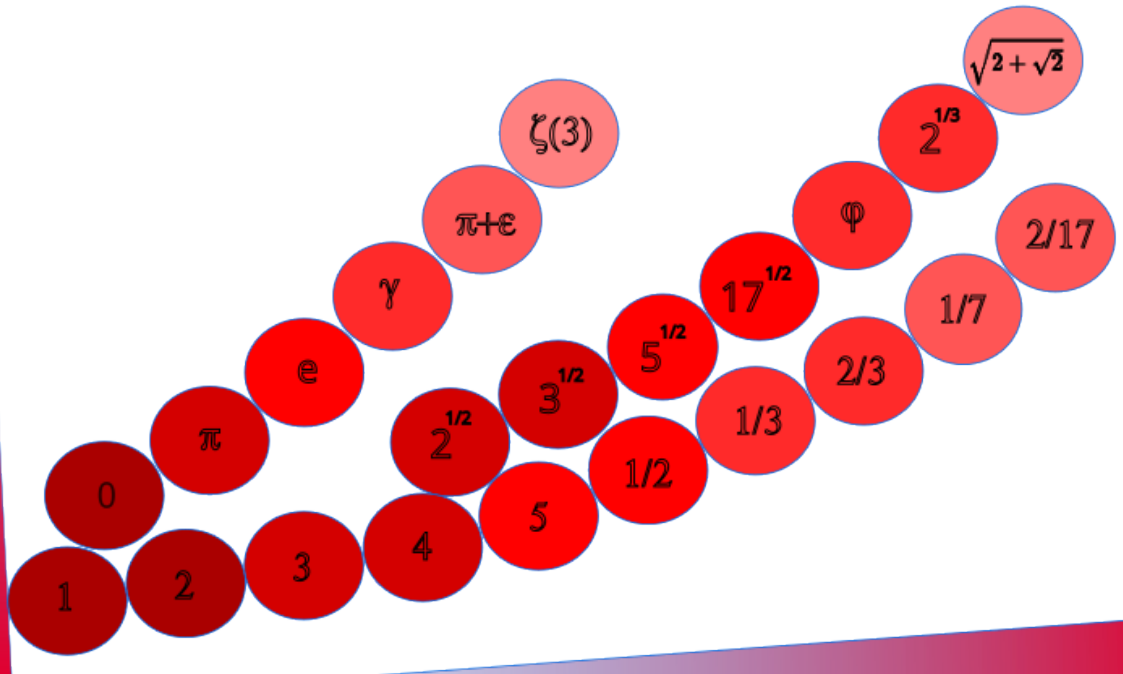
ARITMÉTICA

DOS NÚMEROS REAIS

2ª. Edição

Roberto Ribeiro Paterlini

UFSCar



Aritmética dos números reais

Roberto Ribeiro Paterlini

2ª. edição - versão β

Copyright ©2008 by Roberto Ribeiro Paterlini
Departamento de Matemática, UFSCar.

A presente versão está disponível em um arquivo em formato .pdf que pode ser acessado a partir da minha página pessoal. Mantemos seções como *Errata*, *Comentários* e *Atualizações*.

Solicitamos não disponibilizar esses arquivos em outros endereços da internet.

Este texto foi testado em sala de aula várias vezes, por mim e por colegas professores, e já foram feitas muitas correções, de modo que pensamos que está adequado para uso em cursos de formação inicial e continuada de professores de Matemática. Para sugestões ou perguntas favor se comunicar com o autor através do endereço paterlini@ufscar.br .

O *Copyright* © deste texto pertence ao autor, na forma da lei. Permito a transferência dos arquivos para uso pessoal para ledores eletrônicos ou para impressão, na forma da lei, sem qualquer ônus. Veto o uso comercial em todo ou em parte de qualquer material aqui disponibilizado, por qualquer meio. Veto modificações desse texto, sob qualquer forma. Permito que sejam feitas impressões em pequena escala por agente educacional, público ou privado, desde que o material seja distribuído gratuitamente, e não sejam cobradas taxas, nem mesmo a título de "preço de custo".

Gratos.

Figura da capa: Construída pelo autor com o aplicativo Inkscape. Os discos em fileiras ascendentes indicam o progresso da percepção dos números pelo homem. As cores dos discos se tornam mais claras de baixo para cima, ilustrando que essa percepção caminha do mais concreto para o mais abstrato. A lista inferior mostra números naturais e racionais positivos, que são a base de nossos estudos. A lista intermediária mostra os números irracionais algébricos, indicando os primeiros estudos dos números de complementamento da reta numérica. A lista superior mostra números transcendentes e possíveis candidatos a essa categoria. A presença da forma "disco" lembra o antigo aforisma: *O número gera a forma na matriz do espaço*.

Este texto foi editado em LaTeX 2$_\varepsilon$ pelo autor, que agradece à comunidade TeX pelos meios disponibilizados.

Roberto Ribeiro Paterlini

Aritmética dos números reais

um texto para licenciandos e professores de Matemática



Departamento de Matemática, UFSCar.

São Carlos, São Paulo, Brasil.

Data da primeira edição: 3 de janeiro de 2011.

Segunda edição, versão β. Data desta versão: 3 de julho de 2026.

Sumário

Sumário **i**

Apresentação **v**

1 Os números inteiros **1**
1.1 Introdução . . . 1
1.2 Gênese dos números naturais . . . 1
1.3 Operações fundamentais . . . 5
1.4 Gênese dos números inteiros . . . 10
1.5 Resultados básicos da Teoria dos Números . . . 13
1.6 Problemas . . . 16

2 Os números racionais **19**
2.1 Introdução . . . 19
2.2 Gênese dos números racionais . . . 19
2.3 Números racionais e frações . . . 19
2.4 Expansão decimal de números racionais . . . 25
2.5 Números racionais e frações contínuas . . . 32
2.6 Aproximações, frações decimais e porcentagem . . . 34
2.7 Problemas . . . 35
2.8 Pequena história das frações de inteiros . . . 40
2.9 Temas para investigação . . . 40
2.10 Atividades para licenciandos e professores . . . 42

3 A constante de Pitágoras **45**
3.1 Introdução . . . 45
3.2 O aparecimento de $\sqrt{2}$ . . . 45
3.3 Problemas . . . 48
3.4 A não racionalidade de $\sqrt{2}$ . . . 49
3.4.1 Par ou ímpar . . . 49
3.4.2 Um método de descida . . . 50
3.4.3 Um método geométrico . . . 50
3.4.4 Outro método de descida . . . 51
3.4.5 Outro método geométrico . . . 51
3.4.6 Um argumento curioso . . . 52
3.5 Problemas . . . 52
3.6 Aproximações do valor numérico de $\sqrt{2}$ . . . 53
3.6.1 Um método de tentativas . . . 53
3.6.2 Fazendo uma média . . . 54

3.6.3 Calculando raízes quadradas elevando ao quadrado . . . 55
3.6.4 Um método muito antigo . . . 56
3.7 $\sqrt{2}$ e frações contínuas . . . 59
3.8 Problemas . . . 61
3.9 Temas para investigação . . . 61
3.10 Atividades para licenciandos e professores . . . 63

4 Modelos para os números reais 65
4.1 Introdução . . . 65
4.2 O primeiro modelo de números . . . 65
4.3 A hipótese da comensurabilidade . . . 68
4.4 A descoberta da incomensurabilidade . . . 73
4.5 O modelo de número de Eudoxo . . . 74
4.6 O modelo de número de Dedekind . . . 78
4.7 Pequeno dicionário de propriedades de $\mathbb{R}$ . . . 83
4.8 Problemas . . . 85
4.9 Temas para investigação . . . 89
4.10 Atividades para licenciandos e professores . . . 89

5 Sequências numéricas 91
5.1 Introdução . . . 91
5.2 Presença das sequências na Matemática . . . 91
5.3 Sequências numéricas convergentes . . . 93
5.4 Propriedades fundamentais das sequências convergentes . . . 96
5.5 Sequências monótonas . . . 101
5.6 Sequências divergentes e subsequências . . . 102
5.7 Problemas . . . 104
5.8 Temas para investigação . . . 108
5.9 Atividades para licenciandos e professores . . . 109

6 A constante de Arquimedes π 111
6.1 Introdução . . . 111
6.2 Reconhecimento do número π . . . 111
6.3 Comprimento da circunferência . . . 112
6.4 Existência da constante π . . . 115
6.5 Área de um disco . . . 116
6.6 O algoritmo de Arquimedes . . . 118
6.7 Cálculo do valor numérico de π . . . 120
6.8 Comprimento de arco de circunferência . . . 121
6.9 Funções trigonométricas . . . 125
6.10 1000 casas de π . . . 126
6.11 Problemas . . . 126
6.12 Temas para investigação . . . 131
6.13 Atividades para licenciandos e professores . . . 132

7 A série geométrica 135
7.1 Introdução . . . 135
7.2 Estudos iniciais sobre a série geométrica . . . 135
7.3 Convergência da série geométrica . . . 138

7.4 Aplicações da série geométrica . . . 142
7.5 Outras séries numéricas . . . 145
7.6 Problemas . . . 146
7.7 Temas para investigação . . . 150
7.8 Atividades para licenciandos e professores . . . 151

