relativas, dependentes do alcance de nossos recursos psicológicos, do momento evolucionário em que se encontram e das experiências individuais e coletivas. Precisamos ficar atentos aos ensinamentos advindos de outras gerações e de outras ciências, assim como do ensinamento que vem do cosmos. Pode ser necessário ampliarmos nossas concepções pessoais sobre os entes geométricos para incluir maiores possibilidades.

1.3 Origem antropológica da Geometria

O ser humano construiu abstrações de objetos geométricos desde o alvorecer de seu desenvolvimento, e deixou muitos testemunhos em artefatos e desenhos. As inovações obtidas a partir de abstrações geométricas eram certamente concentradas na construção de objetos destinados à sobrevivência imediata. Mas indivíduos que viviam em agrupamentos primitivos também se dedicaram à arte, e sobrevivem até hoje desenhos gravados em pedras, denominados *desenhos ru-*

pestres. Podemos observar que alguns elementos geométricos básicos fazem parte dessas figuras, como círculos, isolados ou concêntricos, triângulos, quadrados e retângulos, losangos e trapézios, espirais, linhas retas, onduladas e em zig-zag. Observamos que esses antigos artistas tinham uma nascente habilidade de abstrair elementos geométricos a partir de suas observações da natureza.



Figura 1.5. Pintura rupestre.

Pictografia com elementos geométricos e zoomórficos, descoberta no Cerro Inti Huasi, e atribuída a indígenas que viviam na região de Córdoba, Argentina, em época anterior à sua conquista pelos espanhóis. “Inti Huasi”, da língua Quechua, significa “Casa do Sol”.

Pictografia com elementos geométricos e zoomórficos, descoberta no Cerro Colorado, em Córdoba, Argentina, e atribuída a indígenas que viviam na região em época anterior à sua conquista pelos espanhóis.



Figura 1.6. Pintura rupestre.

Muitos monumentos antigos, construídos com blocos de pedra, trazem petroglíficos com elementos geométricos. Vemos um exemplo na Figura 1.7, com complexos desenhos compostos por curvas espiraladas. Essa pedra foi encontrada na entrada de uma tumba que faz parte do conjunto pré-histórico de Newgrange, na Irlanda, construído entre 3100 e 2900 a.C.

As informações arqueológicas sobre o modo de vida e de pensar de indivíduos pertencentes a agrupamentos humanos primitivos são bastante escassas, e é muito difícil obter uma ideia sobre seu pensamento geométrico. A Antropologia, por outro lado, estuda os povos e sua cultura, em particular povos que viveram ou que ainda vivem em condições similares ao que se pensa ter ocorrido na antiga Idade da Pedra. Examinando o modo de vida desses povos percebemos que seu contato com a natureza lhes possibilitou construir abstrações de objetos geométricos de diversos tipos. Esse conhecimento era então aplicado às suas necessidades de moradia e de confecção de instrumentos para uso na vida diária. Os formatos dessas moradias e dos instrumentos, assim como os desenhos artísticos que os acompanhavam, nos mostram como as formas geométricas eram consideradas pelos antigos.



Figura 1.7. Petroglífico com linhas espiraladas.

Imagens naturais que apresentam simetrias sempre exerceram grande atração para os artistas de todos os tempos. Essas imagens foram trabalhadas e representadas em todos os tipos de utensílios e objetos de arte por inúmeros povos. Chamam-nos também a atenção o uso de padrões geométricos com simetrias em frisos esculpidos em construções ou desenhados em potes de barro.



Figura 1.8. Cesto Pueblo.

Foto de um cesto datado de 450-750 e atribuído ao povo indígena denominado Pueblo, que se desenvolveu na América do Norte e sobrevive até hoje. Várias tribos desse povo são conhecidas como “fazedores de cestos”. Podemos observar o formato de semi-esfera do cesto, assim como as simetrias do desenho constituído de linhas e pequenos quadrados.

Fotografia de vaso da Mesopotâmia do fim do período Ubaid (4500-4000 a.C.) Para enfeitar o vaso o artista utilizou uma faixa que traz padrões de repetição e de simetria. O objeto pertence ao *Museum of Fine Arts*, da cidade de Boston. Ubaid se refere a um período pré-histórico da Mesopotâmia ocorrido na região em que se situa hoje o sul do Iraque.



Figura 1.9. Vaso mesopotâmico.

As grandes civilizações da antiguidade deixaram testemunhas significativas de sua visão geométrica. Destacamos as pirâmides do Egito Antigo, das quais as mais famosas podem ser vistas na foto da Figura 1.10. Esses monumentos sempre exerceram um grande fascínio sobre a humanidade, e ao contemplar os elementos sugeridos por sua geometria sentimos nosso pensamento ser elevado ao alto.



Figura 1.10. Pirâmides do Antigo Egito.

1.4 A Geometria está em toda parte

O homem pode observar as mais belas formas geométricas geradas pela natureza. Essas formas ocorrem em profusão na vida mineral, vegetal e animal, e, graças às técnicas de que dispomos, podemos examiná-las não só no espaço próximo de nossa visão, mas também no micro e no macrocosmos. Se pretendemos que a Geometria seja a ciência que descreve o espaço, suas formas e como elas evoluem, a primeira providência que temos que tomar é observar acuradamente as formas da natureza. Assim o próprio Espaço se torna nosso mestre.

Neste texto apresentamos alguns poucos exemplos de formas naturais, e o fazemos com o intuito de incentivar o estudante a realizar ele mesmo essa observação.

As formas anatômicas externas de animais e vegetais são frequentemente simétricas em relação a um plano. Isso certamente ocorre pelo fato de que a simetria deve facilitar o equilíbrio durante o movimento ou exigir menor esforço para manter a estabilidade e a sustentação. Podemos observar também que muitos animais fazem construções que acompanham figuras ou propriedades geométricas. As teias de aranha são, às vezes, formadas por linhas poligonais, e as casas de certos animais têm formato espiralado. Um exemplo de uso da geometria entre os insetos, muito comentado na literatura, são as colméias de abelhas. Elas são compostas por pequenas caixas, denominadas favos, em foma de prismas com seção hexagonal. Além disso, os favos terminam com uma pirâmide num formato que favorece a economia de material.

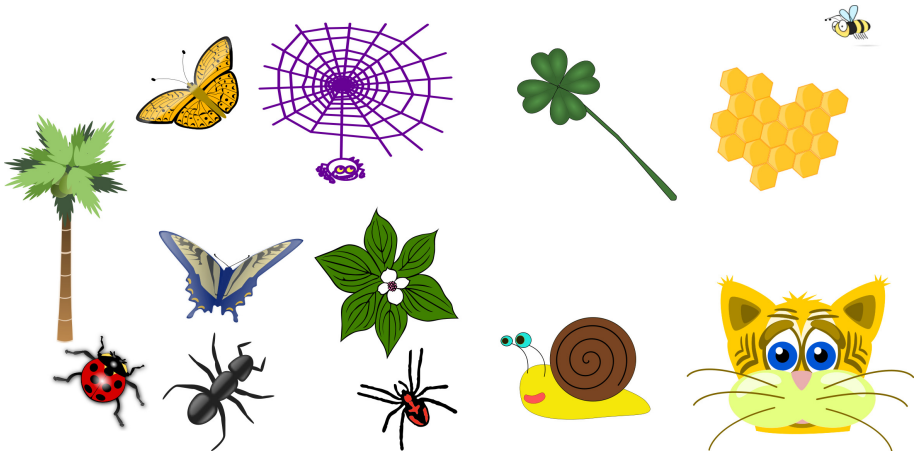
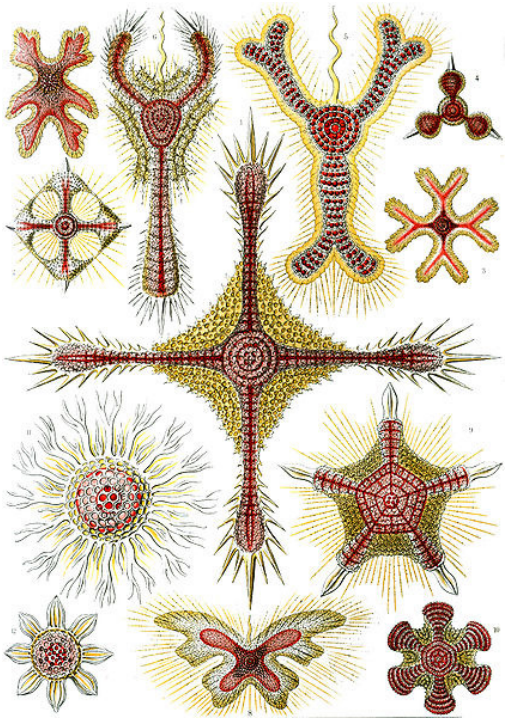


Figura 1.11. Elementos geométricos nos reinos vegetal e animal.

O mundo microscópico nos dá belas lições sobre o uso de formas geométricas para as mais diversas finalidades. Um exemplo clássico são os esqueletos de radiolários, foraminíferos e diatomáceas.



Formas geométricas surpreendentes. São desenhos de esqueletos minerais microscópicos de radiolários, protozoários amebóides que vivem nos oceanos. O biólogo alemão Ernst Haeckel divulgou vários desenhos desses animais em 1904, causando grande espanto. Na ilustração da Figura ao lado vemos esqueletos de discoidea, uma subclasse de protozoários.

Figura 1.12. Esqueletos de discoidea.

O mundo mineral tem exemplos belíssimos de estruturas geométricas. Há algum tempo tinha-se a ideia de que estruturas cristalinas estavam associadas a materiais nobres, como as pedras preciosas. Mas hoje se propõe que o reino mineral procura se organizar em estruturas geométricas simétricas, e estudos recentes indicam que essas estruturas conferem propriedades nunca imaginadas aos elementos químicos. O grafeno é um material descoberto recentemente. Trata-se de uma microestrutura extremamente forte constituída por uma camada de átomos de carbono arranjados em formato hexagonal. As estruturas planas de grafeno tendem a se estabilizar em estruturas tridimensionais, como os nanotubos. Confira a Figura 1.13.

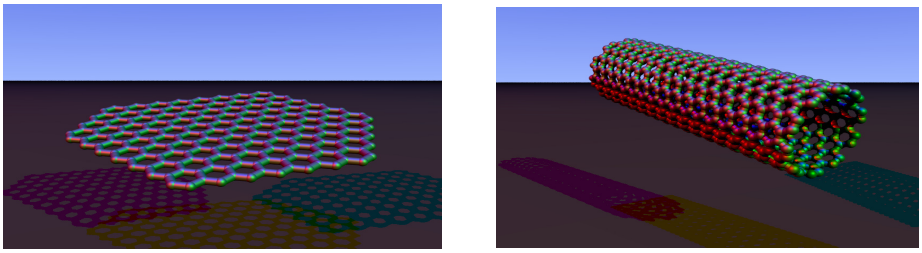


Figura 1.13. Desenhos artísticos do grafeno e do nanotubo.

Para encerrar essa singela apresentação nada melhor do que apreciarmos os elementos geométricos da magnífica Galáxia do Sombrero vista em uma imagem obtida com o telescópio espacial Hubble. Foi descoberta em 1781, e em 1912 constatou-se que não era um objeto da Via Láctea. Os astrônomos calculam que fica a 28 milhões de anos luz da Terra. É uma galáxia com formato espiralado e cercada por um fino anel de material escuro.



Figura 1.14. Galáxia do Sombrero.

1.5 Problemas

Problema 1.5.1. Descreva os elementos geométricos que compõem algumas das figuras das Seções 1.3 e 1.4, à sua escolha.

Problema 1.5.2. No desenho de uma paisagem mostrada na Figura 1.15, o artista utilizou-se de alguns elementos geométricos. Descreva-os.

Problema 1.5.3. **a)** No texto foi usado várias vezes o termo *simetria*. Descreva o que você entende por isso. **b)** Vemos na Figura 1.16 um desenho representando uma planificação do motivo do cesto indígena da Figura 1.8. Descreva o que é simetria nesse desenho.

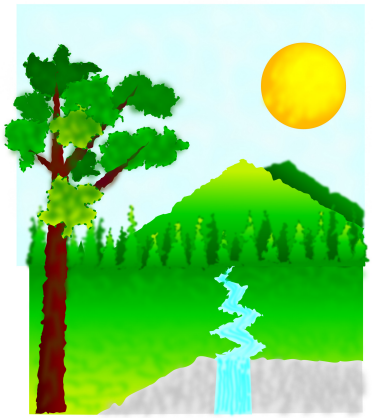


Figura 1.15

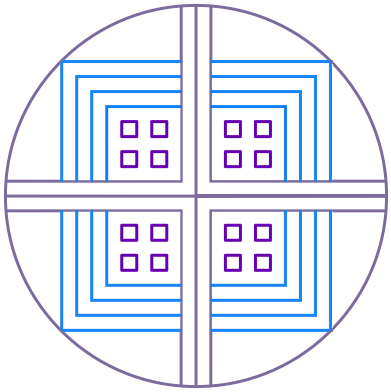


Figura 1.16

Problema 1.5.4. Na Figura 1.17 vemos o desenho de um friso inspirado pelo motivo da cerâmica mesopotâmica da fotografia 1.9. Identifique quais são as retas em relação às quais essa figura é simétrica.

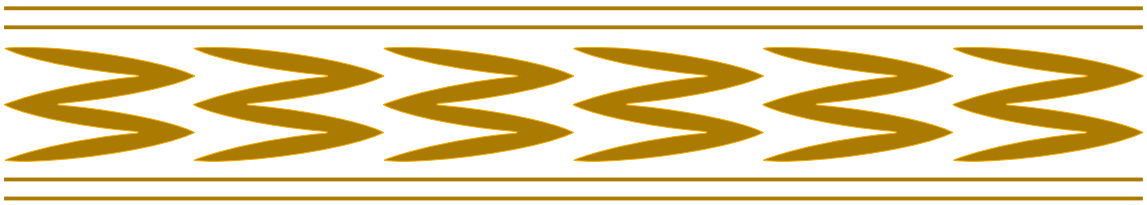


Figura 1.17. Friso mesopotâmico.

1.6 Temas para investigação

Tema 1.6.1. Faça uma pesquisa bibliográfica sobre os radiolários. Em particular estude os desenhos que Ernst Haeckel publicou em seu livro *Kunstformen der Natur* de 1904 mostrando o esqueletos de radiolários, foraminíferos e diatomáceas, e identifique os elementos geométricos que os compõem. Qual seria o motivo desses minúsculos seres adotarem essa geometria?

Tema 1.6.2. Estude as propriedades das formas geométricas assumidas por cristais de gelo. A Figura 1.18 traz uma foto (no canto superior esquerdo) assim como desenhos de algumas das formas que esses cristais podem assumir. Faça pesquisas adicionais na internet.

Tema 1.6.3. É muito comentado na literatura matemática o fato de que as abelhas constroem seus favos usando formas geométricas que proporcionam economia de material. Estude esse assunto, por exemplo em [32] ou no verbete *Honeycomb* da Wikipedia.

1.7 Atividades para licenciandos e professores

Atividade 1.7.1. Imagine uma atividade para estudantes descreverem elementos geométricos em pinturas rupestres localizadas em território brasileiro.

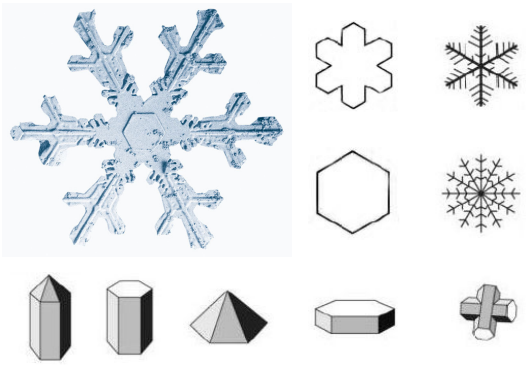


Figura 1.18. Foto e desenhos de cristais de gelo.

Atividade 1.7.2. Imagine uma atividade para estudantes que permita que eles observem e descrevam elementos geométricos em sua própria residência ou na escola. Considere também outros temas, como uma praça, um jardim botânico, etc.

Atividade 1.7.3. Prepare uma aula na qual as crianças tenham oportunidade de desenhar frisos que contenham conceitos geométricos.

Atividade 1.7.4. Talvez as crianças que viviam em séculos passados tinham estímulos diferentes daqueles que têm hoje. Compare as oportunidades que têm as crianças hoje com aquelas de antigamente, oportunidades que possam influenciar na construção mental/abstrata de objetos geométricos.

Atividade 1.7.5. Comente a seguinte recomendação de [3], pág. 48, sobre educação infantil: *Expressar-se livremente por meio de desenho, pintura, colagem, dobradura e escultura, criando produções bidimensionais e tridimensionais.* Essas atividades contribuem para a construção mental/abstrata de objetos geométricos?

Atividade 1.7.6. A Base Nacional Comum Curricular [3], pág. 292, propõe a abordagem da simetria de reflexão no 4º ano do Ensino Fundamental. Recomenda o desenvolvimento da habilidade *Reconhecer simetria de reflexão em figuras e em pares de figuras geométricas planas e utilizá-la na construção de figuras congruentes, com o uso de malhas quadriculadas e de softwares de geometria.* Como você imagina que o aplicativo Geogebra pode ser utilizado para o estudo da simetria de reflexão?

Capítulo 2

Gênese dos conceitos geométricos

2.1 Introdução

Neste capítulo vemos como o amadurecimento do mecanismo biológico da criança e o despertar de seu aparato psicológico a levam a construir a noção de espaço como uma propriedade das coisas, assim como o conceito de objeto em geral e de objetos particulares que compõem esse espaço. Dentre esses objetos estão os que interessam à Geometria, como o ponto, o segmento, a reta, o ângulo, o quadrado, a circunferência, etc. A criança desenvolve também, desde seus aspectos mais elementares, a noção de medida desses objetos, mediante comparação entre suas extensões (comprimento, área, volume, medida de ângulos).

Estaremos atentos ainda, neste Capítulo, a algumas peculiaridades da construção de representações dos objetos geométricos, suas possibilidades e alguns cuidados necessários.

2.2 As três fases iniciais da construção dos objetos geométricos

O psicólogo Jean Piaget e seus colaboradores observaram que a criança constrói lentamente um conceito geométrico de espaço e dos objetos que o compõem, e distinguiram três fases segundo as quais essa evolução se processa. Essas fases são denominadas topológica, projetiva e euclidiana ([26]). São fases consecutivas mas não disjuntas.

Crianças entre 2,5 e 4 anos revelam capacidade de reconhecer, classificar e desenhar formas como discos, anéis abertos e fechados, anéis entrelaçados ou superpostos, e superfícies perfuradas com um ou dois buracos.

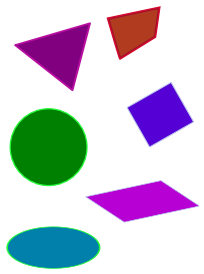


Figura 2.1

Temos à esquerda exemplos de objetos geométricos que são apresentados a crianças na forma de modelos ou desenhos. Vemos à direita desenho típico de crianças com idade entre 2,5 e 4 anos, usado por elas para representar indistintamente aqueles objetos.

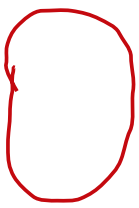


Figura 2.2

Fazemos dessas ocorrências a seguinte leitura: as crianças captam da forma desses objetos o fato de que eles têm um único contorno, uma curva fechada, envolvendo uma região. Por isso os representam com o mesmo desenho, como um laço fechado. Os matemáticos chamam de *topológica* a essa propriedade. Devido a isso os psicólogos denominam a essa fase da criança como

"construção do espaço topológico". Constataram que crianças com idade entre 2,5 e 4 anos têm dificuldade de classificar objetos com ângulos, como triângulos, quadrados, losangos, etc., e os colocam na mesma classe. Esses objetos são denominados "euclidianos" pelos autores de [26], e o início de seu reconhecimento pelas crianças é descrito por eles como o princípio da "construção do espaço euclidiano". Isso ocorre por volta dos 4 anos. Entre essas duas fases (em parte permeando-as) a criança contrói o "espaço projetivo", quando os objetos são considerados segundo suas posições mútuas no espaço e segundo algum sistema de perspectiva geral.

Na primeira fase (construção do espaço topológico) a criança inicia o desenvolvimento de processos mentais que podem ser denominados propriedades topológicas: proximidade e separação, ordem (como síntese das duas propriedades anteriores), percepção de contorno e de continuidade e descontinuidade. Nos processos relativos à ordem temos a percepção de ordem dos tipos linear, circular e em formato de oito, em ordem direta e inversa, e a transposição de um tipo para outro. Da iteração entre os processos de ordem e contorno é construída a noção unidimensional de "estar entre" que caracteriza os pontos de uma linha. As relações de contorno e continuidade estão interligadas pois o contorno é suposto ser contínuo.

A criança adquire, entre os 7 e 12 anos, aproximadamente, a noção de linha como objeto contínuo mas constituído de pontos, apesar de serem os pontos objetos discretos. Essa construção é denominada passagem da noção perceptual para a noção conceitual e operacional de continuidade. Por ser esse um aspecto importante para o estudo da Geometria descrevemos mais alguns detalhes, conforme consta de [12], páginas 35 e seguintes.

Os psicólogos investigam o progresso do conceito de continuidade nas crianças através de uma sequência de ações que se resumem em quatro temas. Primeiro se ensina ou se verifica se a criança sabe subdividir figuras, por exemplo, desenhar quadrados dentro de um quadrado maior, círculos dentro de um círculo, subdividir uma linha em linhas de menor comprimento, etc. Depois que essas experiências estiverem bem consolidadas se pede para subdividir uma figura até aonde seja possível. O terceiro tema consiste em investigar o que a criança apreende como o processo final das subdivisões, se é um ponto, se tem uma forma ou não. O quarto tema explora o caminho inverso desse processo: reconstruir a figura a partir de seus elementos atômicos. Procura-se aqui perceber de que forma a criança entende uma linha ou superfície como um conjunto de pontos. Por volta de 11 a 12 anos as crianças concebem que as subdivisões são ilimitadas, o elemento final independe da forma inicial do objeto (superfície ou linha), e são todos homogêneos. Dessa forma seu pensamento se libera das limitações do desenho, e começam a compreender que o infinitamente pequeno não é um resíduo estático, mas a representação de um processo de infinitas subdivisões.

A percepção das propriedades topológicas dos objetos depende da análise de suas propriedades internas. Quando se considera os objetos sob variados pontos de vista, tanto em relação ao sujeito quanto a outros objetos, surgem as propriedades projetivas e euclidianas. Elas dependem da comparação relativa das extensões dos objetos ou de suas partes. Aquelas dizem respeito à localização dos objetos, uns em relação aos outros, e à sua configuração dependente do ponto de vista.

Vamos comentar primeiro as propriedades projetivas. São elas: linhas projetivas, perspectiva, projeção de sombras, coordenação de perspectivas, seções geométricas, projeção e planificação.

O elemento básico dessas propriedades é a linha projetiva. A criança, inicialmente, reconhece linhas retas de forma perceptual, através do toque ou da visualização de objetos em que elas se distinguem. Aos poucos contrói a capacidade de representar mentalmente uma linha reta em uma direção previamente solicitada. O pesquisador pode acompanhar os progressos de crianças nessa habilidade mediante experimentos simples. Solicita-se delas que alinhem objetos em uma mesa

de tampo retangular interligando dois objetos previamente colocados (pontos A e Z nos desenhos da Figura 2.3). Observa-se que crianças com até quatro anos têm dificuldade com o alinhamento. De 4 a 5,5 anos elas conseguem alinhar os objetos quando os pontos A e Z estão equidistantes de um dos bordos da mesa, mas têm dificuldade em outras situações, que são superadas entre 6 e 7 anos.

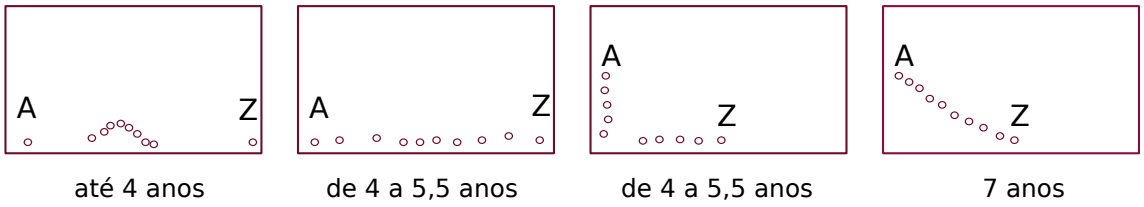


Figura 2.3. Experimentos sobre linhas projetivas

As crianças aprendem a distinguir a variação da forma de um objeto de acordo com a posição do observador. Os progressos das crianças podem ser constatados quando se pede que elas desenhem objetos, como varetas e discos, colocados em várias posições. Se a criança tem muita dificuldade em desenhar, pode-se solicitar dela escolher o desenho mais adequado em um conjunto de figuras previamente preparadas. Experiências análogas podem ser feitas com projeção de objetos em um anteparo usando uma fonte luminosa, assim como quando se investiga a percepção das posições relativas de objetos em relação a diversas posições do observador.

A compreensão de seções geométricas exigem da criança a combinação de habilidades comuns às três fases de construção do espaço (topológicas, projetivas e euclidianas). Os progressos da criança podem ser observados pedindo-lhe que antecipe a forma da superfície que vai aparecer depois que se cortar um determinado objeto, como um cilindro, ao longo de um plano (por exemplo, perpendicular ou paralelo ao eixo de simetria). Pode-se solicitar que ela o desenhe ou que escolha entre desenhos previamente preparados.

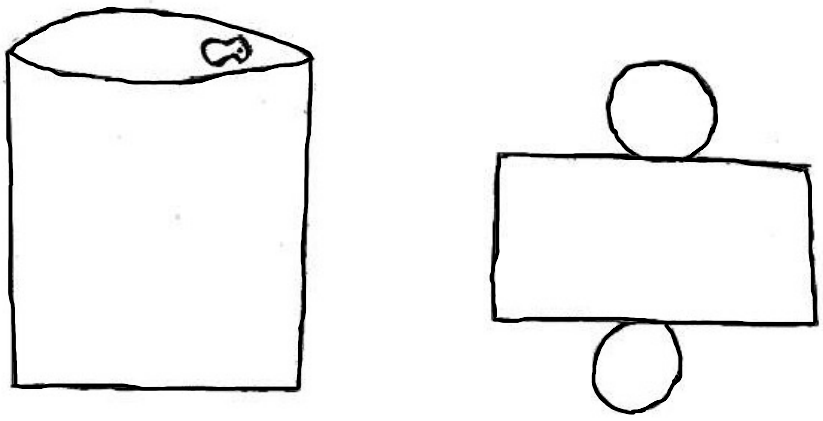


Figura 2.4. Duas tentativas de planificação de cilindro feita por estudante da 4ª. série do ensino fundamental ([23], páginas 225 e 226).

O reconhecimento dos objetos euclidianos se inicia tipicamente após os 4 anos. Trabalhando com uma criança de 4 anos e 1 mês, observou-se que ela reconhecia e desenhava objetos na forma de anéis abertos ou fechados, superfícies com um ou dois buracos, discos e elipses. Mas ao desenhar uma região quadrada fez uma linha fechada com um vértice formando um ângulo mais ou menos reto e os outros vértices aparecem como curvas ([12], pág. 13). Solicitou-se de outra criança com pouco mais do que 4 anos que copiasse o desenho da Figura 2.5, à esquerda. Ela não

teve dúvidas sobre começar o desenho com o círculo, e o fez sem hesitação (Figura 2.5, à direita). Mas ao desenhar as duas linhas em ângulo fez várias tentativas e terminou dizendo: “esse não sei”.

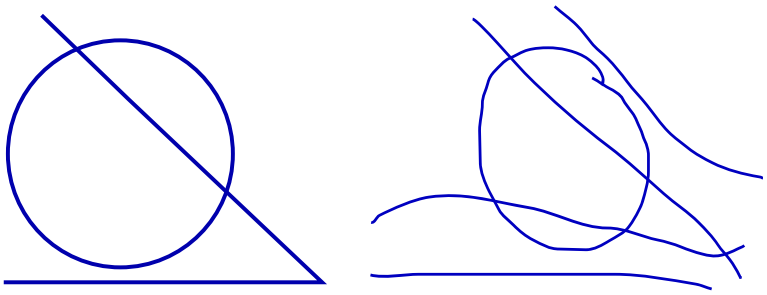


Figura 2.5. Teste com objetos topológicos e euclidianos.

A Figura 2.5 descreve uma situação inicial dos processos pelos quais a criança aprende gradualmente a diferenciar as formas denominadas euclidianas, primeiro entre quadrados e retângulos, depois triângulos, e por fim, o losango. Isso ocorre tipicamente em crianças entre 4 a 6,5 anos. Nessa idade elas fazem os desenhos mediante cópia de um modelo previamente apresentado a ela. Observa-se em crianças a partir dos 7 anos o início do desenvolvimento da habilidade de fazer desenhos de memória, o que indica que elas já estão construindo representações abstratas dessas formas.

Enquanto a construção do espaço projetivo depende da conservação do paralelismo, as propriedades euclidianas derivam da conservação de ângulos e distâncias, que geram as similaridades geométricas e o desenvolvimento de sistemas simples de coordenadas. Vemos alguns detalhes desses processos na seção seguinte.

2.3 Gênese da construção de medidas e de coordenadas

Fazemos a seguir breves comentários sobre a gênese na criança das seguintes propriedades: conservação e medida de comprimentos e distâncias, coordenadas retangulares, conceito e medida de ângulos, comprimento de curvas, área de superfícies e volume de sólidos. Esses assuntos são tratados em detalhes na obra de J. Piaget e colaboradores, em particular em [27]. Um resumo desse livro pode ser lido em [13].

Para crianças pequenas (até 7 anos) as coordenadas do espaço euclidiano nada mais são que um sistema de relações de ordem que se aplicam aos objetos nas direções esquerda-direita, acima-abaixo e frente-atrás. As distâncias não são propriedades exteriores ao eu, mas dependem da sua própria posição e da importância dos objetos para elas. Ao trabalhar em maquetes posicionando no chão reproduções reduzidas de sua escola, sua casa, e outras construções dos arredores, as crianças tendem a colocar mais próximas aquelas de seu interesse, como sua escola e sua casa, e dispor mais afastadas as que não são de seu interesse. Essa mesma experiência, feita com crianças de 7 a 9 anos, mostram que elas conseguem coordenar corretamente os objetos ao longo de linhas ou de partes do plano, mas as partes não se relacionam entre si com exatidão. A partir de 9 ou 10 anos elas conseguem localizar corretamente os elementos das maquetes.

A aquisição da noção de distância é essencial para a habilidade de medir objetos e para a construção de um sistema de coordenadas. O seguinte experimento pode esclarecer alguns dos passos que são seguidos no desenvolvimento dessa noção. São colocados dois objetos idênticos próximos à criança, um no ponto A, e outro no ponto B. Pergunta-se a ela se é mais perto ou mais longe de A até B ou de B até A. Depois, interpondo-se uma tela entre os objetos, pergunta-se se eles estão

mais perto ou mais longe do que antes. As mesmas perguntas são feitas depois de se substituir um dos objetos por outro cuja altura é o dobro, ou depois de se elevar verticalmente a posição de um dos objetos. Crianças até 4 ou 5 anos respondem que A e B estão mais próximos com a presença da tela, pois consideram apenas a distância do objeto até a tela. Mesmo aquelas que respondem que AB=BA quando os objetos estão no mesmo nível, dizem que as distâncias são diferentes quando um dos objetos é levantado (a distância de baixo para cima é considerada maior). Vemos que não lograram uma noção de conservação de distância, que ainda é dependente do ponto de vista da criança. Crianças de 7 anos em diante afirmam que a distância entre dois objetos imóveis é sempre a mesma, não importa o objeto que seja interposto entre elas, e que sempre se tem AB=BA.

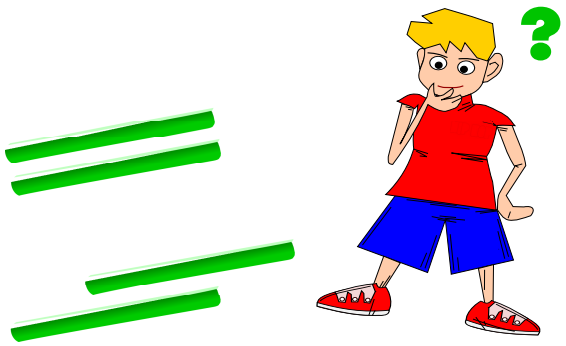


Figura 2.6

A aquisição da noção de comprimento de objetos, particularmente de retas e curvas, é também investigada através de experimentos simples. Duas varetas de mesmo comprimento são colocadas paralelamente, uma ao lado da outra, separadas por alguns milímetros, de modo que os extremos estejam na mesma direção perpendicular. Pergunta-se à criança se as varetas têm o mesmo tamanho, ou se uma é maior do que a outra. Em seguida se desloca uma das varetas uns dois centímetros, afastando-a da criança, e se repete a pergunta. Crianças com até quatro anos tendem a afirmar que a vareta afastada é maior, pois consideram apenas o extremo mais afastado. Crianças entre 4 e 7 anos fazem ajustes progressivos, do tipo “daquele lado ela é maior”. Crianças de 7 anos em diante respondem que sempre é o mesmo tamanho, e assim mostram que adquiriram a noção de conservação do comprimento.

Em outra experiência, o investigador apresenta duas fileiras formadas pela mesma quantidade de palitos de fósforo, colocados na mesma direção, formando dois segmentos de reta. Pergunta-se à criança se as fileiras têm o mesmo comprimento (perguntando se uma formiga andasse em cima dos palitos ...). Em seguida se modifica uma das fileiras, colocando-se os palitos em ângulo. Novamente se pergunta à criança se as fileiras têm o mesmo comprimento. Essa e outras experiências mostram a evolução da criança no aprendizado da construção do eixo numérico, que depende da capacidade de construir uma unidade de medida e de subdividir uma linha reta, o que ocorre por volta da idade de 8 anos. Dessa forma a criança consegue localizar um objeto em uma reta medindo a distância de um ponto de referência até ele.

A localização de objetos em um plano exige o desenvolvimento da capacidade de construir coordenadas retangulares. Utilizando vários tipos de experimentos se concluiu que crianças com aproximadamente 9 anos são capazes de perceber a necessidade de se considerar duas dimensões e de combinar as medidas de dois eixos. Aos dez anos a criança percebe a terceira dimensão. Observamos que essas percepções são operativas, e não significam uma habilidade de trabalhar com representações cartesianas em uma linguagem algébrica ou geométrica.

Para investigar como as crianças percebem métodos para medir ângulos, foi pedido que fizessem uma cópia a mais exata possível do diagrama da Figura 2.7.

Crianças com até 9 anos mostraram grande dificuldade de realizar essa tarefa, procedendo por tentativas e sem tomar as medidas de todos os segmentos. Crianças com idade de 9 anos ou pouco mais tentam reproduzir a inclinação correta medindo AB, BC, BD e CD ou AD. Poucas crianças com idade aproximada de 9 anos se utilizam da perpendicular de D a AC, mas essa técnica é a mais utilizada em crianças com 10 anos ou mais, demonstrando que já dominam melhor a ideia de coordenadas retangulares.

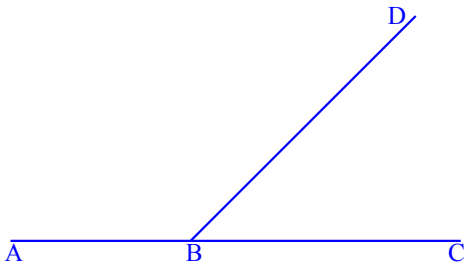


Figura 2.7

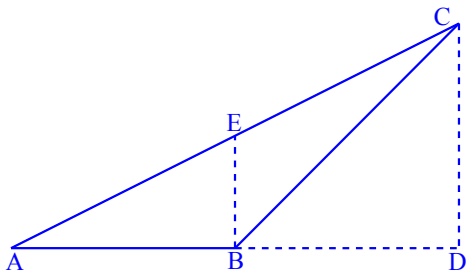


Figura 2.8

Dificuldades análogas foram observadas com a reprodução a mais exata possível do triângulo ABC da Figura 2.8. Crianças com menos de 9 anos não conseguem a reprodução exata e tentam várias táticas, a maioria do tipo ensaio e erro. Observam-se crianças com idade entre 9 e 10 anos medindo o segmento BE perpendicular a AB e assim conseguem seu intento. Crianças com 10 a 11 anos desenham prolongamentos de lados, como BD, e medem a perpendicular CD, mostrando maior desprendimento com as limitações do desenho e um início de pensamento formal.