8 Tópicos sobre números irracionais 153
8.1 Introdução . . . 153
8.2 Expansões decimais . . . 153
8.3 Números algébricos . . . 155
8.4 Números transcendentes . . . 157
8.5 Expansões β-ádicas . . . 159
8.6 Frações contínuas de irracionais . . . 161
8.7 Problemas . . . 166
8.8 Temas para investigação . . . 168
8.9 Atividades para licenciandos e professores . . . 170

9 Funções exponenciais e logarítmicas 171
9.1 Introdução . . . 171
9.2 Uma ideia antiga . . . 171
9.3 Construção da função exponencial . . . 172
9.4 O aparecimento do logaritmo . . . 182
9.5 Construção do logaritmo . . . 184
9.6 Aplicações da exponencial . . . 186
9.6.1 Um modelo de crescimento populacional . . . 186
9.6.2 Pressão atmosférica . . . 187
9.6.3 Caracterização das funções exponenciais . . . 189
9.7 Aplicações do logaritmo . . . 191
9.7.1 A escala Richter . . . 191
9.7.2 A escala pH . . . 191
9.8 Gênese do número e . . . 192
9.8.1 Crescimento populacional e o número e . . . 192
9.8.2 Definição do número e . . . 193
9.9 Problemas . . . 196
9.10 Temas para investigação . . . 199
9.11 Atividades para licenciandos e professores . . . 200

10 Tópicos sobre números reais 207
10.1 Introdução . . . 207
10.2 Números construtíveis . . . 207
10.3 Algumas constantes matemáticas . . . 209
10.4 Sobre o conceito de área . . . 210
10.5 Área de setores parabólicos . . . 212
10.6 Os Teoremas de Cavalieri . . . 214
10.7 Área da elipse e volume do elipsoide . . . 217
10.8 Comprimento da circunferência usando derivadas . . . 219
10.9 Problemas . . . 220
10.10 Temas para investigação . . . 222
10.11 Atividades para licenciandos e professores . . . 224

11 Aplicativos computacionais para Análise na Reta **227**
11.1 Introdução . . . 227
11.2 Pequeno dicionário de comandos do Maxima . . . 227
11.3 Exemplos . . . 230
11.4 Frações contínuas simples (FCS) . . . 231
11.5 Mudança de base em expansões β-ádicas . . . 232
11.6 Problemas . . . 233
11.7 Aplicativos de Inteligência Artificial . . . 237
11.8 Problemas . . . 237

A Respostas e sugestões para alguns problemas **239**

B Créditos das figuras **249**

Referências Bibliográficas **253**

Índice de nomes próprios **261**

Índice de assuntos **263**

Apresentação

O Cosmos é construído por duas energias paralelas: o ensinar e o aprender.

Sobre este texto

Este texto aborda os principais assuntos do ensino básico que necessitam de conceitos e técnicas da Análise Matemática para sua correta compreensão. Nosso olhar é o da Matemática Superior, mas a matéria é a Matemática Elementar estudada nas escolas de ensino fundamental e médio.

O principal assunto aqui tratado é o modelo dos números reais. Inclui estudo dos números racionais, gênese e história dos números irracionais e suas representações, sequências numéricas, o número π, gênese, história e aplicações das funções exponenciais e logarítmicas, o número e, e, por último, tópicos como áreas e volumes.

Escrevemos este texto com a intenção de apoiar o estudo desses assuntos em cursos de formação inicial de professores de Matemática, particularmente licenciatura. Versões iniciais foram utilizadas em cursos de formação inicial de professores e no Mestrado Profissional de Matemática da UFSCar, e parte desse texto foi usado também em atividades de atualização com professores do ensino básico.

Supomos que nosso estudante já participou de cursos elementares sobre números inteiros, Geometria Euclidiana Plana e conceitos básicos de Cálculo Diferencial e Integral de uma variável. Imaginamos um texto para uso em semestres intermediários dos nossos cursos de Licenciatura em Matemática.

Nosso método

Ao compor esse material acompanhamos as orientações do método *ensino da Matemática através de problemas* assim como do *método genético*.

O uso de problemas como recurso didático está bem estabelecido na tradição matemática, e particularmente apreciamos a aplicação do método com o objetivo de desenvolver a arte de investigar em Matemática. Assim como aquele que investiga aprende, o que aprende deve fazê-lo praticando a arte de investigar, sem o que não é possível obter um conhecimento significativo. Para facilitar esse caminho ao estudante apresentamos um texto com muitos problemas clássicos e abertos, assim como problemas envolvendo ideias inesperadas, "fora do lugar". Às vezes repetimos problemas ao longo do texto como uma estratégia de aprendizagem. Observamos, em nossos trabalhos com estudantes, que particularmente úteis são as seções "temas para investigação" colocadas no final de cada capítulo, a partir do segundo.

Por outro lado, o ensino da Matemática exige também a apresentação de conceitos e ideias elaboradas ao longo da história. No meio matemático a expressão *método genético* parece ter sido utilizada pela primeira vez por Otto Toeplitz em 1926. Autor de um livro didático [122] de Cálculo Diferencial e Integral em que usou esse método, Toeplitz estava convencido de que

os estudantes adquirem compreensão dos conceitos e métodos do Cálculo apenas quando se lhes apresenta sua gênese e desenvolvimento. Harold M. Edwards também utilizou o método genético em sua apresentação [39] do Último Teorema de Fermat. Segundo esse autor, a melhor maneira de superar a dificuldade em aprender uma teoria matemática abstrata é ignorar os tratados modernos até que se tenha estudado sua gênese.

Dessa forma, neste livro, a sequencialização dos assuntos tem como fio condutor a gênese dos conceitos e técnicas, e a História da Matemática é a nossa principal inspiração.

Optamos por um estilo razoavelmente detalhado e dialógico, com ampla explicação das ideias. Pensamos que dessa forma o texto poderá ser utilizado em diversas situações de ensino e aprendizagem, e o professor fica com liberdade de adotar diferentes estratégias. Particularmente apreciamos estratégias que incentivam o estudante a realizar um estudo relativamente autônomo, mais dirigido à prática da pesquisa. De qualquer forma, o que irá realmente atrair o estudante é o impulso para investigar as propriedades dos números.

Agradecimentos

Todo o material aqui disposto foi construído através de consultas a inúmeras fontes, acreditamos que todas estão citadas na bibliografia (página 253). Constatamos assim que participamos de uma construção coletiva. Optamos por referir no texto uma pequena parte das fontes, de outra forma iríamos sobrecarregar o estilo. Acompanhamos o costume em nossa área de não mencionar as fontes dos problemas em livros textos para estudantes.

Muito importante foi a participação dos estudantes dos cursos de Matemática da UFSCar, os quais deram o tom necessário para que este trabalho efetivamente atenda a uma necessidade. Agradecemos a atenção e envolvimento das turmas de 2003 a 2009 com as quais trabalhamos os assuntos aqui estudados. Agradecemos também às diversas turmas de professores que participaram de nossos cursos de formação continuada, assim como dos professores que participam do nosso mestrado profissional. Sentimo-nos verdadeiramente agraciados com as oportunidades que tivemos de contar com esses colaboradores.

Nossos agradecimentos se estendem aos colegas professores e funcionários do Departamento de Matemática da UFSCar, particularmente ao grupo de ensino da Matemática, que nos proporcionou a oportunidade de desenvolver uma clareza sobre essa importante atividade.

Pensamos ser adequado citar nomes, mesmo correndo o risco de omitir alguns: Yuriko Y. Baldin, Pedro L. A. Malagutti, Luiz J. Bettini, Yolanda K. S. Furuya, Waldeck Schützer, João C. V. Sampaio, Paulo A. S. Caetano, Sadao Massago, Jean Piton, Marcus Vinicius de A. Lima, Fabio Gomes Figueira, Marcelo J. Botta, Maurizio Marchetti, Guillermo A. L. Villagra e Ivo Machado da Costa.

Finalmente dedico esse livro aos meus professores de Matemática, com muita gratidão.

São Carlos, 03 de janeiro de 2011.
Roberto Ribeiro Paterlini.

Observação sobre a segunda edição.

Esta versão incorpora correções, atualizações, acréscimos e melhoramentos.

São Carlos, 11 de fevereiro de 2026. O autor.

Capítulo 1

Os números inteiros

1.1 Introdução

Apresentamos, neste Capítulo, uma síntese da história da invenção dos números inteiros, e de como essas ideias participaram do início do desenvolvimento da Matemática. Apresentamos também os resultados básicos da Teoria dos Números que são necessários para o estudo dos capítulos posteriores deste livro. Essa apresentação é um resumo de [96].

1.2 Gênese dos números naturais

Da grande sinfonia natural que se desdobra perante seus sentidos, o homem, desde o início de seu desenvolvimento mental, percebeu um ritmo básico, discreto, uniforme, sequencial, que traduziu no que hoje denominamos números naturais.

Construiu primeiro o conceito de *unidade*, um segredo que se desvela aos poucos. Aquele que designamos *número um* é um representante dessa essência, trazendo a ideia de começo. É o que inicia e dá ritmo. Revela-se, desdobrando-se, dando origem a todos os outros números, em infinitas combinações. É, ao mesmo tempo, o todo e a parte.

Reconhecendo, em seguida, a diversidade das coisas, o homem construiu o conceito dos números naturais subsequentes. Observando essa construção do ponto de vista quantitativo, percebemos que cada número natural é a reunião de uma quantidade precisa de unidades. Os números são construídos em uma ordem. Designando com o símbolo 1 a unidade e com $+$ o ajuntamento de unidades, vemos que 1 é o primeiro número, $1+1$ é o segundo, $1+1+1$ é o terceiro, e assim sucessivamente. Observamos que, dado um número, o único número que lhe segue nessa ordem é obtido acrescentando-se uma unidade às unidades do número dado. Considerando o número $1+1$ e os seguintes, observamos que, dado um desses números, o número que lhe antecede nessa ordem é único.

Obtemos dessa forma as ideias de sucessor e de antecessor. Dado um número natural a, seu *sucessor* é indicado por $a+1$, e é o número construído adicionando-se uma unidade às unidades de a. Dado um número natural $a \neq 1$, seu *antecessor* é indicado por $a-1$, e é o número cujo sucessor é a.

O conjunto dos números naturais é, portanto, constituído pelos números 1, $1+1$, $1+1+1$, $1+1+1+1$, ..., e assim por diante.

Para utilizar o conceito de número natural o homem construiu muitos métodos de contagem. Para contar necessitamos de um sistema de numeração e de uma linguagem.

Um sistema de numeração proporciona um algoritmo para contagem. Uma função básica de qualquer sistema de numeração é que ele deve determinar, implícita ou explicitamente, uma regra para o sucessor de qualquer número natural. Também são desejáveis em um sistema de numeração as seguintes qualidades: i) todo número natural tem representação no sistema; ii) a representação de qualquer número natural no sistema é única.

Um sistema de numeração, para ser usado, necessita de uma linguagem para representar os números. A linguagem associa a cada número um vocábulo, um símbolo, um ícone ou um sinal.

O homem inventou os mais diferentes métodos para representar os números utilizando as mais diversas linguagens, levando em conta suas necessidades de comunicação e os meios técnicos disponíveis.

Registros arqueológicos nos sugerem qual deve ter sido o mais antigo sistema de numeração utilizado pelo homem:

$$\mid \quad \mid\mid \quad \mid\mid\mid \quad \mid\mid\mid\mid \quad \mid\mid\mid\mid\mid \quad \ldots$$

Trata-se de um sistema de numeração com um único símbolo, a saber, $\mid$, representando a unidade. Dada a representação de um número, para se obter a representação do sucessor basta acrescentar um símbolo $\mid$. Esse sistema. portanto, é uma materialização da gênese psicológica dos números naturais.

Estudando a cultura dos povos naturais os antropólogos descobriram os mais variados sistemas de numeração. Indígenas da Ilhas Murray, situadas no estreito de Torres, entre a Austrália e a Nova Guiné, utilizavam os seguintes vocábulos para contar:

netat	(um)
neis	(dois)
neis netat	(três)
neis neis	(quatro)

Vemos aqui um sistema de numeração que utiliza basicamente os vocábulos *netat* e *neis*. Aparentemente os indígenas que inventaram esse sistema não precisavam de nomes para números maiores do que quatro. Mas se precisassem poderiam obtê-los seguindo sempre o mesmo método. O número cinco seria decomposto na forma $5 = 2 + 2 + 1$, e receberia o nome *neis neis netat*. O número seis seria decomposto na forma $6 = 2 + 2 + 2$, e receberia o nome *neis neis neis*. Em geral, dado um número natural qualquer a, podemos escrever $a = 2+2+\ldots+2$ ou $a = 2 + 2 + \ldots + 2 + 1$, e a denominação de a nesse sistema seria *neis neis...neis* ou *neis neis...neis netat*.

Vemos que aqueles indígenas inventaram um sistema de numeração perfeitamente coerente. A regra do sucessor pode ser descrita da seguinte forma. Se o nome de um número termina com o vocábulo *neis*, o nome de seu sucessor se obtém repetindo-se todos os vocábulos *neis* e acrescentando-se o vocábulo *netat*. Se o nome de um número termina com o vocábulo *netat*, o nome de seu sucessor se obtém substituindo-se esse vocábulo por *neis*.

Esses sistemas de numeração fazem parte de uma família mais geral, a dos sistemas aditivos. Seja β um número natural. Um *sistema aditivo de base* β consiste de :

a) β símbolos ou vocábulos a_1, a_2, ..., a_β para representar os números de um a β, em ordem crescente. Os símbolos ou vocábulos escolhidos chamam-se *algarismos*.

b) regra do sucessor: se a representação de um número termina em a_i, sendo $i \neq \beta$, a representação do sucessor se obtém substituindo-se a_i por a_{i+1}; se a representação de um número termina em a_β, a representação do sucessor se obtém acrescentando-se a_1 à representação dada.

Portanto, as representações de um sistema aditivo de base β são da forma $a_\beta a_\beta \dots a_\beta a_i$, com $i = 1, \dots, \beta$. A contagem nesse sistema, a partir de um, é:

$$a_1,\ \ a_2,\ \ a_3, \dots, a_\beta,\ \ a_\beta a_1,\ \ a_\beta a_2, \dots, a_\beta a_\beta,\ \ a_\beta a_\beta a_1, \dots$$

Os sistemas de numeração aditivos têm uma concepção simples, e serviram de modelo para a construção de sistemas utilizados por diversos povos, como o sistema hieroglífico dos antigos egípcios, os sistemas ático e jônico, dos antigos gregos, e o sistema romano, da antiga civilização romana. Entretanto o uso de um sistema aditivo em uma civilização como a nossa traria sérios inconvenientes. Nesses sistemas o nome de um número necessita da repetição de vocábulos, mesmo se considerarmos valores numéricos baixos, dificultando o entendimento. Na escrita, o símbolo principal deve ser repetido muitas vezes, dificultando o reconhecimento visual, e ocupando muito espaço. O sistema aditivo também dificulta o desenvolvimento de algoritmos compactos para implementação das operações aritméticas.

Devido a essas limitações, nossa civilização prefere utilizar os sistemas de numeração posicionais. Com a invenção desses sistemas a Arte de Contar atinge seu ápice histórico, científico e social. O sistema posicional mais importante é o decimal, que pode ser considerado uma das maiores invenções da humanidade. Está hoje difundido em todo o planeta, e é utilizado nos mais diversos setores da organização social, assim como na maior parte das aplicações científicas.

A construção de um sistema posicional com uso constante em ambientes sociais e científicos foi realizada no mundo antigo por apenas três povos: os sumérios, os maias e os hindus. Essa construção certamente exigiu a liderança de uma inteligência científica e uma decisão coletiva, ou pelo menos governamental, em adotar o sistema.

O método hindu foi o que trouxe resultados mais convenientes para nossa civilização. Primeiramente devido ao fato do sistema usar a base dez, uma escolha bastante adequada e prática. Em segundo lugar por que os hindus se preocuparam em criar um sistema adaptado à escrita em papel. Embora não tenhamos registros históricos detalhados do trabalho dos hindus, podemos presumir que inicialmente utilizavam o ábaco para representar números, e criaram algoritmos para implementar as operações aritméticas nesse instrumento. O ábaco era, de fato, o dispositivo mais barato e disponível para a prática de qualquer aritmética. Entretanto, o ábaco tem um sério inconveniente, que é o de nada deixar registrado. Daí a necessidade de se criar um método de registro durável, e os hindus tiveram a feliz ideia de transpor sua aritmética do ábaco para a escrita em papel.

A construção de um sistema de numeração posicional decimal para registro em papel exige o reconhecimento de que devem ser usados exatamente dez símbolos, nove para representar os números de um a nove, e mais um para representar a casa vazia.

Adotamos os símbolos

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9$$

que são chamados *algarismos decimais*. O símbolo 0 chama-se zero e os símbolos 1, 2, 3,..., 9 designam os números de um a nove, nessa ordem.

Cada número natural é indicado por uma sequência de algarismos escritos em linha horizontal um em seguida do outro, lidos da esquerda para a direita, tendo como *regra do sucessor* o seguinte:

i) se a representação de um número termina com um dos algarismos 0, 1, ..., 8, então a representação do sucessor se obtém substituindo-se esse algarismo pelo seu sucessor na ordem natural dos algarismos;

ii) se a representação de um número termina em 9, então a representação do sucessor se obtém substituindo-se esse algarismo 9 por 0 e em seguida aplicando-se recorrentemente os itens *i)* e *ii)* dessa regra ao algarismo anterior. Se não existir o algarismo anterior considera-se como se ele fosse o zero.

Assim, contando os números um a um, obtemos a representação dos números naturais no sistema decimal. A forma geral dessa representação é

$$d_n \dots d_2 d_1 d_0 \tag{1.1}$$

em que cada d_i é um algarismo decimal, com $d_n \neq 0$. Portanto os números naturais representados no sistema decimal são:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ..., 19, 20, 21, ..., 98, 99, 100, 101, ...