Investigadores examinaram as posições de crianças de 4 a 11 anos a respeito da soma dos ângulos internos de triângulos. Foi perguntado a essas crianças que aspecto terão os ângulos de um triângulo se eles são cortados com uma tesoura e juntados em um semicírculo. São feitos alguns exemplos e depois o problema é apresentado às crianças de várias formas. Esse problema não tem significado para crianças com idade até 6 anos, pois ainda não abstraíram o conceito de ângulo. Para elas ângulo é algo concreto que se fixou em sua mente, como um telhado, por exemplo. Crianças de 6 a 7 anos percebem que, em um dado triângulo, a reunião dos ângulos dá um semicírculo, mesmo se os ângulos forem colocados em outra ordem, mas não aceitam antecipar que o mesmo se dará em algum outro triângulo de formato diferente que lhes é apresentado, por exemplo, um triângulo com um ângulo muito agudo. Crianças de 8 a 10 anos são capazes de fazer a generalização, mas não percebem essa propriedade como uma lei geométrica, que pode ser usada quando necessário, o que só ocorre para crianças de 10 a 12 anos.

Crianças são também investigadas quanto à construção de lugares geométricos em um plano. Os assuntos abordados são retas, círculos, curvas mecânicas e curvas compostas, assim como suas representações. Tudo é contextualizado, como, por exemplo, “onde estão os homenzinhos que se encontram à mesma distância de duas árvores”, ou “coloque essas criancinhas à mesma distância da bolinha”. Crianças com até 5 anos de idade não têm ideia de uma distância estável. No caso da reta indicam um ponto qualquer, e no caso do círculo dispõem as figuras ao redor da bolinha, sem se preocuparem com a distância. Crianças com 5 a 6 anos conseguem determinar com boa precisão o ponto médio entre as figuras das árvores, mas no caso do círculo controem um anel ao redor da bolinha, sem se preocuparem em medir distâncias. Na idade de 6 a 7 anos começam a aparecer sinais de generalização e de repetição, algo como “seguir uma direção”, mas sem muito cuidado com a simetria, ou seguindo um só sentido. De 7 a 8 anos a criança consegue generalizar corretamente. Depois de colocar alguns pontos conclui que todos os pontos da reta ou do círculo têm a mesma propriedade. Outros problemas apresentados às crianças implicam na construção de espirais e ciclóides, e aquelas com idade de 7 anos ou mais conseguem gradualmente as soluções corretas.

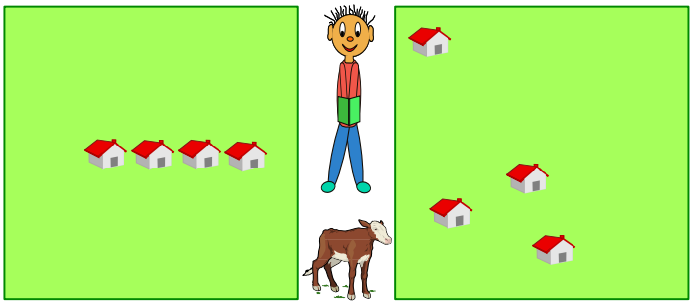


Figura 2.9

Para testar a conservação de área de superfícies e de volumes de sólidos, vários experimentos são utilizados. Descrevemos apenas um deles. São apresentados a crianças dois cartões em forma retangular, de mesmas dimensões, e pintados de verde. Se diz que são pastos, e em cada um está uma vaca pastando. Inicialmente se pergunta se as vacas têm a mesma quantidade de pasto. Depois se diz que o fazendeiro resolveu construir uma casa dentro do pasto. Coloca-se então em cada retângulo verde um pequeno retângulo de madeira, ambos idênticos, representando as casas. Em um retângulo a casa é colocada no centro, e em outro, próximo a um canto. A criança é inquirida se as vacas ficaram com a mesma quantidade de pasto. Depois o fazendeiro resolveu fazer mais casas, e se vai colocando retângulos de madeira idênticos em ambos os pastos, em um deles os retângulos são colocados em fileira, juntos um dos outros, e em outro são distribuídos aleatoriamente. Em cada passo se pergunta se as vacas continuam com a mesma quantidade de pasto. Crianças de 5 a 6 anos afirmam que as áreas são as mesmas após a colocação da primeira casa, mas nas outras situações dizem que se as casas estão juntas o espaço que resta é maior. Crianças com idade próxima de 7 anos admitem que as áreas restantes são sempre as mesmas, e conseguem separar a impressão visual do raciocínio lógico.

2.4 Aspectos das representações figurais

As representações de objetos geométricos usadas pelas crianças, criadas por elas mesmas ou induzidas pela cultura ou pelo instrutor que acompanha seu progresso, também passam por evoluções. Em nossa civilização a escrita e as representações com imagens constituem a técnica mais disponível de comunicação. Devido a isso o desenho em folha de papel dos objetos geométricos é a forma mais usada para sua representação. Nos dias atuais somos testemunhas de uma possível mudança com as propostas das novas tecnologias.

A representação de objetos geométricos através de desenhos segue convenções que devem ser cuidadosamente trabalhadas na escola. É importante observar que o uso da representação por figuras é bastante influenciada pela cultura geral, que hoje potencializa o uso da imagem como forma de comunicação. Essas duas vertentes, a escola e a cultura, apresentam propostas e convenções que ora coincidem, ora se complementam, e ora se chocam. Assim é necessária uma atenção a esses detalhes para que o estudante saiba diferenciar as situações.

Limitamos nossas observações a alguns poucos aspectos: a representação de retas paralelas, de polígonos planos e de sólidos.

A convenção escolar sobre a representação de retas paralelas deve ser cuidadosamente explicada pelo professor. Nos livros de Geometria essa representação, conforme costume secular, é feita através do desenho de dois segmentos equidistantes. Vemos exemplos na Figura 2.10.

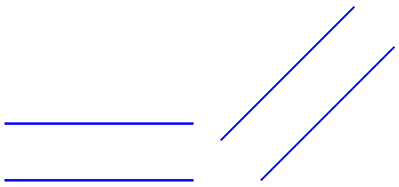


Figura 2.10

Por outro lado, em desenhos e pinturas, retas paralelas costumam ser representadas por dois segmentos que se aproximam, respeitando a perspectiva com que nossa visão vê linhas paralelas que se afastam de nós. Nossa percepção visual faz com que percebamos como paralelas duas linhas desenhadas como se fossem se tocar ao longe (por exemplo, linhas que representam os trilhos de uma ferrovia). Vemos na Figura 2.11 como são desenhados em perspectiva os degraus paralelos de uma escada.

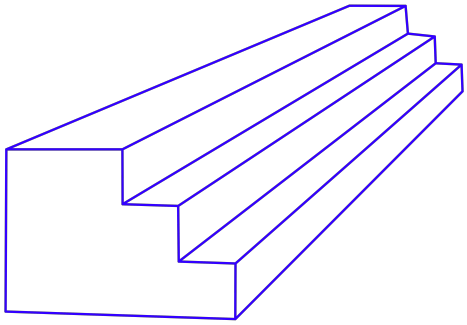


Figura 2.11. Retas paralelas em perspectiva no desenho de uma escada.

É muito comentado o fato de que desenhos de polígonos em livros didáticos sempre se apresentam em certas posições, o que provavelmente provoca interpretações limitadas. Os desenhos de triângulos, por exemplo, têm amiúide um lado horizontal, o que pode acarretar dificuldades na observação de triângulos congruentes ou similares em desenhos mais complexos. Geralmente se esquece de desenhar possibilidades um pouco mais exóticas, com triângulos com alturas cujo pé está fora do lado oposto, ou com centro fora de seu interior.

A autora [23], pág. 17, observa que podem ocorrer enganos. Vemos, na Figura 2.12, que um quadrado, quando desenhado diferente, pode ser interpretado como um losango, restringindo assim suas propriedades. Por outro lado, na Figura 2.13, um losango, quando desenhado com um lado na horizontal, pode ser interpretado como um paralelogramo, novamente restringindo suas propriedades.

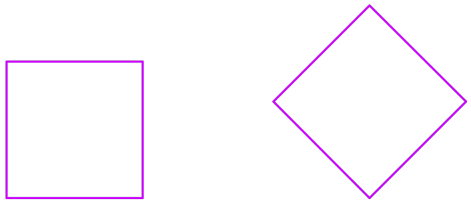


Figura 2.12

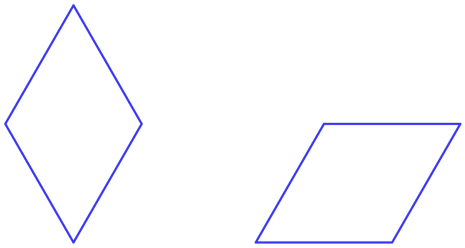


Figura 2.13

Atividades realizadas com crianças em escolas revelam como elas progridem na construção de representações de sólidos. Em uma experiência realizada com estudantes com idade por volta de 7 e 8 anos, conforme descrito em [20], pág. 240, a professora lhes propôs desenhar um cubo. Para isso lhes forneceu folhas de papel e disponibilizou um cubo. Com alguma interferência da pesquisadora os estudantes conseguiram fazer desenhos significativos (Figura 2.14), mostrando que eles conseguem compreender representações em perspectiva.

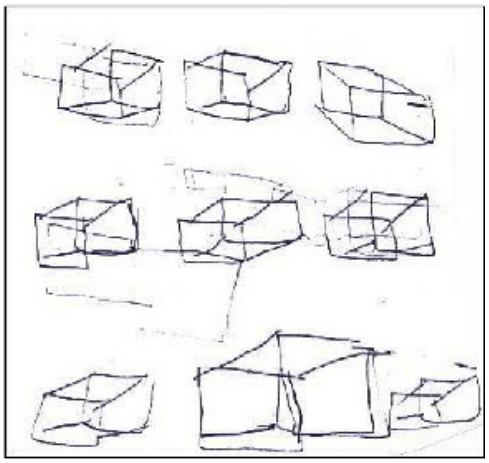


Figura 2.14. Desenhos de cubos feitos por crianças, segundo [20], página 240.

Ao trabalhar com estudantes mais inexperientes, o professor precisa sempre verificar sua compreensão e esclarecer as convenções que pretende usar. Em [21] as autoras descrevem atividades realizadas numa escola com estudantes com idades entre 9 e 10 anos com o objetivo de verificar seu conhecimento sobre as convenções usadas em representações de objetos tridimensionais. Um dos desenhos testados foi o da Figura 2.15, à esquerda, (desenhado em uma folha de papel). Os estudantes da classe foram divididos em grupos e lhes foi solicitado que construissem com varetas o objeto representado pelo desenho. Foi-lhes informado previamente que o desenho representava um objeto tridimensional. Mesmo assim alguns estudantes construíram um objeto plano. Na mesma Figura 2.15, à direita, o desenho mostra linhas interrompidas para sinalizar que estão localizadas na parte detrás.

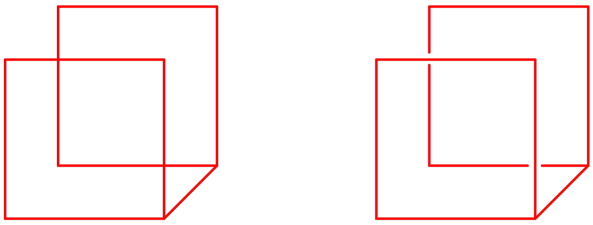


Figura 2.15. Desenhos de objeto geométrico tridimensional.

Vemos dessas experiências que a representação de objetos geométricos tridimensionais através de desenhos no plano exige a construção de certas convenções, as quais devem ser trabalhadas pelo professor.

2.5 Problemas

Problema 2.5.1. **a)** Se você dispõe de uma régua com escala, como faria uma cópia a mais exata possível do diagrama da Figura 2.7 apenas medindo os segmentos AB, BC, BD, AD e CD? **b)** Se você dispõe de uma régua com escala e um esquadro, como faria uma cópia a mais exata possível do diagrama da Figura 2.7 medindo o segmento perpendicular de D a AC? **c)** Faça uma cópia exata do diagrama da Figura 2.7 usando uma régua sem escala e um compasso.

Problema 2.5.2. Como você faria uma cópia a mais exata possível do triângulo da Figura 2.16 usando apenas uma régua com escala e um esquadro? E com uma régua sem escala e um compasso?

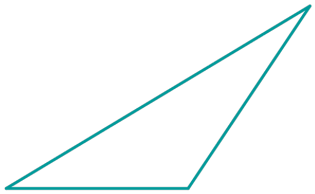


Figura 2.16. Triângulo obtuso a ser reproduzido.

Problema 2.5.3. Desenhe triângulos nos quais o pé de uma altura: (i) está no interior do lado; (ii) coincide com um vértice; (iii) está na reta suporte de um lado e fora dele.

Problema 2.5.4. Em um triângulo qualquer as mediatrizes dos lados se encontram em um ponto, denominado circuncentro (portanto é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo). Desenhe triângulos nos quais o circuncentro: (i) está no seu interior; (ii) está em um lado; (iii) está fora dele.

2.6 Temas para investigação

Tema 2.6.1. Imagine como fazer uma investigação com crianças com 4 a 5 anos de modo que você possa verificar se ela já construiu os elementos básicos do espaço topológico e como está se saindo na construção de representações de figuras euclidianas. Quais figuras geométricas você pretende utilizar e de que modo? Como separar a habilidade de desenhar da capacidade de construir modelos mentais?

Tema 2.6.2. Imagine como fazer uma investigação com crianças com até 7 anos para acompanhar a construção do conceito de reta projetiva.

Tema 2.6.3. Imagine como fazer uma investigação com crianças com até 10 anos para acompanhar a construção do conceito de conservação de volume. Quais percepções a esse respeito você procuraria verificar?

Capítulo 3

Presença da Geometria na sociedade

3.1 Introdução

O homem, através de suas habilidades intelectuais e manipulativas, transforma os objetos naturais para obter outros que lhe são mais úteis, tendo em vista sua sobrevivência, conforto, ou seus impulsos de explorar, investigar, retratar a beleza. Assim o homem faz construções arquitetônicas, instrumentos mecânicos, objetos artísticos, etc. Frequentemente essas manipulações se utilizam de conceitos geométricos adquiridos espontaneamente ou através do desenvolvimento de técnicas próprias de determinados ramos da atividade humana.

Vemos neste Capítulo como algumas atividades humanas utilizam conceitos geométricos para alcançar seus objetivos. Também comentamos brevemente a relação da Geometria com as ciências naturais.

3.2 Arquitetura

A arquitetura é a arte e a ciência de planejar e construir ambientes físicos para uso do ser humano e de outros seres viventes. Pressupõe uma manipulação criativa de materiais e locais físicos, e utiliza princípios científicos e matemáticos para alcançar seus objetivos.

Ao planejar um ambiente ou uma construção, o arquiteto concebe uma combinação de formas a serem construídas e que possam atingir os objetivos desejados. Frequentemente essas formas são derivadas de figuras geométricas simples, como polígonos regulares. Outras vezes são utilizadas formas complexas, como domos e poliedros. O arquiteto precisa calcular as dimensões dessas formas em função do volume necessário para abrigar as atividades desejadas. Considera também a forma em função da beleza e de sua relação com o ambiente.

A construção dos edifícios e ambientes planejados pelos arquitetos exige o trabalho de diversos tipos de profissionais, que empregam frequentemente conceitos geométricos. Uma vez tivemos a oportunidade de presenciar o trabalho de um pedreiro. Observamos que, para construir paredes perpendiculares (Figura 3.1), ele inicialmente dispõe no perímetro do terreno longarinas de madeira. A partir de um dos cantos mede 3 metros em uma direção, e marca o ponto com um prego. Depois mede 4 metros na outra direção, e também marca o ponto com um prego. Em seguida ajusta as longarinas até que a distância entre os pregos seja de 5 metros. Esse procedimento está ilustrado na Figura 3.2. Disse-me ele: “Não sei dizer por que funciona, mas as paredes ficam em ângulo reto”.



Figura 3.1

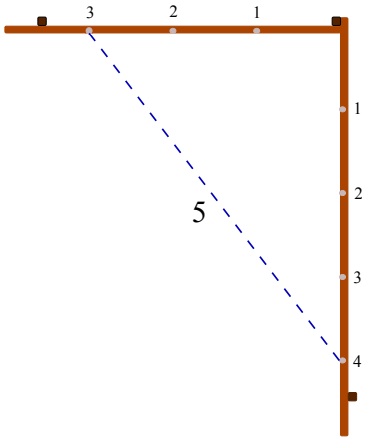


Figura 3.2

A Arquitetura não se ocupa apenas com a função das construções, ou seja, em proporcionar ambientes favoráveis ao uso para o qual foram projetados. Além desse trabalho os arquitetos se aprimoram em idealizar formas que traduzem estética, beleza e simetria. Segundo o arquiteto brasileiro Oscar Niemeyer, "Arquitetura não constitui uma simples questão de engenharia, mas uma manifestação do espírito, da imaginação e da poesia".

Formas geométricas simples conferem grande beleza ao prédio do Congresso Nacional do Brasil (fotografia ao lado), projetado pelo arquiteto Oscar Niemeyer.



Figura 3.3

Nas últimas décadas foram construídas muitas estruturas arquitetônicas com formas geométricas espetaculares em várias cidades do mundo. Um tipo que chama a atenção é o chamado *domo geodésico*. Consiste de uma estrutura em forma de esfera, ou parte de uma esfera, e seus elementos constitutivos são triângulos cujos lados formam linhas poligonais inscritas em círculos máximos da esfera. Obtêm-se uma estrutura esférica que se distingue pela beleza e estabilidade devido à rigidez da forma triangular. Um exemplo é a Biosfera de Montréal, mostrado na Figura 3.4. Existem construções em forma de domo geodésico em todo o mundo, sendo que os maiores edifícios estão no Canadá, Japão, Estados Unidos, Bolívia e Abu Dhabi.



Figura 3.4

Vemos na Figura ao lado a *Biosfera de Montréal*, construída originalmente para a Exposição Internacional de 1967, hospedada pela cidade de Montréal. Foi desenhada pelo arquiteto e engenheiro americano R. Buckminster Fuller. A estrutura perdeu sua cobertura original, de acrílico transparente, em um incêndio ocorrido em 1976. Uma versão dessa foto com maior resolução pode ser vista em `http://en.wikipedia.org/wiki/File:Biosphére_Montréal.jpg`

As formas geométricas, desde as mais simples até as mais complexas, são utilizadas nos detalhes das construções e também na mobília. Vemos nos objetos representados nas figuras 3.5, 3.6 e 3.7, o uso de elementos geométricos como prismas, planos paralelos, retângulos, arcos de circunferência, e outras curvas. Observamos nessas figuras várias linhas de simetria. Vimos, no Capítulo 1, como o homem se utiliza da simetria para expressar a beleza, e constatamos que essa interpretação persiste através dos tempos.

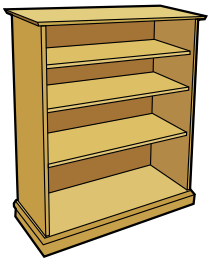


Figura 3.5



Figura 3.6



Figura 3.7

São muito importantes na Arquitetura as técnicas de representação de objetos espaciais através de desenhos planos. Os arquitetos e outros profissionais as usam para estudo e documentação de projetos, assim como para comunicação de ideias e conceitos. Essas técnicas utilizam métodos geométricos de projeção.

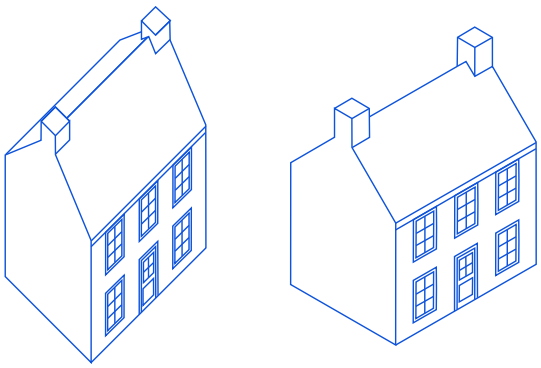


Figura 3.8

A projeção axonométrica é muito utilizada na Arquitetura e na Engenharia para representação de objetos tridimensionais. As linhas verticais do objeto são desenhadas verticalmente em relação à página. As linhas transversais acompanham uma grade (invisível) de duas famílias de linhas paralelas e inclinadas em relação à direção horizontal da página.

3.3 Mecânica

A Mecânica se ocupa do planejamento e construção de instrumentos que têm por finalidade comunicar movimento, pôr em ação a energia, ou mudar a direção ou a magnitude de uma força. A Mecânica se utiliza extensamente das formas dos objetos geométricos assim como das propriedades que podem ser obtidas quando esses objetos interagem entre si.

Arquimedes propôs a ideia de que toda máquina é uma composição de máquinas fundamentais mais simples, sendo elas o parafuso, a alavanca e a roldana. Na Renascença essa lista foi aumentada e foram acrescentados a roda com eixo, a cunha e o plano inclinado. Vemos que essas máquinas fundamentais se utilizam de determinadas formas geométricas e suas propriedades. Um exemplo é o parafuso, que traduz as propriedades do helicóide, superfície de dimensão dois, gerada por uma reta que gira e se desloca em torno de um eixo.

O parafuso consiste de uma lâmina helicoidal posicionada em volta de um cilindro ou de um cone. Essa ideia tem inúmeras aplicações, como o mecanismo que muda a direção de um movimento de rotação, conforme ilustrado no lado direito da Figura 3.9.

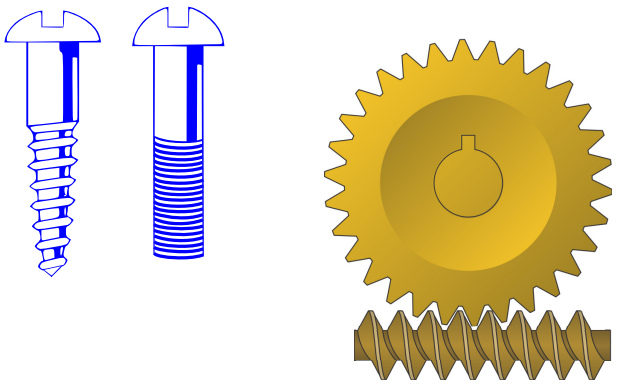


Figura 3.9

A abstração matemática da lâmina helicoidal do parafuso se traduz em uma figura denominada “helicóide”. Uma forma de construir essa figura é considerarmos duas retas perpendiculares em um ponto P. Mantemos a primeira reta fixada. A segunda reta gira em torno da primeira ao mesmo tempo que o ponto P se desloca ao longo dela. Confira a Figura 3.10. A forma do helicóide depende de como são feitos os movimentos. Uma possibilidade é vista na Figura 3.11, em que os movimentos são uniformes.

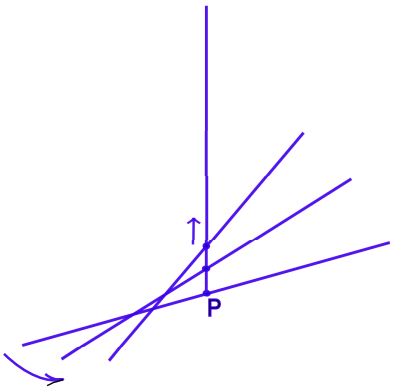


Figura 3.10

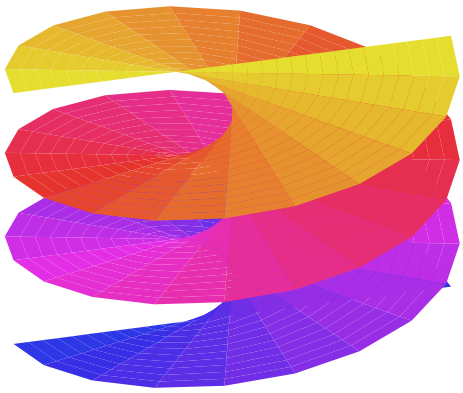


Figura 3.11

O helicóide abstrato, conforme descrito acima, é uma figura não limitada. As retas não são limitadas, de modo que o ponto P se move ao longo de toda a reta vertical, e a reta que se move desenha uma figura que pode ser vista como um plano "entortado". Para poder representar o helicóide através de um desenho as retas, na Figura 3.10, foram substituídas por segmentos, e obtivemos uma figura limitada, como está desenhado em 3.11.

O helicóide tem muitas aplicações. Uma das mais famosas é seu uso como transportador de líquidos, sementes ou outros produtos. Essa ideia é muito antiga, e foi estudada por Arquimedes com a função de elevar água para irrigação de lavouras. Na Figura 3.12 vemos um desenho indicando essa ideia. Na Figura 3.13 vemos um artefato moderno usado em uma estação de bombeamento.

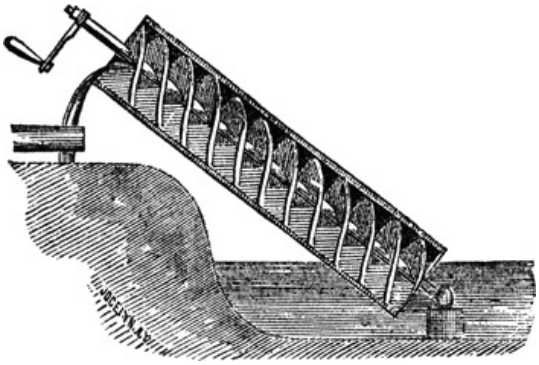


Figura 3.12



Figura 3.13

Outro aspecto da Mecânica que nos chama a atenção é o uso de sistemas articulados para obter um determinado tipo de movimento. Esses sistemas consistem de peças que se articulam através de pivôs, e seu movimento é estudado com as leis da Geometria. O tipo mais simples de sistema articulado é a alavanca, e uma aplicação bastante simples é o alicate (confira a Figura 3.14). Por outro lado, vemos na Figura 3.15 o esquema de um portão basculante, um sistema articulado um pouco mais complexo.

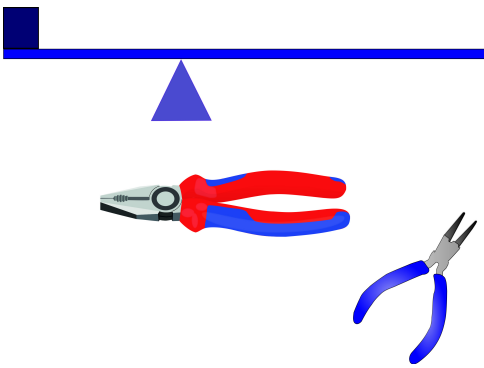


Figura 3.14

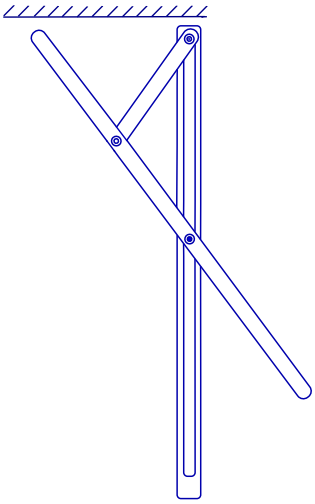


Figura 3.15

3.4 Artes

A Geometria e a arte têm uma relação muito antiga. Já observamos como os conceitos geométricos foram utilizados para expressar a beleza em todos os tempos. Esses elementos incluem o uso da simetria, das proporções técnicas de projeções, etc.

Muitos artistas utilizaram ou desenvolveram elementos geométricos em suas obras artísticas. Para incluir uma breve lista neste texto, citamos Paolo Uccello, Piero della Franscesca, Leonardo da Vinci, Albrecht Dürer, Maurits C. Escher, Salvador Dali e John Robinson.

Observamos que investigações geométricas em certas áreas do conhecimento matemático, tais como classificação de ladrilhamentos do plano, produzem belos desenhos, e vemos um exemplo na Figura 3.16. Com a facilidade oferecida pelos computadores podemos também apreciar desenhos produzidos por programas originalmente construídos para a investigação de fenômenos, como dinâmica caótica, fractais, etc. Um desenho exótico de fractal é mostrado na Figura 3.17.

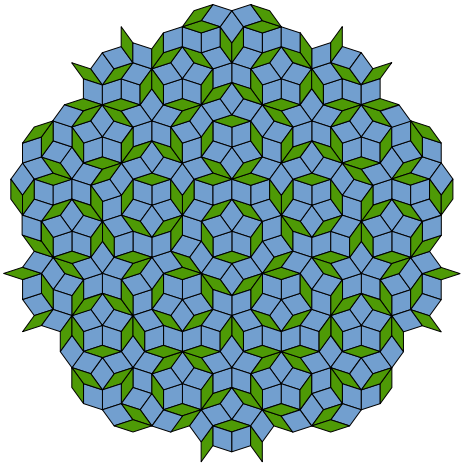


Figura 3.16

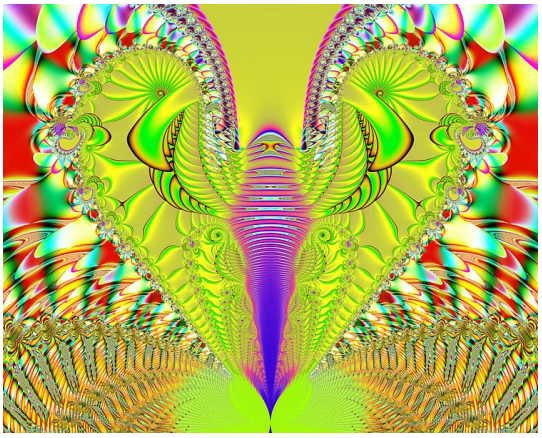


Figura 3.17

Encerramos esta pequena seção sobre a relação entre a Arte e a Geometria brindando o leitor com uma pintura de Nicholas Roerich, artista russo (Figura 3.18). Em sua obra ele faz uso frequente de traços geométricos como forma de expressar uma beleza cheia de significados.

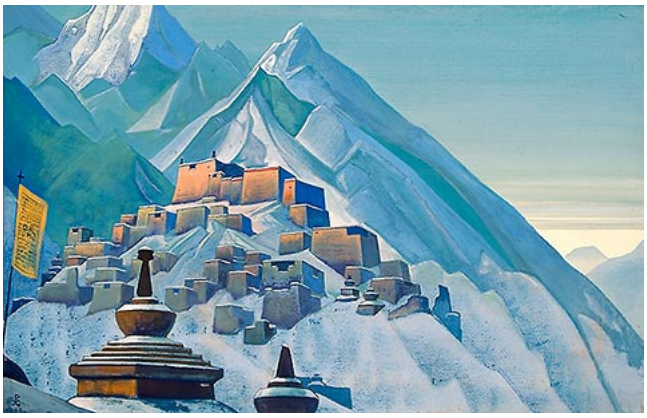


Figura 3.18. Tibet. Pintura de Nicholas Roerich de 1933.

3.5 Ciências Naturais

A Geometria, como ciência, investiga as abstrações das formas. Por isso ela tem interesses comuns com todas as ciências naturais que também têm a forma como objeto de estudo. A parceira mais antiga da Geometria é a Astronomia: pode-se dizer que, praticamente, nasceram juntas. Da Teoria de Semelhança de triângulos surgiu a Trigonometria, de grande interesse dos astrônomos como instrumento para localização dos corpos celestes e descrição de seus movimentos. A Geometria divide com a Física muitos interesses, dos quais se destaca o estudo da forma do espaço. Dessa parceria se desenvolveu a Geometria Riemanniana, particularmente os espaços semi-riemannianos, conectados com a Teoria da Relatividade Geral. Vemos, de modo geral, que a Geometria e a Física são ciências irmãs, e muitos estudiosos eram físicos e matemáticos, como Arquimedes e Isaac Newton, para citar apenas dois deles. Esses intelectuais tiveram papel proeminente no desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral, técnica fundamental para o estudo das formas e suas medidas e para prover modelos para a Física e outras ciências.

A Figura 3.19 ilustra a ideia de que o sistema de coordenadas é distorcido pela presença de um corpo no modelo matemático de espaço-tempo no contexto relativístico.

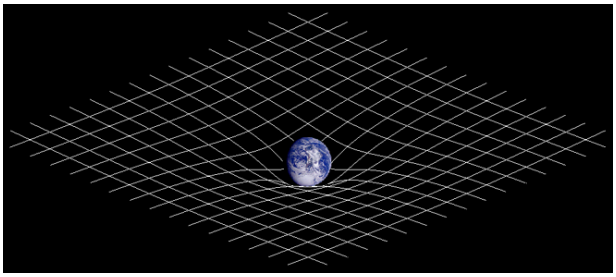


Figura 3.19

A Biologia também interage com a Geometria, e uma de suas áreas de estudo é a *morfogênese*, conjunto de leis que descrevem a forma e a estrutura de organismos e seus tecidos. Na Figura 3.20 vemos uma fotografia de uma concha do *nautilus*, cortada ao meio, mostrando seu formato espiralado.



Figura 3.20

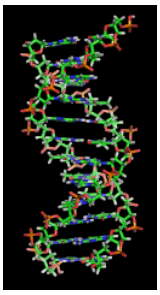


Figura 3.21

Sem dúvida uma das formas geométricas mais características da Biologia é a dupla hélice do DNA. Vemos uma representação na Figura 3.21. Essa forma é consequência da estrutura molecular do DNA, e confere estabilidade e compactação das informações químicas em um espaço relativamente reduzido.

3.6 Química

Uma das vertentes da Química é a que estuda a forma no microcosmos, sendo assim ciência irmã da Geometria. Nesse estudo um dos aspectos mais interessantes é o uso de poliedros e outros objetos geométricos para modelar moléculas. Fazemos aqui um pequeno recorte de [24].

Em 1865 o químico alemão Friedrich A. Kekulé propôs a forma hexagonal do benzeno. Essa geometria (isto é, a forma hexagonal com que átomos se organizam no espaço), é característica de uma vasta classe de moléculas. Na Figura 3.22 vemos alguns exemplos.

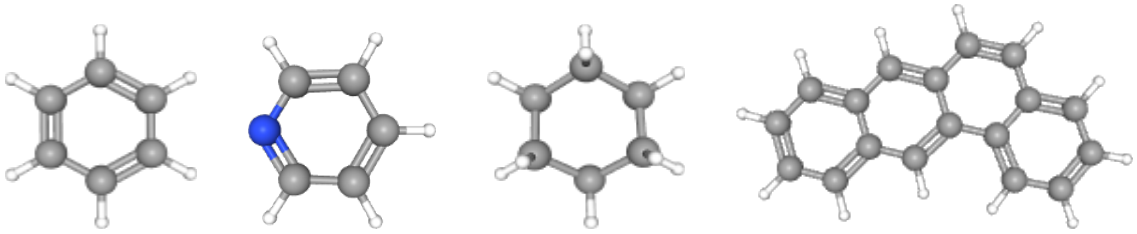


Figura 3.22. Modelos hexagonais de moléculas. Da esquerda para a direita: benzeno C_6H_6; pyridine C_5H_5N; ciclohexano C_6H_{12}; bezantraceno $C_{18}H_{12}$.

Quanto aos poliedros, sem dúvida os mais conhecidos são os denominados sólidos de Platão. Nos perguntamos se eles também são modelos de moléculas. Primeiro examinemos suas estruturas e organização combinatória na Figura 3.23.

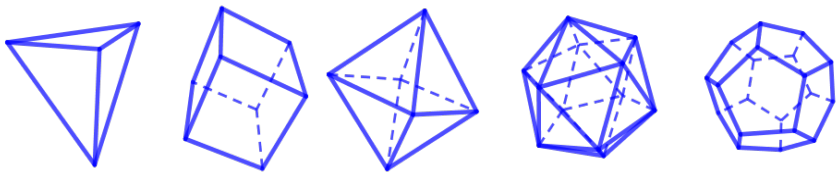


Figura 3.23. Os sólidos de Platão. Da esquerda para a direita: o tetraedro, o hexaedro, o octaedro, o icosaedro e o dodecaedro (todos regulares).

O tetraedro é modelo de muitas moléculas, podendo ter ou não um átomo em seu centro. Exemplos são o metano e o tetrafósforo. O cubane por sua vez é modelado pelo hexaedro e o dodecaedrano pelo dodecaedro, sendo ambos compostos sintetizados em laboratório. Nesses poliedros os vértices têm valência três, podendo assim serem modelos de hidrocarbonetos. Confira a Figura 3.24. O tetraedrane, cuja fórmula seria C_4H_4, é um hidrocarboneto platônico hipotético, pois ainda não foi sintetizado de forma isolada.