Existe outra forma de obter a representação decimal de um número natural m. Agrupamos as unidades de m em grupos de dez. Sobram d_0 unidades, sendo d_0 um dos algarismos decimais. Escrevemos $m = q_1 10 + d_0$. Tomamos q_1 e o agrupamos em grupos de dez. Seja q_2 a quantidade de grupos de dez assim formados e seja d_1 o que restou, sendo d_1 um dos algarismos decimais. Escrevemos $q_1 = q_2 10 + d_1$. Prosseguimos até encontrar um valor q_n entre 1 e 9. Temos

$$\begin{aligned} m &= q_1 10 + d_0; \\ q_1 &= q_2 10 + d_1; \\ q_2 &= q_3 10 + d_2; \\ &\vdots \\ q_{n-1} &= q_n 10 + d_{n-1}. \end{aligned}$$

Recompondo as relações acima com $q_n = d_n$ vem

$$\begin{aligned} m &= q_1 10 + d_0 \\ &= (q_2 10 + d_1)10 + d_0 \\ &= q_2 10^2 + d_1 10 + d_0 \\ &\vdots \\ &= d_n 10^n + d_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + d_1 10 + d_0, \end{aligned}$$

em que cada d_i é um algarismo decimal, com $d_n \neq 0$.

Temos, portanto, duas formas de representação de qualquer número natural:

$$d_n d_{n-1} \dots d_2 d_1 d_0 \qquad \text{e} \qquad d_n 10^n + d_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + d_1 10 + d_0.$$

A expressão $d_n d_{n-1} \dots d_2 d_1 d_0$ chama-se *forma compacta da representação decimal de* m, ou simplesmente *representação decimal de* m. A expressão $d_n 10^n + d_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + d_1 10 + d_0$ chama-se *forma expandida da representação decimal de* m. Essas formas chamam-se também *expansões decimais*. Para dirimir possíveis confusões a representação compacta pode vir escrita como $(d_n d_{n-1} \dots d_2 d_1 d_0)_{dez}$.

Dada uma representação $d_n d_{n-1} \dots d_2 d_1 d_0$, os valores d_i chamam-se *dígitos decimais* do número. Se estiver claro que se trata da base dez, os chamamos apenas de *dígitos*.

Outro sistema posicional, o binário, assumiu grande importância nos dias de hoje, pois tornou viável a implementação de uma linguagem para uso na computação digital. Mais geralmente, todo número natural $\beta \neq 1$ pode servir de base para a construção de um sistema posicional. Dado um número natural $\beta \neq 1$, escolhemos β símbolos, um para indicar a casa vazia e $\beta - 1$ para indicar os números de 1 a $\beta - 1$. Esses símbolos são chamados *β-algarismos*.

A representação dos números naturais no sistema posicional de base β segue as mesmas convenções do sistema decimal, adaptando-se a regra do sucessor conforme segue:

i) se a representação de um número termina com um dos algarismos que representam 0, 1, ..., $\beta - 2$, então a representação do sucessor se obtém substituindo-se esse algarismo pelo seu sucessor na ordem natural dos algarismos. $\beta - 2$ é o antecessor de $\beta - 1$.
ii) se a representação de um número termina com o algarismo que representa $\beta - 1$, então a representação do sucessor se obtém substituindo-se esse algarismo por zero e, em seguida, aplicando-se recorrentemente os itens *i)* e *ii)* dessa regra ao algarismo anterior. Se não existir o algarismo anterior considera-se como se ele fosse o zero.

Dado um número natural m, podemos obter sua representação na base β por contagem ou por agrupamento. Dessa forma m tem duas formas de representação, a compacta e a expandida:

$$m = d_n d_{n-1} \dots d_2 d_1 d_0 = d_n \beta^n + d_{n-1}\beta^{n-1} + \cdots + d_1 \beta + d_0, \tag{1.2}$$

em que cada d_i é um β-algarismo, e $d_n \neq$ zero.

Costuma-se escolher como algarismos para as bases de dois a dez os símbolos correspondentes utilizados no sistema decimal. Para as bases maiores costuma-se considerar, a partir de 9, a sequência de letras do alfabeto na forma capital: A, B, C, etc. Por exemplo, para o sistema duodecimal (base doze) os algarismos são

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad A \quad B$$

Exemplo de número representado no sistema duodecimal: $(A0B)_{doze}$. Seu valor no sistema decimal pode ser assim calculado:

$$(A0B)_{doze} = A \times 12^2 + 0 \times 12 + B = 10 \times 12^2 + 0 \times 12 + 11 = 1451.$$

No sistema binário (base dois) os algarismos são: 0 e 1. Exemplo de número representado no sistema binário: $(11011)_{dois}$. Seu valor no sistema decimal pode ser assim calculado:

$$(11011)_{dois} = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2 + 1 = 27.$$

Podemos verificar que a representação de um número natural qualquer em um sistema posicional de base β sempre existe e é única. A verificação formal dessa afirmação necessita do Teorema do Algoritmo da Divisão, que apresentamos na Seção 1.5 deste Capítulo.

1.3 Operações fundamentais

As quatro operações fundamentais da Aritmética são: *adição*, *subtração*, *multiplicação* e *divisão*. A adição é a primeira, e dela derivam todas as outras. Nesta seção consideramos também a *potenciação*.

Vimos na página 1 que todo número natural a tem um único sucessor, indicado por $a + 1$. Definimos a adição de um número natural a com a unidade como a operação da qual resulta o sucessor de a. Podemos estender esse conceito, e definir a adição de um número natural a com um número natural qualquer b: ao número a adicionamos tantas unidades quantas são as de b. Mais exatamente, a *adição* de a e b é a operação da qual resulta um número natural definido da seguinte forma: tomamos o sucessor $a + 1$ de a, em seguida o sucessor de $a + 1$, e assim por

diante, realizamos a ação "tomar o sucessor" tantas vezes quantas são as unidades de b. Por exemplo, para adicionar dois a três, fazemos, sucessivamente,

$$(1+1+1)+1 = 1+1+1+1 \quad \text{e} \quad (1+1+1+1)+1 = 1+1+1+1+1$$

e o resultado é cinco.

Na adição os números que estão sendo adicionados chamam-se *termos* ou *parcelas*, e o número que resulta da operação chama-se *soma* ou *total*. Se c é o resultado da soma de a com b, escrevemos $a+b=c$.

Observamos que a operação de adição satisfaz duas importantes propriedades: comutatividade e associatividade, que podem serem assim enunciadas:
Propriedade comutativa: $a+b=b+a$;
Propriedade associativa: $(a+b)+c=a+(b+c)$,
quaisquer que sejam os números naturais a, b e c.

Observamos que podemos definir a adição de três ou mais números naturais. As propriedades comutativa e associativa implicam que não importa a ordem com que os números são somados.

A *subtração* é a ação inversa da adição. Enquanto a adição está relacionada com os conceitos de *acrescentar* e *juntar*, a subtração corresponde a *retirar* e *completar*.

Se a e b são dois números naturais tais que a tem mais unidades do que b, podemos *subtrair b de a* retirando de a tantas unidades quantas as de b. O resultado de subtrair b de a é indicado por $a-b$, e é chamado *diferença* entre a e b. Dessa forma, dados números naturais a e b tais que a tem mais unidades do que b, a diferença $a-b$ é o número natural que somado com b resulta a, ou seja, $b+(a-b)=a$.

Como a subtração é o inverso da adição, se subtrairmos b de a e depois, ao resultado, adicionarmos b, obtemos novamente a. Do mesmo modo, se adicionarmos a e b, e da soma subtrairmos b, o resultado é a. Em outros termos,

$$(a-b)+b=a \quad \text{e} \quad (a+b)-b=a.$$

Vimos que existe uma ordem natural no conjunto dos números naturais. Assim, dados números naturais a e b, podemos compará-los e verificar se têm a mesma quantidade de unidades, ou se um deles tem uma quantidade maior do que a do outro. Escrevemos $a=b$ para indicar que os números naturais têm a mesma quantidade de unidades. Se a tem mais unidades do que b, escrevemos $b<a$, ou $a>b$. e dizemos *b menor do que a*, ou, respectivamente, *a maior do que b*. São muito úteis as seguintes notações. Anotamos $a \leq b$ quando $a<b$ ou $a=b$. Da mesma forma, anotamos $a \geq b$ quando $a>b$ ou $a=b$.

No conjunto dos números naturais vale a *propriedade transitiva da ordem*: se a, b e c são números naturais tais que $a<b$ e $b<c$, então $a<c$. De fato, se a tem menos unidades do que b e se este tem menos unidades do que c, então a tem menos unidades do que c. É fácil ver que vale também a *Lei da Tricotomia*: dados os números naturais a e b, uma e apenas uma das seguintes condições é verdadeira: *i)* $a=b$; *ii)* $a<b$; *iii)* $a>b$.

No conjunto dos números naturais vale ainda o *princípio do menor número natural*: se A é um subconjunto não vazio do conjunto dos números naturais, então A tem um menor elemento. Isso significa que existe a em A tal que $a \leq b$ para todo b em A.

Observamos as seguintes propriedades de compatibilidade entre a ordem dos números naturais e as operações de adição e subtração:

compatibilidade entre a ordem e a adição: quaisquer que sejam os números naturais a, b e c, se

$a < b$ então $a + c < b + c$. Temos também: se $a \leq b$ então $a + c \leq b + c$.
compatibilidade entre a ordem e a subtração: quaisquer que sejam os números naturais a, b e c com $c < a$ e $c < b$, se $a < b$ então $a - c < b - c$. Temos também: se $a \leq b$ então $a - c \leq b - c$.

Aplicando essas propriedades duas vezes, temos, por exemplo, que quaisquer que sejam os números naturais a, b, c e d, se $a \leq b$ e $c \leq d$, então $a + c \leq b + d$.