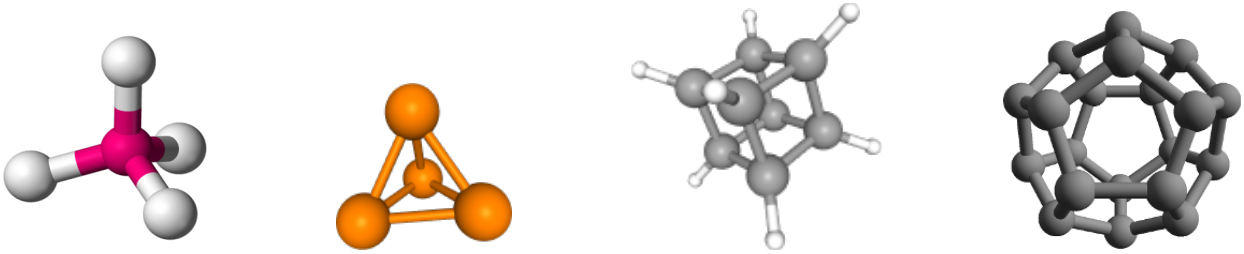


Figura 3.24. Da esquerda para a direita: representação da molécula do gás metano CH_4; do tetrafósforo P_4; do cubane C_8H_8; do dodecaedrano $C_{20}H_{20}$.

Cálculos teóricos indicam que é improvável a existência de um hidrocarboneto que tenha o octaedro como modelo. Quanto ao icosaedro, seus vértices têm valência cinco, de modo que não

podem ser ocupados por átomos de carbono. Mas existem caixas de boro que têm como modelo o octaedro e o icosaedro. Vemos exemplos na Figura 3.25.

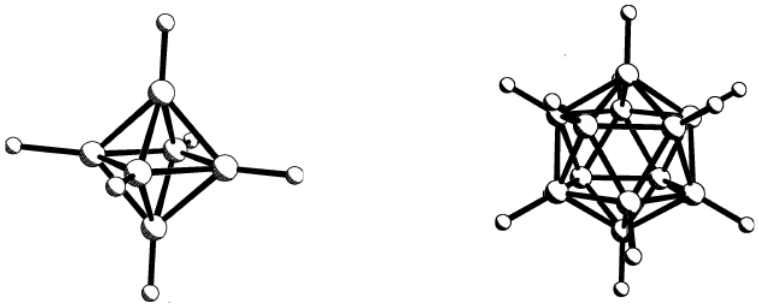


Figura 3.25. Da esquerda para a direita, representações das moléculas dos ânions $[B_6H_6]^{2-}$ e $[B_{12}H_{12}]^{2-}$, exemplos de "caixas de boro".

Para encerrar esta seção apresentamos, na Figura 3.26, a molécula kekulene $C_{48}H_{24}$: 12 anéis benzêmicos formando, por sua vez, um anel hexagonal. O kekulene, assim chamado em honra a Friedrich A. Kekulé, foi sintetizado em 1978. Ao kekulene se seguem o septulene, o octulene, quem sabe até qual. Vemos também na Figura 3.27 o esquema geométrico da molécula C_{60}, um dos mais conhecidos fulerenos.

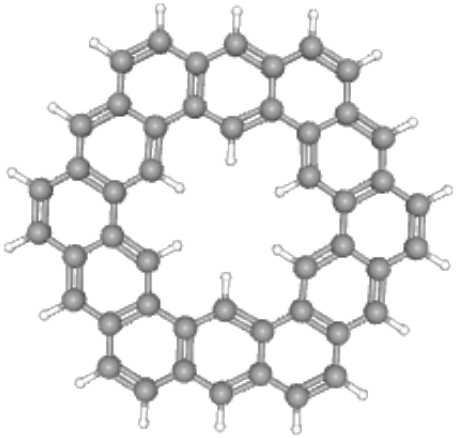


Figura 3.26

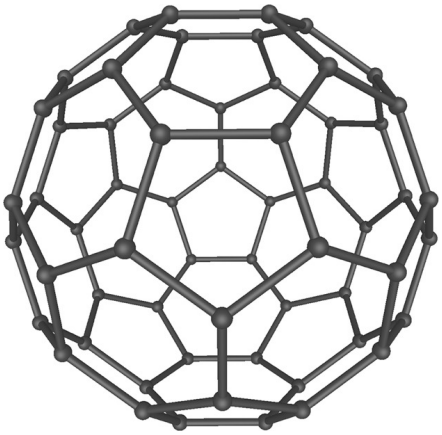


Figura 3.27

3.7 Problemas

Problema 3.7.1. Na Figura 3.2 temos um triângulo com lados de medidas 3, 4 e 5. A afirmação do pedreiro, conforme descrito no texto que antecede a figura, é que os lados de medidas 3 e 4 são perpendiculares. Isso é realmente verdadeiro? Qual é a explicação? Existem outros ternos de números inteiros com essa mesma propriedade?

Problema 3.7.2. Um pedreiro precisa construir duas paredes perpendiculares, mas o local é muito pequeno e não é possível usar o método do triângulo com lados de medidas 3, 4 e 5. Como ele pode se certificar da perpendicularidade das paredes?

Problema 3.7.3. Com o auxílio da foto da Figura 3.3 (e possivelmente pesquisando outras fontes) descreva os elementos geométricos utilizados por Oscar Niemeyer na composição arquitetônica do prédio do Congresso Nacional do Brasil.

Problema 3.7.4. Utilize a grade da Figura 3.28 para desenhar um cubo através da projeção axonométrica. Descreva quais foram as dificuldades encontradas ou as informações que lhe faltam para que o desenho seja correto.

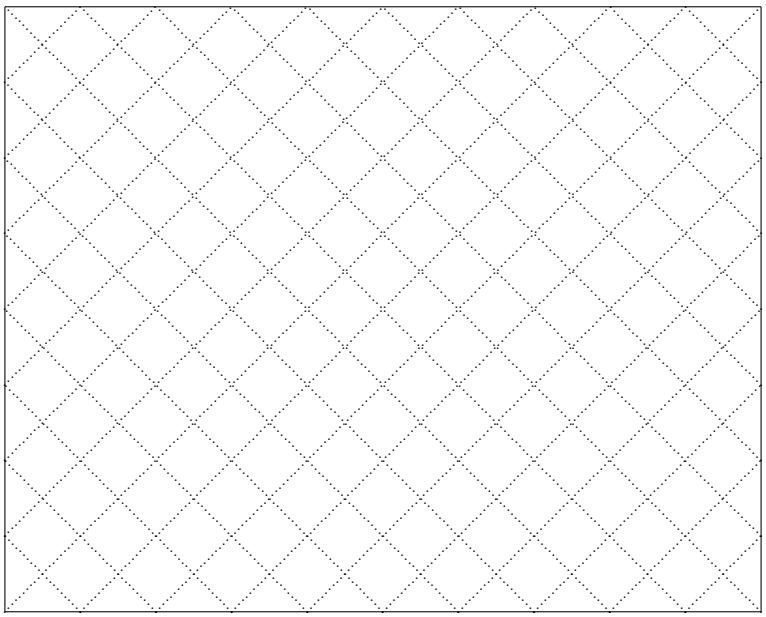


Figura 3.28. Desenhar um cubo usando projeção axonométrica.

Problema 3.7.5. Na Figura 3.29 vemos uma parte de um vitral da Catedral *Notre-Dame de Chartres*, construída entre 1193 and 1250 na cidade de Chartres, França. Identifique, descreva e faça um desenho esquemático com seus principais elementos geométricos.



Figura 3.29. Parte de um vitral da Catedral de Notre Dame de Chartres

Problema 3.7.6. Na Figura 3.30 vemos uma "triangulação" de uma semiesfera. Defina mais exatamente o que vem a ser isso. Imagine que você planeja construir um domo geodésico com a

triangulação representada nessa figura. Quais são as informações básicas que você necessita sobre essa estrutura, e como pode obtê-las? Por exemplo, pense em um estratagema que lhe permita decidir quantos triângulos, lados de triângulos e vértices existem. E quanto ao comprimento de cada lado?

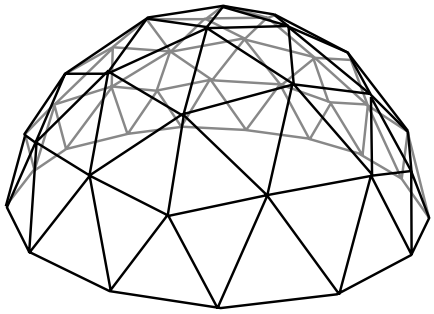


Figura 3.30. "Triangulação" de uma semiesfera

Problema 3.7.7. Vimos nas figuras 3.10 e 3.11 que o helicóide é o conjunto dos pontos do espaço percorridos por uma reta que se movimenta de uma determinada forma, tendo outra reta como guia. Um conjunto de pontos do espaço chama-se *superfície regrada* se cada um de seus pontos está situado em uma reta que, por sua vez, está inteiramente contida no conjunto. Como vimos, o helicóide é uma superfície regrada. Encontre outras superfícies regradas. Defina-as cuidadosamente e as desenhe. Considere também como guia circunferências, elipses, etc.

Problema 3.7.8. A Figura 3.16, na página 30, é um desenho de um ladrilhamento de Penrose. Observe que existem apenas duas peças básicas, na forma de losangos. **a)** Distinga e desenhe algumas combinações interessantes desses losangos que façam parte do ladrilhamento. **b)** Observe que em certos pontos do ladrilhamento podemos ter uma visão de figuras espaciais. Estude essas figuras, desenhando-as separadamente. **c)** Observe se nesse ladrilhamento existe algum conjunto de peças que se repete, formando o ladrilhamento inteiro.

Problema 3.7.9. Estude o poliedro da Figura 3.27. Observe que suas faces são formadas por pentágonos e hexágonos regulares. Quantos existem de cada tipo? Quantos são os vétices e as arestas? Observe que esse poliedro é trivalente, isto é, em cada vértice concorrem três arestas.

3.8 Temas para investigação

Tema 3.8.1. Com referência ao Problema 3.7.9, existem outros fulerenos em forma de poliedro. São sempre trivalentes e formados por pentágonos e hexágonos. O menor deles é o C_{20}. Investigue esse poliedro.

Tema 3.8.2. O kekulene, mostrado na Figura 3.26, pertence a uma família maior, chamada circulene. Investigue a molécula seguinte, o septulene $C_{56}H_{28}$, formado por 14 hexágonos dispostos em um formato heptagonal. Essa é também uma molécula sintética, não encontrada na natureza. Usando um aplicativo de Geometria, faça um desenho das duas moléculas.

Tema 3.8.3. De grande interesse da morfogênese é a hipótese do *campo morfogenético*, proposto pelo cientista russo Alexandre G. Gourvitch. Informe-se sobre esse assunto.

3.9 Atividades para licenciandos e professores

Atividade 3.9.1. Imagine uma atividade para estudantes que permita que eles observem e descrevam elementos geométricos em obras de arte.

Atividade 3.9.2. Seus estudantes podem produzir um trabalho sobre as formas geométricas que são utilizadas em construções nas várias partes do mundo e diversas civilizações.

Parte II

Presença da Geometria na escola

Apresentação da Parte II

Nesta segunda parte de nosso curso apresentamos um recorte da ação da escola naqueles aspectos em que ela procura organizar as noções geométricas espontâneas dos estudantes tendo em vista a construção de conhecimentos sociais e científicos, assim como de habilidades das quais eles necessitam para uma participação criativa e autônoma na vida em sociedade.

Descrevemos alguns experimentos em Geometria que podem fazer parte do ensino básico. As atividades pressupõem uma interferência mínima do professor, e constituem uma oportunidade de observação do conhecimento espontâneo dos estudantes. Fazem-se presentes também experimentos em que o professor direciona os primeiros passos do estudante para a construção de uma ciência da Geometria, estimulando a iniciativa, a criatividade, o espírito de investigação.

Nosso referencial teórico é o da metodologia da investigação, segundo a qual nosso aprendizado ocorre quando temos uma participação efetiva na construção de nosso próprio conhecimento. Tentamos assim cumprir o desafio de apresentar os aspectos mais importantes do conhecimento geométrico básico sob um ponto de vista de atividades investigativas.

Toda investigação é sempre realizada sob um determinado sistema de conhecimento. Nessa parte de nosso texto acompanhamos o sistema normalmente adotado no ensino básico em nossas escolas e que estão de acordo, em média, com o aparato pensante dos estudantes dessa idade. Assim consideramos válidas as investigações realizadas através de métodos elementares, como régua e compasso, dobraduras de folhas de papel, dissecções de uma figura em outras menores, ajuntamento de figuras, transporte de uma figura sobre outra. Consideramos também válidas as propriedades obtidas com a ajuda das mais simples manipulações algébricas.

Organizamos nossa exposição em quatro temas: investigações geométricas iniciais, início da construção da Geometria como Ciência, construindo demonstrações, e investigações sobre sólidos. Procuramos, com essa forma de apresentação, acompanhar as etapas de amadurecimento de um estudante do ensino básico e proporcionar ao licenciando uma possível reconstrução de sua experiência em Geometria.

Como este é um texto organizado para cursos de formação de professores de Matemática da escola básica, convém observar que não repetimos aqui o material de Geometria que costuma ser abordado na escola. Esses assuntos são objeto de muitos livros. O que fazemos, nesta Parte II de nosso texto, é considerar o conhecimento geométrico sob um ponto de vista que, sob nossa ótica, falta na formação tradicional do professor.

Bons experimentos e investigações geométricas para todos nós!

Capítulo 4

Investigações geométricas iniciais

4.1 Introdução

Estudamos, neste capítulo, alguns experimentos com o objetivo de nos proporcionar uma oportunidade de refletir sobre o ensino da Geometria em nossas escolas. Sugerimos que esses experimentos sejam imaginados como atividades exploratório-investigativas a serem aplicadas em sala de aula. Uma possibilidade é o professor apresentar a atividade à classe e, inicialmente, delimitar sua ajuda à organização e à compreensão da atividade. Uma forma do professor participar da atividade é usar o método da *interrogação*, conforme proposto em [4], pág. 6. O professor pergunta: o que é isso? por que você fez isso? Esse método permite ao professor conhecer seus estudantes, e esses, por sua vez, percebem o que o professor acha que é importante.

Assim, pelo menos nos experimentos iniciais, o raciocínio dos estudantes não deve ser direcionado. Deixando-os à vontade, eles mostrarão sua criatividade e encontrarão seus próprios caminhos para justificar suas soluções.

Um dos objetivos da escola é o de contribuir para a organização do conhecimento espontâneo e, aos poucos, dirigir o trabalho dos estudantes para a construção do conhecimento social e científico. Cada experimento se destina a estudantes com um determinado nível de conhecimento e de amadurecimento psíquico, e deve se constituir em um desafio para eles.

Os experimentos deste capítulo se inserem, a *grosso modo*, nos dois primeiros níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico, conforme proposto por Dina van Hiele-Geldof e Pierre van Hiele (confira [4], pág. 2). O primeiro nível é o do reconhecimento e visualização dos objetos geométricos. As atividades desse nível consistem em observar os objetos, comparar uns com os outros por suas propriedades globais, dar-lhes nomes, descrevê-los com palavras e desenhos, classificar e construir objetos similares usando papel, cola, etc. As atividades desse nível se iniciam com objetos sólidos, e, posteriormente, com representações de objetos planos. O segundo nível é o da análise, em que os estudantes observam os componentes dos objetos, medindo-os e descrevendo-os, desenhando-os e construindo-os fisicamente com mais exatidão, e classificando-os de acordo com seus componentes.

Os outros níveis do modelo de ensino de Van Hiele serão considerados em capítulos posteriores. São eles: 3º) a dedução informal; 4º) a dedução; 5º) o rigor. Embora não seguimos estritamente o modelo referido, consideramos todos os níveis propostos nos diversos tomos deste livro.

4.2 Iniciando com sólidos geométricos

O professor (ou o laboratório de Matemática da escola) tem caixas com objetos comuns que inspiram diversas formas geométricas, como cubos, paralelepípedos, cilindros, esferas, etc. Ele sempre inicia o primeiro curso de Geometria das crianças dividindo a sala em grupos e propondo atividades com esses objetos.

O professor propõe às crianças que descrevam esses objetos usando suas próprias palavras e inventando nomes para eles. Pede-lhes que agrupem objetos que têm alguma relação entre si, e descrevam o que têm em comum e o que têm de diferente de outros objetos. Solicita-lhes que desenhem esses objetos e que construam, eles mesmos, representações usando arame, papel, canudos interligados com fio ou cola, etc.



Figura 4.1

Na construção de objetos geométricos o professor propõe técnicas simples, de modo que os estudantes não percam muito tempo nesse trabalho, e não seja necessária muita elaboração. Vemos algumas construções simples nas Figuras 4.2 e 4.3. Na primeira temos uma pirâmide de base quadrada construída com papel cartolina por estudantes do curso de licenciatura em Matemática da UFSCar. Pode-se ver no interior desse poliedro um triângulo ilustrando sua altura. Na segunda figura temos poliedros simples feitos de canudos e varetas. Havendo possibilidade, figuras geométricas confeccionadas de metal, madeira, plástico ou isopor podem ser adquiridas em lojas especializadas. Vemos na Figura 4.4 uma esfera de plástico e uma pirâmide de base quadrada feita de metal.

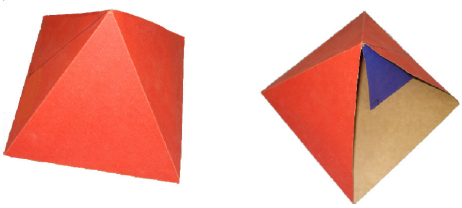


Figura 4.2

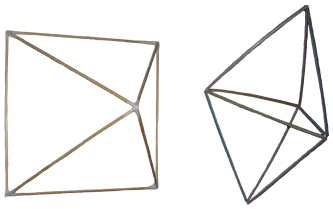


Figura 4.3



Figura 4.4

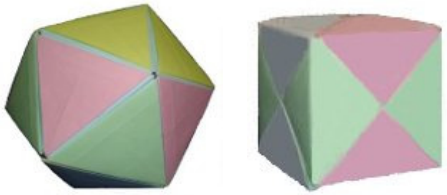


Figura 4.5

Eventualmente, e tendo condições favoráveis, o professor pode estimular as crianças a realizarem construções mais elaboradas de objetos geométricos que possam servir para exposição ou

para compor o material do laboratório de Matemática da escola. Na Figura 4.5 vemos um icosaedro e um cubo construídos com dobradura de papel pela Profa. Marlusa Benedetti da Rosa (CAp-UFRGS). No texto [30] ela ensina como fazer esses poliedros. Nas Figuras 4.6 e 4.7 vemos duas versões caprichadas do icosaedro truncado feitas por um estudante da disciplina de Geometria Espacial do curso de Licenciatura em Matemática da UFSCar.



Figura 4.6

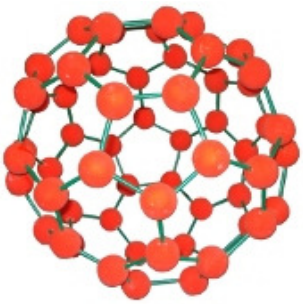


Figura 4.7

Essas construções são representativas dos objetos, e traduzem propriedades essenciais, como lados de mesma medida, ângulos retos, etc. A confecção e manipulação desses objetos constituem para os estudantes um auxílio para a construção de abstrações mentais de objetos geométricos com precisão crescente.

Os objetos geométricos podem ser estudados mediante a observação das relações recíprocas entre seus elementos e os de outros objetos. Mas para a Geometria é também muito importante o estudo das grandezas que possam ser associadas aos objetos, como comprimento, área, volume e medida de ângulos. Dessa forma são imprescindíveis as atividades que relacionam os números aos objetos. A caixa do professor da Figura 4.1 contém também instrumentos que permitem obter medidas de objetos geométricos. Confira ilustração na Figura 4.8.

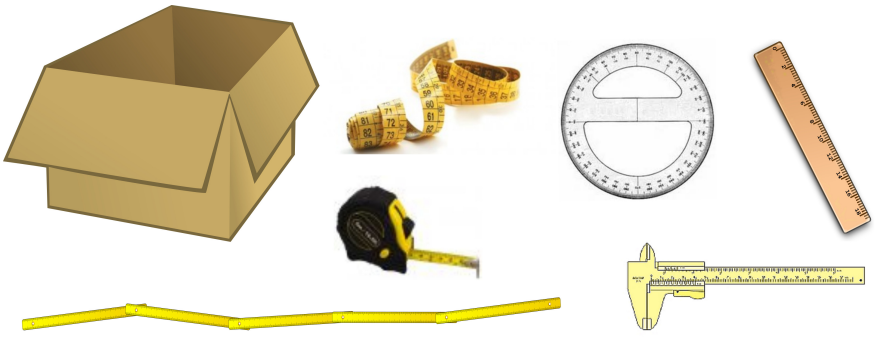


Figura 4.8. Alguns instrumentos de medida de objetos geométricos.

O professor deve ainda estar atento a um tipo de exploração dos sólidos que dá origem à Geometria Combinatória. Consiste em estudar as relações que podem ser obtidas pela contagem de elementos das figuras. Esse estudo nos leva a importantes propriedades, como a fórmula de Leonhard P. Euler, que relaciona a quantidade de vértices, arestas e faces de poliedros e grafos do plano. Neste texto iniciamos o estudo da Geometria Combinatória com vários problemas apresentados na Seção 4.6.

4.3 Percepção de figuras geométricas planas

Com nossa visão física normal enxergamos objetos tridimensionais. Os objetos zero, uni e bidimensionais são abstrações de nossa mente. Eles, mesmo se existissem, não seriam vistos por nós. Seriam invisíveis. O nosso mecanismo de visão decompõe estrategicamente os sólidos em suas partes mais simples, e essas são abstraídas como objetos geométricos de dimensões baixas, que são mais fáceis de serem processados logicamente. Por isso os objetos bidimensionais são primeiro observados como as "capas" dos sólidos, os unidimensionais como os bordos ou arestas dos objetos bidimensionais, e os pontos como as quinas ou dobras das arestas.

A escola, ao trabalhar com a Geometria, também adota essa redução. Por ser mais simples do ponto de vista da lógica, a *Geometria Plana* é construída primeiro. Com ela se estudam as propriedades das retas, suas interseções, os pontos, e as figuras planas formadas por segmentos de reta e outras linhas. O estudo mais formal da *Geometria Espacial* é deixado para uma etapa posterior devido às dificuldades que apresenta.

Entretanto constatamos que a passagem da observação dos sólidos para a abstração de figuras do plano é uma etapa complicada para as crianças e deve ter a maior atenção possível da escola. Em atividades em sala de aula, as figuras planas podem ser "destacadas" dos sólidos e representadas com o uso de desenhos, geoplanos, dobradura ou recortes de papel, objetos concretos feitos de varetas, etc. Assim a criança começa a adquirir familiaridade com triângulos, quadrados, retângulos, círculos, segmentos, retas, pontos, etc. As convenções conexas a esses campos conceituais, como nomes e formas de representação, precisam ser cuidadosamente trabalhadas pelo professor.

Experimentos com planificações de sólidos geométricos são muito interessantes para desenvolver a abstração de formas tridimensionais e a visão espacial intuitiva, e podem servir de ponte entre a geometria espacial e a geometria do plano.

O professor planeja uma aula para estudo de planificações de poliedros. Solicita dos estudantes que tragam para a aula caixinhas de papel usadas para acondicionar alimentos ou remédios em forma de cubos, paralelepípedos, prismas, cilindros, etc. Providencia também papel, régua, tesouras, cola, etc.

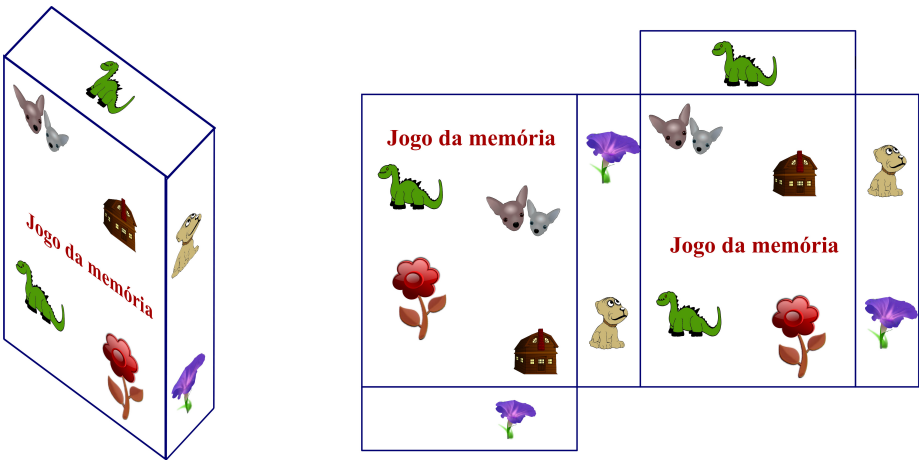


Figura 4.9

Na aula essas caixinhas são desdobradas formando regiões poligonais planas (exemplo na Figura 4.9). Esses formatos (depois que são retiradas as abas que servem para colagem) são deno-

minados "planificações". Após o estudo dessas figuras o professor propõe aos estudantes a ação inversa: o planejamento da construção de uma caixa de determinado formato começando com a construção de sua planificação.

Em uma segunda atividade com planificações de poliedros, o professor propõe aos estudantes um trabalho com um sabor mais investigativo. Dá exemplo de uma planificação do cubo (como o da Figura 4.10) e solicita dos estudantes que descubram outras planificações. Depois apresenta problemas correlatos (por exemplo, Problemas 4.5.3 e 4.5.6).

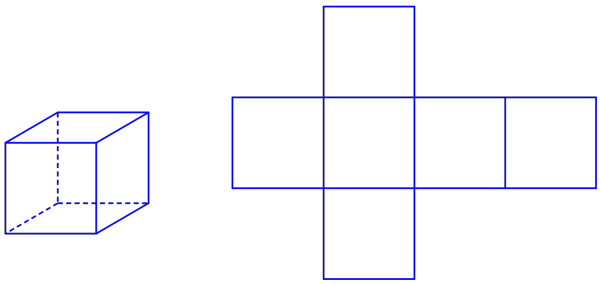


Figura 4.10. Um exemplo de planificação do cubo.

4.4 Investigações sobre objetos geométricos planos

Apresentamos uma lista de ideias de experimentos geométricos que podem ser preparados para aplicação em sala de aula. Alguns desses experimentos foram aplicados por professores que os publicaram em revistas ou livros. Em todos eles supomos que os estudantes ainda estão iniciando seus estudos em Geometria, de modo que não se destinam, numa primeira abordagem, a aprofundamentos.

4.4.1 Construindo triângulos

Nossa primeira experiência é uma proposta de atividade para percepção da desigualdade triangular.

O professor leva à sala de aula um pacote de canudos, entrega um para cada estudante, e lhes pede que cortem cada canudo em três partes. Explica-lhes que o tamanho dessas partes precisa variar, assim cada um deve fazer os cortes de forma a obter pedaços de tamanhos variados. Em seguida pede que cada um faça um triângulo com as três partes de um canudo. Depois de constatar que esse triângulo pode ser construído ou não, pede para os estudantes investigarem como o canudo pode ser cortado para que um triângulo seja formado.

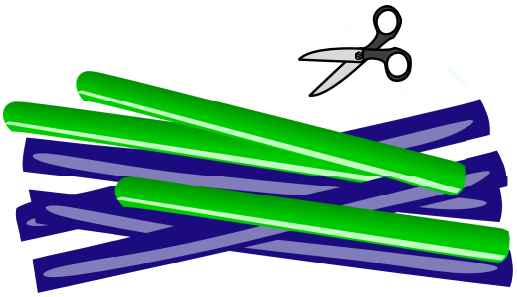


Figura 4.11

Os estudantes podem também investigar como os canudos devem ser cortados para se obter: *i)* um triângulo com todos os lados de mesma medida; *ii)* um triângulo com dois lados de mesma medida e o terceiro diferente; *iii)* um triângulo com um ângulo maior do que o ângulo reto.

4.4.2 Investigando losangos e paralelogramos

O professor constrói com os estudantes quadrados e retângulos com varetas de modo que a

união das varetas permita seu giro, possibilitando a deformação dos quadrados em losangos e dos retângulos em paralelogramos. Sugere então aos estudantes que investiguem quais propriedades dos losangos e paralelogramos se conservam mesmo depois de deformados, e quais propriedades não se conservam.

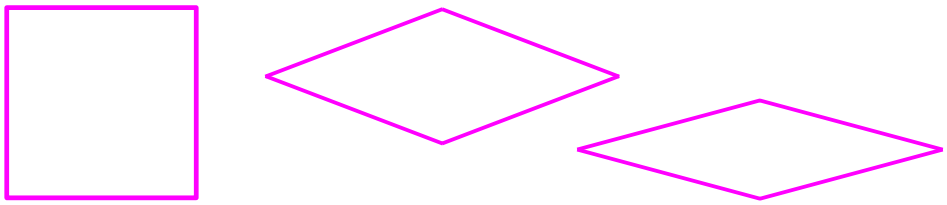


Figura 4.12. Um quadrado e duas deformações como losangos.

Pode-se estudar também deformações de outros polígonos, quais propriedades se conservam e quais não se conservam.

Vemos em [4], página 3, a ideia de usar um reticulado de dois feixes de retas paralelas equidistantes para que os estudantes se familiarizem com paralelogramos. É uma oportunidade para o entendimento do que são lados opostos, lados adjacentes, ângulos opostos, ângulos adjacentes, e paralelismo de lados opostos. Esse estudo pode ser aproveitado para a compreensão do significado das seguintes frases: "um paralelogramo tem dois pares de lados opostos e dois pares de ângulos opostos"; e "em um paralogramo lados opostos são paralelos". A primeira frase vale, naturalmente, para qualquer quadrilátero.

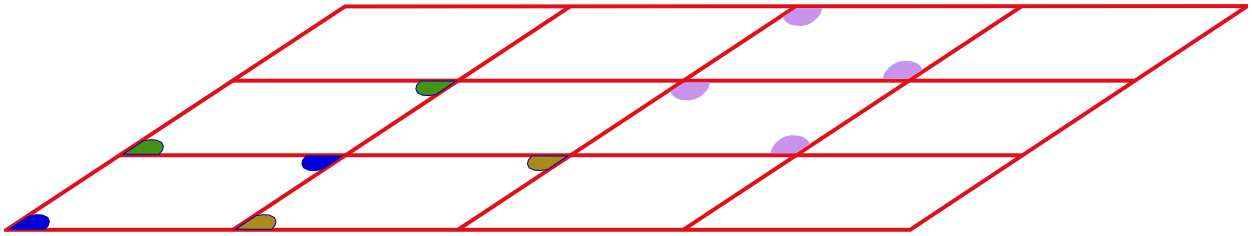


Figura 4.13. Um reticulado de paralelogramos para investigar suas propriedades.

As seguintes questões podem ser trabalhadas: como deve ser o reticulado para que os paralelogramos sejam losangos? retângulos? quadrados?

4.4.3 Perímetro e área de quadrados

Uma professora apresentou a seguinte atividade de investigação a estudantes de uma classe da 7ª. série ([11], adaptado):

O quadrado à direita tem lado com 4 cm. Por coincidência sua área é igual ao seu perímetro. Investigue se isso acontece só para esse quadrado, e quais são as outras situações que podem ocorrer.

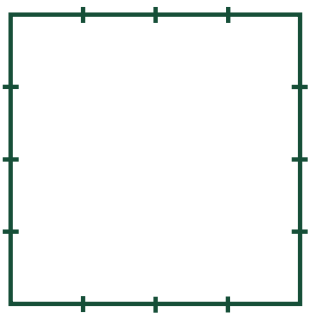


Figura 4.14

Os estudantes calcularam a área e o perímetro de quadrados com lados com valores inteiros de 1 a 10, e concluíram que: *i)* a coincidência só ocorre quando o lado mede 4 cm; *ii)* a área é menor do que o perímetro quando o lado mede menos do que 4 cm; *iii)* a área é maior do que o perímetro quando o lado mede mais do que 4 cm. Um dos estudantes usou álgebra para estabelecer essas conclusões. Acompanhando o Problema 4.5.12 e seus prosseguimentos você pode explorar mais essas ideias.

4.4.4 Problema do sitiante

Alguns experimentos iniciais podem ser necessários. Constatamos que uma ideia recorrente em estudantes é acreditar, sem muita reflexão, que se duas figuras planas têm o mesmo perímetro então têm a mesma área. Alguns experimentos simples podem ajudar.

Emendando as duas pontas de um pedaço de barbante podemos construir figuras de mesmo perímetro mas de formatos diferentes e de modo que se possa ver facilmente que não têm a mesma área.

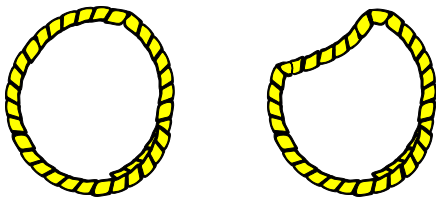


Figura 4.15

Outra ideia é construir polígonos de mesmo perímetro e com áreas diferentes. Para isso podemos usar um geoplano ou desenhos em uma folha de papel.

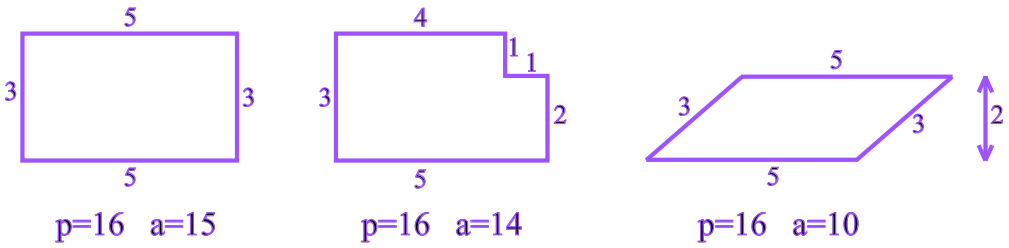


Figura 4.16. Polígonos de mesmo perímetro e com áreas diferentes.

Com essa experiência prévia os estudantes podem investigar o chamado "problema do sitiante".

Um sitiante dispõe de um rolo de tela suficiente para fazer um cercado de base retangular com 100 m de perímetro, com o qual ele deseja proteger das galinhas sua plantação de alface. Quais devem ser as dimensões da base do cercado para que sua área seja máxima?

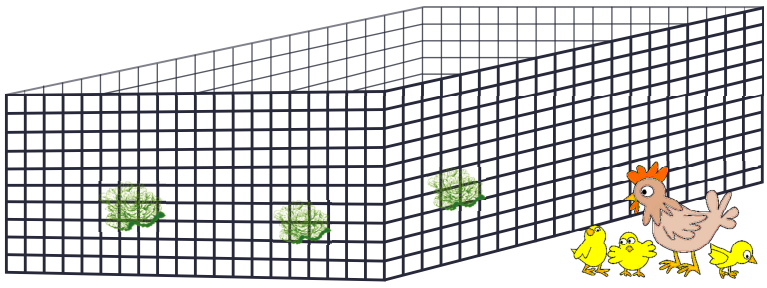


Figura 4.17

Observamos que essa atividade pode ser apresentada mesmo para estudantes que ainda não estejam familiarizados com o uso de recursos algébricos. Confira a Atividade 4.7.5, quase no final deste Capítulo. Os Problemas 4.5.13 e 6.7.20, assim como o Tema 6.8.3 complementam esse estudo.

4.4.5 Duplicação de áreas e volumes

O professor apresenta às crianças de sua sala de aula o desenho de um segmento (digamos com 3 cm) e lhes pede que desenhem um segmento com o dobro do comprimento. Depois dessa experiência, o professor lhes apresenta um quadrado (digamos com lado de 3 cm) e lhes pede que desenhem um quadrado com o dobro de área. Pode contextualizar, por exemplo, "esse quadrado representa um pasto que dá conta de alimentar exatamente três vacas. Desenhe um pasto quadrado que dá conta de alimentar exatamente seis vacas". O professor acompanha o trabalho dos estudante e vai dialogando com eles. Assim, se algum grupo desenhar um quadrado com lado de 6 cm, o professor pode colocar nesse quadrado quatro quadrados com lado de 3 cm, e perguntar: quantas vacas podem comer aqui?

O mesmo problema pode ser proposto a respeito de volume de cubos. As crianças podem ser desafiadas com outras figuras geométricas, como triângulos, círculos, etc.

4.4.6 Ladrilhando o plano

O professor leva à sala de aula cartões cortados em forma de polígonos regulares, variando a quantidade de lados e com muitos exemplares para cada tipo de polígono. Os polígonos de diferentes tipos têm lados de mesma medida, de modo que seja possível encaixá-los para formar ladrilhamentos no plano. Como tarefa os estudantes devem descobrir formas de ladrilhar um plano com esses polígonos, descrever esses ladrilhamentos e desenhá-los.