Valem as seguintes Leis de Cancelamento:
Lei de Cancelamento da adição: quaisquer que sejam os números naturais a, b e c, temos $a + c = b + c \iff a = b$.
Lei de Cancelamento da subtração: quaisquer que sejam os números naturais a, b e c, se c tem menos unidades do que a e do que b, temos $a - c = b - c \iff a = b$.

Várias regras de manipulação algébrica podem ser deduzidas. Sempre que a subtração fizer sentido, temos, por exemplo:

$$a - b = c \iff a = b + c \iff a - c = b; \quad a + (b - c) = (a + b) - c; \quad (a - c) - (b - c) = a - b;$$

$$(a + c) - (b + c) = a - b; \quad (a - b) - c = (a - c) - b; \quad a - (b - c) = (a - b) + c = (a + c) - b;$$

$$(a - c) + (b - c) = [(a + b) - c] - c; \quad a - (b + c) = (a - b) - c; \quad (a - b) - (a - c) = c - b.$$

A *multiplicação* é uma potencialização da adição. *Duplicar* um número natural a significa tomar $a + a$. *Triplicar* a significa tomar $a + a + a$. E assim por diante, temos *quadruplicar*, *quintuplicar*, em geral, *multiplicar*.

Multiplicar um número natural n por um número natural a significa adicionar n parcelas iguais a a. O resultado se chama *produto de n por a*. O produto de n por a é indicado com uma das seguintes notações:

$$na, \qquad n \cdot a \qquad \text{ou} \qquad n \times a$$

(lê-se: n vezes a, ou n multiplicado por a).

Formalmente, podemos definir a multiplicação por recorrência da seguinte maneira. Seja a um número natural qualquer. Então

$$\begin{cases} 1 \cdot a &= a, \\ n \cdot a &= (n-1) \cdot a + a \quad \text{para todo } n \geq 2. \end{cases}$$

A multiplicação ocorre em inúmeras situações. Além do uso direto da definição como soma de parcelas repetidas, vemos que aparece em outras situações como contagem de objetos colocados em um arranjo retangular ou como medida da área de um retângulo de base n e altura m, sendo n e m números naturais.

Destacamos as seguintes propriedades da multiplicação:
comutatividade da multiplicação: $ab = ba$ quaisquer que sejam os números naturais a e b;
associatividade da multiplicação: quaisquer que sejam os números naturais a, b e c, temos $a(bc) = (ab)c$;
propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição: quaisquer que sejam os números naturais a, b e c, temos $a(b + c) = ab + ac$;
compatibilidade entre a ordem e a multiplicação: quaisquer que sejam os números naturais a, b e n, se $a < b$ então $an < bn$. Temos também: se $a \leq b$ então $an \leq bn$;
leis de Cancelamento da multiplicação: (i) quaisquer que sejam os números naturais a, b e n, se $na < nb$ então $a < b$; (ii)quaisquer que sejam os números naturais a, b e n, se $na = nb$ então $a = b$;
propriedade distributiva da multiplicação em relação à subtração: quaisquer que sejam os números naturais a, b e n, com $b < a$, temos $n(a - b) = na - nb$;

Regras de manipulação algébrica podem ser demonstradas. Sempre que a subtração fizer sentido, temos, por exemplo:

$$(a+b)(c+d) = ac+bc+ad+bd; \quad (a+b)^2 = a^2+2ab+b^2; \quad (a-b)^2 = (a^2+b^2)-2ab;$$

$$(a+b)(c-d) = [(ac+bc)-ad]-bd; \quad (a-b)(c-d) = [(ac+bd)-bc]-ad.$$

A *divisão* amplia o potencial da subtração, e é a operação inversa da multiplicação. Responde basicamente a dois conceitos: repartir e comparar.

A divisão, vista como repartir, ocorre quando particionamos um conjunto de objetos em grupos com o mesmo número de objetos cada um, sendo que sabemos a quantidade de grupos e queremos saber quantos objetos compõem cada grupo.

A divisão, vista como comparar, ocorre quando temos dois números e os comparamos. Queremos saber quantas vezes um número "cabe" no outro. Dizendo de outra forma, dado um conjunto de objetos queremos dividi-lo em grupos com o mesmo número de objetos cada um, sendo que sabemos a quantidade de objetos de cada grupo e queremos saber quantos são os grupos.

Dado um número natural a, suponhamos que a foi dividido em q grupos com b elementos cada um, e que restaram r elementos. Temos a equação fundamental da *divisão*:

$$a = bq + r \tag{1.3}$$

Se da divisão não existir resto, dizemos que o resto é zero e que a divisão é *exata*, e escrevemos

$$a = bq \tag{1.4}$$

Nas relações 1.3 e 1.4, q é denominado *quociente* e r, *resto* da divisão inteira de a por b, ou simplesmente da divisão de a por b.

O resto da divisão de a por b não é único. Por exemplo, ao dividir 19 por 3 temos as possibilidades, dentre outras: $19 = 3\cdot 6+1 = 3\cdot 5+4 = 3\cdot 4+7$. Portanto 1, 4 e 7 são restos. Mas existe o menor resto, que no exemplo dado é 1.

Dividir um número natural a por um número natural b tal que $b \leq a$ significa encontrar um quociente q tal que $a = bq$ ou um quociente q e o menor resto r tais que $a = bq + r$.

De acordo com o que comentamos acima sobre o significado da divisão, existem duas maneiras fundamentais de calcular q e r.

A primeira é perfazer subtrações sucessivas. Assim, para dividir a por b, com $b < a$, calculamos $a-b$, $a-2b$, $a-3b$,... Notemos que os valores $a-qb$, para $q = 1, 2, 3,...$ diminuem à medida que q cresce. Assim existe o maior q tal que a subtração $a-qb$ pode ser feita mas $a-(q+1)b$ não. Se encontrarmos q tal que $a = qb$, a divisão é exata e terminamos. Caso contrário, chamando $r = a-qb$ temos $a = qb+r$, e a divisão terminou. Para dividir a por b, com $b = a$, basta tomar $q = 1$, e a divisão é exata.

A segunda maneira de dividir a por $b \leq a$ consiste em calcular $1\cdot b$, $2b$, $3b$,... até atingir o valor a ou ultrapassá-lo. Se o valor a for atingido, significa que encontramos q tal que $a = qb$, e a divisão é exata. Se o valor a não for atingido, seja qb o maior elemento da sequência antes de a, de modo que $qb < a < (q+1)b$. Chamando $r = a-qb$ temos $a = qb+r$, e a divisão terminou.

Observemos que em ambos os casos r é o menor resto possível. De fato, sejam t e s números naturais tais que $a = tb+s$, e suponhamos que $s < r$. Então $a-tb < a-qb$, o que implica

$qb < tb$. Disso segue $q < t$, o que contraria a hipótese de ser q o maior número natural tal que $qb < a$. Portanto $r \leq s$.

Potenciação é o nome que se dá à multiplicação de valores repetidos. Quaisquer que sejam os números naturais a e n, anotamos

$$a \cdot a \cdot a \cdots a = a^n \qquad (a \text{ multiplicado por ele mesmo } n \text{ vezes}).$$

Aqui se entende que $a^1 = a$. Na notação a^n, dizemos que a é a *base* e n é o *expoente*. Dizemos também que a^n é a *potência n-ésima* de a.

As seguintes propriedades são fáceis de constatar diretamente da definição:

Propriedade 1: potências de mesma base: quaisquer que sejam os números naturais a, m e n, temos

$$a^{m+n} = a^m a^n.$$

Propriedade 2: potência de potência: quaisquer que sejam os números naturais a, m e n, temos

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

Propriedade 3: potências de mesmo expoente: quaisquer que sejam os números naturais a, b e m, temos

$$a^m b^m = (ab)^m.$$

Observamos que a notação a^{m^n} não é determinada. Ela pode significar $(a^m)^n$, em que primeiro se calcula a^m e ao resultado se aplica o expoente n, ou pode significar $a^{(m^n)}$, em que primeiro se calcula m^n, e o resultado é a potência m^n-ésima de a. O mesmo vale para expressões como

$$a^{m^{n^p}} \qquad \text{e} \qquad a^{m^{m^{m^m}}}$$

Convenção. Neste texto faremos a seguinte convenção:

$$a^{m^n} = a^{(m^n)}.$$

Em geral, em tais expressões, as potências são calculadas de cima para baixo, mas isso não é obrigatório. É preciso que o autor deixe isso claro no texto.

Vejamos agora como é a *inclusão do zero como número natural.* Na seção anterior estudamos os números naturais 1, 2, 3, 4, ... e consideramos zero um algarismo do sistema decimal, definido para designar a casa vazia em representações de números. Agora convém incluirmos zero como um número natural, de modo que possamos estender as propriedades desse conjunto. Considerar zero como um número natural também facilita o desenvolvimento de fórmulas e definições.

A ideia de conjunto vazio surge quando fazemos certas operações com conjuntos. Por exemplo, dado um conjunto, retiramos dele todos os seus elementos, do que resulta um conjunto vazio. Fazendo a interseção de dois conjuntos que não têm elementos em comum, vemos que essa interseção é um conjunto vazio.

Isso nos sugere estender os números utilizados para contagem, designando por *zero* a quantidade de elementos em um conjunto vazio. Indicamos o número zero com o símbolo 0. Dessa forma zero faz parte dos números utilizados para contagem, que passam a ser: 0, 1, 2, 3, ...

Se em um conjunto vazio colocamos um objeto, temos um conjunto com um elemento. Assim $1 + 0 = 1$ ou $0 + 1 = 1$. Vemos que 1 é o sucessor de zero. Mais geralmente, se em um conjunto vazio colocamos n elementos, ficamos com n elementos no conjunto, ou seja, $0 + n = n$. Por

outro lado, se em um conjunto com n elementos acrescentamos elemento nenhum, continuamos com um conjunto com n elementos. Portanto $n+0=n$. Em síntese,

$$n+0=n=0+n \quad \text{para todo número natural } n. \tag{1.5}$$

Em particular, $0+0=0$. Vemos também que se de um conjunto com n elementos retiramos n elementos, ficamos com um conjunto com 0 elementos, isto é,

$$n-n=0 \quad \text{para todo número natural } n. \tag{1.6}$$

Em particular, $0-0=0$.

Vimos anteriomente que $1\times n$ significa tomar n uma vez, $2\times n$ significa tomar $n+n$, etc. Assim $0\times n$ significa tomar n nenhuma vez, e o mais lógico parece ser definir $0\times n=0$ para todo n. Por outro lado $n\times 0$ é $0+0+\ldots+0$, resultando novamente 0. Temos assim

$$n\times 0=0=0\times n \quad \text{para todo número natural } n. \tag{1.7}$$

Em particular, $0\times 0=0$.

Quanto à potenciação, retomando a definição dada acima, temos $0^n=0$ para todo $n\geq 1$. Quanto a tomar o expoente zero, é mais conveniente definir $a^0=1$ para todo número natural $a\geq 1$, pois isso combina melhor nas fórmulas. Não definimos o símbolo 0^0.

Indicamos por $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais, incluindo o zero. Portanto

$$\mathbb{N}=\{0,1,2,3,4,\ldots\}.$$

Vimos que a propriedade comutativa da adição se estende para esse novo conjunto dos números naturais, e examinando as considerações feitas acima vemos que a propriedade associativa da adição também se estende para esse novo conjunto. O mesmo ocorre para as propriedades comutativa e associativa da multiplicação e para a propriedade distributiva. Vemos também que $0<1$ e que as propriedades de ordem se estendem para o conjunto $\mathbb{N}$.

Indicamos por $\mathbb{N}^*$ o conjunto dos números naturais excluído o zero, denominados *números naturais positivos*. Portanto

$$\mathbb{N}^*=\{1,2,3,4,\ldots\}.$$

Destacamos ainda a seguinte propriedade, denominada *Lei da Integridade*: Se a e b são números naturais tais que $ab=0$, então $a=0$ ou $b=0$. De fato, vimos, na definição de multiplicação, que o produto de inteiros positivos é positivo. Portanto se a é positivo e se b é positivo, então ab é positivo. Isso implica que se $ab=0$ então $a=0$ ou $b=0$.

1.4 Gênese dos números inteiros

Todo número natural tem um aspecto quantitativo, pois mede a quantidade de elementos de um conjunto. Mas esse número também traz uma idéia qualitativa, que é a positividade. Assim, ao dizer "5 livros", traduzimos uma afirmação positiva sobre essa específica quantidade de livros. Mas a experiência nos leva à necessidade de considerar números naturais com a qualidade de negativo. Podemos fazer isso com uma construção do tipo "faltam-me 5 livros", ou então "a temperatura está 8 graus abaixo de zero". A Álgebra também apresenta situações em que se faz necessário considerar os números naturais com a qualidade de negatividade. Por exemplo, ao procurar uma possível solução x da equação $7+x=3$, vemos que nenhum número natural pode exercer esse papel. Percebemos que o valor quantitativo de x deve ser 4, mas

x deve agir na operação $7 + x$ de forma oposta à adição usual. É necessário que $+x$ opere retirando quatro unidades de 7, para resultar 3.

Essas observações nos trazem a ideia de considerar, para cada número natural $n \neq 0$, um outro número, quantitativamente igual a n mas de qualidade oposta. Chamaremos de *negativos* a esses números.

Convém criar uma notação para esse novo número, por exemplo, $\tilde{n}$. Vemos que $\tilde{n}$ deve ser caracterizado pelas relações

$$n + \tilde{n} = 0 = \tilde{n} + n \tag{1.8}$$

para todo número natural $n \in \mathbb{N}$.

Em particular, com a construção desses números, poderemos dizer que a solução da equação $7 + x = 3$ dada acima passaria a ser $x = \tilde{4}$, pois $7 + \tilde{4} = (3 + 4) + \tilde{4} = 3 + (4 + \tilde{4}) = 3 + 0 = 3$.

O estudante bem sabe que a Matemática consagrou a notação $-n$ para o número negativo correspondente a n. Diremos que $-n$ é o *oposto* de n.

Existem razões práticas para a escolha da notação $-n$ para o oposto de n. Ela simplifica a manipulação de expressões algébricas, combinando a notação de subtração com a de oposto. Por exemplo, a adição de 8 com -5, a ser representada por $8 + (-5)$, poderá ser simplificada para $8 - 5$, pois ambas as expressões têm o mesmo significado: estão sendo retiradas 5 unidades de 8.

Observamos que a consideração dos números negativos não constitui uma mera substituição da subtração. No contexto dos números naturais a subtração $a - b$ só tem sentido quando $a \geq b$. No novo contexto, com o acréscimo dos números negativos, podemos processar a subtração $a - b$ quaisquer que sejam o números naturais a e b. Se $b > a$ o valor de $a - b$ é um desses números negativos, mais exatamente, o oposto de $b - a$.

Poderíamos continuar a construção dos números inteiros usando os métodos com os quais os professores os ensinam para os estudantes da escola básica. Mas neste curso, como já estamos em uma fase mais adiantada em nosso caminho para a álgebra abstrata, preferimos proceder com um grau maior de formalidade.

Dado o conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, para todo número natural $n \neq 0$ consideramos o símbolo $-n$. Definimos

Definição 1.1. O *conjunto dos números inteiros* é

$$\mathbb{Z} = \{\ldots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}. \tag{1.9}$$

Em outros termos, $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{\ldots - 3, -2, -1\}$. Conforme já mencionamos, para todo número natural $n \neq 0$, o número $-n$ é denominado *oposto* de n. O elementos do conjunto $\mathbb{Z}_+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$ são denominados *inteiros positivos*, e os do conjunto $\mathbb{Z}_- = \{\ldots - 3, -2, -1\}$, *inteiros negativos*. Às vezes é usada a notação $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$.

Obtemos assim um novo conjunto de números que inclui os números naturais. Vimos que esse novo conjunto tem mais possibilidades do que o conjunto $\mathbb{N}$.

O símbolo $-n$ foi definido para o caso em que n é um número natural. Completamos nossa definição escrevendo $-(-n) = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de modo que o símbolo $-n$ agora fica definido também para o caso em que n é inteiro negativo. Vale a relação $n + (-n) = 0 = (-n) + n$ para todo número inteiro $n \in \mathbb{Z}$. Dizemos também que $-(-n)$ é o oposto de $-n$.

Nossa primeira providência é estender para $\mathbb{Z}$ os conceitos de adição e multiplicação já definidos em $\mathbb{N}$. A subtração também é definida mais abaixo, e a divisão será estudada na Seção 1.5.

A adição e a multiplicação de inteiros podem ser definidas pela lista de condições apresentadas a seguir, levando-se em conta que já estão definidas para números naturais. O símbolo -0 pode eventualmente aparecer. Nesse caso entendemos que $-0 = 0$.

Definição 1.2. Dados $m, n \in \mathbb{N}$, podemos supor, sem perda de generalidade, que $m \geq n$. Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $m = n + k$. Definimos:
(i) $m + (-n) = (-n) + m = k$;
(ii) $(-m) + n = n + (-m) = -k$;
(iii) $(-m) + (-n) = -(m + n) = (-n) + (-m)$;
(iv) $(-m)n = n(-m) = -(mn)$;
(v) $(-m)(-n) = mn = (-n)(-m)$.

O estudante pode verificar que as condições (i), (ii) e (iii) definem a soma $a + b$ para os casos em que a ou b são inteiros negativos, e que as condições (iv) e (v) definem o produto ab para os casos em que a ou b são inteiros negativos. Pode ser útil um exemplo. Para ver o que é $4 + (-7)$, escrevemos $m = 7$ e $n = 4$. Então $k = m - n = 7 - 4 = 3$. Usando a segunda identidade do item (ii) da Definição, temos $4 + (-7) = n + (-m) = -k = -3$.

As propriedades comutativa da adição e da multiplicação em $\mathbb{Z}$ podem ser facilmente verificadas. Como exemplo provamos a seguir que $a + b = b + a$ para o caso em que a é positivo e b negativo. Seja $b = -t$, para t positivo. Se $a \geq t$ escrevemos $a = m$ e $t = n$. Usando a condição (i) acima vem $a + b = m + (-n) = (-n) + m = b + a$. Se $t > a$ escrevemos $t = m$ e $a = n$. Usando a condição (ii) acima vem $a + b = n + (-m) = (-m) + n = b + a$. De maneira análoga se verifica a comutativa para os outros casos.