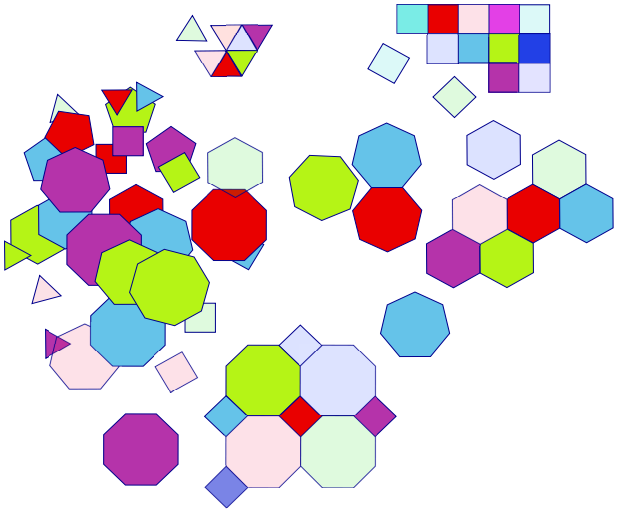


Figura 4.18

4.4.7 Dissecções

Um método muito útil para o estudo de figuras consiste em decompô-las em figuras menores convenientemente escolhidas, e depois fazer um rearranjo dessas partes. Com isso propriedades importantes podem ser observadas. Um exemplo bem simples é a configuração descrita na Figura 4.19, na qual um paralelogramo se transforma em um retângulo. Aqui é importante fazer a observação das propriedades que se conservam com o rearranjo das partes, de modo que se possa obter leis geométricas interessantes.

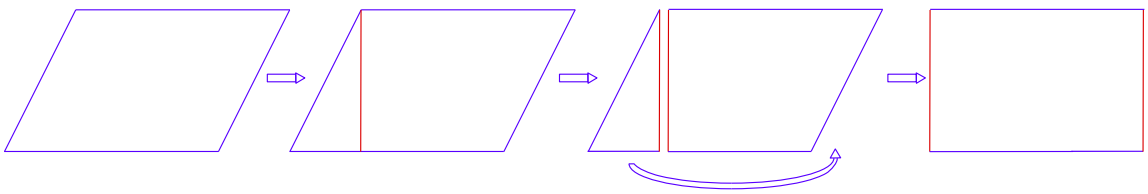


Figura 4.19. Estudo de propriedades mediante decomposição.

4.4.8 Um experimento geométrico mecânico

Vemos, na Figura 4.20, à esquerda, um instrumento mecânico construído para fazer desenhos em uma folha de papel, e, na mesma figura, à direita, vemos um esquema geométrico desse instrumento. Consiste de duas varetas rígidas e retas. Em uma das extremidades da vareta maior vemos um ponto B em que se coloca perpendicularmente uma ponta de grafite para fazer o desenho. Na outra extremidade da vareta maior vemos um ponto A em que se coloca perpendicularmente uma ponta seca para fixar o instrumento ou servir de guia em um movimento. Em uma das extremidades da vareta menor vemos um ponto O em que também se coloca uma ponta seca para fixar ou servir de guia. Os pontos A e O permitem movimento de rotação. Na outra extremidade da vareta menor vemos um ponto C em que se coloca um pino que permite movimento de rotação da vareta. Esse pino é ajustado em um ponto da vareta maior. Dessa forma as duas varetas ficam interligadas no ponto C mas podem rotacionar em torno desse ponto.

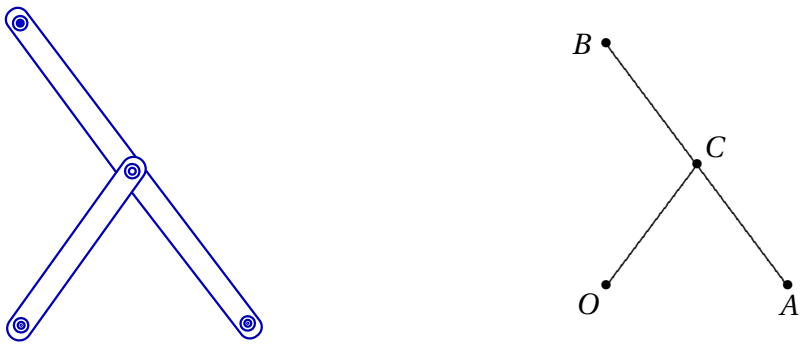


Figura 4.20. Um instrumento mecânico para desenhar no plano.

Particularmente nosso instrumento é construído com as seguintes propriedades (outras possibilidades podem ser exploradas): o comprimento de AB é o dobro do de OC, e C é o ponto médio de AB.

Vamos explorar o uso desse instrumento na seguinte situação: tomamos uma reta r e um ponto P nessa reta, como na Figura 4.21, à esquerda. Fixamos a ponta seca O do instrumento em P, e fazemos a ponta seca A deslizar sobre a reta r, como na Figura 4.21, à direita. O experimento consiste em determinar que tipo de desenho se obtém com o grafite em B. Deixamos essa descoberta para o leitor.

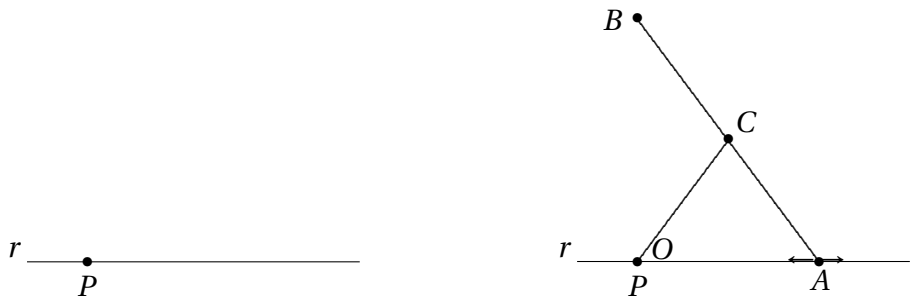


Figura 4.21. Uma experiência com um instrumento mecânico.

4.5 Problemas

Problema 4.5.1. Como deve ser um reticulado de dois feixes de retas paralelas e equidistantes para que os polígonos menores formados por ela sejam: (i) quadrados; (ii) retângulos não quadrados; (iii) losangos não quadrados; (iv) paralelogramos não losangos e nem retângulos.

Problema 4.5.2. Descreva o poliedro representado nas Figuras 4.6 e 4.7.

Problema 4.5.3. Dentro de um cubo fechado de papelão temos, em um vértice, uma formiguinha, e no vértice diagonalmente oposto, um grão de açúcar (pontos A e B do cubo da Figura 4.22). Qual o menor caminho que pode fazer a formiga para alcançar o grão de açúcar?

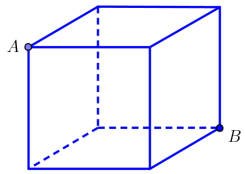


Figura 4.22. Cubo com grão de açúcar.

Problema 4.5.4. Em uma aula sobre planificações do cubo um grupo de estudantes produziu o desenho da Figura 4.23. Ao tentar montar o cubo, o grupo descobriu que isso não era possível. Muitas justificativas foram dadas pelos participantes e estão listadas nas opções abaixo. Assinale aquela que tem fundamento e, para cada uma das outras alternativas, por que ela foi descartada.

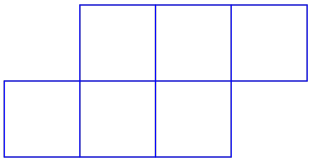


Figura 4.23. Tentativa de planificar um cubo.

i) Numa planificação do cubo não podem haver três quadrados alinhados.

ii) Numa planificação do cubo tem de haver quatro quadrados alinhados, devendo estar os dois quadrados restantes um de cada lado oposto dos quadrados alinhados.

iii) Numa planificação do cubo, quando três quadrados estão alinhados, não se pode ter os outros três também alinhados.

iv) Numa planificação do cubo não podem haver quatro quadrados formando um quadrado maior.

v) Se na planificação existirem quadrados com um único vizinho, eles têm que estar, aos pares, na mesma linha vertical ou horizontal.

Problema 4.5.5. Na Figura 4.24 vemos planificações de prismas. Como eles são? Como são as planificações de prismas oblíquos?

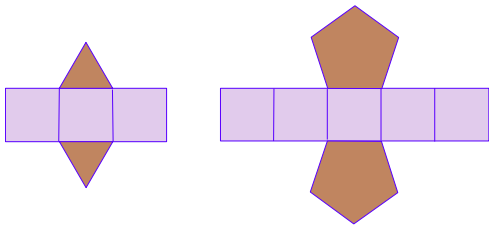


Figura 4.24

Problema 4.5.6. A professora [1] apresentou a uma classe de estudantes a Figura 4.25, com duas planificações do cubo. Solicitou que colorissem os quadrados da planificação da direita de modo que as duas planificações, quando dobradas, resultassem em dois cubos idênticos. **a)** Resolva você também o problema, e identifique as possíveis dificuldades que podem ter estudantes do ensino básico ao resolver a questão. **b)** Na Figura 4.26 o problema é o mesmo, mas as cores foram substituídas por letras. Qual é a diferença dos dois casos?

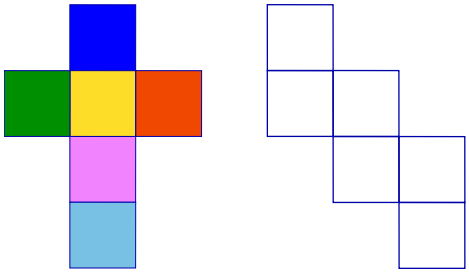


Figura 4.25

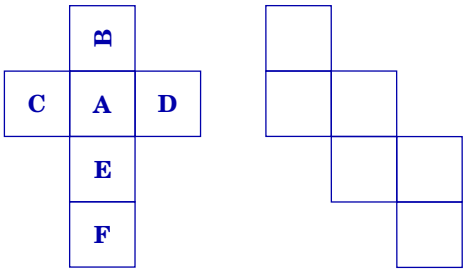


Figura 4.26

Problema 4.5.7. Em [34] vemos um exemplo de uma planificação que, quando dobrada de duas formas diferentes, gera dois poliedros diferentes. Confira isso. A planificação está na Figura 4.27. Em cada versão, ao dobrar, junte arestas nomeadas pela mesma letra.

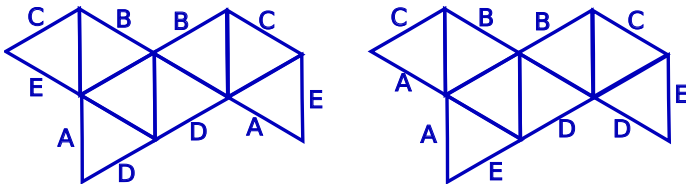


Figura 4.27

Problema 4.5.8. A Figura 4.28 mostra um cubo seccionado por um plano. Esse plano determina quatro segmentos em quatro faces do cubo. Como ficam esses quatro segmentos depois que planificamos o cubo? Escolha algumas planificações do cubo e desenhe nelas esses quatro segmentos.

Problema 4.5.9. Um estudante reparte um canudo em três partes de comprimentos a, b e c. Se $a = b + c$ então essas partes não podem formar um triângulo, certo? E se $a < b + c$?

Problema 4.5.10. Um estudante reparte um canudo de comprimento d em três partes de comprimentos a, b e c. Quais são as condições sobre essas grandezas para que possa ser construído com essas três partes um: **i)** triângulo equilátero; **ii)** triângulo isósceles não equilátero; **iii)** triângulo escaleno; **iv)** triângulo obtuso.

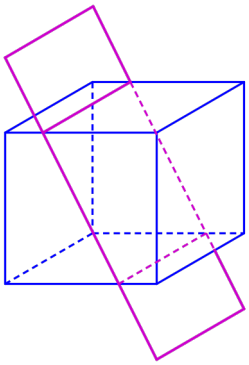


Figura 4.28. Um plano seccionando um cubo.

Problema 4.5.11. Como vimos, uma deformação de um polígono plano consiste em transformá-lo em outro polígono plano mudando seus ângulos mas não as medidas de seus lados. O triângulo é rígido, isto é, não é deformável. Usando desenhos constate que todo quadrilátero, seja ele convexo ou não, é deformável.

Problema 4.5.12. Na atividade sobre áreas e perímetros de quadrados desenvolvida na Subseção 4.4.3, utilize um modelo algébrico para estabelecer as conclusões (i), (ii) e (iii). Seu modelo algébrico funciona para quadrados com lados de medida inteiro positiva apenas ou para valores reais positivos quaisquer? Prossiga no estudo dessa questão com a Atividade 4.7.3 e o Tema 6.8.3.

Problema 4.5.13. Em uma investigação sobre o problema do sitiante, visto na Subseção 4.4.4, o professor sugeriu aos estudantes que considerassem também cercados em forma de triângulos equiláteros e de circunferência. Considerando-se cercados em forma de quadrado, triângulo equilátero, hexágono regular e de circunferência, sempre com o mesmo perímetro, qual tem a maior área?

Problema 4.5.14. Estude o seguinte mecanismo.

Vemos na Figura ao lado o esquema de um portão basculante. A barra AE representa a seção do portão, e a canaleta BF é fixa verticalmente e serve de guia para o pino D, fixado em AE. O pino B está fixo na barra BC e na parte superior da canaleta, e permite movimento de rotação. C é um pino fixado em AE e em BC e permite movimento de rotação. Temos $AC = BC = CD$. Investigue a seguinte questão: quando o portão se movimenta, existe o perigo dele bater no teto?

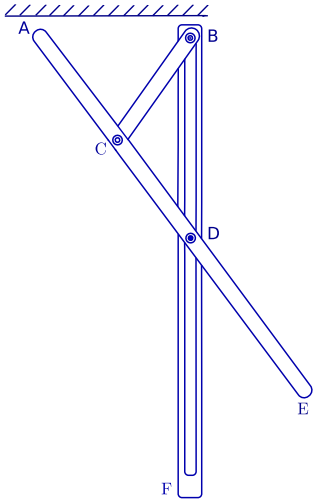


Figura 4.29

Problema 4.5.15. Vemos na Figura 4.30 um possível mecanismo para fazer desenhos numa folha de papel. O que será que ele consegue fazer? Quais propriedades deve ter o mecanismo para realizar isso?

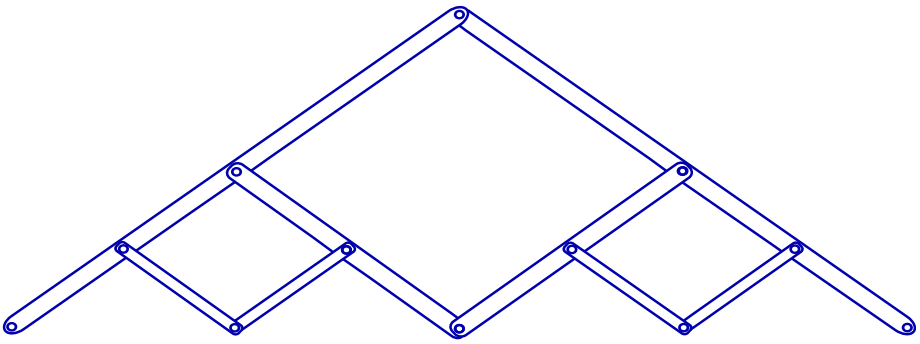


Figura 4.30

Problema 4.5.16. Alguém teria dito que “duas retas paralelas se encontram no infinito”. Como você interpreta essa frase?

4.6 Temas para investigação

Tema 4.6.1. Algumas planificações do cubo são, sob certo ponto de vista, as mesmas, embora tenham desenhos diferentes. Por exemplo, na Figura 4.31, as planificações (a) e (b) parecem ser essencialmente as mesmas. Por outro lado, (c) e (d) parecem ser as mesmas, mas diferentes das duas primeiras. Pense em uma forma de descrever o que seriam duas planificações que sejam essencialmente as mesmas. Podemos denominar de “equivalentes” duas planificações nessas condições. Descubra quantas planificações do cubo existem que não sejam equivalentes duas a duas.

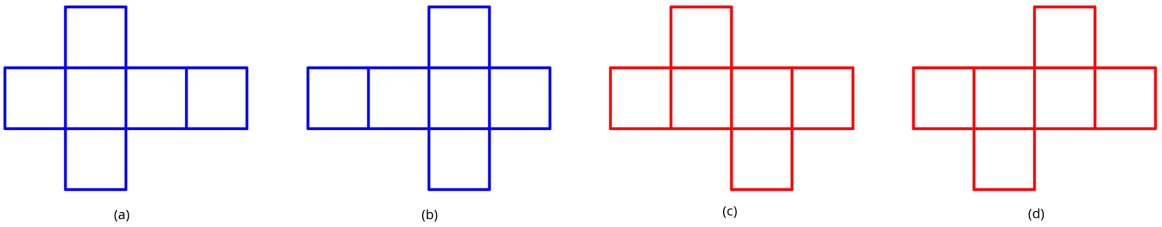


Figura 4.31. Exemplos de planificações do cubo.

Tema 4.6.2. Resolva o mesmo problema do tema 4.6.1 para o tetraedro e o octaedro.

Tema 4.6.3. Um *poliminó* é uma figura plana formada por quadrados iguais de modo que todo quadrado tem pelo menos um lado em comum com outro quadrado. Um n-poliminó é formado por n quadrados. Assim temos os monominós, os dominós, os trimonós, os tetraminós, os pentaminós, etc. Dois n-poliminós são considerados equivalentes se um puder ser sobreposto ao outro (por rotação ou reflexão). **a)** Desenhe todos os poliminós não equivalentes constituídos por 1, 2, 3, 4 ou 5 quadrados. **b)** Seja $P(n)$ a quantidade de n-poliminós não equivalentes. Ache $P(n)$ para alguns valores de n. **c)** Qual é o menor n para o qual existe um n-poliminó com buraco? **d)** Desenhe politriângulos e polihexágonos, formados, respectivamente, por triângulos equiláteros e hexágonos regulares.

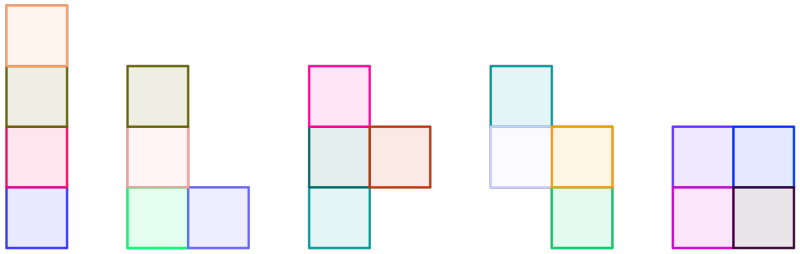


Figura 4.32. Tetraminós não equivalentes.

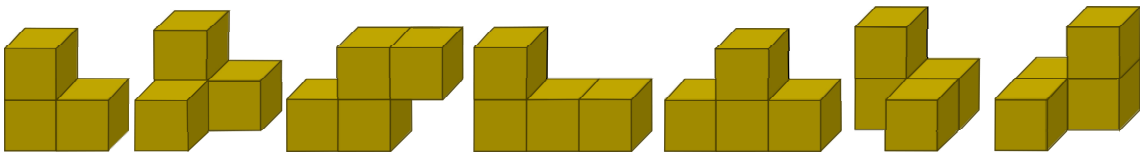


Figura 4.33. Cubos-soma não regulares com até quatro cubos.

Tema 4.6.4. Um *policubo* é uma figura espacial formada por cubos iguais de modo que pelo menos uma face de cada cubo coincide com uma face de outro cubo. Essas figuras são também denominadas *cubos-soma*. São ditos serem distintos se não puderem ser sobrepostos por rotações espaciais. Um cubo-soma se diz *regular* se for convexo, e *não-regular*, caso contrário.
a) Determine todos os cubos-soma constituídos por 1, 2, 3 ou 4 cubos. **b)** O poeta Piet Hein descobriu, em 1936, que combinando os cubos-soma não regulares de 3 e 4 cubos (confira Figura 4.33) é possível formar um cubo 3×3. Confira isso você também. **c)** Seja $C(n)$ a quantidade de cubos-soma que se pode construir (a menos de rotações) com n cubos. Calcule $C(n)$ para alguns valores de n. **d)** Os dois últimos cubos-soma da Figura 4.33 não são o mesmo por rotação? e por reflexão? **e)** Investigue outras propriedades dos cubos-soma.

Tema 4.6.5. Com relação à experiência da Subseção 4.4.6, descubra: (i) ladrilhamentos feitos com um único tipo de polígono regular; (ii) ladrilhamentos feitos combinando dois tipos de polígonos regulares.

Tema 4.6.6. Polígonos regulares também podem ser ladrilhados com outros polígonos regulares. Vemos na Figura 4.34 um ladrilhamento do dodecágono. Descubra mais polígonos regulares que podem ser ladrilhados com outros polígonos regulares.

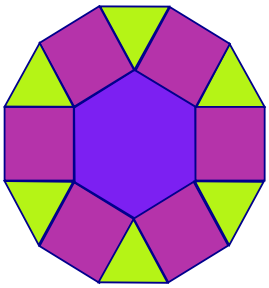


Figura 4.34 Ladrilhamento do dodecágono.

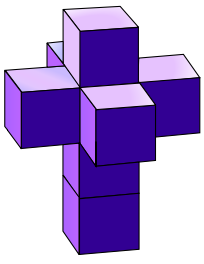


Figura 4.35 Uma “planificação” do 4-hipercubo.

Tema 4.6.7. Como poderia ser definido um 4-hipercubo, isto é, um cubo de dimensão quatro? Estude suas propriedades. A Figura 4.35 apresenta uma “planificação” de um 4-hipercubo. Procure entendê-la e verifique se existem outras possibilidades diferentes de “planificação” do 4-hipercubo. Esse objeto é também denominado tesserato.

Tema 4.6.8. Podemos formar anéis de polígonos regulares em volta de outro polígono regular. A Figura 4.36 mostra um exemplo de pentágonos regulares em volta de um dodecágono regular. Ache outros casos.

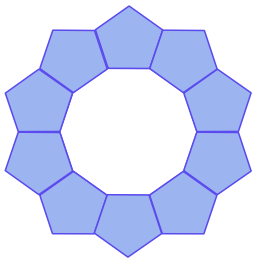


Figura 4.36. Anel de polígonos regulares.

Tema 4.6.9. Os frisos são muito utilizados em arquitetura, pinturas de cerâmicas, vestimentas cerimoniais, etc. Em Geometria, um *friso* consiste de uma faixa (infinita) delimitada por duas retas paralelas e contendo figuras repetidas obedecendo a algum padrão. Aqui interessa-nos examinar os tipos de movimento da faixa que a conservam invariante. Seguem as descrições de alguns movimentos que podem ser considerados. (i) **T** *translação*: consiste em deslocar a faixa a uma distância fixa na direção das retas paralelas que delimitam o friso. (ii) **V** *reflexão* em relação a uma reta perpendicular à direção das retas paralelas que delimitam o friso. (iii) **H** *reflexão* em relação a uma reta paralela à direção das retas que delimitam o friso. (iv) **R** *rotação* de meia volta. Pode ocorrer que um friso seja invariante por uma composição de dois ou mais desses movimentos.

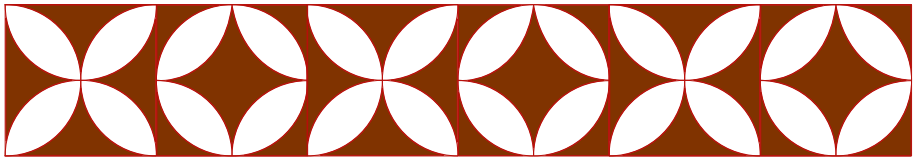


Figura 4.37. Friso geométrico com cores do povo Pueblo.

a) Suponha que um friso seja invariante por uma translação de distância d. Quais são as outras translações sob as quais o friso é invariante? **b)** Suponha que um friso seja invariante por uma reflexão do tipo H. Qual é a reta de reflexão? **c)** Suponha que um friso seja invariante por um movimento do tipo R. Onde está o ponto pivô da rotação? **d)** Encontre os movimentos que deixam invariantes os frisos ilustrados nas Figuras 4.37, 4.39 e 4.38.

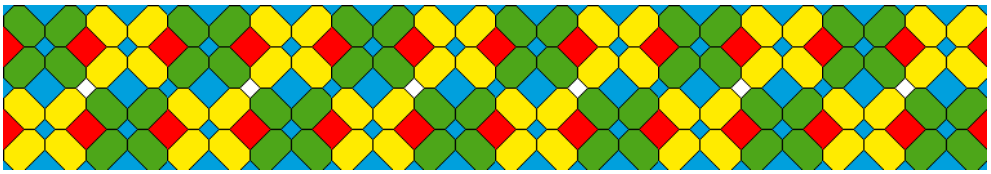


Figura 4.38. Friso geométrico.

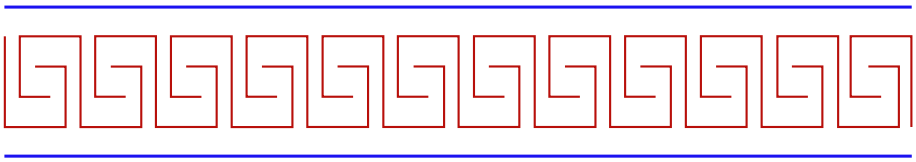


Figura 4.39. Friso de cerâmica Ming.

4.7 Atividades para licenciandos e professores

Atividade 4.7.1. Pesquise na internet fontes de informação sobre as propostas dos cientistas holandeses Dina van Hiele-Geldof e Pierre van Hiele sobre o ensino da Geometria.

Atividade 4.7.2. Seguem algumas perguntas sobre a experiência da Seção 4.4.1. **a)** Você acha que essa experiência com canudos pode dar oportunidade aos estudantes de apreender a desigualdade triangular? Qual é a diferença entre esse tipo de aprendizado sobre a desigualdade triangular e aquele acadêmico, feito em aulas expositivas, tipo $AC < AB + BC$? **b)** Veja se na experiência com canudos o professor pode aproveitar para propor a observação dos diferentes tipos de triângulos (equilátero, isósceles, etc.). O que é melhor, ensinar logo a nomenclatura desses tipos, ou antes sugerir aos estudantes que eles mesmos inventem nomes?

Atividade 4.7.3. Na atividade sobre áreas e perímetros desenvolvida na Subseção 4.4.3 apenas um estudante utilizou recursos algébricos para resolver a questão. Os outros usaram apenas exemplos com valores. Você aceitaria como válida essa investigação? Como o professor deve proceder nessa situação? Essa atividade pode servir de ponte entre explorações com valores e soluções algébricas?

Atividade 4.7.4. Pergunte para estudantes se duas figuras planas de mesmo perímetro têm mesma área. Parece que existe uma tendência em se pensar que sim. Procure confirmar essa suposta tendência através de conversas com estudantes ou usando questionários.

Atividade 4.7.5. O problema do sitiante, visto na Subseção 4.4.4, foi apresentado a um grupo de estudantes. Usando um geoplano para simular cercados em forma de retângulos, eles produziram a tabela seguinte:

lado 1	**lado 2**	**perímetro**	**área**
5 m	45 m	100 m	225 m^2
10 m	40 m	100 m	400 m^2
15 m	35 m	100 m	525 m^2
20 m	30 m	100 m	600 m^2
25 m	25 m	100 m	625 m^2

Desses dados concluíram que o retângulo que tem a maior área é o quadrado, e que o sitiante deveria fazer um cercado de base quadrada com lado de 25 m.

Você aceitaria essa conclusão como matematicamente válida? Por exemplo, o que dizer de valores inteiros para o lado 1 que não foram considerados, como 6 m, 7 m, etc.? E valores intermediários, como 6,5 m, 7,5 m, ...? Que providências você tomaria a esse respeito em suas aulas? Como mudar a atividade para que a resposta não seja obtida considerando apenas valores inteiros?

Atividade 4.7.6. Na atividade da Seção 4.4.6 um professor ofereceu para experimentação os seguintes tipos de polígonos regulares: triângulos, quadrados, pentágonos e hexágonos. Um grupo de estudantes descobriu que é possível ladrilhar o plano com polígonos de um só tipo usando triângulos, quadrados ou hexágonos. O professor então pergunta: será que existem outros tipos de polígonos regulares que também podem formar ladrilhamentos? O questionamento que fazemos aqui é se estudantes que ainda não aprenderam medida de ângulos conseguem argumentar que não existem outros tipos.

Atividade 4.7.7. Como explicar o que é um cilindro para estudantes que estão iniciando seu aprendizado geométrico? Você consideraria, para iniciar, o uso de desenhos e recortes?

Atividade 4.7.8. O que a dissecção ilustrada na Figura 4.19 pode ensinar para os estudantes?

Atividade 4.7.9. Imagine uma atividade com estudantes tendo por base a Figura 4.40. O que eles podem aprender? O que a atividade irá lhe indicar sobre as habilidades dos estudantes?



Figura 4.40. Desenho referente à Atividade 4.7.9.

Atividade 4.7.10. A seguinte atividade foi proposta para estudantes ([21], página 55, adaptada). Analise-a e prepare uma aula de Geometria com essa ideia.

"Imagine que você tenha um amigo em outra cidade, e você sabe que ele tem uma caixa com muitos cubos, todos do mesmo tamanho. Prepare uma mensagem para ele construir as formas da Figura 4.41. Você pode dar explicações usando desenhos e palavras".

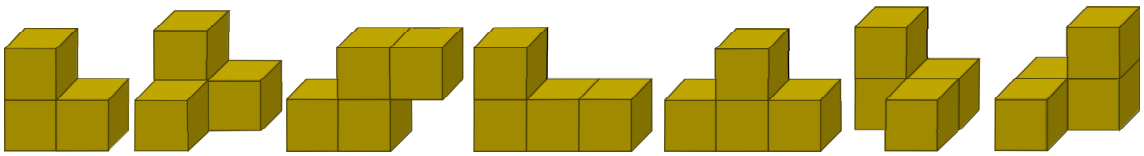


Figura 4.41. Figuras construídas com cubos usadas na Atividade 4.7.10.

Atividade 4.7.11. Em [8] os autores investigaram concepções de estudantes e professores de um curso de formação de docentes em ciências sobre a importância do uso de atividades experimentais em sala de aula. Os participantes assinalaram os objetivos pedagógicos que visualizaram para o uso dessas atividades. Esses objetivos foram classificados ([8], págs. 262 e 263) em quatro categorias: a) Objetivos relativos ao saber (v.g. melhorar a aprendizagem da teoria e descobrir as leis científicas por meio da experiência); b) objetivos relativos ao saber e ao saber fazer (v. g. aplicar os conhecimentos teóricos para estudar e compreender novos fenômenos e situações e propor hipóteses para solucionar problemas sugeridos); c) objetivos relativos ao saber fazer (v. g. desenvolver a observação e habilidades manipulativas e analisar dados para obter conclusões); e d) objetivos relativos ao ser (v.g. ficar motivado, desenvolver atitudes científicas e a iniciativa pessoal).

Comente os objetivos apontados. Esses objetivos são válidos também para a Matemática?

Atividade 4.7.12. Você costuma utilizar ou já utilizou atividades experimentais em suas aulas de Matemática? Descreva as experiências e o que conseguiu com elas. Quais são as dificuldades que o professor normalmente tem para implementar o uso de experimentos no ensino da Geometria?

Atividade 4.7.13. Admitindo a hipótese de que o uso de experimentos é muito importante no ensino da Geometria, por que será que nos acostumamos a ensinar Geometria de forma acadêmica, e nos esquecemos de usá-los?

Atividade 4.7.14. Você e seus estudantes podem construir um *pantógrafo*, um instrumento que permite ampliar desenhos. Um esquema desse instrumento está representado na Figura 4.42. Consiste de quatro varetas OC, CG, PL e PK. As varetas OC e CG têm o mesmo comprimento e se articulam em C, e PL e PK se articulam em P. A vareta PL é presa à vareta OC em A por um pino que permite movimento de rotação, e a vareta PK é presa à vareta CG em B por um pino que também permite movimento de rotação. Os comprimentos de PA e PB podem variar mas devem obedecer às condições $OA = AP = BC$ e $AC = PB = BG$. O ponto O é fixado à mesa de desenho, o ponto P é uma ponta seca e em G é colocado um grafite. Se fizermos a ponta P seguir os traços de um desenho, o grafite G repete esse desenho mas ampliado na escala OG/OP.

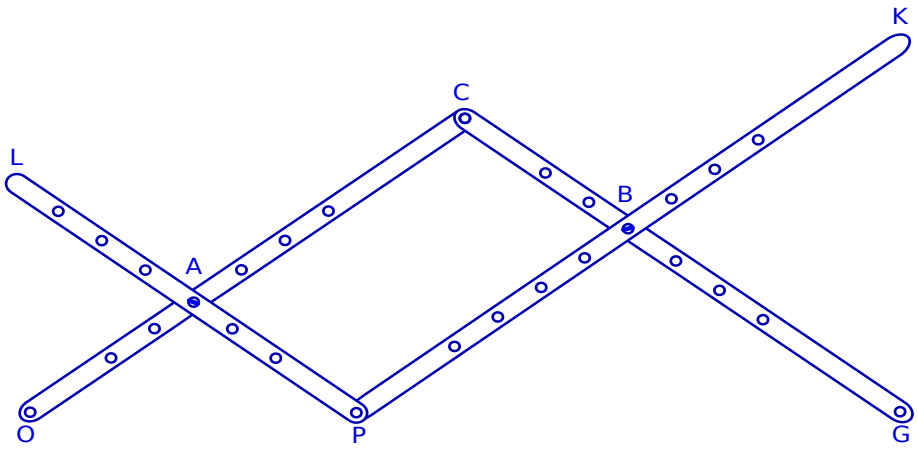


Figura 4.42

Capítulo 5

Início da construção da Geometria como Ciência

5.1 Introdução

Vimos, no Capítulo anterior, como o estudante, através da ação da escola, dá seus primeiros passos no estudo abstrato da Geometria. Inicia com a observação dos sólidos geométricos e, em seguida, passa para o estudo dos objetos planos e construção de suas representações.

Vemos agora uma fase em que se inicia uma organização das ideias e dos fatos observados. É o que a autora [4], pág. 3, chama de "nível da dedução informal". Os conceitos são melhor descritos e aparecem as definições, mesmo que de forma isolada de alguma estrutura. Os estudantes relacionam propriedades de figuras de uma mesma classe, surgindo as primeiras induções e analogias. A notação algébrica é, aos poucos, introduzida, e o raciocínio dedutivo passa a ter papel mais atuante nas conclusões.

Neste capítulo nos dedicamos ao estudo dos ângulos e de um importante resultado da Geometria Euclidiana, o de que a soma dos ângulos de um triângulo qualquer é 180°.

5.2 O conceito de ângulo

Em seus primeiros contatos com a noção de ângulo as crianças consideram aspectos mais concretos. Assim um ângulo é um telhado de uma casa ou uma rampa para o automóvel subir e entrar na garagem. Ao fazer observações em sólidos, os ângulos são as quinas. Posteriormente, com a construção de representações através de desenhos, parece que a noção mais usada é a que toma como ângulo o desenho de uma cunha, conforme ilustrado na Figura 5.1, à esquerda.

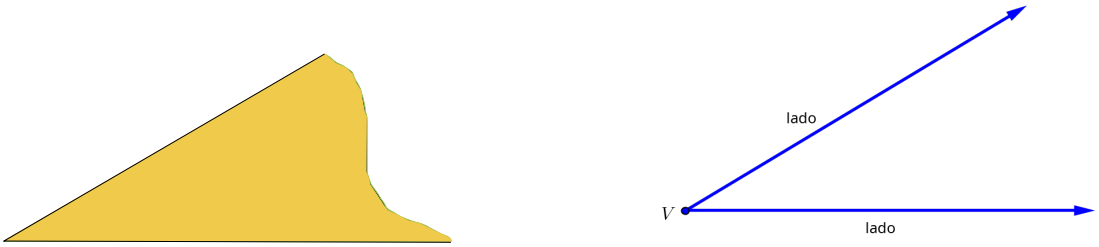


Figura 5.1. À esquerda, representação da noção de ângulo adotada por crianças. À direita, síntese adotada pela Geometria.

A Geometria sintetiza essa ideia e define ângulo como *um conjunto formado por duas semirretas não colinares com uma origem comum.* As duas semirretas são os *lados* do ângulo, e a origem comum V é seu *vértice*. Confira a Figura 5.1, à esquerda.

Medimos ângulos usando um transferidor. Adotamos aqui transferidores que usam *graus* como unidade de medida. Todo ângulo tem como medida um número real entre 0 e 180, uma tradição que remonta aos matemáticos sumérios. Se x é um número real tal que $0 < x < 180$, a medida x em graus de um ângulo é anotada por $x°$. Mas frequentemente usamos o mesmo símbolo para indicar o ângulo e sua medida. Neste texto não definimos ângulos de medida 0° ou 180°, mas esses valores podem aparecer em cálculos algébricos. Pelo mesmo motivo podem aparecer valores maiores, por exemplo, 360°.

Usando um transferidor observamos a seguinte propriedade: se dois ângulos têm um lado em comum e se os outros dois lados formam uma reta, então a soma das medidas desses ângulos é 180°. Confira o desenho da esquerda da Figura 5.2. Dizemos que esses ângulos são suplementares. Observamos também que se vários ângulos têm vértice comum e têm lados coincidentes dando "uma volta" como no desenho da direita da Figura 5.2, então a soma desses ângulos é 360°.

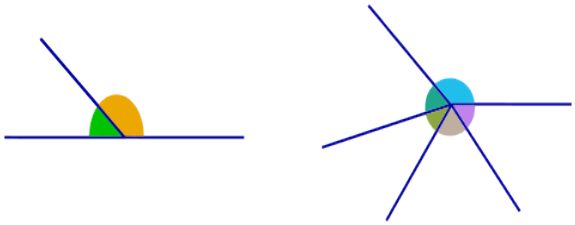


Figura 5.2. À esquerda, ângulos com soma 180°. À direita, ângulos com soma 360°.

Nos desenhos, para facilitar a identificação, ângulos podem ser indicados por arcos ou setores de discos, como fizemos na Figura 5.2. Enfatizamos que esses elementos não fazem parte do ângulo, e são apenas facilitadores para a visualização.

Outra propriedade de fácil observação é a seguinte. Duas retas concorrentes formam, com vértices no ponto de encontro, quatro ângulos. Na Figura 5.3 chamamos esses ângulos de a, b, c e d.

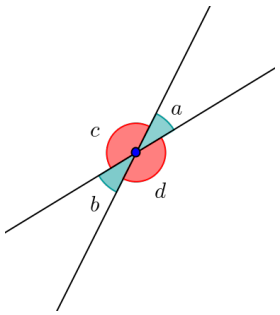


Figura 5.3. Ângulos opostos pelo vértice.

Notemos que os lados de b são as semirretas opostas dos lados de a. Dizemos que a e b são *opostos pelo vértice* (abreviadamente opv). Um dos primeiros cálculos algébricos que se faz em Geometria é constatar que $a = b$. Note que c e d também são opv e, assim, $c = d$.

Na Geometria podem ocorrer ângulos com qualquer medida, mas existem alguns que se destacam, pois aparecem comumente nos objetos geométricos mais utilizados. Sem dúvida o mais importante é o ângulo de medida 90°, também denominado *ângulo reto.* Dizemos que os lados

de um ângulo reto são *perpendiculares*. As retas que contêm os lados de um ângulo reto também são chamadas de retas perpendiculares, e elas formam quatro ângulos retos. É costume indicar os ângulos retos nos desenhos com um pequeno quadrado, como fazemos na Figura 5.4.

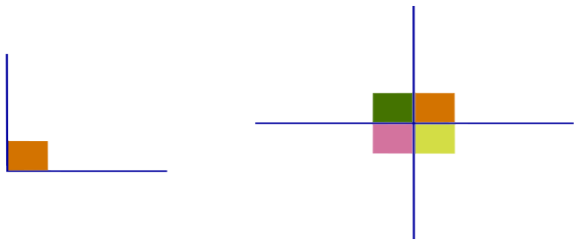


Figura 5.4. Representações de ângulos retos.

Na escola o conceito de ângulo deve ser trabalhado através de atividades de experimentação e investigação, como identificação e medição de ângulos em situações que envolvem seu cotidiano, e com a orientação do professor fazem representações de ângulos de objetos geométricos os mais diversos. Aprendem também que dobrando uma folha de papel levando um vinco sobre ele mesmo, o vinco da dobra é perpendicular ao primeiro. Dessa forma se obtém ângulos retos usando dobraduras. Dobrando novamente, podemos dividir ao meio um ângulo reto e obter um ângulo de 45°.

5.3 Ângulos em feixes de paralelas

Em um plano, duas retas paralelas não se encontram e, portanto, não produzem ângulos. Vemos, na Figura 5.5, à esquerda, um feixe de retas paralelas, e ângulo nenhum.

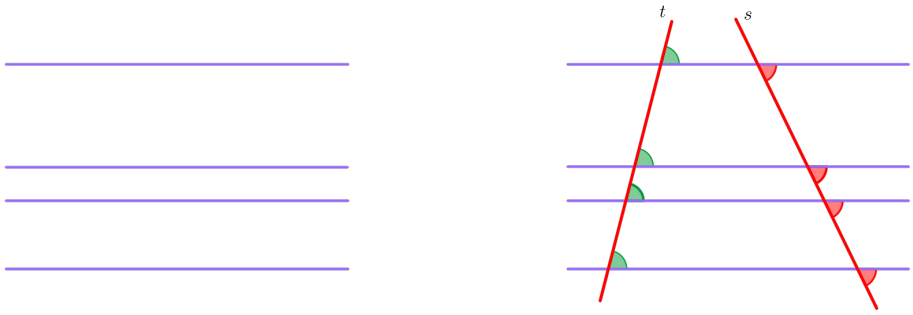


Figura 5.5. À esquerda, feixe de retas paralelas em um plano. À direita, retas transversais a um feixe de paralelas mostrando ângulos correspondentes.

Dado um feixe de paralelas, uma reta a elas transversal produz muitos ângulos, na verdade, quatro em cada reta do feixe. A Figura 5.5, à direita, ilustra alguns casos. Vemos, em relação à transversal t, ângulos em uma mesma posição. Dizemos que são correspondentes. Em relação à transversal s, os ângulos distinguidos também estão em uma mesma posição, e igualmente são ditos serem correspondentes. Para cada transversal existem quatro famílias de ângulos correspondentes.

Nas situações acima consideradas, *ângulos correspondentes em uma transversal têm a mesma medida.*

Notamos que vale também a afirmação recíproca: *Se um reta transversal a outras duas produz um par de ângulos correspondentes de mesma medida, então essas duas retas são paralelas.*

A primeira afirmação depende da unicidade da paralela a uma reta dada por um ponto dado. Na segunda afirmação, se as retas não fossem paralelas elas formariam um triângulo, e os ângulos correspondentes não teriam a mesma medida.

5.4 Ângulos em triângulos

Os lados de um trilátero determinam três ângulos. Por isso os triláteros são também chamados de *triângulos*, sendo essa a designação mais comum. Esses ângulos são denominados *ângulos internos* do triângulo, ou, simplesmente, *ângulos* do triângulo.



Figura 5.6. Ângulos de um triângulo.

Na Figura 5.6 vemos representações de triângulos e seus ângulos. Os ângulos estão nomeados a, b e c, e usamos esses mesmos símbolos para indicar suas medidas. Se for conveniente para maior clareza os ângulos podem ser indicados com pequenos setores de disco.

Um triângulo especial é o isósceles: são os triângulos com dois lados de mesma medida. Esses dois lados chamam-se *lados laterais*, e o terceiro lado, *base*. Os ângulos que contêm a base chamam-se *ângulos da base*, e o terceiro chama-se *ângulo do vértice*. Confira a Figura 5.7.

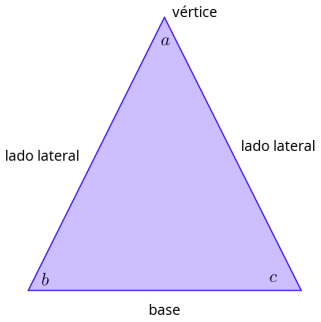


Figura 5.7. Um triângulo isósceles e seus elementos.

Uma propriedade fundamental: *em um triângulo isósceles os dois ângulos da base têm a mesma medida.* Os estudantes podem experenciar isso medindo ângulos em desenhos de triângulos isósceles. Mas podem fazê-lo também com dobraduras e dissecções. Vejamos algumas ideias.

Recortamos um triângulo isósceles em uma folha de papel e o dobramos juntando os vértices da base. Confira a Figura 5.8. Vemos que os ângulos da base coincidem e como os lados laterais são de mesmo comprimento, eles também coincidem com essa dobradura. Vincamos o papel e retornamos o triângulo ao seu formato original. O vinco é um segmento perpendicular à base no seu ponto médio e com extremo no vértice oposto à base. Portanto esse segmento é, ao mesmo

tempo, altura e mediana em relação a esse lado. Essa dobradura também nos indica relações entre os ângulos. Vemos que, ao dobrar, os ângulos da base coincidem, o que nos dá $b = c$, e que a altura reparte o ângulo a em dois ângulos de mesma medida. Assim a altura é também bissetriz. Tudo isso nos indica que *em um triângulo isósceles os ângulos da base têm a mesma medida e que a altura, a mediana e a bissetriz em relação ao vértice coincidem.*

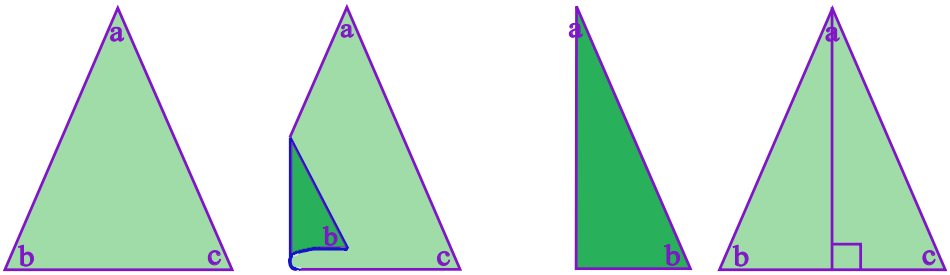


Figura 5.8. Passos da dobradura de um triângulo isósceles.

Essas atividades devem ser realizadas em sala de aula com muito cuidado, de modo que os estudantes possam vivenciá-las em todos os detalhes e consigam comunicar seus métodos e seus resultados através de palavras e desenhos.

Depois disso podemos abordar o próximo passo, que é mais delicado. Consiste em observar que, se um triângulo tem dois ângulos de mesma medida, então ele é isósceles, e os lados de mesma medida são os lados opostos a esses ângulos. Para experenciar essa propriedade talvez seja adequado que os estudantes realizem uma tarefa com desenho e dobradura. Desenvolvemos o experimento em duas etapas, conforme explicado na Figura 5.9.

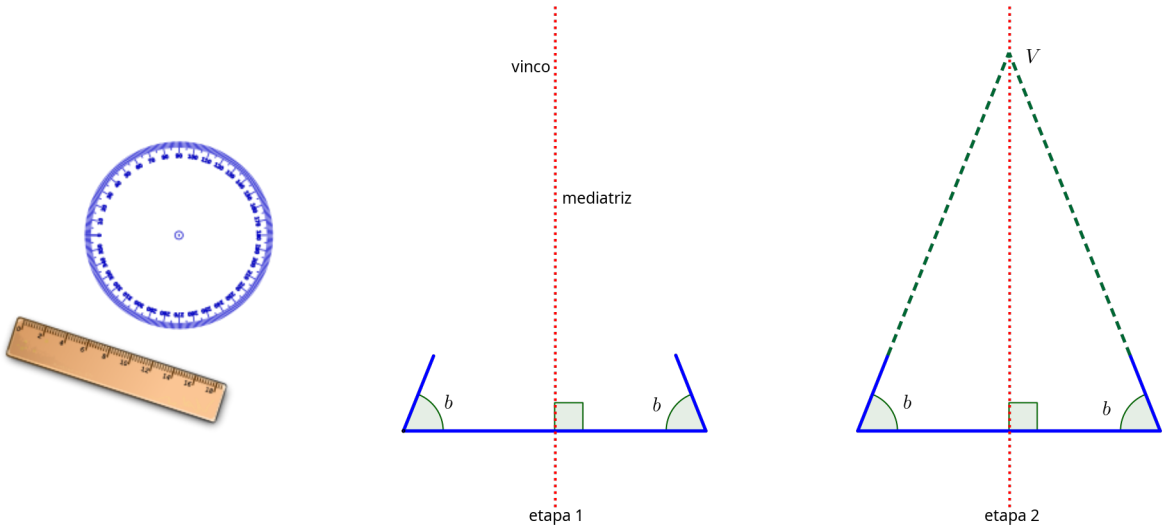


Figura 5.9. Triângulo com dois ângulos de mesma medida.

Na etapa 1, dado um triângulo com dois ângulos b de mesma medida, de posse de uma régua e de um transferidor, desenha-se primeiro o lado comum a esses ângulos, e em seguida se reproduz os ângulos. Depois vincamos a folha de desenho na mediatriz do lado. Dobrando, vemos que os desenhos dos dois lados da mediatriz coincidem. Na etapa 2 prolongamos os lados dos ângulos até que se encontrem, o que ocorre, devido à simetria, em um ponto V da mediatriz. Vê-se então que os dois lados laterais são de mesma medida, e o triângulo é isósceles.

Outra forma de constatar essa propriedade consiste em fazer duas cópias idênticas do mesmo

triângulo, recortadas de uma folha de papel. Coloca-se uma cópia sobre a outra fazendo coincidirem os ângulos de mesma medida, mas com os lados laterais trocados. Como as duas cópias coincidem se vê que esses lados têm a mesma medida.

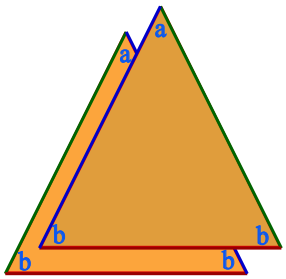


Figura 5.10. Sobreposição de duas cópias do mesmo triângulo com dois ângulos de mesma medida.

As propriedades do triângulo equilátero podem ser observadas usando os resultados anteriores, pois esse triângulo é isósceles com base em qualquer um de seus lados. Portanto num triângulo equilátero qualquer todos os ângulos têm a mesma medida, e a altura, a mediana e a bissetriz relativas a qualquer um dos vértices coincidem.

Todos esses experimentos devem ser conduzidos com todo cuidado, e o professor, para ter segurança, precisa conhecer as demonstrações dedutivas dessas propriedades, que serão vistas no Tomo II dessa coleção sobre Geometria.

5.5 Soma dos ângulos de um triângulo

Uma propriedade importante dos triângulos é que a soma de seus ângulos, em qualquer triângulo, é igual a 180°. Esse resultado tem inúmeras aplicações.

Certamente que uma das formas que o professor pode utilizar para que seus estudantes se familiarizem com essa propriedade é usar o transferidor. Os estudantes podem construir vários tipos de triângulos, medir seus ângulos e somá-los. Essas medidas aproximadas devem conduzir a somas próximas de 180°. Certamente que o Geogebra também pode ser usado, acompanhado das explicações necessárias.

Por outro lado, essa é uma oportunidade para que o professor apresente aos estudantes argumentações de variados tipos, mostrando que os resultados da Geometria necessitam de justificativas gerais, que sirvam para qualquer triângulo.

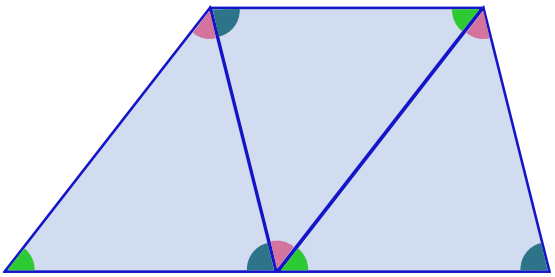


Figura 5.11. Ajuntamento de três cópias do mesmo triângulo.

Apresentamos a seguir alguns recursos que podem ser usados para o estudo dessa propriedade. O primeiro consiste em, dado um triângulo, fazer dele três cópias recortadas em papel, e

juntar os três ângulos. Se vê que os três ângulos juntos somam 180°. Esse procedimento está ilustrado na Figura 5.11.

O segundo recurso consiste em recortar triângulos de formas variadas em papel, e, para cada um deles, cortar as pontas de dois ângulos e juntá-los com o terceiro. Esse procedimento está ilustrado na Figura 5.12.

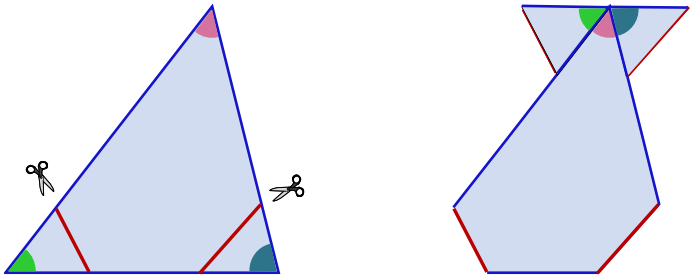


Figura 5.12. Ajuntamento das pontas dos ângulos de um triângulo.

O último procedimento merece um detalhamento. A propriedade que essencialmente é utilizada está ilustrada na Figura 5.13, à direita. Se duas retas paralelas são cortadas por uma terceira, elas determinam ângulos de mesma medida nas posições mostradas no desenho. Confira também a Seção 5.3 e o Problema 5.9.5.

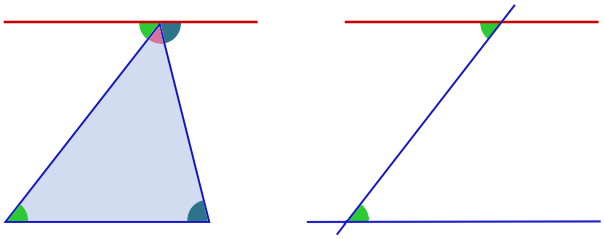


Figura 5.13. Usando uma propriedade essencial.

Vejamos agora como usar dobradura para ver que a soma dos ângulos de um triângulo é 180°. Recortamos um triângulo em qualquer formato em uma folha de papel transparente e o posicionamos de modo que a sua base seja o lado maior. Nomeamos os ângulos com as letras a, b e c. Para facilitar nossa explicação indicamos os vértices respectivos pelas letras A, B e C, conforme ilustrado na Figura 5.14.

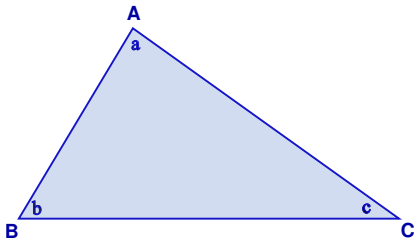


Figura 5.14. Um triângulo com lado maior na base.

Nossa primeira providência é vincar a altura relativa a essa base. Acompanhe os movimentos da Figura 5.15. Dobramos o vértice B sobre BC para obter a linha AD. Vincamos o papel e desdobramos. O vinco é a altura AD.

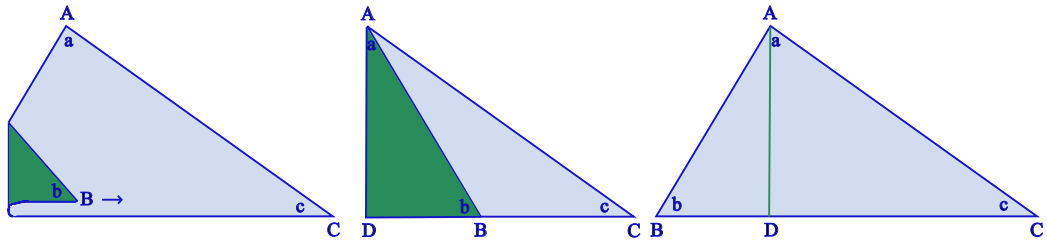


Figura 5.15. Vincando a altura do triângulo.

Em seguida dobramos os três vértices sobre o ponto D, conforme ilustrado na Figura 5.16. Vemos novamente que a soma dos três ângulos é 180°.

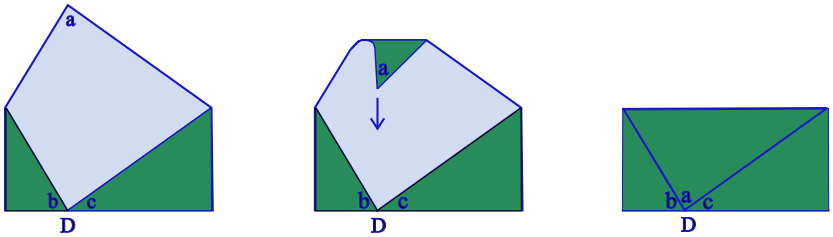


Figura 5.16. Dobrando todos os vértices.

Esse método de dobradura tem uma variação que pode ser utilizada com estudantes que sabem fazer pequenas contas algébricas. Começamos com um triângulo retângulo, cortado em uma folha de papel. Procedemos com as duas dobraduras descritas na sequência de desenhos da Figura 5.17.

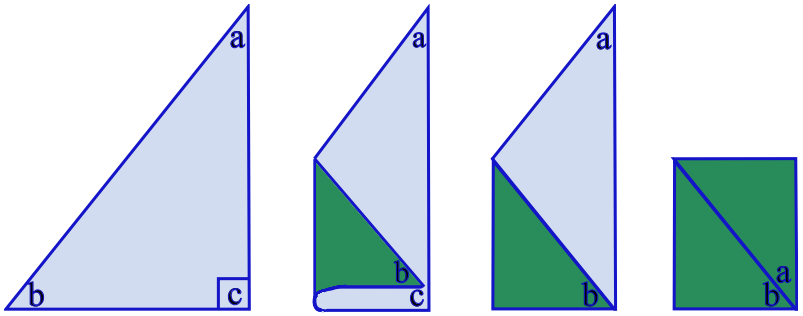


Figura 5.17. Uma sequência de dobraduras em um triângulo retângulo.

Vemos assim que num triângulo retângulo os dois ângulos agudos somam 90°. Portanto a soma de todos os seus ângulos é igual a 180°. Em seguida observamos que qualquer triângulo pode ser repartido em dois triângulos retângulos. Com as notações da Figura 5.18 vemos que o ângulo a foi repartido nos ângulos e e f, portanto $a = e + f$. Ainda, usando o que foi visto para o triângulo retângulo, temos

$$b + e + g = 180^\circ \quad \text{e} \quad c + h + f = 180^\circ.$$

Somando essas duas identidades e observando que $g = h = 90^\circ$ vem

$$b + e + g + c + h + f = 180^\circ + 180^\circ \Rightarrow b + c + 90^\circ + 90^\circ + a = 180^\circ + 180^\circ \Rightarrow a + b + c = 180^\circ.$$

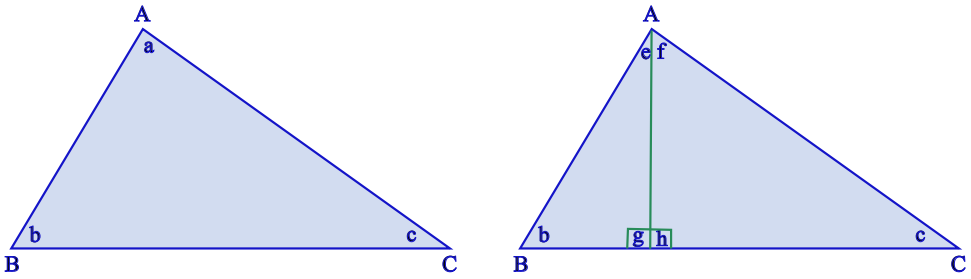


Figura 5.18. Um triângulo repartido em dois triângulos retângulos.

Vimos assim, de outra forma, que soma dos ângulos de um triângulo qualquer é igual a 180°. Essa forma usa uma propriedade interessante, a de que qualquer triângulo é retângulo ou pode ser repartido em dois triângulos retângulos. Essa observação tem outras aplicações.

5.6 Outro experimento com o triângulo retângulo

Vejamos agora um jeito diferente de verificar que a soma dos ângulos de um triângulo retângulo é 180°. Já fizemos isso usando dobraduras, e agora empregamos um método um pouco diferente, o das dissecções.

Recortamos duas cópias do mesmo triângulo retângulo em uma folha de papel. Nomeamos seus ângulos agudos de a e b, nas duas cópias. Juntando de forma conveniente essas duas cópias, formamos um retângulo. Vemos que a soma dos ângulos agudos do triângulo é $a+b=90°$. Como esse triângulo tem o outro ângulo de medida 90°, concluímos que a soma dos ângulos do nosso triângulo é de 180°. Confira ilustração desse procedimento na Figura 5.19.

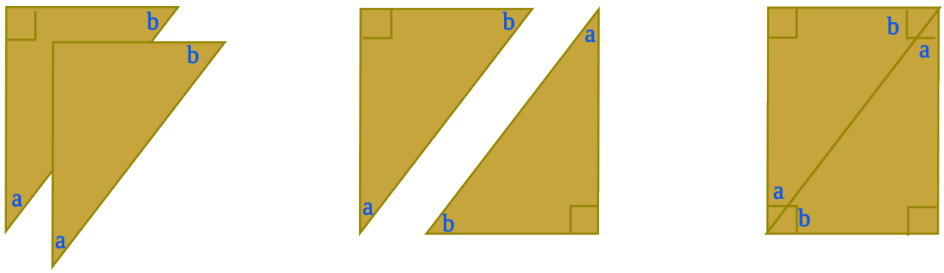


Figura 5.19. Outro argumento para o triângulo retângulo.

Passamos agora a examinar com mais detalhes o argumento utilizado. Uma primeira pergunta é: por que temos um retângulo quando juntamos as duas cópias do triângulo retângulo? Em busca de um argumento mais simples do que é o de costume na geometria axiomática, podemos pensar no movimento contrário ao que fizemos acima. Dado um triângulo retângulo, construímos um retângulo cujos lados são iguais aos catetos do triângulo. Em seguida dividimos o retângulo usando uma das suas diagonais. Penso que o estudante achará ser bem plausível a afirmação de que essa diagonal divide o retângulo em duas partes que podem ser consideradas cópias do triângulo dado. Para estudantes que já viram o que é congruência de triângulos, esse é o caso LAL.

Outra questão que se coloca é se a construção apresentada mostra que vale o resultado para qualquer triângulo retângulo. Creio que não há dificuldade em se aceitar que o argumento não depende da relação entre os catetos do triângulo retângulo. O que pode causar dúvida é em relação ao tamanho do triângulo, pois só podemos fazer cópias em papel de triângulos pequenos. O

seguinte argumento pode resolver. Dado um triângulo retângulo que tenha um tamanho maior do que a folha de papel, podemos reduzí-lo traçando uma linha paralela à sua hipotenusa ligando dois pontos dos catetos que estejam mais próximos do vértice do ângulo reto.

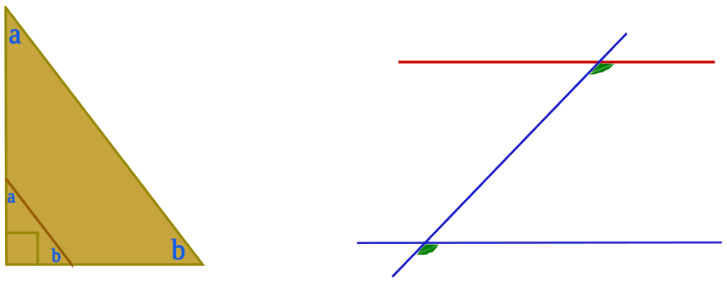


Figura 5.20. Reduzindo um triângulo retângulo.

Tomando como referência a Figura 5.20, vemos que têm a mesma medida os dois ângulos assinalados como “a”, e o mesmo ocorre com os dois ângulos assinalados como “b”. Para isso usamos a propriedade essencial já comentada na Figura 5.13, que está reproduzida aqui, de que se duas retas paralelas são cortadas por uma terceira, elas determinam ângulos correspondentes de mesma medida. Concluímos observando que se a soma dos ângulos do triângulo retângulo menor for 180°, o mesmo ocorre com o maior.

5.7 Uma aplicação da soma dos ângulos de um triângulo

A propriedade de que a soma dos ângulos de um triângulo é igual a 180° tem inúmeras aplicações. Por exemplo, num triângulo isósceles basta saber a medida de um dos ângulos para deduzir as medidas dos outros dois. Outra aplicação é que, num triângulo equilátero, cada ângulo mede 60°. De fato, todos os seus ângulos são de mesma medida, portanto cada um mede $180°/3 = 60°$.

O que se pode dizer sobre os ângulos dos outros polígonos? Um quadrilátero convexo se reparte em dois triângulos, de modo que a soma dos ângulos do quadrilátero é igual à soma dos ângulos de dois triângulos, isto é, $2 \times 180° = 360°$. Confira a Figura 5.21, desenho da esquerda. Se o quadrilátero é equiângulo, então seus ângulos medem $360°/4 = 90°$ cada um, e o quadrilátero é um retângulo.

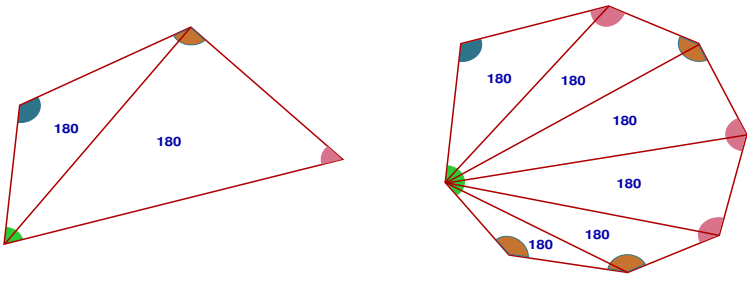


Figura 5.21. Um quadrilátero e uma região poligonal repartidos em triângulos.

Esse recurso, o de repartir uma região poligonal convexa em triângulos, pode ser usado para um polígono convexo de n lados. Fixamos um dos vértices do polígono, e tomamos as $n-3$ diagonais com um extremo nesse vértice. Isso reparte a região poligonal em $n-2$ triângulos. Portanto, a soma dos ângulos da região poligonal é

$$(n-2) \times 180°.$$

Se o polígono é equiângulo seus n ângulos têm mesma medida, cada uma valendo

$$\frac{(n-2)180^\circ}{n}. \tag{5.1}$$

Existe outra forma de obter a medida do ângulo de um polígono regular. Dada uma circunferência de centro O e raio r, os pontos da circunferência que a dividem em n arcos de mesmo comprimento são vértices de um polígono regular de n lados. Para obter esses pontos usamos um transferidor de 360° centralizado em O e marcamos ângulos de $360^\circ/n$, dando uma volta inteira. Unindo em sequência esses n pontos desenhamos o polígono.

A Figura 5.22 mostra uma sequência de desenhos para obter o pentágono regular. Notemos que $360^\circ/5 = 72^\circ$. Observemos que, nessa Figura, os triângulos com vértices em O são isósceles (com lados laterais iguais a r). Seja β a medida do ângulo da base desse triângulo. Temos $2\beta+72^\circ = 180^\circ$, logo $\beta = 54^\circ$. Portanto o ângulo interno do pentágono mede $2\beta = 108^\circ$ graus.

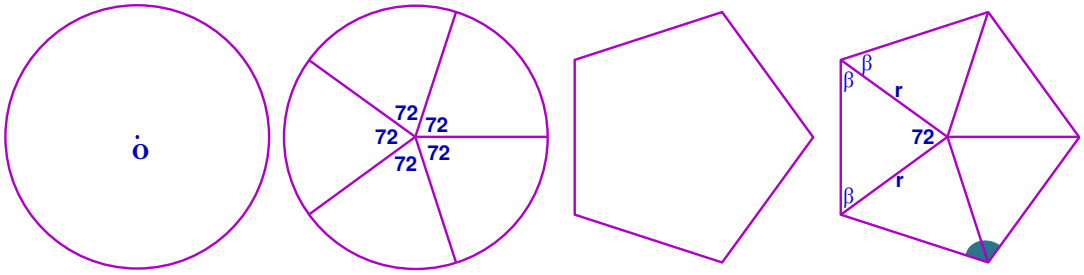


Figura 5.22. Sequência de desenhos para obter o pentágono regular e calcular seu ângulo.

Em geral, para um polígono regular de n lados, essa conta fica $2\beta + 360^\circ/n = 180^\circ$, logo $2\beta = (n-2)180^\circ/n$, que é o mesmo valor obtido antes.

5.8 Retomando o experimento do ladrilhamento

Damos agora continuidade ao experimento 4.4.6. Ali foi sugerido ao estudante descobrir, usando tentativas, com que tipos de polígonos regulares é possível ladrilhar o plano. Fazemos agora um exame mais detalhado desse problema.

No momento nos atemos a ladrilhamentos uniformes, feitos de um só tipo de polígono regular, todos com lados de mesmo comprimento. Supomos também que, nesses ladrilhamentos, quando dois polígonos se tocam, a interseção é um vértice comum ou um lado comum. Vemos, na Figura 5.23, dois tipos de ladrilhamentos com quadrados, sendo que o da esquerda é permitido, e o da direita não será, no momento, considerado.



Figura 5.23. Dois tipos de ladrilhamento com quadrados.

Para determinar com que polígonos regulares podemos fabricar ladrilhamentos, observemos, antes de mais nada, o que ocorre em torno de um vértice. A soma dos ângulos que têm esse vértice em comum deve ser 360°. Conforme já vimos, é possível ladrilhar com quadrados, pois eles têm ângulos de medida 90°, e $4 \times 90° = 360°$. Assim, num ladrilhamento com quadrados, cada vértice é o ponto de encontro de quatro quadrados. É possível também ladrilhar com triângulos equiláteros, pois eles têm ângulos de medida 60°, e $6 \times 60° = 360°$. Num ladrilhamento com triângulos equiláteros cada vértice é o ponto de encontro de seis triângulos. Isso está ilustrado na Figura 5.24.

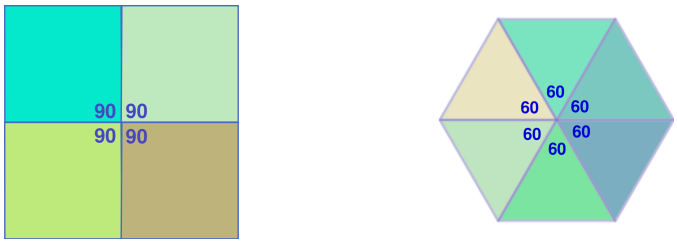


Figura 5.24. Peças básicas com quadrados e triângulos equiláteros.

Vemos na Figura 5.25 um ladrilhamento com triângulos equiláteros.

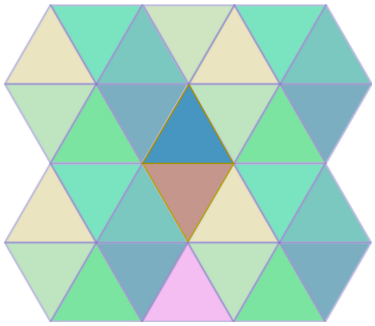


Figura 5.25. Ladrilhamento com triângulos equiláteros.

Examinando acuradamente a Figura 5.25 vemos que podemos ladrilhar o plano com hexágonos regulares. Esse polígono poder ser construído com seis triângulos equiláteros, e assim seus ângulos internos medem 120°. Como $3 \times 120° = 360°$, podemos ladrilhar o plano com hexágonos regulares, sendo que em cada vértice concorrem 3 hexágonos. Tudo isso está ilustrado na Figura 5.26.

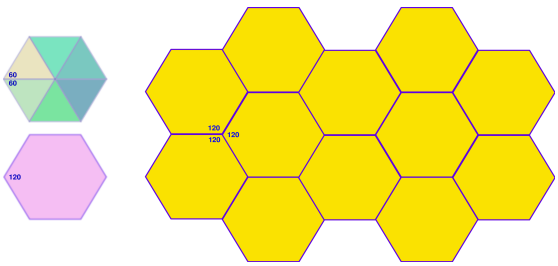


Figura 5.26. Ladrilhamento com hexágonos regulares.

Uma condição adicional para formar um ladrilhamento é a existência de um *agrupamento básico* de ladrilhos, agrupamentos esses que se juntam uns aos outros e constituem todo o ladrilhamento. Nos casos que estamos considerando, que são exemplos simples, para checar essa condição basta fazer os desenhos do ladrilhamento unindo os agrupamentos.

Existem outros polígonos regulares que podem ladrilhar o plano? O próximo polígono que devemos experimentar é o pentágono. Tomando três pentágonos regulares recortados em papel e reunindo-os em um vértice, vemos que "não fecham". Confira a Figura 5.27. Isso indica que o pentágono regular não forma ladrilhamentos. Uma forma de conferir isso é ver que o ângulo de um pentágono regular mede 108°. Como $3 \times 108° = 324°$, para chegar a 360 faltam 36°, e não é possível encaixar aí outro pentágono.

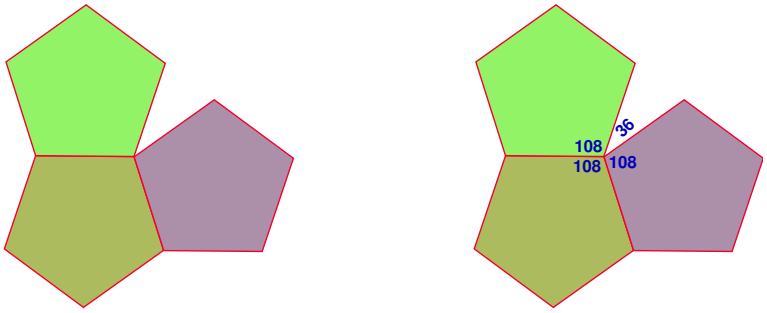


Figura 5.27. Tentativa de ladrilhar com pentágonos regulares.