Igualmente podem ser demonstradas em $\mathbb{Z}$ as propriedades associativa da adição, associativa da multiplicação e a distributiva.

A relação de ordem já considerada em $\mathbb{N}$ pode se estender para $\mathbb{Z}$ da seguinte forma:

Definição 1.3. Dados $a, b \in \mathbb{Z}$, escrevemos $a < b$ quando $b + (-a) \in \mathbb{Z}_+$.

Os símbolos $>$ $\leq$ $\geq$ são definidos de modo análogo ao que foi feito para números naturais.

A seguir definimos a operação de subtração em $\mathbb{Z}$:

Definição 1.4. Dados $a, b \in \mathbb{Z}$, a *diferença* $a - b$ é definida por $a - b = a + (-b)$.

Todo $n \in \mathbb{Z}$ e seu oposto $-n$ têm o mesmo valor quantitativo. A esse valor comum denominamos *valor absoluto*. Mais exatamente, temos a

Definição 1.5. Dado $m \in \mathbb{Z}$, seu *valor absoluto* é anotado por $|m|$ e definido por

$$|m| = \begin{cases} m & \text{se } m \geq 0, \\ -m & \text{se } m < 0. \end{cases}$$

Quanto às leis de compatibilidade e de cancelamento, temos: *i)* $a < b \iff a + c < b + c$ quaisquer que sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$. *ii)* $a = b \iff a + c = b + c$ quaisquer que sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$. *iii)* $a < b \iff ac < bc$ quaisquer que sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$ com $c > 0$. *iv)* $a < b \iff bc < ac$ quaisquer que sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$ com $c < 0$. *v)* $a = b \iff ac = bc$ quaisquer que sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$ com $c \neq 0$.

A definição de potência a^n para bases negativas inteiras a pode ser igual à de números naturais:

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdots a \quad (n \text{ vezes})$$

para todo inteiro $a \neq 0$ e todo inteiro positivo n. Se $a \neq 0$ define-se $a^0 = 1$. O símbolo 0^0 permanece indefinido. Pode ser considerada a seguinte definição alternativa: para quaisquer inteiros $a > 0$ e $n \geq 0$, sejam $(-a)^n = a^n$ se n for par, e $(-a)^n = -a^n$ se n for ímpar. Valem as fórmulas usuais $a^{m+n} = a^m a^n$, $(a^m)^n = a^{mn}$ e $a^m b^m = (ab)^m$, para a e b inteiros não nulos e $m, n \geq 0$.

As regras de manipulação algébrica vistas anteriormente podem ser validadas em $\mathbb{Z}$, geralmente de maneira mais simplificada.

1.5 Resultados básicos da Teoria dos Números

Apresentamos uma síntese dos principais conceitos e resultados da Teoria dos Números, alguns dos quais utilizamos neste livro. Esses resultados estão expostos com mais detalhes em [96], principalmente nos Capítulos 4, 5, 6, 7 e 9.

A construção dos números naturais $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ obedece a alguns princípios fundamentais, psicologicamente construídos, e que, em linguagem matemática, podem ser sintetizados nos chamados Axiomas de Peano, propostos por Giuseppe Peano em 1889. De forma simplificada podemos resumi-los assim:

P1 Todo número natural n tem um sucessor e esse sucessor é único.

P2 Todo número natural $n \neq 0$ tem um antecessor e esse antecessor é único. O número 0 não tem antecessor em $\mathbb{N}$.

P3 Seja $S \subset \mathbb{N}$ um subconjunto com as seguintes propriedades: (i) $0 \in S$; (ii) se $n \in S$ então o sucessor de n também está em S. Nessas condições $S = \mathbb{N}$.

O princípio **P3** estabelece a unicidade de $\mathbb{N}$. Desejamos destacá-lo da seguinte forma:

Princípio de Indução Seja $S \subset \mathbb{N}$ um subconjunto com as seguintes propriedades: (i) $0 \in S$; (ii) se $n \in S$ então $n + 1 \in S$. Nessas condições $S = \mathbb{N}$.

Uma consequência é o

Princípio do Menor Número Natural Se A é um subconjunto não vazio do conjunto dos números naturais, então A tem um menor elemento.

Isso significa que existe $a \in A$ tal que $a \leq b$ para todo $b \in A$. O Princípio de Indução e o Princípio do Menor Número Natural são equivalentes.

O Princípio do Menor Número Natural pode ser estendido para subconjuntos de $\mathbb{Z}$. Dado um subconjunto não vazio A de $\mathbb{Z}$, dizemos que A é *limitado inferiormente* se existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $m \leq a$ para todo $a \in A$. Nesse caso chamamos m de *limitante inferior*. Por outro lado, A se diz *limitado superiormente* se existe $M \in \mathbb{Z}$ tal que $a \leq M$ para todo $a \in A$. Nesse caso chamamos M de *limitante superior*. Dizemos que A tem *máximo* se existir $M \in A$ tal que $a \leq M$ para todo $a \in A$. Dizemos que A tem *mínimo* se existir $m \in A$ tal que $m \leq a$ para todo $a \in A$.

Teorema 1.6 (Princípio do Menor Número Inteiro)**.** *Todo subconjunto não vazio de $\mathbb{Z}$ limitado inferiormente tem mínimo. Todo subconjunto não vazio de $\mathbb{Z}$ limitado superiormente tem máximo.*

Como consequência temos:

Primeiro Princípio da Indução Completa. Seja n_0 um número inteiro e seja $A(n)$ uma afirmação associada a todo número inteiro $n \geq n_0$. Suponhamos que sejam válidas as seguintes propriedades:
i) $A(n_0)$ é verdadeira;
ii) para todo número inteiro $n \geq n_0$, se $A(n)$ é verdadeira então $A(n+1)$ é verdadeira.
Nessas condições, $A(n)$ é verdadeira para todo número inteiro $n \geq n_0$.

Segundo Princípio da Indução Completa. Seja n_0 um número inteiro e seja $A(n)$ uma afirmação associada a todo número inteiro $n \geq n_0$. Suponhamos que sejam válidas as seguintes propriedades:
i) $A(n_0)$ é verdadeira;
ii) para todo número inteiro $n \geq n_0$, se $A(r)$ é verdadeira para todo número inteiro r tal que $n_0 \leq r \leq n$, então $A(n+1)$ é verdadeira.
Nessas condições, $A(n)$ é verdadeira para todo número inteiro $n \geq n_0$.

O principal instrumento para o estudo dos números inteiros é o

Teorema 1.7 (Algoritmo da Divisão)**.** *Dados números inteiros a e $b \neq 0$, existe e é único o par de números inteiros q e r tal que*

$$a = bq + r, \quad \text{com } 0 \leq r < |b|.$$

Dados números inteiros a e $b \neq 0$, os números inteiros q e r tais que $a = bq + r$ e $0 \leq r < |b|$ são denominados, respectivamente, *quociente* e *resto* da divisão euclidiana de a por b.

Um número inteiro a se diz *múltiplo* de um número inteiro b se existir um número inteiro q tal que $a = bq$. Nesse caso, e se $b \neq 0$, dizemos também que b *divide* a ou que b é *divisor* ou *fator* de a.

Se a e $b \neq 0$ são inteiros tais que $a = bq$ para algum número inteiro q, anotamos $b \mid a$. Por outro lado, se não existir tal inteiro q, anotamos $b \nmid a$. Observe que, de acordo com o Teorema do Algoritmo da Divisão, existem inteiros q e r tais que $a = bq + r$ e $0 \leq r < |b|$. Dessa forma, se $r = 0$ temos $b \mid a$, e se $r > 0$, temos $b \nmid a$.

Dados números inteiros a e b não simultaneamente nulos, o maior divisor comum de a e b chama-se *maximo@máximo divisor comum* de a e b, e é indicado por $\text{mdc}(a, b)$. Se $a = 0$ e $b = 0$ convém definir $\text{mdc}(0, 0) = 0$. Dados inteiros a e b, definimos $\text{mmc}(a, b)$ como o menor dentre os múltiplos comuns positivos de a e b. Se $\text{mdc}(a, b) = 1$, os números a e b dizem-se *relativamente primos*, ou *coprimos*.

Denominamos *primo* a todo número inteiro > 1 que não tem divisor positivo diferente de 1 e dele mesmo. Chamamos de *composto* a todo número inteiro > 1 que tem divisor positivo diferente de 1 e dele mesmo.