O heptágono regular tampouco forma ladrilhamentos. Seu ângulo mede $\approx 128,57°$. Como temos que pegar pelo menos três polígonos em torno de um vértice, fazendo a conta $3 \times 128,57° \approx 385,71°$ vemos que não é possível ladrilhar. Para polígonos com mais lados ocorre o mesmo problema, pois a medida de seus ângulos sempre aumenta.

Concluímos que ladrilhamentos uniformes no plano só podem ser feitos com um dos seguintes tipos de polígonos regulares: triângulos, quadrados ou hexágonos.

Se permitirmos que o ladrilhamento possa ser feito com mais de um tipo de polígono, regular ou não, ou se afrouxarmos as regras, permitindo que a interseção de dois polígonos não precisa ser um lado inteiro comum ou um vértice, temos uma infinidade de possibilidades. Maiores detalhes podem ser obtidos em [31] e na bibliografia ali citada. Confira também nossa lista de problemas.

5.9 Problemas

Problema 5.9.1. **a)** Explique por que se um ângulo é indicado com três pontos, um deles é necessariamente o seu vértice. **b)** Um professor indicou um ângulo usando quatro pontos. Em que partes do ângulo podem estar esses pontos?

Problema 5.9.2. Identifique, na Figura 5.3, as relações entre as medidas dos quatro ângulos. Em particular, justifique algebricamente que ângulos opostos pelo vértice têm a mesma medida.

Problema 5.9.3. Na Figura 5.28, ache o valor de a em graus.

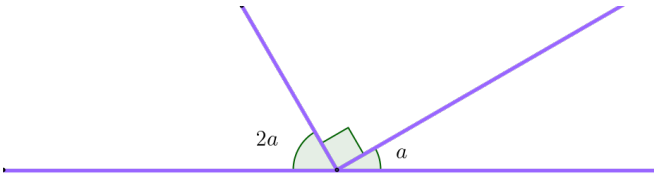


Figura 5.28. Ângulos formados de um lado de uma reta.

Problema 5.9.4. Na Figura 5.29 as retas s e t são perpendiculares. O que se pode dizer das retas u e v?

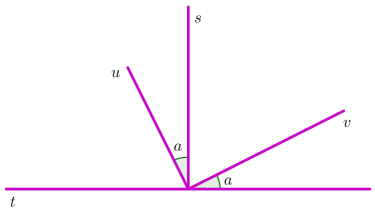


Figura 5.29. Ângulos formados de um lado de uma reta.

Problema 5.9.5. Identifique, na Figura 5.30, as relações entre as medidas de todos os ângulos assinalados.

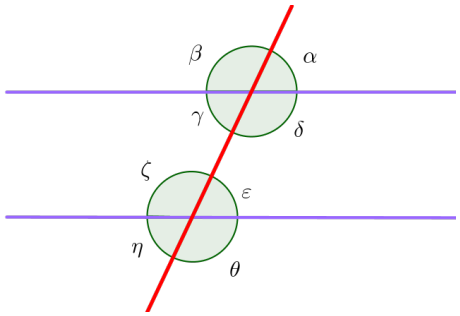


Figura 5.30. Ângulos formados por duas paralelas e uma transversal.

Problema 5.9.6. **a)** Explique como desenhar triângulos isósceles variados em uma folha de papel. **b)** Faça o mesmo para triângulos equiláteros e triângulos retângulos.

Problema 5.9.7. Vemos, na Figura 5.31, dois triângulos de mesma base. Justifique por que $b > a$.

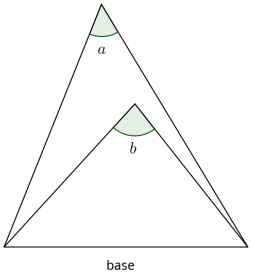


Figura 5.31. Ângulos formados por dois triângulos de mesma base.

Problema 5.9.8. Mostre que é possível ladrilhar o plano usando quadrados de dois tipos diferentes. Distinga o agrupamento básico de seu ladrilhamento. Esse ladrilhamento não obedece a todas as condições que adotamos anteriormente, escreva qual é.

Problema 5.9.9. Complete a tabela abaixo com os valores dos ângulos dos polígonos regulares.

polígono regular	nº de lados	medida do ângulo
triângulo	3	60
quadrado	4	90
pentágono	5	108
hexágono	6	120
heptágono	7	$(5/7)180 \approx 128,57$
octógono	8	
eneágono	9	
decágono	10	
undecágono	11	
dodecágono	12	
pentadecágono	15	
icoságono	20	

Problema 5.9.10. Explique por que não é possível ladrilhar o plano usando 7 ou mais polígonos regulares em torno de um vértice. Constate que, usando seis polígonos, todos devem ser o triângulo equilátero.

Problema 5.9.11. Explique por que se um ladrilhamento tem 5 polígonos regulares em torno de um vértice, então pelo menos um deles tem que ser um triângulo.

Problema 5.9.12. Explique por que peças iguais de qualquer quadrilátero convexo podem formar um ladrilhamento. Faça desenhos com alguns exemplos. Proponha uma regra prática para o desenho desses ladrilhamentos.

5.10 Temas para investigação

Tema 5.10.1. Com quadrados e triângulos equiláteros (com lados de mesma medida) é possível ladrilhar o plano de duas maneiras diferentes. Investigue isso usando desenhos.

Tema 5.10.2. O octógono regular não pode, sozinho, compor um ladrilhamento. Mas, quem sabe, combinando com outros polígonos regulares, talvez possa. Investigue isso.

Tema 5.10.3. Usando dodecágonos regulares, é possível ladrilhar o plano com ajuda de outros polígonos regulares?

Tema 5.10.4. É possível ladrilhar o plano usando decágonos e pentadecágonos regulares?

Tema 5.10.5. Pesquise ladrilhamentos usando cópias de um, dois ou três polígonos não regulares.

5.11 Atividades para licenciandos e professores

Atividade 5.11.1. Vemos na Figura 5.32, à esquerda, a representação de uma reta conforme modelo adotado no presente texto. À direita, vemos um modelo adotado em outros textos. Comente as diferenças entre esses modelos. Não seria o segundo modelo mais adequado para estudantes inexperientes?

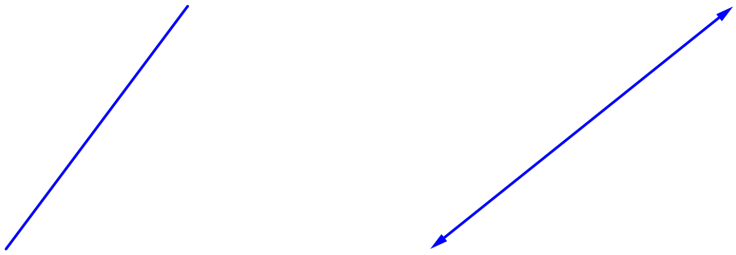


Figura 5.32. Duas representações de reta.

Atividade 5.11.2. Neste capítulo foram feitas várias investigações usando dobraduras em papel, e com elas obtivemos propriedades. Os resultados assim obtidos são realmente válidos? O que você pode fazer para confirmar as afirmações de outra maneira? Isso deve ser comentado com estudantes da escola básica?

Atividade 5.11.3. Um professor fez a seguinte afirmação para seus estudantes: "um plano é como o tampo de uma mesa", e mostrou para seus estudantes uma mesa. Comente a validade dessa comparação, o que ela tem de bom e o que é preciso completar.

Atividade 5.11.4. Linhas esticadas em um geoplano podem ajudar no estudo de propriedades das retas e ângulos? Dê alguns exemplos.

Capítulo 6

Construindo argumentações em Geometria

6.1 Introdução

Neste capítulo continuamos nossas investigações sobre propriedades elementares de objetos geométricos, mas agora com maior atenção nos detalhes das justificativas. Continuamos no denominado "nível de dedução informal", em que utilizamos os recursos de desenhos, dobraduras e dissecções como forma de verificar os resultados de nossas investigações. Mas agora damos mais um passo, observando melhor todos os detalhes do argumento, e encadeando deduções a partir de alguns fatos conhecidos.

6.2 Percepção de congruências de triângulos

Duas figuras são congruentes quando uma pode ser deslocada sobre a outra de modo a coincidirem. A congruência de triângulos é a mais estudada, dado que é a figura mais simples e por ser constitutiva de qualquer polígono.

Dessa forma os estudantes podem iniciar o estudo da congruência movimentando triângulos em planos e verificando se coincidem ou não. A primeira constatação que os estudantes certamente farão é que dois triângulos congruentes têm lados correspondentes de mesma medida. Posteriormente, ou concomitantemente, pode ser constatado que os ângulos correspondentes têm a mesma medida. Confira a Figura 6.1.

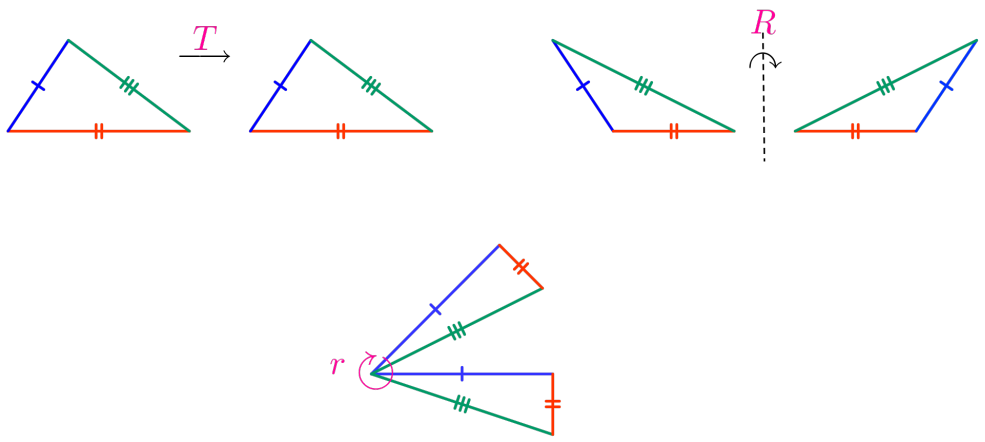


Figura 6.1. Movimentos básicos de figuras no plano: T = translação, R = reflexão e r = rotação.

Os experimentos dos estudantes podem ser realizados com desenhos, com ajuda de régua e compasso, ou com recortes, geoplanos e triângulos físicos.

A afirmação lógica a ser destacada aqui é: se dois triângulos são congruentes (percebidos congruentes através de movimentos), então lados correspondentes têm a mesma medida, assim como ângulos correspondentes. Tarefas podem ser criadas para corroborar essa percepção.

Posteriormente, o movimento lógico reverso deve ser abordado: quais condições são suficientes para que dois triângulos sejam congruentes? A condição mais perceptível é que os triângulos tenham lados correspondentes de mesma medida (sem a necessidade de verificar as medidas dos ângulos). Uma possível tarefa, a ser realizada com régua e compasso, está ilustrada na Figura 6.2. Esse é o chamado "caso LLL".

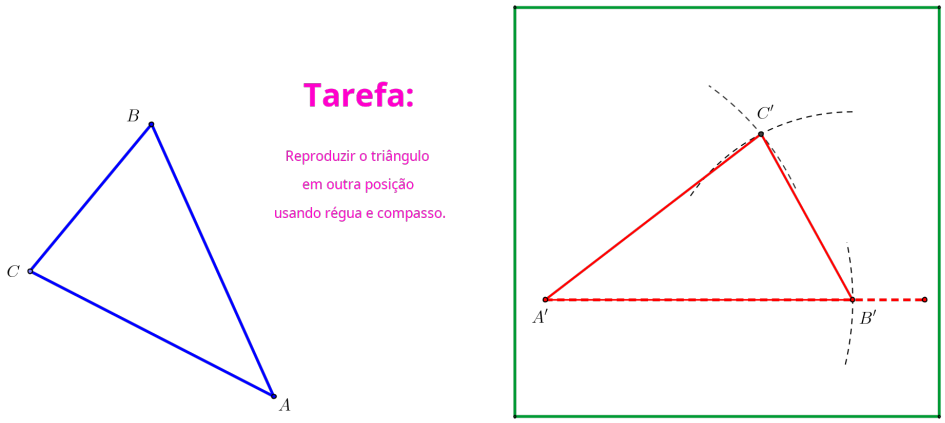


Figura 6.2. Tarefa para percepção do caso LLL de congruência.

Depois que a tarefa for realizada, pode ser perguntado: que movimentos precisam ser feitos para fazer coincidirem os triângulos?

Os outros dois casos de congruência principais, a saber, ALA e LAL, devem também serem conduzidos com tarefas a serem realizadas com régua e compasso. Dificuldades podem ocorrer, como as que foram comentadas no Capítulo 2, Figuras 2.7 e 2.8. Outros casos, como LAAo e LLA do triângulo retângulo, podem também serem considerados. Em nosso contexto, em que a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer já foi vista ser constante, o caso LAAo pode ser justificado pelo caso ALA.

Pode ocorrer a oportunidade de constatar que a condição AAA não conduz necessariamente à congruência, e assim serem trabalhados os primeiros exemplos de similaridade de triângulos.

Terminamos nossas breves considerações sobre o ensino das congruências observando que a introdução de notação, como o símbolo $\cong$, assim como de protocolos para ordenar deduções e conduzir demonstrações, deve ocorrer depois que a compreensão das ideias estiver bem consolidada. Na verdade, notações e métodos demonstrativos não devem ser, em geral, ensinados por si sós, mas apenas quando forem efetivamente utilizados em uma ampla gama de situações.

6.3 Revendo propriedades do triângulo isósceles

Vimos que os triângulos que têm dois lados de mesma medida chamam-se *isósceles*. Nessa categoria estão também incluídos os triângulos equiláteros, que têm os três lados de mesma medida. Portanto, propriedades de triângulos isósceles também são válidas para os equiláteros.

Revemos agora as seguintes propriedades já estudadas na Seção 5.4: 1) os ângulos da base de qualquer triângulo isósceles têm a mesma medida; 2) em qualquer triângulo isósceles a mediana, a altura e a bissetriz relativas ao vértice coincidem.

Para isso usamos os casos de congruência.

Propriedade 1. *Os ângulos da base de qualquer triângulo isósceles têm a mesma medida.*

Uma forma que usamos para justificar foi fazer duas cópias do triângulo isósceles dado e colocar uma sobre a outra, mas com os vértices da base trocados. Agora fazemos isso novamente, mas sem recortar, colocando os desenhos um ao lado do outro, como na Figura 6.3.

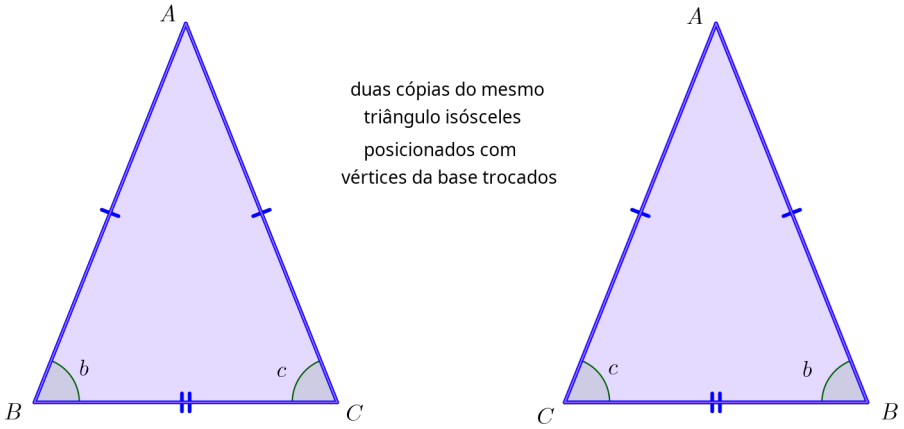


Figura 6.3. Congruência simétrica do triângulo isósceles.

Vemos que essas cópias são congruentes pelo caso LLL, e, como consequência, os ângulos correspondentes têm a mesma medida. Logo $b = c$.

Propriedade 2. *Em qualquer triângulo isósceles a mediana, a altura e a bissetriz relativas ao vértice coincidem.*

Desenhamos um triângulo isósceles. Sua mediana relativa ao vértice o reparte em dois triângulos, que são congruentes por LLL (ou por LAL). Confira a Figura 6.4.

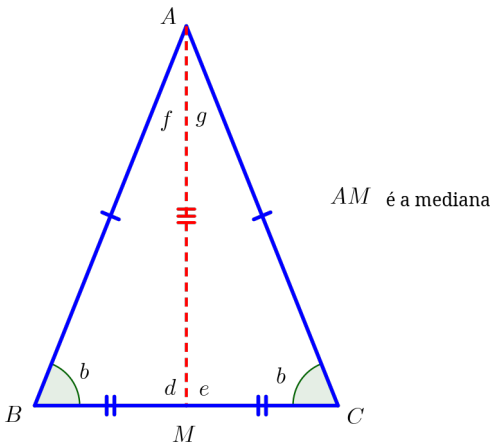


Figura 6.4. Propriedades da altura, mediana e bissetriz do triângulo isósceles.

Como os ângulos d e e são correspondentes, temos $d = e$. Mas esses ângulos também são suplementares, portanto $d = e = 90°$. Assim a mediana coincide com a altura. Por outro lado, os

ângulos f e g são também correspondentes, e temos $f = g$. Assim a mediana também coincide com a bissetriz.

A lista de problemas deste capítulo traz outras propriedades do triângulo isósceles.

6.4 A mediatriz de um segmento

Em um plano, a *mediatriz* de um segmento é a reta perpendicular pelo seu ponto médio. Dado um segmento desenhado em uma folha de papel, a mediatriz pode ser obtida por dobradura, rebatendo um extremo do segmento sobre o outro, e vincando a folha. Traçando uma linha sobre o vinco, temos a mediatriz. Outra forma é desenhar arcos de circunferência com o compasso, com centros nos extremos do segmento e mesmo raio, e marcar dois pontos equidistantes desses extremos. Passando uma reta por esses pontos, temos a mediatriz. Certamente que uma forma mais simples e imediata consiste em usar uma régua para marcar o ponto médio do segmento e traçar a perpendicular usando um esquadro de 90°. Confira ilustração na Figura 6.5.

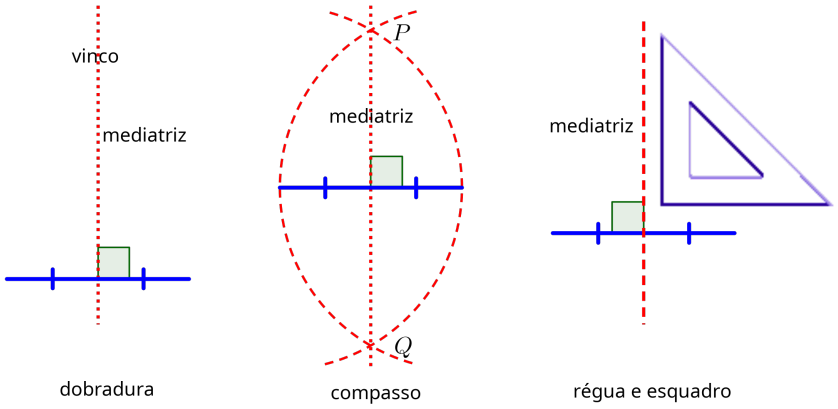


Figura 6.5. Métodos para desenhar a mediatriz de um segmento.

O método do "compasso" para obter a mediatriz de um segmento, ilustrado no desenho do centro da Figura 6.5, usa a seguinte propriedade: *dado um segmento em um plano, se um ponto é equidistante dos seus extremos, então ele está na sua mediatriz.* Como as duas circunferências ali traçadas têm o mesmo raio, seus pontos de encontro P e Q são equidistantes dos extremos do segmento. Esses dois pontos determinam uma reta, e a propriedade citada garante que essa reta é a mediatriz.

Para ver que vale a propriedade, se um ponto A é equidistante dos extremos B e C de um segmento, então o triângulo ABC é isósceles de vértice A. Pelo que vimos na seção anterior, a altura relativa a A coincide com a mediana, e assim A está na mediatriz.

Por outro lado, *dado um segmento e sua mediatriz em um plano, todo ponto dessa mediatriz é equidistante de seus extremos.* De fato, se um ponto A está na mediatriz de um segmento BC, no triângulo ABC a altura e a mediana relativas ao vértice A coincidem, e assim ABC é isósceles de base BC. Portanto $AB = AC$, e A é equidistante de B e C. Confira o Problema 6.7.4.

Uma síntese dessas duas propriedades da mediatriz pode ser expressa pela seguinte frase: *em um plano, a mediatriz de um segmento é o conjunto dos pontos desse plano que são equidistantes dos seus extremos.*

6.5 Propriedades de paralelogramos

Paralelogramos são quadriláteros em que os lados opostos são paralelos. Já vimos na Subseção 4.4.2 como um reticulado de dois feixes de retas paralelas equidistantes pode proporcionar oportunidades no estudo do paralelogramo, como o entendimento do que são lados opostos, lados adjacentes, ângulos opostos, ângulos adjacentes, e paralelismo de lados opostos. Por outro lado, estudantes com mais experiência podem estar tranquilos quanto ao fato de que os paralelogramos menores nesses reticulados são congruentes, no sentido de que podem ser transladados uns sobre os outros, fazendo-os coincidirem. Experimentos com recortes ou geoplano podem reforçar a percepção dessa propriedade e corroborar a ideia de que polígonos congruentes têm elementos correspondentes de mesma medida, como lados, ângulos, diagonais, alturas, etc.

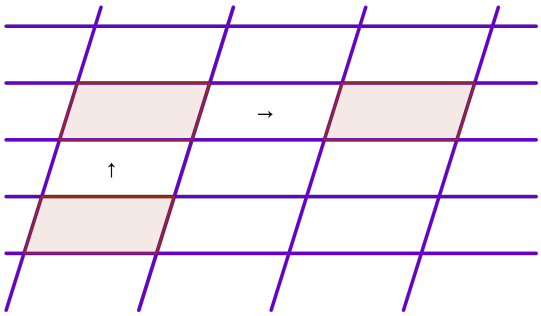


Figura 6.6. Estudo de paralelogramos.

Admitindo essas acepções, propriedades de paralogramos podem ser deduzidas. Por exemplo, para demonstrar que $\alpha = \beta$ na Figura 6.7, notamos que $P_1 = P_2$ implica $\beta = \gamma$, e que $P_1 = P_3$ implica $\alpha = \delta$. Mas $\gamma = \delta$ pois são opostos pelo vértice. Assim $\alpha = \beta$. De modo análogo se vê que os outros dois ângulos opostos têm a mesma medida (em geral diferente da medida anterior).

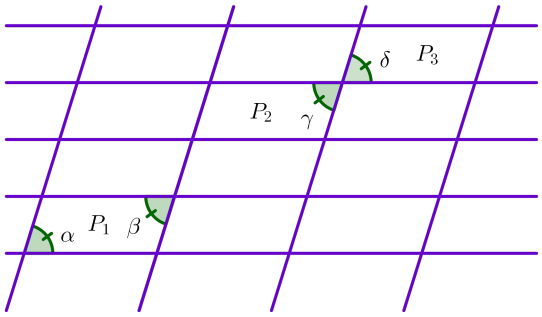


Figura 6.7. Deduzindo propriedades de paralelogramos.

Obtivemos assim a afirmação: *Ângulos opostos de paralelogramos têm a mesma medida.*

A generalidade dessa propriedade advém da ideia de que, dado um paralelogramo qualquer, é possível construir um reticulado do qual ele faça parte. Por outro lado, propriedades dos paralelogramos podem ser deduzidas usando congruências de triângulos. Os Problemas 6.7.15 a 6.7.14 complementam esses estudos.

O reticulado 6.6 traz a oportunidade de trabalhar habilidades de contagem. Um reticulado $m \times n$ é determinado por um feixe de $n+1$ retas paralelas equidistantes (que desenhamos na posição horizontal), e por um feixe de $m+1$ retas paralelas equidistantes e transversais às primeiras. Dizemos que m é a *largura* do reticulado, e que n é sua *altura*. Confira na Figura 6.8 um reticulado 3×4.

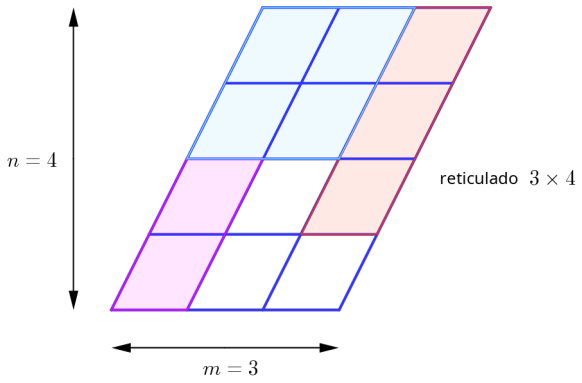


Figura 6.8. Paralelogramos em um reticulado 3×4.

Esse reticulado determina $3 \times 4 = 12$ paralelogramos menores. Mas existem muitos outros, como se vê naquela mesma figura. Quantos são?

É muito fácil se perder em uma contagem desse tipo. É necessário criar um procedimento, inclusive para facilitar a generalização. Na Figura 6.9 vemos como definir coordenadas para os vértices do reticulado. O ponto $P = (0,0)$ chama-se *pivô* do reticulado. Todo vértice do reticulado, por sua vez, é pivô de um sub-reticulado. Na Figura 6.9 vemos que $L = (0,1)$ é pivô de um sub-reticulado 3×3, e o ponto $Q = (1,0)$, de um 2×4.

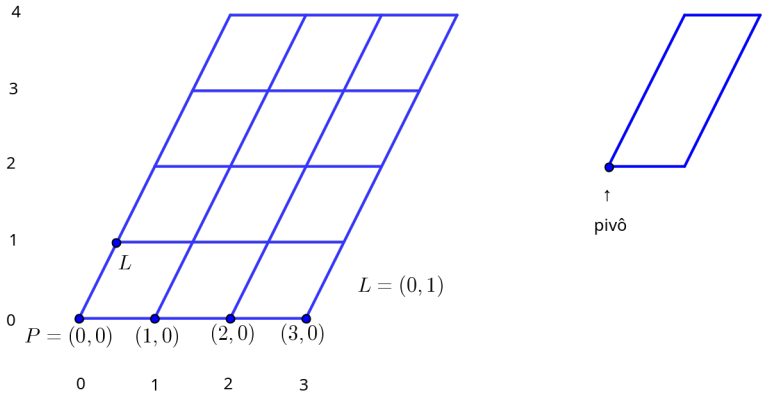


Figura 6.9. Um sistema de coordenadas no reticulado 3×4.

Dado um paralelogramo com dois lados horizontais, dizemos que o vértice esquerdo inferior é seu pivô, e que o paralelogramo é pivoteado por ele. Confira a Figura 6.9.

Quantos paralelogramos são pivoteados por $P = (0,0)$? Examinando o desenho, vemos que são 3 de "altura" 1, 3 de altura 2, 3 de altura 3 e 3 de altura 4. Portanto são $3+3+3+3 = 3 \times 4$. Os paralelogramos pivoteados por $Q = (1,0)$ são $2+2+2+2 = 2 \times 4$. Examinando mais casos percebemos que existem no reticulado $(3-a) \times (4-b)$ paralelogramos pivoteados por (a,b).

Calculando $(3-a) \times (4-b)$ para todas as coordenadas (a,b) e somando, obtemos 60 paralelogramos. A contagem termina observando que todo paralelogramo é pivoteado por um único vértice do reticulado. Portanto, contamos todos.

6.6 O Teorema de Pitágoras

Uma aplicação das congruências e do cálculo de áreas dá ensejo a uma demonstração geométrica do Teorema de Pitágoras. Vejamos como é.

Já comentamos, mas um triângulo se diz *retângulo* quando um de seus ângulos mede 90°. Os lados adjacentes a esse ângulo chamam-se *catetos*, e o lado oposto, *hipotenusa*. Os ângulos adjacentes à hipotenusa são agudos, e sua soma é 90°. Confira a Figura 6.10.

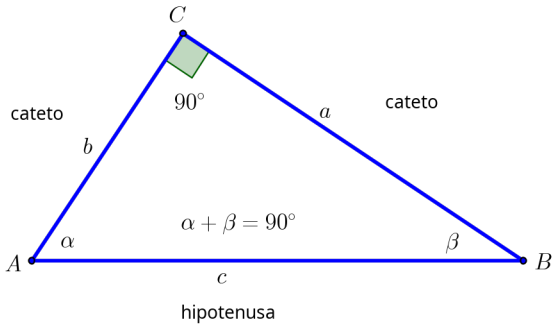


Figura 6.10. Um triângulo retângulo, nomenclatura usual e propriedades.

Consideremos um triângulo retângulo de catetos a e b, e hipotenusa c, conforme desenhado na Figura 6.11, à esquerda.

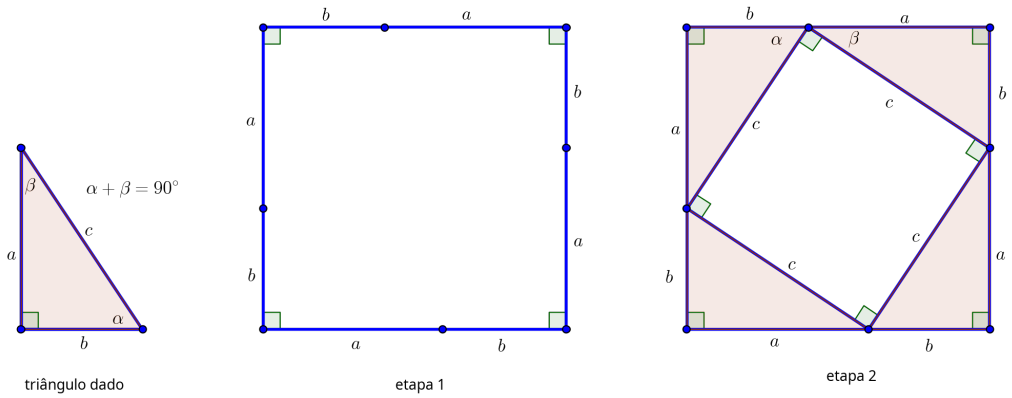


Figura 6.11. Uma demonstração geométrica do Teorema de Pitágoras.

Desenhamos um quadrado de lado $a+b$, e em cada lado marcamos um ponto que o divide em dois segmentos, um medindo a e o outro, b, conforme o desenho da etapa 1 da Figura 6.11. Ligamos esses pontos conforme está feito na etapa 2. Obtemos quatro triângulos retângulos que são cópias do triângulo dado pelo caso LAL. Portanto o terceiro lado de cada um desses quatro triângulos mede c. Vemos um quadrilátero, e seus ângulos internos medem 90°, pois são suplementares de $\alpha+\beta$. Assim, esse quadrilátero é um quadrado de lado c.

Calculamos agora a área $(a+b)^2$ do quadrado maior, que por sua vez é igual à soma das áreas da cinco peças que o compõe. Temos

$$(a+b)^2 = 4\frac{ab}{2} + c^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a^2+b^2=c^2.}$$

Esse é o que é comumente conhecido como Teorema de Pitágoras: *num triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.*

Mas esse resultado tem uma recíproca: *se, num triângulo, o quadrado de um lado é igual à soma dos quadrados dos outros dois, então ele é retângulo, e a hipotenusa é o lado maior.*

De fato, consideremos um triângulo com lados a, b e c tais que $c^2 = a^2 + b^2$. Portanto o terceiro lado desse triângulo mede $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Confira Figura 6.12, à esquerda.

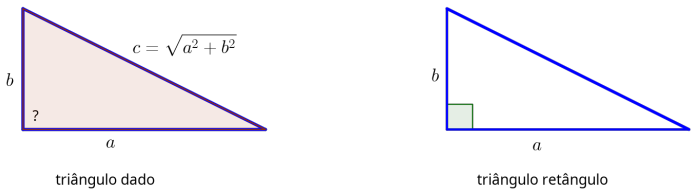


Figura 6.12. Recíproca do Teorema de Pitágoras.

Construímos, a seguir, um triângulo retângulo de catetos a e b. Então, pelo que foi demonstrado acima, a hipotenusa desse trângulo mede $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Do caso LLL os dois triângulos são congruentes. Assim sendo, o triângulo dado também é retângulo. Temos então o

Teorema 6.1 (Teorema completo de Pitágoras)**.** *Um triângulo é retângulo se, e somente se, o quadrado de um lado é igual à soma dos quadrados dos outros dois.*

Um caso particular é o denominado *triângulo egípcio* com lados medindo 3, 4 e 5. Como $5 = \sqrt{3^2 + 4^2}$, esse triângulo é retângulo. Já comentamos na Seção 3.2 que os pedreiros usam essas medidas para construir paredes perpendiculares. Confira a Figura 3.2.

6.7 Problemas

Problema 6.7.1. Explique por que não existe LLA como caso de congruência geral (a não ser que A seja um ângulo reto).

Problema 6.7.2. Justifique por que, em um triângulo isósceles qualquer, as alturas relativas aos vértices da base têm a mesma medida.

Problema 6.7.3. Justifique por que, em um triângulo isósceles qualquer, as bissetrizes relativas aos vértices da base têm a mesma medida.

Problema 6.7.4. Num triângulo uma altura e uma mediana coincidem. Argumente que o triângulo é isósceles. O mesmo ocorre se uma altura e uma bissetriz coincidem.

Problema 6.7.5. Explique por que num triângulo qualquer as mediatrizes dos três lados se encontram em um único ponto.

Problema 6.7.6. Explique por que num triângulo equilátero as bissetrizes, as alturas e as medianas dos três lados se encontram em um único ponto. Esse ponto é denominado *centro do triângulo equilátero.*

Problema 6.7.7. Na Figura 6.13, os triângulos ABC são isósceles com base BC e M e N são pontos médios. No triângulo da esquerda AH é uma altura. No triângulo da direita, D e E dividem BC em três partes iguais. Em cada caso encontre os triângulos congruentes, e justifique. Por que, no triângulo da esquerda, o ponto P está nos três segmentos?

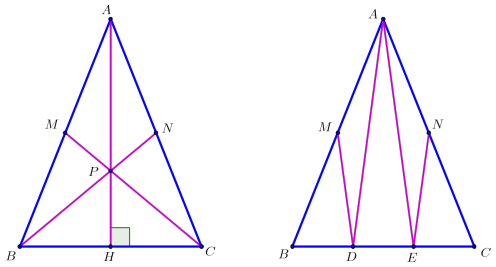


Figura 6.13. À procura de triângulos congruentes.

Problema 6.7.8. Vimos, no Problema 4.5.9, condições para que três canudos de comprimentos a, b e c possam formar um triângulo. Usando desenhos complete as condições, argumentando por que é necessário que $|b-c| < a < b+c$.

Problema 6.7.9. Argumente, em nosso contexto, que em um quadrado qualquer: (i) as duas diagonais têm a mesma medida; (ii) uma diagonal qualquer determina com os lados ângulos de 45°; (iii) as diagonais de cortam ao meio; (iv) as diagonais são perpendiculares.

Problema 6.7.10. Em um retângulo qualquer, argumente: (i) as diagonais são de mesma medida; (ii) qualquer diagonal determina com os lados ângulos de mesma medida, tomando ângulos em extremos diferentes da diagonal e situados em bandas opostas; (iii) as diagonais se cortam ao meio; (iv) se o retângulo não é quadrado, as diagonais não são perpendiculares.

Problema 6.7.11. No Problema 4.5.11 vimos o que é deformação de um polígono plano. Justifique agora por que triângulos não são deformáveis.

Problema 6.7.12. (i) Justifique agora por que todo quadrilátero, seja ele convexo ou não, é deformável. (ii) Usando quadriláteros feitos de canudos, se necessário, mostre que todo quadrilátero não convexo pode ser deformado continuamente em um quadrilátero convexo. (iii) Justifique por que todo polígono plano convexo com n lados, $n \geq 4$, é deformável. (iv) quantas diagonais devem ser introduzidas em um polígono plano convexo de n lados para que ele deixe de ser deformável?

Problema 6.7.13. Dado um paralelogramo construa, usando régua, esquadro e transferidor, um reticulado do qual ele faça parte, assim como vários outros paralelogramos a ele congruentes. Dos três instrumentos, régua, esquadro e transferidor, qual deles pode ser dispensado?

Problema 6.7.14. Usando congruências demonstre que, em um paralelogramo qualquer, ângulos opostos e lados opostos têm a mesma medida.

Problema 6.7.15. Argumente, no presente contexto, que paralelogramos congruentes têm alturas de mesma medida, assim como as diagonais correspondentes. Confira a Figura 6.14.

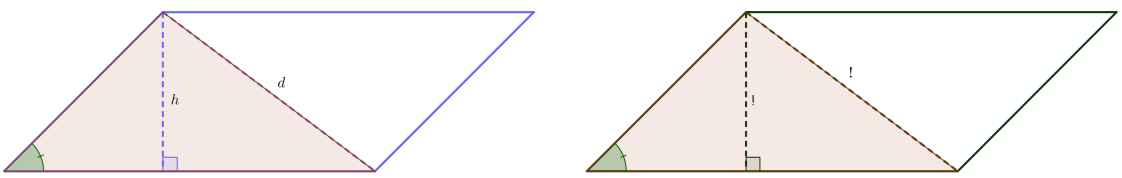


Figura 6.14. Paralelogramos congruentes.

Problema 6.7.16. A soma dos ângulos internos dos paralelogramos é constante? Quanto é a soma de dois ângulos adjacentes de um paralelogramo qualquer? Confira a Figura 6.15. O que é um paralelogramo em que todos os ângulos internos têm a mesma medida?

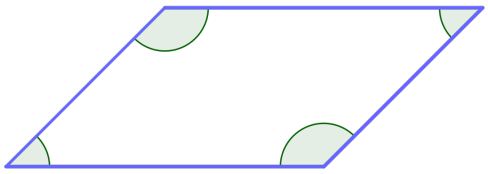


Figura 6.15. Ângulos internos de um paralelogramo.

Problema 6.7.17. Vemos, na Figura 6.16, um paralelogramo e suas duas diagonais. Identifique (e justifique) todos os pares de triângulos congruentes. Conclua que as diagonais se cortam ao meio.

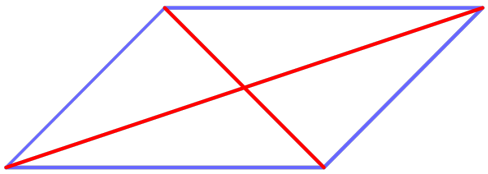


Figura 6.16. Diagonais de um paralelogramo.

Problema 6.7.18. Como se sabe, losangos são paralelogramos com os quatro lados de mesma medida. Argumente que as diagonais de um losango são perpendiculares e se cortam ao meio. Entretanto, se as diagonais não têm a mesma medida, então o losango não é um quadrado. Confira a Figura 6.17.

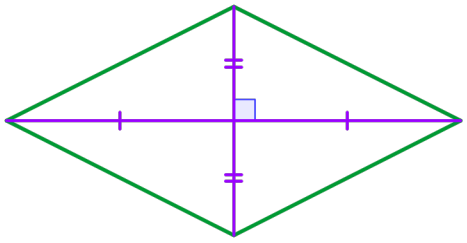


Figura 6.17. Diagonais de um losango.

Problema 6.7.19. Em um geoplano cartesiano, em que a grade é determinada pelos pontos de coordenadas inteiras, é possível cercar paralelogramos de várias maneiras. Nas duas situações consideradas na Figura 6.18, argumente diretamente que lados opostos têm a mesma medida, assim como ângulos opostos. Uma questão antecede a essas: os dois polígonos dessa Figura são mesmo paralelogramos?

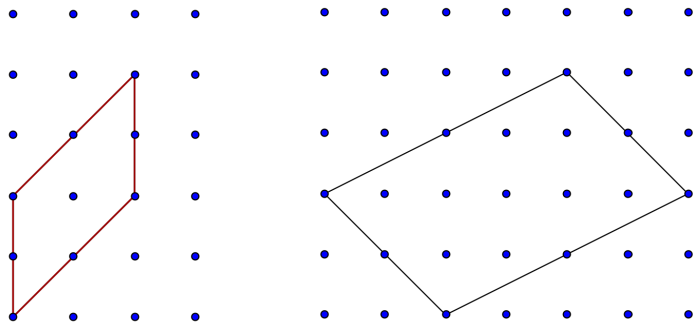


Figura 6.18. Paralelogramos em geoplanos cartesianos.

Problema 6.7.20. Examine a seguinte variação do problema do sitiante, visto na Subseção 4.4.4: o sitiante deseja aproveitar um muro reto que já tem no sítio, e assim fazer um cercado retangular maior. Como deve ser o cercado?

Problema 6.7.21. Na Figura 6.19 temos uma circunferência de centro O, e AB é um diâmetro. O ângulo a se diz ser inscrito na semicircunferência. Ache sua medida.

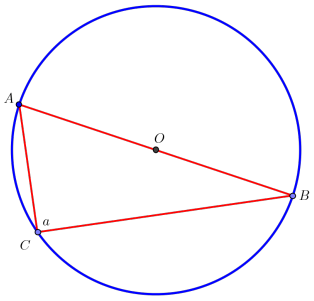


Figura 6.19. Um ângulo inscrito em uma semicircunferência.

6.8 Temas para investigação

Tema 6.8.1. Recorte um triângulo retângulo de uma folha de papel, e, usando dobradura, vinque a mediana relativa à hipotenusa. Observando a figura, descubra a relação dessa mediana com a hipotenusa. Crie uma argumentação a nível de dedução informal, que justifique sua observação.

Tema 6.8.2. Num triângulo uma bissetriz e uma mediana coincidem. O que se pode dizer sobre o triângulo?

Tema 6.8.3. Generalize a atividade sobre áreas e perímetros de quadrados desenvolvida na Subseção 4.4.3, considerando áreas e perímetros de retângulos. Tome separadamente retângulos cujos lados são inteiros positivos e retângulos cujos lados são números reais positivos. Generalize também considerando volumes e áreas de paralelepípedos.

Tema 6.8.4. **a)** Investigue outras propriedades do centro de um triângulo equilátero (definido no Problema 6.7.6). **b)** Um professor de Física afirmou: o centro de um triângulo equilátero é seu ponto de equilíbrio. Imagine formas de verificar isso.

Tema 6.8.5. As mediatrizes dos lados de qualquer triângulo se encontram em um ponto, denominado circuncentro. Justifique e descubra uma propriedade desse ponto. Desenhe triângulos com circuncentros em diversas situações, e faça conjecturas. Descubra justificativas.

Tema 6.8.6. **a)** Usando propriedades vistas neste texto justifique por que unindo os pontos médios dos lados de um triângulo equilátero se obtém 4 triângulos equiláteros menores. **b)** Iniciando com um triângulo equilátero (etapa 0), construa, na etapa 1, 4 triângulos equiláteros, seguindo o processo dado em a). Prosseguindo, em cada etapa construa novos triângulos equiláteros dentro dos que existem na etapa anterior. Confira a Figura 6.20. Calcule o número dos triângulos equiláteros menores na etapa n.

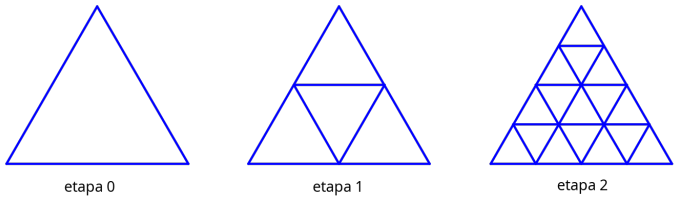


Figura 6.20. Sequência de triângulos equiláteros encaixantes.

Tema 6.8.7. Já vimos que um reticulado $m \times n$ é determinado por um feixe de $n+1$ retas paralelas equidistantes (que desenhamos na posição horizontal), e por um feixe de $m+1$ retas paralelas equidistantes e transversais às primeiras. Confira na Figura 6.8 um reticulado 3×4. Quantos paralelogramos determina um reticulado $m \times n$? Sugestão: generalize o esquema comentado no final da Subseção 6.5.

6.9 Atividades para licenciandos e professores

Atividade 6.9.1. Um professor solicitou de um estudante que provasse que todo segmento tem um único ponto médio. O estudante retrucou: "Professor, eu sei que todo segmento tem um único ponto médio. Basta pegar um barbante e dobrá-lo ao meio para ver isso. Por que então tenho que provar?" O que você acha?

Atividade 6.9.2. Crie atividades análogas à da Figura 6.2 para percepção dos casos de congruência LAL, ALA, LAAo e LLA para o triângulo retângulo.

Atividade 6.9.3. Em [3], pág. 289, está proposta a seguinte habilidade para o 3º ano do Ensino Fundamental: *Reconhecer figuras congruentes, usando sobreposição e desenhos em malhas quadriculadas ou triangulares, incluindo o uso de tecnologias digitais.* Como o aplicativo Geogebra pode ajudar um estudante inexperiente a desenvolver sua percepção de triângulos congruentes?

Atividade 6.9.4. Dado o desenho de um triângulo em uma folha de papel, como você desenharia um triângulo congruente com o aplicativo Geogebra?

Capítulo 7

Investigações sobre sólidos

7.1 Introdução

Nos últimos anos do ensino básico, no ensino médio, são estudados os sólidos. Fazemos agora um recorte sobre esse assunto. Damos ênfase ao cubo, ao tetraedro e a seções planas de sólidos. Apresentamos também sugestões de atividades experimentais sobre volumes.

7.2 O cubo e sólidos correlatos

Instruções para desenhos de cubos são de interesse em vários segmentos da atividade social. O *cubo* é a figura geométrica formada pela reunião de seis quadrados congruentes de modo que cada lado de cada um dos quadrados coincide com um lado de um único outro quadrado. Essa figura tem um formato bastante conhecido, e vemos a seguir alguns desenhos.

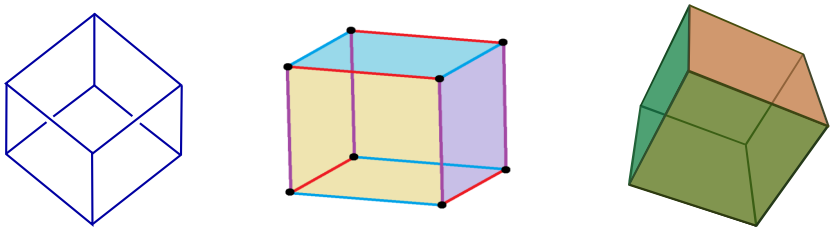


Figura 7.1. Desenhos de cubos.

Na Figura 7.1, desenho da esquerda, o cubo está representado por suas arestas. Essa representação chama-se, às vezes, cubo aramado. No desenho do centro vemos as faces do cubo, e essa parece ser a representação mais usada. À direita temos o cubo sólido, que inclui as faces e seu interior.

Apresentamos algumas dicas simples para desenhar cubos. Um cubo é uma figura em três dimensões, e um desenho em folha de papel é uma figura em duas dimensões, chamada *projeção plana* do cubo. Para realizar essa redução empregamos algumas técnicas. Uma das mais usadas é a denominada projeção *cavaleira* ou *militar*. Para obter um cubo de aresta a desenhamos dois quadrados de lado a, com lados correspondentes paralelos, e deslocados um em relação ao outro. Ligando os vértices correspondentes (chamados lados oblíquos) temos um desenho do cubo. Os lados oblíquos têm uma redução de um fator k que depende do ângulo θ que esse lado faz com a direção horizontal da folha. Os manuais de Desenho Técnico apresentam a seguinte tabela com os valores mais usados:

θ	k
30°	2/3
45°	1/2
60°	1/3

Por exemplo, em um cubo com lado de 4 cm, a aresta oblíqua deve medir $(2/3)4 = 8/3$ cm se a angulação for de 30°. Na Figura 7.2 seguem desenhos com os valores da tabela acima.

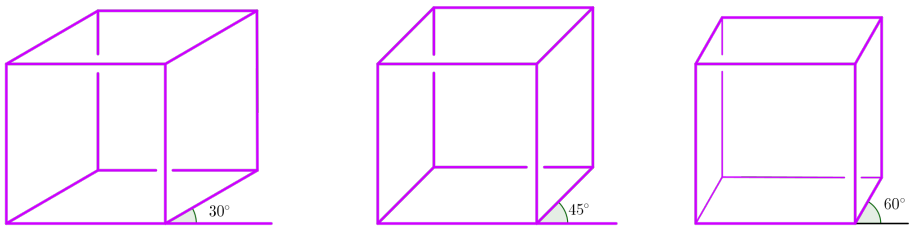


Figura 7.2. Desenhos de cubos usando a projeção cavaleira.

Na Figura 7.3 vemos o desenho de um cubo com o uso da chamada *perspectiva isométrica*. Todos os segmentos desenhados têm a mesma medida. Os quadriláteros são losangos com ângulos de medidas 120° e 60°.

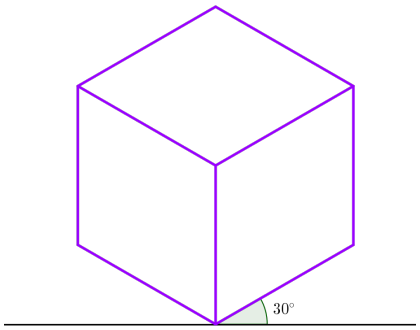


Figura 7.3. Desenho de cubo na perspectiva isométrica.

Os métodos de projeção vistos acima, perspectiva cavaleira e isométrica, são os mais usados em desenhos técnicos de Geometria. Se quisermos desenhos mais realistas podemos usar outros recursos, como pontos de fuga. A Figura 7.4 ilustra um exemplo em que se usa um ponto de fuga.

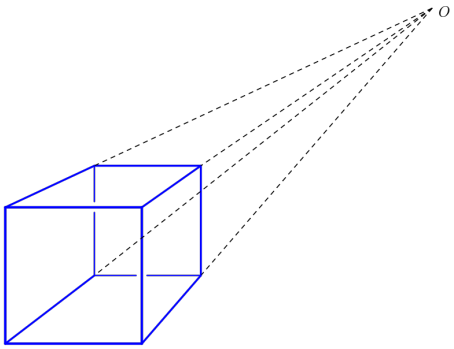


Figura 7.4. Desenho de cubo com um ponto de fuga.

Os *paralelepípedos* são prismas quadrangulares, com a única condição adicional de que suas bases são paralelogramos. Se a base for um retângulo, ele se diz *paralelepípedo retângulo*. Se, além disso, for um prisma reto, chama-se *paralelepípedo reto retângulo*. Um exemplo particular desse último é o cubo. Confira, na Figura 7.5, desenhos de paralelepípedos.

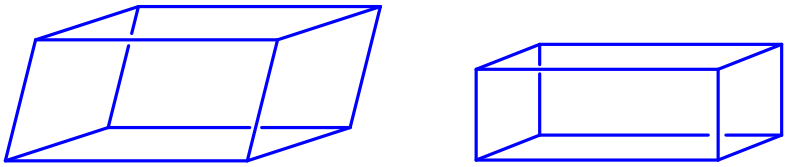


Figura 7.5. Desenhos de um paralelepípedo oblíquo e de um reto retângulo.

7.3 O tetraedro e sólidos correlatos

O *tetraedro* é a figura geométrica formada pela reunião dos segmentos que unem quatro pontos não coplanares quaisquer. Vemos, na Figura 7.6, desenhos de tetraedros em diversas posições. O desenho da esquerda corresponde à definição dada. Nos outros dois desenhos algumas faces estão coloridas.

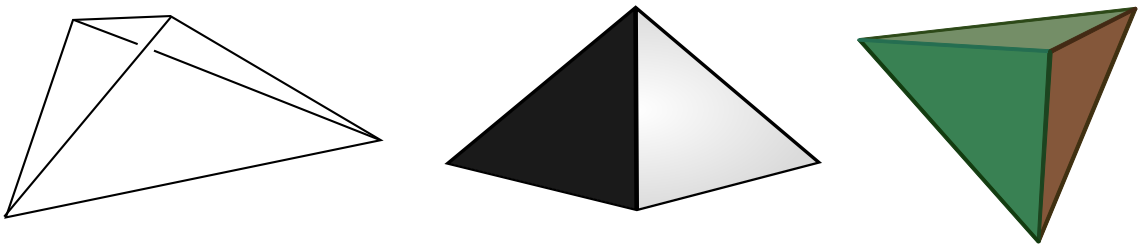


Figura 7.6. Desenhos de tetraedros.

Um tetraedro se diz *regular* quando os triângulos que o compõem são todos equiláteros. Isso implica que todas as arestas são congruentes (duas a duas). Um tetraedro se diz *isósceles* quando tem um vértice ao qual concorrem três arestas congruentes. Um tetraedro com três arestas concorrentes perpendiculares duas a duas chama-se *trirretângulo*. Um tetraedro não regular com as faces congruentes duas a duas chama-se *disfenóide*. Um tetraedro com as arestas não congruentes duas a duas denomina-se *escaleno*.

Dado um vértice de um tetraedro, existe apenas uma face que não o contém, denominada *face oposta* a esse vértice. Uma *altura* de um tetraedro é o segmento com um extremo em um vértice e outro extremo no plano determinado pela face oposta, ao qual é perpendicular.

A pirâmide é um dos sólidos mais conhecidos. A *base* da pirâmide é um polígono em um plano, e seu *vértice* é um ponto fora desse plano, conectado com segmentos aos vértices do polígono. As pirâmides são , geralmente, nomeadas pela base. Assim, na Figura 7.7, da esquerda para a direita, temos: uma pirâmide quadrangular, uma pirâmide octogonal, uma pirâmide heptagonal côncava e uma pirâmide quadrangular oblíqua.

A *altura* de uma pirâmide é o segmento que une seu vértice ao plano da base, de modo que esse segmento seja perpendicular a esse plano. Como sempre, chamamos também de altura a

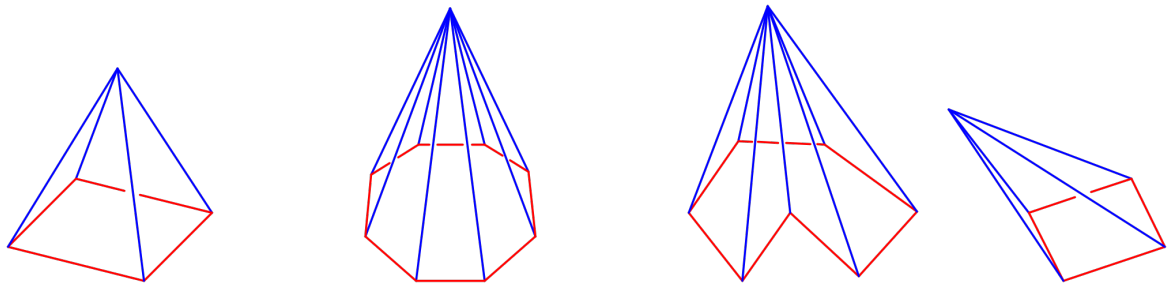


Figura 7.7. Desenhos de pirâmides.

medida desse segmento. Se a base da pirâmide for regular e seu centro for o pé da altura, dizemos que ela é *regular*.

7.4 Investigações sobre seções de sólidos

Uma atividade bem interessante é a da investigação dos tipos de figuras que podem ser formadas em um plano que secciona a superfície de um dado sólido.

Experimentos com modelos de sólidos feitos de cartolina e figuras recortadas podem ajudar estudantes da escola básica no descobrimento dessas seções. Esses experimentos certamente ajudam os estudantes a desenvolverem sua imaginação e aprimorar sua capacidade de abstração. Confira uma situação ilustrada na Figura 7.8.



Figura 7.8. Desenhando uma seção em um cubo.

Seções do cubo podem ter os mais variados formatos. Sempre são polígonos planos com $n \leq 6$ lados. No Problema 7.6.8 vemos um exemplo em que a seção é um hexágono regular.

Outros sólidos são considerados na Seção de Problemas 7.6 e na Seção de projetos 7.7.

7.5 Experimentos sobre volume

A literatura em ensino de Matemática e, especialmente, os recursos de mídia, trazem inúmeros experimentos para investigar volumes de sólidos. Pensamos ser uma boa opção uma consulta ao livro didático [30], a partir da página 91.

Fazemos aqui uma breve incursão para o entendimento do misterioso fator de redução 1/3 entre o volume de uma pirâmide e de um prisma com igual área da base e mesma altura, fator

esse que ocorre também entre o volume de um cone e de um cilindro com mesma base e mesma altura.

Um cone e um cilindro, ambos circular reto de raio r e altura h, podem ser construídos com material adequado. Usando areia ou água se vê que o volume de três cones é (quase que exatamente) igual ao volume do cilindro. Confira ilustração na Figura 7.9.

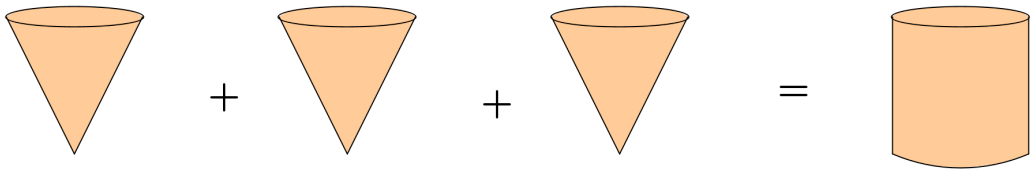


Figura 7.9. Comparando o volume de cones com o do cilindro.

Nessa experiência os sólidos podem variar e serem oblíquos, desde que tenham a mesma área da base e a mesma altura. Essa experiência indica que, em se tratando de cones e cilindros, se tem

$$\text{volume do cone} = \tfrac{1}{3}\ \text{volume do cilindro} = \tfrac{1}{3}\ \text{área da base} \times \text{altura}.$$

Exatamente o mesmo valor 1/3 ocorre como fator de redução quando comparamos o volume de uma pirâmide com o de um prisma com mesma altura e iguais áreas das bases. A experiência que pode ser feita aqui é a construção em papel cartolina de um prisma triangular e de três tetraedros como indicado Figura na 7.10. Caprichando na construção os três tetraedros podem ser encaixados dentro do prisma.

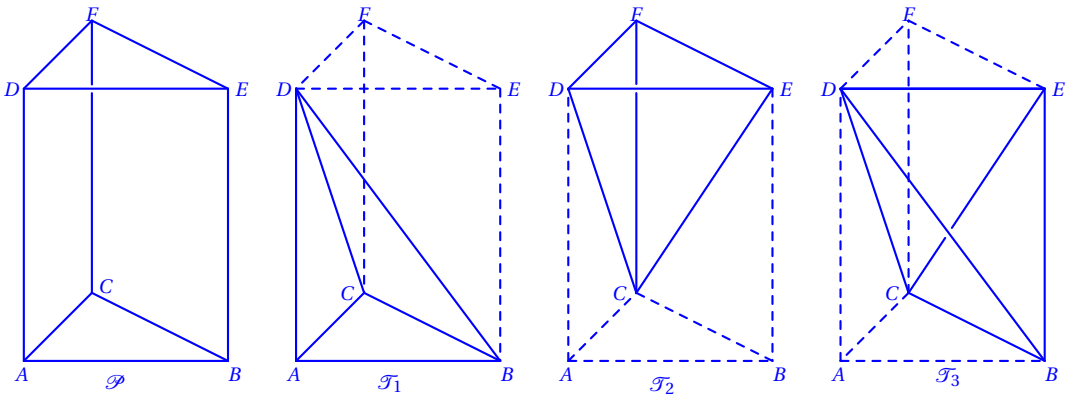


Figura 7.10. Repartição de um prisma em três tetraedros de mesmo volume.

Prismas oblíquos também funcionam, mas a construção é mais complicada. Um prisma cuja base é um polígono de n lados pode ser repartido em prismas triangulares, e assim o resultado continua valendo. Essa experiência indica que

$$\text{volume da pirâmide} = \tfrac{1}{3}\ \text{volume do prisma} = \tfrac{1}{3}\ \text{área da base} \times \text{altura}.$$

Justificativas mais detalhadas podem ser obtidas com o uso do chamado *Princípio de Cavalieri*. Já vi na literatura vários experimentos didáticos, alguns deles usando ideias de Arquimedes. Para encerrar este Capítulo reproduzo na Figura 7.11 um desenho que vi em [30], página 155. Os dois cones são circulares retos e têm raio da base r e altura também r. A semiesfera tem raio r. Vemos que

o volume de dois cones de raio e altura r é igual ao volume da semiesfera de raio r.

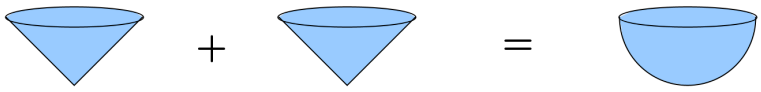


Figura 7.11. Comparando o volume de cones com o de uma semiesfera.

Como o volume de um cone é $\frac{1}{3}\pi r^2 \cdot r$, o experimento indica que o volume da semiesfera é $\frac{2}{3}\pi r^3$, e assim o volume da esfera de raio r é $\frac{4}{3}\pi r^3$. Essa é uma das mais belas fórmulas da Matemática Elementar.

7.6 Problemas

Problema 7.6.1. Defina diagonal de um cubo. Conte as diagonais de um cubo de duas formas: (i) usando um desenho; (ii) contando quantos segmentos unem dois vértices quaisquer do cubo, e depois subtraindo os que estão nas faces. Desenhe um cubo e suas diagonais.

Problema 7.6.2. Dê a medida de uma diagonal de um paralelepípedo reto retângulo de dimensões a, b e c. Todas as diagonais têm a mesma medida? Dê a medida de uma diagonal de um cubo de lado a.

Problema 7.6.3. Explique por que um cubo qualquer tem esfera inscrita e esfera circunscrita. Quais são seus centros? Calcule seus raios. E quanto a um paralelepípedo reto retângulo?

Problema 7.6.4. A Figura 7.12 mostra como localizar o centro de um tetraedro regular. Descreva detalhadamente essa localização.

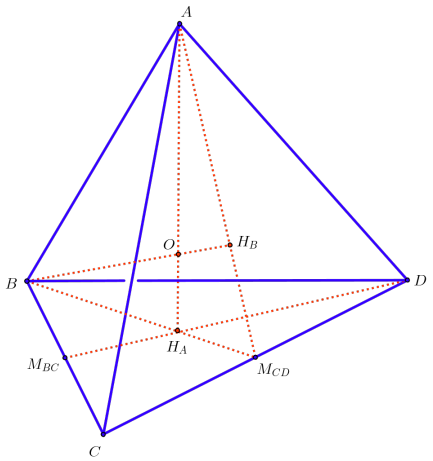


Figura 7.12. Localização do centro de um tetraedro regular.

Problema 7.6.5. **a)** Consideremos a figura formada pelas arestas de um tetraedro regular. Ao projetar perpendicularmente essa figura em um plano podemos ter vários desenhos. Três deles estão na Figura 7.13. São denominadas projeções simétricas do tetraedro regular. Para cada uma delas encontre a posição do tetraedro em relação ao plano de projeção. **b)** Encontre as projeções simétricas da figura formada pelas arestas de um cubo. Sugestão: escolhe-se uma reta adequada, e o plano de projeç ao é perpendicular a ela.

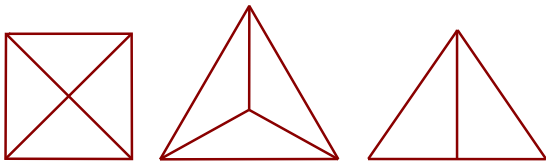


Figura 7.13. Projeções simétricas do tetraedro regular.

Problema 7.6.6. É do interesse da Química Molecular o denominado *ângulo tetraédrico* de um tetraedro regular. Esse ângulo tem vértice no centro do tetraedro e lados cada um contendo um vértice do tetraedro. Calcule seu valor (em radianos e em graus).

Problema 7.6.7. Na Figura 7.14 vemos um tetraedro inscrito em um paralelepípedo reto retângulo. Argumente para justificar que esse tetraedro é disfenóide.

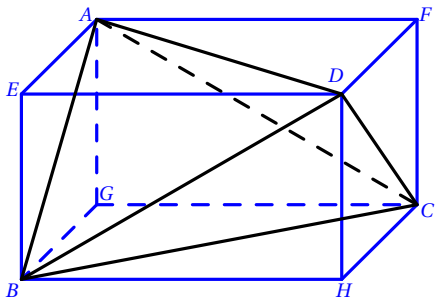


Figura 7.14. Tetraedro disfenóide inscrito em um paralelepípedo reto retângulo.

Problema 7.6.8. A Figura 7.15 mostra um cubo e um polígono cujos seis vértices são pontos médios dos segmentos. **a)** Mostre que esses seis pontos são coplanares. Sugestão: prove que eles estão no plano mediador de EC. **b)** Mostre que o hexágono é regular.

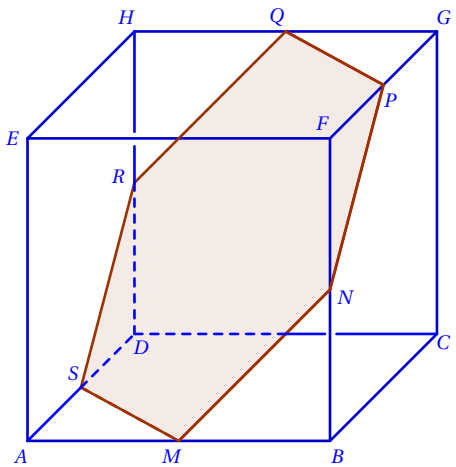


Figura 7.15. Desenho para o Problema 7.6.8.

7.7 Temas para investigação

Tema 7.7.1. Realize o seguinte experimento. Tome uma folha de cartolina grossa ou uma folha de papelão de aproximadamente 20×20 cm^2 para representar um plano. Tome uma vareta de madeira de uns 15 cm para representar uma reta. Corte um quadradinho de lado 1 cm para indicar o ângulo reto. Cole um lado do quadradinho no final da vareta, como na Figura 7.16, à esquerda. Em seguida cole a vareta com o quadradinho em um ponto P no centro da folha, de forma que a vareta fique em pé. Confira a Figura 7.16, à direita.

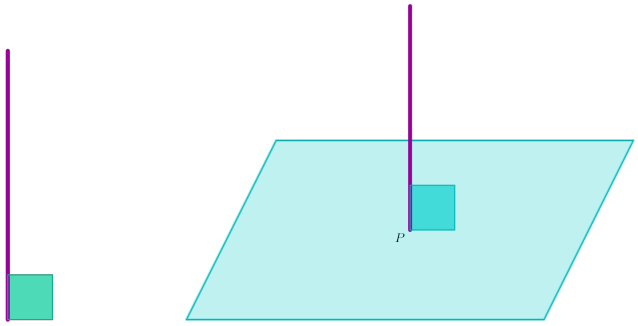


Figura 7.16. Experimento com reta e plano.

(i) Observe se a configuração é estável, isto é, se ela permanece mesmo com pequenos solavancos. Veja o que é preciso completar para alcançar a estabilidade. (ii) Com essa experiência, estabeleça um critério para que uma reta seja perpendicular a um plano por um ponto P. (iii) Satisfeito esse critério, o que se pode dizer sobre qualquer reta do plano que passa por P?

Tema 7.7.2. Realize o seguinte experimento. Tome uma folha de cartolina grossa ou uma folha de papelão de aproximadamente 20×20 cm^2 para representar um plano. Faça um furo em seu centro, chamando-o de ponto P. Tome uma vareta de madeira de uns 15 cm para representar um segmento. Marque seu ponto médio e a insira no furo da cartolina até que o ponto médio coincida com o furo. Certifique-se que a vareta fique perpendicular ao plano. Confira o experimento anterior e a Figura 7.17.

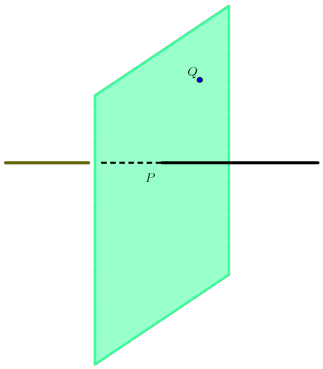


Figura 7.17. Experimento com reta e plano.

O que se pode dizer de um ponto Q qualquer do plano? Vale a recíproca? Como justificar as afirmações?

Tema 7.7.3. Investigue que pirâmides regulares podem ter todas as suas arestas de mesma medida.

Tema 7.7.4. Investigue que tipo de figuras podem ser formadas em um plano que secciona a superfície de um cubo passando pelo seu interior. Pode ser formado um pentágono? E um triângulo equilátero? Qual é a seção de maior área?

Tema 7.7.5. Investigue que tipo de figuras podem ser formadas em um plano que secciona a superfície de um cilindro circular reto fechado passando pelo seu interior.

Tema 7.7.6. Um plano, ao seccionar um tetraedro regular, pode determinar um paralelogramo? um retângulo? um losango? Essa seção pode ser um quadrado? Um triângulo equilátero? Explique e desenhe.

Tema 7.7.7. Investigue como são as seções planas de uma superfície esférica. Em particular, o que ocorre se o plano contém dois pontos antípodas da superfície esférica?

Tema 7.7.8. Um paralelepípedo reto retângulo $m \times n \times p$ é construído com mnp cubos unitários. Calcule quantos paralelepípedos podem ser contados.

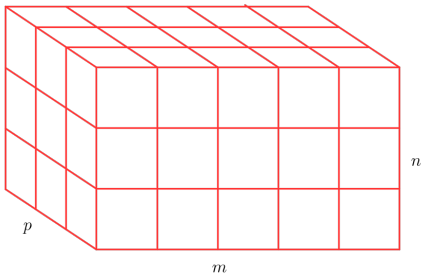


Figura 7.18. Um paralelepípedo reto retângulo $5 \times 3 \times 3$.

7.8 Atividades para licenciandos e professores

Atividade 7.8.1. Imagine e descreva brevemente uma atividade com estudantes com o material que você construiu no Tema 7.7.5.

Atividade 7.8.2. Imagine e descreva brevemente atividades experimentais para o estudo da esfera no ensino básico.

Atividade 7.8.3. Imagine e descreva brevemente atividades experimentais para o estudo de cilindros e cones no ensino básico.

Atividade 7.8.4. Em [3], pág. 283, é colocada a seguinte habilidade para o 2º ano do Ensino Fundamental no campo da Geometria: *Reconhecer, nomear e comparar figuras geométricas espaciais (cubo, bloco retangular, pirâmide, cone, cilindro e esfera), relacionando-as com objetos do mundo físico.* Descreva você o que existe de diferença e de similar entre um cubo e uma esfera.

Apêndice A

Respostas e sugestões a alguns problemas

Observações: Nem sempre as respostas dadas estão completas. Fique atento ao enunciado do problema para ver se é necessário completar. Muitas vezes não apresentamos nenhum argumento, o que significa que ficou por conta do estudante. Portanto, muitas respostas devem ser vistas apenas como dicas. Lembramos que, na resolução de um problema, apenas encontrar a resposta correta não é suficiente. O processo de descoberta e uma justificativa adequada são muito importantes, e o estudante deve aprender a descrevê-los. Examine bem os exemplos que demos no texto, eventualmente eles podem servir de inspiração.

Problemas 1.5

1.5.1 Destacamos na Figura 1.11 simetrias em plantas e animais.
1.5.2 Identifique pelo menos quatro.
1.5.3 b) A figura é invariante por três rotações e tem quatro retas de reflexão.
1.5.4 Existe apenas uma reta.

Temas para investigação 1.6

1.6.1 Uma ideia é consultar o verbete *Ernst Haeckel* da Wikipedia. As simetrias dos esqueletos certamente facilitam o movimento e a estabilidade.
1.6.2 Mais informações no verbete *Ice crystal* da Wikipedia.
1.6.3 Existe muita informação na internet, comece com a Wikipedia.

Problemas 2.5

2.5.1 Faça suas tentativas e as descreva.
2.5.2 Faça suas tentativas e as descreva.
2.5.3 O aplicativo Geogebra permite desenhar um triângulo com uma altura e mover o vértice para obter várias configurações.
2.5.4 Use o aplicativo Geogebra.

Problemas 3.7

3.7.1 Para justificar use a recíproca do Teorema de Pitágoras. Existem os ternos pitagóricos, que são infinitos. Um exemplo é 6, 8 e 10.
3.7.2 Pode-se usar um esquadro grande de pedreiro. É possível usar as medidas 1 m, 2 m e 2,24 m, que são números pitagóricos não inteiros, pois $\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}\approx 2,24$.
3.7.9 Esse poliedro chama-se icosaedro truncado, e é obtido pelo truncamento do icosaedro regular, retirando-se tetraedros de suas pontas. Tem 90 arestas, 60 vértices e 32 faces, sendo 12 pentágonos e 20 hexágonos. Como sólido de Arquimedes é dito ser semirregular (com todas as faces regulares mas de dois ou mais tipos).

Temas para investigação 3.8

3.8.1 É o dodecaedrano $C_{20}H_{20}$, da Figura 3.24.
3.8.2 Dica: no septulene os hexágonos não podem ser regulares.
3.8.3 Consulte a internet.

Problemas 4.5

4.5.1 (iv) para produzir paralelogramos não losangos as retas de um feixe devem resguardar entre si uma distância diferente daquela do outro feixe, além de não serem perpendiculares.
4.5.2 O poliedro é o icosaedro truncado, com 32 faces, sendo 12 pentágonos regulares e as outras 20 são hexágonos regulares. Tem ainda 60 vértices e 90 arestas.
4.5.3 Faça uma planificação conveniente do cubo e ligue os dois pontos com um segmento.
4.5.4 (iv) não tem fundamento, as outras são possíveis.
4.5.5 Prisma triangular e prisma pentagonal, ambos regulares (todas as faces são regulares).
4.5.6 No caso das faces com letras há necessidade de verificar a orientação correta das mesmas.
4.5.7 A planificação da esquerda gera um octaedro côncavo, parecido com um barco; a da direita, o octaedro regular.
4.5.9 Se $a < b + c$ a diferença $|b - c|$ não pode ser muito grande. Faça desenhos para delimitar essa diferença.
4.5.10 Para formar um triângulo obtuso dois ângulos devem ser agudos, digamos os ângulos adjacentes ao lado de medida a. A condição é então $b < a$ e $c < a$, além da condição geral $|b - c| < a < b + c$.
4.5.12 Seja ℓ o lado do quadrado, sendo ℓ real positivo. Temos $A = \ell^2$ e $P = 4\ell$. Resolva a equação $A = P$ e as inequações $A < P$ e $A > P$.
4.5.13 Calcule todas as áreas para um perímetro fixado p, e depois compare.
4.5.14 No contexto deste Capítulo uma solução é reproduzir o mecanismo com palitos de sorvete.
4.5.15 O mecanismo pode ser construído com palitos de sorvete. Todos os pinos devem ser rotativos.
4.5.16 Na Geometria Euclidiana retas paralelas nunca se encontram. Talvez a pessoa estivesse pensando na representação artística de retas paralelas.

Temas para investigação 4.6

4.6.1 Duas planificações são equivalentes quando uma puder se sobrepor sobre a outra, coincidindo todos os lados, eventualmente depois de se realizar rotações ou reflexões. Para achar as 11 planificações observe primeiro que não podem existir 5 ou 6 quadrados em fila. Comece então com os casos em que existem 4 quadrados em fila.
4.6.2 O tetraedro tem 2 planificações não equivalentes, e o octaedro, 11.
4.6.3 b) $P(1) = 1$, $P(2) = 1$, $P(3) = 2$, $P(4) = 5$, $P(5) = 12$, $P(6) = 35$, $P(7) = 108$. c) O primeiro poliminó com buraco é um heptaminó.
4.6.4 c) $C(1) = 1$, $C(2) = 1$, $C(3) = 2$ (1 regular e 1 não-regular), $C(4) = 7$ (2 regulares e 5 não-regulares), $C(5) = 23$. d) todos os 4-cubos-soma não regulares são formados pelos 3-cubos-soma não regulares acrescidos de um cubo.

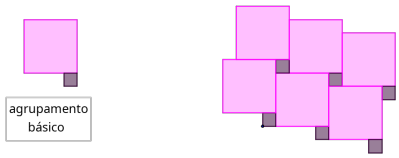
Atividades 4.7

4.7.1 Uma fonte é o verbete *Modelo Van Hiele* da Wikipedia.
4.7.2 a) A desigualdade triangular, numa primeira experiência, pode ser expressa com palavras.
4.7.3 Para estudantes inexperientes o professor pode aceitar atividades exploratórias com valores. Posteriormente deve incentivar o uso de equações e inequações, pois essa atividade pode servir de passagem entre os dois métodos.
4.7.6 É possível argumentar que não existem outros ladrilhamentos, pois os ângulos internos dos polígonos regulares aumentam com o número de lados, e deve haver pelo menos 3 peças em volta de um vértice. Assim o hexágono é o último possível.
4.7.7 O uso de desenhos e recortes serve não apenas para ajudar na construção de um modelo abstrato mais exato, como também para entender como calcular a área da superfície cilíndrica e explorar outras propriedades.
4.7.14 O pantógrafo pode também ser adquirido em papelarias ou casas especializadas em material para desenho

Problemas 5.9

5.9.1 Uma semirreta é determinada por dois pontos, sendo que um deles deve ser sua origem.
5.9.2 Existem sete relações com os quatro ângulos. Usando duas delas se prova que $a = b$.
5.9.3 $a = 30°$.
5.9.4 $u \perp v$.
5.9.5 Usando igualdade de ângulos correspondentes, temos quatro relações. Introduzindo a igualdade opv, elas se reduzem a duas.

5.9.6 a) Desenhe primeiro a base com uma medida pré-determinada. Ache seu ponto médio e, usando um esquadro, desenhe sua mediatriz. Localize o vértice na mediatriz e desenhe os lados.
5.9.7 Use que a soma dos ângulos de qualquer triângulo é 180°.
5.9.8 Segue exemplo na Figura abaixo.



5.9.9 Use a fórmula (5.1) para completar a tabela.
5.9.10 O que ocorre com o ângulo interno de um polígono regular de n lados à medida que n aumenta?
5.9.11 Argumente por contradição.
5.9.12 Dadas muitas cópias de um quadrilátero convexo, para formar o ladrilhamento siga a seguinte regra: junte duas cópias por lados correspondentes, mas com os vértices trocados.

Temas para investigação 5.10

5.10.1 Sugerimos usar o Geogebra.
5.10.2 Existe um ladrilhamento com dois octógonos regulares.
5.10.3 Existem três possibilidades.
5.10.4 Existe uma possibilidade.
5.10.5 Além dos casos óbvios, usando retângulos, triângulos retângulos, losangos não quadrados, existe uma infinidade. Um exemplo são as chamadas *tesselações do Cairo*. Consulte o verbete *Cairo pentagonal tiling* (em inglês; a página correspondente em português, consultada em 10 de março de 2026, tem erro).

Atividades 5.11

5.11.1 Faça suas próprias observações.
5.11.2 Uma dobradura não é precisa. Assim, é necessário procurar outro sistema dedutivo para confirmar as propriedades. Uma forma seria consultar um livro de Geometria Euclidiana Superior. Eventualmente comentários podem ser feitos com estudantes da escola básica, e o professor deve colocar atenção no efeito dessas observações.
5.11.3 O tampo de uma mesa pode servir de modelo do plano, mas é preciso chamar a atenção sobre as suas limitações.
5.11.4 Pares de linhas esticadas em um geoplano perfazem ângulos de mesma medida se o posicionamento seguir um mesmo padrão.

Problemas 6.7

6.7.1 Construa um exemplo com dois triângulos que reguardam uma correspondência LLA mas que não são congruentes.
6.7.2 Desenhe um triângulo isósceles com as alturas pedidas, e observe as congruências. Se achar que fica mais claro, desenhe duas cópias, cada uma com uma das alturas. Considere os casos em que o pé da altura não cai dentro do lado.
6.7.3 Aqui o termo "bissetriz" está sendo usado no sentido da ceviana contida na reta bissetriz.
6.7.4 Faça desenhos e procure as congruências.
6.7.5 Comece com duas mediatrizes.
6.7.6 Use resultados anteriores.
6.7.7 Para a última pergunta, seja P a interseção de BN e CM. Depois de ver que BMC e CNB são congruentes, temos que BCP é isósceles com base BC, logo $BP = CP$. Então P é equidistante de B e C, e assim P está na mediatriz de BC. Logo P também está em AH.
6.7.8 Faça experimentos com o Geogebra.
6.7.9 Desenhe quadrados com uma diagonal, uma cópia com a outra diagonal, e outra cópia com duas diagonais. Examine todas as congruências.
6.7.10 (iv) Demonstre a contrapositiva.
6.7.11 Use o caso LLL.

6.7.12 (i) Fixe a medida a de uma diagonal do quadrilátero (no caso de quadrilátero não convexo, tome a diagonal externa). É possível alterar um pouco o valor de a e continuar valendo a inequação do Problema 6.7.8. Assim os dois triângulos com lado naquella diagonal permanecem com lados de mesma medida.
6.7.13 Para construir o reticulado, meça as duas alturas do paralelogramo dado, assim como um de seus ângulos.
6.7.14 Desenhe o paralelogramo e uma diagonal. Use ALA.
6.7.15 Desenhe os dois paralelogramos com altura e diagonal conveniente, e procure triângulos congruentes. O mesmo vale para a outra altura e diagonal.
6.7.16 Usando ângulos correspondentes determinados por paralelas e transversais, desloque todos os ângulos para um único vértice.
6.7.17 Um caso ALA implica que as diagonais se cortam ao meio.
6.7.18 Quanto à última afirmação, verifique a contrapositiva.
6.7.19 Examine ângulos e retângulos dos quais os lados são diagonais.
6.7.20 Escreva a área como função de uma variável e ache seu ponto de máximo.
6.7.21 Trace o diâmetro CD, e considere o quadrilátero $ACBD$.

Temas para investigação 6.8

6.8.1 Uma ideia é lembrar que duas cópias do mesmo triângulo retângulo formam um retângulo.
6.8.2 Uma possibilidade para sua investigação é usar o Geogebra.
6.8.3 Se ℓ e w são os lados de um retângulo, temos $A = P \iff l = \frac{2w}{w-2}$, com $l > 2$ e $w > 2$. Para um estudo 3D pode consultar [9].
6.8.4 b) Dado um triângulo equilátero trace segmentos paralelos a um lado ligando pontos dos outros dois lados. O que a mediana relativa àquele lado faz com esses segmentos?
6.8.5 Use o aplicativo Geogebra para mover triângulos e seu circuncentro e visualizar as mais diversas situações.
6.8.6 b) Na etapa n existem 4^n triângulos equiláteros menores, para todo $n \geq 0$.
6.8.7 São $\frac{1}{4}m(m+1)n(n+1)$ paralelogramos.

Atividades 6.9

6.9.1 Uma forma um pouco mais abstrata de achar o ponto médio de um segmento consiste em medí-lo com uma régua, dividir o valor por dois e depois localizar no segmento o ponto médio. A divisão por dois já justifica que encontramos o ponto médio.
6.9.2 Use o mesmo esquema da Figura 6.2. Essas atividades podem ser construídas em folhas de desenhar ou com o aplicativo Geogebra.

Problemas 7.6

7.6.1 São 4 diagonais.
7.6.2 Todas as diagonais têm a mesma medida $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.
7.6.3 O cubo tem esferas inscrita e circunscrita. O paralelepípedo com lados diferentes só tem a circunscrita.
7.6.4 Comece com os pontos médios de dois lados.
7.6.5 a) Da esquerda para a direita: (i) reta passando pelo ponto médio de duas arestas opostas; (ii) reta que contém uma altura do tetraedro; (iii) reta que contém uma altura de uma face. b) sugestões de retas: (i) perpendicular a uma face pelo seu centro; (ii) passando por dois vértices opostos; (iii) passando pelos pontos médios de duas arestas opostas.
7.6.6 $\arccos(-1/3) = 2\,\mathrm{arctg}(\sqrt{2}) \approx 1,910633 \approx 109,4712°$.
7.6.7 Use que em um paralelepípedo reto retângulo qualquer as faces opostas são congruentes.
7.6.8 a) Esses pontos médios são equidistantes de E e C, portanto pertencem ao plano mediador de EC. b) Para ver que os lados do hexágono têm a mesma medida, use o seguinte resultado de Geometria: se um segmento liga os pontos médios de dois lados de um triângulo, então ele mede a metade do terceiro lado. Para ver que os ângulos internos do hexágono têm a mesma medida, uma forma é observar que é constante a distância de seus vértices ao seu centro.

Temas para investigação 7.7

7.7.1 O resultado dessa investigação é importante para o próximo experimento.
7.7.2 Reestude a mediatriz. O plano em questão chama-se *mediador* do segmento.
7.7.3 Só existem três.
7.7.4 Diversos tipos de polígonos planos com $n \leq 6$ lados.

7.7.5 Pode ser circunferência, elipse ou segmentos de elipses, retângulos.
7.7.6 Sim, existe tudo isso. Comece a brincadeira unindo pontos médios de arestas.
7.7.7 Pontos antípodas são extremos de um diâmetro.
7.7.8 Seguindo o esquema delineado no final da Seção 6.5 obtive $\frac{1}{8}m(m+1)n(n+1)p(p+1)$.

Atividades 7.8

7.8.1 Os estudantes podem construir cilindros de papel cartolina, assim como recortes para encaixar no cilindro, como foi feito na Seção 7.4.
7.8.2 Procure artigos, como em [14], pág. 79.
7.8.3 Procure artigos, como em [14], pág. 107.

Apêndice B

Créditos das figuras

Observação: As figuras não referidas foram construídos pelo autor com o uso do programa gráfico vetorial Inkscape, ou com o Pictex ou o Tikz, ou ainda com o Geogebra.

Capa e Apresentação

Figura da capa externa Construída pelo autor com o Inkscape.

Figura da capa interna Clip Art Inkscape `http://www.openclipart.org/` Autor: Kattekrab. Domínio público. Consultado em outubro de 2010.

Figura da Apresentação, página v Clip Art Inkscape `http://www.openclipart.org/` Autor: Krauskopf Tom Machovka. Domínio público. Consultado em outubro de 2010.

Capítulo 1: Origem da Geometria

Figura : Imagem de Reto Stöckli, disponível em NASA Goddard Space Flight Center `http://veimages.gsfc.nasa.gov/2429/globe_west_540.jpg` Consultado em dezembro de 2010. Imagem de domínio público.

Figura : Clip Art Inkscape `http://www.openclipart.org/` Autor: Papapishu. Domínio público. Consultado em outubro de 2010.

Figura 1.3: Recorte de foto de uma estátua de Jean Piaget obtida de `http://www.picswiss.ch/Genf/GE-05-07.html` Os direitos autorais são de propriedade do fotógrafo Roland Zumbühl. Permitido uso privado não comercial. Consultado em dezembro de 2010.

Figura 1.4: Clip Art Inkscape `http://www.openclipart.org/` Autor: Papapishu. Domínio público. Consultado em outubro de 2010.

Figura 1.5: Imagem do artigo [33] `http://rupestreweb.tripod.com/colorado.html` Consultado em dezembro de 2010.

Figura 1.6: Imagem do artigo [33] `http://rupestreweb.tripod.com/colorado.html` Consultado em dezembro de 2010.

Figura 1.7: `http://en.wikipedia.org/wiki/Prehistoric_art` Direitos de imagem de acordo com o sistema GNU Free Documentation License. Consultado em dezembro de 2010.

Figura 1.8: `http://www.nps.gov/meve/forteachers/artifactgallery_basket.htm` Sítio do *National Park Service* do EEUU. Imagem de domínio público. Consultado em dezembro de 2010.

Figura 1.9: `http://en.wikipedia.org/wiki/Ceramic_art` Direitos de imagem de acordo com o sistema Creative Commons. Consultado em dezembro de 2010.

Figura 1.10: Foto de Ricardo Liberato, de 19 de junho de 2006. `http://en.wikipedia.org/wiki/File:All_Gizah_Pyramids.jpg` Imagem de domínio público. Consultado em dezembro de 2010.

Figura 1.11: Composição do autor construída com o Inkscape com material disponibilizado pelo Clip Art Inkscape `http:/www.openclipart.org/` e por Clker.com `http://www.clker.com/clipart-11547.html`. Consultado em

dezembro de 2010.

Figura 1.12: http://pt.wikipedia.org/wiki/Discoidea Desenhos de Ernst Haeckel, em *Kunstformen der Natur*. Imagem de domínio público. Consultado em dezembro de 2010.

Figura 1.13: http://en.wikipedia.org/wiki/Carbon_nanotubes Figuras construídas por Arnero. Imagem de domínio público. Consultado em dezembro de 2010.

Figura 1.14: http://hubblesite.org/gallery/album/entire/pr2003028a/ Crédito: NASA and The Hubble Heritage Team (STScI/AURA) Imagem de domínio público. Consultado em dezembro de 2010.

Figura 1.15: Clip Art Inkscape http://www.openclipart.org/ Autor: egonpin. Domínio público. Consultado em dezembro de 2010.

Figura 1.18: A foto é do *Electron and Confocal Microscopy Laboratory, Agricultural Research Service, U. S. Department of Agriculture*, disponível em http://emu.arsusda.gov/snowsite/default.html. Domínio público. Os desenhos foram extraídos da classificação de cristais de gelo de Magono e Lee, disponível em http://emu.arsusda.gov/snowsite/Magono_and_Lee/Magono_and_Lee_Classif{i}cation1.html. Consultado em dezembro de 2010.

Capítulo 2: Gênese dos conceitos geométricos

Figura 2.4: Figuras de [23], páginas 225 e 226.

Figura 2.6: Composição de figuras adaptadas de Clip Art Inkscape http://www.openclipart.org/

Figura 2.9: Composição de figuras adaptadas de Clip Art Inkscape http://www.openclipart.org/

Figura 2.14: Figura de [20], página 240.

Capítulo 3: Presença da Geometria na sociedade

Figura 3.1: Foto do autor.

Figura 3.3: Foto do Congresso Nacional do Brasil, disponível na página http://en.wikipedia.org/wiki/File:National_Congress_of_Brazil.jpg Autor: Marcelo Jorge Vieira. Data: 5 de maio de 2006. Licença sob *Creative Commons Attribution-Share*. Consultado em maio de 2011.

Figura 3.4: Foto da Biosfera de Montréal, disponível na página http://en.wikipedia.org/wiki/File:Biosphére_Montréal.jpg Autor: Cédric Thévenet. Data: 12 de outubro de 2001. Licença sob *GNU Free Documentation License*. Consultado em dezembro de 2011.

Figura 3.5: Clip Art Inkscape http://www.openclipart.org/ Autor: tom. Domínio público. Consultado em maio de 2011.

Figura 3.6: Foto de janelas da Old Ship Church, Hingham, Massachusetts, disponível em http://en.wikipedia.org/wiki/File:OldShipWindows.jpg Autor: Timothy Valentine. Data: 21 de fevereiro de 2009. Licença sob *Creative Commons Attribution-Share*. Consultado em maio de 2011.

Figura 3.7: Detalhe do famoso mausoléu Taj Mahal, http://en.wikipedia.org/wiki/File:Jali-inlay.jpg Autor: William Donelson. Data da publicação: 2 de julho de 2007. Licença sob *Creative Commons Attribution-Share*. Consultado em maio de 2011.

Figura 3.8: Composição adaptada de desenho disponível em Wikipedia http://en.wikipedia.org/wiki/File:Architectural_drawing_001.png Autor: ProfDEH. Data: 12 de junho de 2009. Licença sob *Creative Commons Attribution-Share*. Consultado em maio de 2011.

Figura 3.9: Composição de figuras de Clip Art Inkscape http://www.openclipart.org/ Autores: gustavorezende e Rfc1394. Domínio público. Consultado em dezembro de 2011.

Figura 3.11: Adaptação de figura de Krishnavedala, de 22 de maio de 2011, disponível em http://en.wikipedia.org/wiki/File:Helicoid.svg Licença sob *Creative Commons Attribution-Share*. Consultado em dezembro de 2011.

Figura 3.12: Domínio público, disponível em http://en.wikipedia.org/wiki/File:Archimedes_screw.JPG Original publicado na Chambers's Encyclopedia (Philadelphia: J. B. Lippincott Company, 1875). Consultado em dezembro de 2011.

Figura 3.13: Fotografia de M.A. Wijngaarden, de 22 de outubro de 2006. Disponível em `http://en.wikipedia.org/wiki/File:IMG_1729_Gemaal_met_schroef_van_Archimedes_bij_Kinderdijk.JPG` Licença sob *Creative Commons Attribution-Share*. Consultado em dezembro de 2011.

Figura 3.14: As figuras dos alicates estão disponíveis em Clip Art Inkscape `http://www.openclipart.org/` Autores: Raz Petr / Machovka. Domínio público. Consultado em dezembro de 2011.

Figura 3.16: Ladrilhamento rômbico de Penrose, construído por Inductiveload (`http://commons.wikimedia.org/wiki/User:Inductiveload`) em 1 de fevereiro de 2009. Disponível em `http://en.wikipedia.org/wiki/File:Penrose_Tiling_(Rhombi).svg` Domínio público. Consultado em dezembro de 2011.

Figura 3.17: Fractal construído com o programa *Sterling2* (freeware) por Soler97 em 2 de outubro de 2011. Disponível em `http://en.wikipedia.org/wiki/File:Sterling2_4906aa4.jpg` Licença sob *Creative Commons Attribution-Share*. Consultado em dezembro de 2011.

Figura 3.18: Disponibilizada pelo *Nicholas Roerich Museum*, `http:/www.roerich.org/index.html` Consultado em dezembro de 2010.

Figura 3.19: Autor: Johnstone. Disponível em `http://en.wikipedia.org/wiki/File:Spacetime_curvature.png` Direitos sob *GNU Free Documentation License*. Consultado em dezembro de 2011.

Figura 3.20: Autor: Chris_73 (`http://en.wikipedia.org/wiki/User:Chris_73`). Disponível em `http://commons.wikimedia.org/wiki/File:NautilusCutawayLogarithmicSpiral.jpg`
Direitos sob the creative commons cc-by-sa 3.0 (`http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/`). Consultado em dezembro de 2011.

Figura 3.21: Autor: Zephyris. Data: 20 de março de 2009. Disponível em `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:DNA_orbit_animated_static_thumb.png` Direitos sob *GNU Free Documentation License*. Consultado em março de 2026.

Figura 3.22: Figuras compostas com o aplicativo [28]. Consultado em setembro de 2022.

Figura 3.24: As duas figuras da esquerda forma obtidas de [35], e as outras foram compostas com o aplicativo [28]. Consultado em setembro de 2022.

Figura 3.25: Figuras adaptadas de [18]. Consultado em setembro de 2022.

Figura 3.26: Figura composta com o aplicativo [28]. Consultado em setembro de 2022.

Figura 3.27: Autor: Michael Ströck. Data: 6 de fevereiro de 2006. Disponível em `http://en.wikipedia.org/wiki/File:C60a.png` Direitos sob *GNU Free Documentation License*. Consultado em dezembro de 2011.

Figura 3.29: Detalhe de um vitral da Catedral Notre-Dame de Chartres, disponível em Wikipedia `http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Vitrail_Chartres_210209_26.jpg` Autor: Vassil. Data: 01 de abril de 2009. Domínio público. Consultado em dezembro de 2011.

Figura 3.30: Figura disponível em Clip Art Inkscape `http://www.openclipart.org/` Autores: Josiah / yoderj. Domínio público. Consultado em dezembro de 2011.

Capítulo 4: Investigações iniciais

Figura 4.1: Composição de figuras adaptadas de Clip Art Inkscape `http://www.openclipart.org/`

Figura 4.2: Foto do autor, 16 de fevereiro de 2011.

Figura 4.3: Foto do autor, 21 de fevereiro de 2012.

Figura 4.4: Foto do autor, 16 de fevereiro de 2011.

Figura 4.5: Poliedros construídos e fotografados pela Profa. Marlusa Benedetti da Rosa (CAp-UFRGS), data de agosto de 2010. Publicado sob licença.

Figuras 4.6 e 4.7: Poliedros construídos por estudante do curso de Licenciatura em Matemática da UFSCar. Foto do autor, 16 de fevereiro de 2011.

Figura 4.8: Composição de figuras adaptadas de Clip Art Inkscape `http://www.openclipart.org/`, Stock.XCHNG `http://www.sxc.hu/` e Wikipedia `http://en.wikipedia.org/wiki`

Figura 4.9: Composição de figuras adaptadas de Clip Art Inkscape `http://www.openclipart.org/`

Figura 4.11: Composição de figuras adaptadas de Clip Art Inkscape `http://www.openclipart.org/`

Figura 4.15: Composição de figuras adaptadas de Clip Art Inkscape `http://www.openclipart.org/`

Figura 4.17: Composição de figuras adaptadas de Clip Art Inkscape `http://www.openclipart.org/`

Figura 4.33: `http://pt.wikipedia.org/wiki/Cubo_soma` Adaptação de figuras construídas por Rodrigo Rocha. Imagem de domínio público. Consultado em janeiro de 2011.

Figura 4.35: `http://en.wikipedia.org/wiki/File:Tesseract2.svg` Adaptação de figura construída por Stannered de primeiro de abril de 2007. Imagem de domínio público. Consultado em fevereiro de 2012.

Figura 4.37: Composição geométrica com cores inspiradas em friso de vaso do povo indígena americano Pueblo, consultado em `http://www.indianpueblo.org/museum/index.html`, data dezembro de 2010.

Figura 4.39: Composição inspirada em friso de vaso Ming, conforme descrito em *Frieze Patterns on Ming Porcelans*, de Poh Kim Muay, página 33, consultado em `www.math.nus.edu.sg/aslaksen/projects/rp-urops.pdf`, data dezembro de 2010.

Figura 4.38: Composição com desenho de Xah Lee em `http://www.xahlee.org/MathGraphicsGallery_dir/Tiling_dir/tiling.html`. Permitido uso não comercial. Consultado em dezembro de 2010.

Capítulo 5: Início da construção da Geometria

Figura 5.9: Composição de figuras adaptadas de Clip Art Inkscape `http://www.openclipart.org/`

Capítulo 7: Investigações sobre sólidos

Figura 7.1: 2.ºe 3.ºdesenhos adaptados de [35].

Figura 7.6: 2.ºe 3.ºdesenhos adaptados de [35].

Figura 7.8: fotos do autor.

Referências Bibliográficas

[1] Angelotti, V. C. *Buscando Conexões da Geometria Euclidiana do Ensino Susperior com o Ensino Médio.* Trabalho de conclusão de curso. São Carlos, UFSCar, 2011. http://www.dm.ufscar.br/dm/index.php/atalhos/tcc-dm-ufscar

[2] Barbosa, J. L. M. *Geometria Euclidiana Plana.* 10ª. Edição. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

[3] Brasil-MEC. *Base Nacional Comum Curricular.* Brasil, Ministério da Educação, 2025. https://basenacionalcomum.mec.gov.br/ Consultado em agosto de 2025.

[4] Crowley, M. L., *O Modelo Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico. in* Lindquist, M. M. e Shulte, A. P. (orgs). *Aprendendo e Ensinando Geometria.* Tradução de Domingues, H. H. São Paulo: Atual Editora, 1994. págs. 1 a 20.

[5] Cundy, H. M. e Rollett, A. P. *Mathematical Models.* Oxford: Oxford University Press, 1961.

[6] Dunlap, R. A. *Regular Polygon Rings.* The College Mathematics Journal, Vol. 29, nº4, Mathematical Association of America, setembro de 1998.

[7] Frommert, H. e Kronberg, C. *Messier 104 ou Sombrero Galaxy.* http://seds.org/messier/m/m104.html Consultado em dezembro de 2010.

[8] Galiazzi, M. C. *et alii, Objetivos das atividades experimentais no ensino médio: a pesquisa coletiva como modo de formação de professores de ciências.* Ciência & Educação, v. 7, n. 2, 2001, págs. 249-263.

[9] Gannon, G. E. *et alii, One Good Problem Leads to Another and Another and ...* The Mathematics Teacher, Vol. 90, número 3 (março de 1997), págs. 188 a 191, National Council of Teachers of Mathematics.

[10] Grande, J. J. *Percepção espacial e geometria primária.* In Lindquist, M. M. e Shulte, A. P. (orgs), *Aprendendo e Ensinando Geometria.* Tradução de Domingues, H. H. São Paulo: Atual Editora, 1994.

[11] Grando, R. C., Nacarato, A. M. e Gonçalves, L. M. G. *Compartilhando saberes em geometria: investigando e aprendendo com nossos alunos.* Campinas: Cad. CEDES vol. 28 nº74, 2008.

[12] Holloway, G. E. T. *Concepcion del espacio en el niño segun Piaget.* Buenos Aires: Editorial Paidos, 1969.

[13] Holloway, G. E. T. *Concepcion de la geometria en el niño segun Piaget.* Buenos Aires: Editorial Paidos, 1969.

[14] Lauredo, E. et alii (orgs) *A Educação Básica e as Oficinas de Física, Matemática e Química: contribuições do projeto novos talentos*. Londrina, UEL, 2014.

[15] Lima, E. L. *et alii*. *A Matemática do Ensino Médio*. Volumes 1, 2 e 3. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática, 1996.

[16] Lindquist, M. M. e Shulte, A. P. (orgs). *Aprendendo e Ensinando Geometria*. Tradução de Domingues, H. H. São Paulo: Atual Editora, 1994.

[17] Lopes, M. M. L. e Nasser, l. (orgs). *Geometria na era da imagem e do movimento*. Rio de Janeiro: UFRJ, Projeto Fundão, 1997.

[18] McGlinchey, M. J. e Hopf, H. *Reciprocal polyhedra and the Euler relationship: cage hydrocarbons, C_nH_n and closo-boranes $[B_nH_n]^{2-}$*. Beilstein J. Org. Chem. 2011, 7, 222-233. doi:10.3762/bjoc.7.30

[19] Moise, E. E. e Downs, F. L. *Geometria Moderna*. Volumes 1 e 2. Tradução de Watanabe, R. e Mello. D. A. Brasília: Editora Universidade de Brasília e Editora Edgard Blücher, 1971.

[20] Nacarato, A. M. *Educação Continuada Sob a Perspectiva da Pesquisa-Ação: currículo em ação de um grupo de professoras ao aprender ensinando geometria*. Tese de doutorado. Campinas: UNICAMP, 2000.

[21] Nacarato, A. M. e Passos, C. L. B. *A Geometria nas Séries Iniciais*. São Carlos: EDUFSCar, 2003.

[22] Nacarato, A. M., Gomes, A. A. M. e Grando, R. C. *Experiências com Geometria na Escola Básica*. São Carlos: Pedro & João Editora, 2008.

[23] Passos, C. L. B. *Representações, Interpretações e Prática Pedagógica: A Geometria na Sala de Aula*. Tese de doutorado. Campinas, FE/UNICAMP, 2000.

[24] Paterlini, R. R. *As figuras geométricas e modelos de moléculas*. PMO, v. 11 n. 1, 2023, p. 65-80 `https://pmo.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/5/sites/5/2023/02/art5_vol11_SBM_PMO_2023.pdf` Consultado em janeiro de 2024.

[25] Piaget, J. *A construção do real na criança*. Tradução de Cabral, A. Rio de Janeiro, Zahar Editores, 1970.

[26] Piaget, J. e Inhelder, B. *La represéntation de l'espace chez l'enfant*. Paris: Presses Universitaires de France, 1948.

[27] Piaget, J., Inhelder, B. e Szeminska, A. *La Géométrie spontanée de l'enfant*. Paris: Presses Universitaires de France, 1972.

[28] PubChem *Explore Chemistry*. Figuras e informações de elementos químicos. Disponível a partir de `https://pubchem.ncbi.nlm.nih.gov/` Consultado em outubro de 2022. As figuras são produzidas por um aplicativo e constituem cortesia da *National Library of Medicine* do governo dos Estados Unidos da América do Norte.

[29] Reddit: Portal de perguntas sobre ciência. `https://www.reddit.com/r/askscience/` Consultado em março de 2026. Pergunta consultada: por que o DNA tem a forma de uma élice?

[30] Sampaio, J. C. V., Rosa, M. B., Dias, C. e Barros, T. E., *Geometria Espacial*. Módulo II, Curso de Especialização Matemática na Prática. Cuiabá: Central de Texto, 2013.

[31] Sampaio, J. C. V. e Dias, C. *Desafio Geométrico*. Módulo I, Curso de Especialização Matemática na Prática. Cuiabá: Central de Texto, 2013.

[32] Thompson, A. W. *On Growth and Form*. New York: Dover Publications, 1942.

[33] Vivas, E. A. *Arte Rupestre de Cerro Colorado (Córdoba, Argentina)*. In Rupestre/web `http://rupestreweb.tripod.com/colorado.html` Consultado em dezembro de 2010.

[34] Weisstein, Eric W. *MathWorld–A Wolfram Web Resource*. Itens consultados: *Cube; Cylinder; Net; Polyomino;* Endereço geral: `https://mathworld.wolfram.com/` Consulta no período 2016-2026.

[35] Wikipedia. Informações e figuras. Itens consultados: *August Kekulé; Benzene; Benzantraceno; Cairo pentagonal tiling; Cubane; Cube; Cylinder; Dodecaedrano; Equilateral triangle; Ernst Haeckel; Frieze group; Geometria molecular tetraédrica; Geometric rigidity; Honeycomb; Ice crystal; Icosaedro truncado; Kekulene; Methane; Modelo Van Hiele; Nucleic acid double helix; Phosphate; Polycube; Polyomino; Pyridine; Teorema de Pitágoras; Tesserato; Triangle center;* Endereço geral: `https://en.wikipedia.org/wiki/` Consultas no período 2007-2026.

[36] Williams, R. *The Geometrical Foundation of Natural Structure*. New York: Dover Publication, 1979.

Índice de autores

Arquimedes (287-212 a.C.), 28, 29, 31, 91, 97

Cavalieri, B. F. (1598-1647), 91

Dürer, A. (1471-1528), 30
Dali, S. (1904-1989), 30

Escher, M. E. (1898-1972), 30
Euclides (c. 300 a.C.), v
Euler, L. P. (1707-1783), 43

Francesca, P. (c. 1415-1492), 30
Fuller, R. B. (1895-1983), 27

Gourvitch, A. G. (1874-1954), 35

Haeckel, E. H. P. A. (1834-1919), 11, 13
Hein, P. (1905-1996), 54
Hiele, P. (-), 41
Hiele-Geldorf, D. (-), 41

Kekulé, F. A. S. (1829-1896), 32

Newton, I. (1642-1727), 31
Niemeyer, O. (1907-2012), 26, 33

Piaget, J. W. F. (1896-1980), 3, 6, 15
Pitágoras (c. 585-500 a.C.), 81
Platão (427-347 a.C.), 32
Ptolomeu I Sóter (c. 367-282 a.C.), v

Robinson, J. (1935-2007), 30
Roerich, N. K. (1874-1947), 30

Uccelo, P. (1397-1475), 30

Vinci, L. (1452-1519), 30

Índice de assuntos

ângulo
    conceito, 59
    medida, 19
área
    conservação, 21

cilindro, 57
    seção, 95
    seções, 95
comprimento
    gênese, 19
contagem em Geometria, 79, 86, 95
continuidade
    gênese, 16
coordenadas retangulares, 19
cubo
    definição, 87
    diagonal, 92
    perspectiva cavaleira, 87
    perspectiva isométrica, 88
    seção, 93, 95
cubos-soma, 57

deformação
    experimentos, 45
    polígonos, 83
    quadriláteros, 52
desenhos rupestres, 7
distância
    gênese, 18
domo geodésico, 26, 27, 34
dupla hélice do DNA, 31

esfera
    seção, 95
Espaço, 5
espiral, 9, 31
experimentos
    construção de sólidos, 42, 45
    cubos, 54
    decomposição, 57
    descrição de sólidos, 42
    dissecções, 48
    duplicação de áreas e volumes, 48
    ladrilhamento, 48, 54, 55, 57, 69
    mecânico, 49, 52, 58
    perímetro e área, 46, 52, 56, 85
    perpendicularismo, 94
    planificações, 44, 50, 51, 53
    plano mediador, 94
    problema do sitiante, 47, 52, 56, 85
    quadrados, 53
    seções, 51, 90, 95
    triângulo, 45, 51, 56, 83
    uso no ensino, 57, 58
    volume, 90

friso, 55

Geometria
    e sociedade, 25
    etimologia, 5
    gênese antropológica, 7
    gênese cosmológica, 10
    gênese psicológica, 6
    o que é, 5
    origem, 5
Geometria e
    Arquitetura, 25
    Artes, 30
    Astronomia, 31
    Biologia, 31
    Ciências Naturais, 31
    Física, 31
    Mecânica, 28
    Química, 32
grafeno, 11

helicóide, 28
hexagonal, 10, 11

lugares geométricos, 20

mediatriz, 78

nanotubos, 11

objetos geométricos, 5
    ação da escola, 41
    fase euclidiana, 18
    fase projetiva, 16
    fase topológica, 15
    fases iniciais, 15
    gênese psicológica, 15
    representações, 21

paralelepípedo

definição, 88
diagonal, 92
pirâmide
Antigo Egito, 10
definição, 89
plano
mediador, 94, 100
perpendicular a uma reta, 94
projeção axonométrica, 27
psicologia genética, 3, 6, 15

retas paralelas, 21, 61
rigidez de triângulos, 83

seções geométricas, 17
sistema articulado, 29
sólidos, 87
superfície regrada, 35

tetraedro
ângulo tetraédrico, 93
altura, 89
centro, 92
definição, 89
disfenóide, 89, 93
escaleno, 89
face oposta, 89
isósceles, 89
projeções, 92
regular, 89
seção, 95
trirretângulo, 89
triângulo
centro, 82
egípcio, 82
equilátero, 64
reprodução, 20
soma dos ângulos internos, 20, 62, 64, 68
triângulo equilátero
centro, 82, 85
Trigonometria, 31