Teorema 1.8. *Todo número inteiro ≥ 2 é primo ou se escreve como produto de primos.*

Demonstração 1. Seja $n \geq 2$ um número natural e seja p_1 o menor dos divisores $\neq 1$ de n. Então p_1 é primo, por que, se não o fosse, p_1 teria um divisor q com $1 < q < p_1$, e q seria também um divisor $\neq 1$ de n, contrariando o fato de ser p_1 o menor deles. Ponhamos $n = p_1 n_1$, e notemos que $1 \leq n_1 < n$. Se $n_1 = 1$, terminamos. Se $n_1 > 1$, decompomos n_1 de forma análoga, e escrevemos $n_1 = p_2 n_2$, com p_2 primo e $1 \leq n_2 < n_1$. Temos $n = p_1 p_2 n_2$. Se $n_2 = 1$, terminamos. Se $n_2 > 1$, repetimos o procedimento decompondo-o de forma análoga. Prosseguindo, obtemos números primos $p_1, p_2, ..., p_i, ...$ e uma sequência decrescente de números naturais $n > n_1 > n_2 > \ldots > n_i > \ldots \geq 1$ tais que $n = p_1 p_2 \ldots p_i n_i$, prosseguindo com a decomposição sempre que $n_i > 1$. Como de 1 a n existe uma quantidade finita de números

naturais, o procedimento acima tem um último passo no qual se obtém $n_k = 1$, e ficamos com um produto $n = p_1 p_2 p_3 \dots p_k$, em que cada p_i é primo. □

Demonstração 2. Usamos o Segundo Princípio da Indução Completa. Observemos que a afirmação é verdadeira para $n = 2$, pois 2 é primo. Seja $n \geq 2$ um inteiro e suponhamos que a afirmação seja verdadeira para todo r tal que $2 \leq r \leq n$. Vamos provar que a afirmação é verdadeira para $n + 1$. Se $n + 1$ é primo, terminamos. Suponhamos que $n + 1$ não seja primo. Existem inteiros positivos a e b tais que $n + 1 = ab$, $2 \leq a < n + 1$ e $2 \leq b < n + 1$. Então a afirmação é verdadeira para a e b, que são primos ou produtos de primos. Portanto $n + 1$ é um produto de primos. Assim a afirmação é verdadeira para $n + 1$. Em virtude do Segundo Princípio da Indução Completa a afirmação é verdadeira para todo $n \geq 2$. □

Corolário 1.9. *Todo número inteiro $n \geq 2$ se escreve na forma $n = 2^t q$, em que $t \geq 0$ é um número inteiro e q é inteiro ímpar.*

Teorema 1.10. *Para todo número inteiro $t \geq 0$ vale* $\operatorname{mdc}(ta, tb) = t \operatorname{mdc}(a, b)$, *quaisquer que sejam os números inteiros a e b.*

Corolário 1.11. *Sejam a e b números inteiros não simultaneamente nulos. Seja* $\operatorname{mdc}(a, b) = d$ *e sejam a_1 e b_1 tais que $a = da_1$ e $b = db_1$. Então* $\operatorname{mdc}(a_1, b_1) = 1$.

Teorema 1.12. *Se* $\operatorname{mdc}(a, b) = 1$ *e se b é divisor de ac então b é divisor de c, quaisquer que sejam os números inteiros a, $b \neq 0$ e c.*

Corolário 1.13. *Se p, a_1, a_2, ..., a_s são números inteiros com p primo e se p é divisor do produto $a_1 a_2 \cdots a_s$ então existe i tal que p é divisor de a_i.*

O Teorema Fundamental da Aritmética é:

Teorema 1.14. *Todo número inteiro ≥ 2 é primo ou pode ser decomposto como um produto de números primos, e essa decomposição é única a menos da ordem dos fatores.*

Seguem mais dois resultados importantes. Um inteiro $n \geq 0$ se diz *quadrado perfeito* quando existe um inteiro m tal que $n = m^2$.

Teorema 1.15. *Se a e b são números inteiros positivos relativamente primos e se ab é quadrado perfeito então a e b são quadrados perfeitos.*

Teorema 1.16. *Se a e b são inteiros, então existem inteiros m e n tais que* $\operatorname{mdc}(a, b) = an + bm$. *Ainda a e b são relativamente primos se e somente se existem inteiros m e n tais que $an + bm = 1$.*

Encerramos este capítulo com o

Teorema 1.17 (Pequeno Teorema de Fermat)**.** *Seja p primo. Para todo inteiro a tal que $p \nmid a$ temos $p \mid a^{p-1} - 1$.*

Demonstração. Dividindo os números a, $2a$, $3a$, ..., $(p-1)a$ por p, sejam

$$ia = q_i p + r_i, \;\; 0 < r_i < p, \qquad \text{para todo } 1 \leq i \leq p - 1.$$

Nenhum resto é nulo pois $p \nmid a$ e $p \nmid i$. Afirmamos que $r_i \neq r_j$ se $i \neq j$. De fato, se $r_i = r_j$ com $i \geq j$, temos $ia - pq_i = ja - pq_j \Rightarrow a(i - j) = p(q_i - q_j) \Rightarrow p \mid i - j \Rightarrow i = j$, pois $0 \leq i - j < p$.

Portanto os restos r_i são os números 1, 2, ..., $(p-1)$, eventualmente arranjados em outra ordem. Multiplicando as relações acima membro a membro temos

$$a2a3a\cdots(p-1)a = pb + r_1r_2\cdots r_{p-1} \iff 1\cdot 2\cdot 3\cdots(p-1)a^{p-1} = pb + 1\cdot 2\cdot 3\cdots(p-1)$$

$$\iff 1\cdot 2\cdot 3\cdots(p-1)\left[a^{p-1}-1\right] = pb,$$

para um certo inteiro b. Como $p \nmid 1\cdot 2\cdot 3\cdots(p-1)$ segue que $p \mid a^{p-1}-1$. □

Observação 1.18. O Teorema 1.14 é o que geralmente é denominado Teorema Fundamental da Aritmética (TFA). Ele diz que a decomposição canônica em primos de qualquer inteiro ≥ 2 é única. Notemos que a afirmação básica usada nesse Teorema é a do Corolário 1.13. Ou, mais resumidamente ainda, a afirmação: "Sejam p, a e b inteiros tais que p é primo e $p \mid ab$. Então $p \mid a$ ou $p \mid b$". Em particular, temos: "Se $p \mid a^2$, então $p \mid a$". Por outro lado, alguns textos chamam de TFA ao Teorema 1.12, que é a origem dessas afirmações.

1.6 Problemas

Problema 1.6.1. Na história do gigante do feijoeiro, Joãozinho o escutou contando seus ovos de ouro: fee, fie, foe, fum, fot, feefot, fiefot, foefot, fumfot, fotfot, feefotfot,... **a)** Continue a contagem. **b)** Que sistema de numeração é esse? **c)** Descreva as limitações desse sistema.

Problema 1.6.2. a) Demonstre que todo sistema de numeração aditivo de base β satisfaz às propriedades fundamentais de existência e unicidade. **b)** Por que um sistema aditivo de numeração não precisa de um algarismo zero?

Problema 1.6.3. Você sabe contar em outras bases que não a base dez? Encontre o sucessor de cada um dos números abaixo, na base indicada:

$$(78)_{nove} \quad (65)_{sete} \quad (66)_{sete} \quad (1011)_{dois} \quad (53AF)_{dezesseis}$$

Problema 1.6.4. Usando exclusivamente os conceitos e fórmulas da Seção 1.3, demonstre que, se a, b e c são números naturais tais que $a-b=c$, então $c<a$ e $a-c=b$. Temos ainda $a=b+c$.

Problema 1.6.5. Usando exclusivamente os conceitos e fórmulas da Seção 1.3, demonstre que, se a, b e c são números naturais tais que $b<a$, então $(a+c)-(b+c)=a-b$.

Solução 1. Ao fazer $(a+c)-(b+c)$ estamos retirando de $a+c$ uma quantidade de b unidades e uma quantidade de c unidades. Retirando primeiro de $a+c$ as c unidades, ficamos com a unidades. Em seguida, retiramos as b unidades, e então ficamos com $a-b$ unidades. Portanto $(a+c)-(b+c)=a-b$.

Solução 2. Dado que $b<a$, temos $b+c<a+c$, pela compatibilidade ordem/adição. Logo existe a diferença $(a+c)-(b+c)$ como número natural. Seja $n=(a+c)-(b+c)$. Usando o Problema 1.6.4 e a associatividade da adição temos $n+(b+c)=a+c \Rightarrow (n+b)+c=a+c$. Cancelando c segue $n+b=a$. Subtraindo b obtemos $n=a-b$, ou $(a+c)-(b+c)=a-b$.

Problema 1.6.6. Demonstre que, se p é primo, então p divide $\binom{p}{i}$ para todo número inteiro i tal que $0<i<p$.

Problema 1.6.7. Demonstre, usando o Primeiro Princípio da Indução Completa, o Pequeno Teorema de Fermat 1.17.

Problema 1.6.8. a) Mostre que, no Pequeno Teorema de Fermat 1.17, as condições p primo e $p \nmid a$ são necessárias, independentemente. **b)** Sejam a e $b \neq 0$ inteiros tais que $\text{mdc}(a, b) = 1$. Demonstre que existe um número natural $m \geq 1$ tal que $b \mid a^m - 1$. **c)** Sejam a e $b \neq 0$ inteiros tais que $\text{mdc}(a, b) = 1$. Seja m o menor inteiro positivo tal que $b \mid a^m - 1$. Então $b \mid a^n - 1$ se, e somente se, $m \mid n$, qualquer que seja o inteiro positivo n.

Problema 1.6.9. Demonstre os seguintes resultados sobre quadrados perfeitos. **a)** Nenhum quadrado perfeito é da forma $3t + 2$. **b)** Se k é um inteiro positivo tal que $\frac{k(k+1)}{3}$ é um quadrado perfeito, então $k/3$ e $k + 1$ são quadrados perfeitos.

Problema 1.6.10. a) Quantos números de cinco dígitos podem ser formados usando todos os algarismos 0, 2, 4, 6 e 8? **b)** Dentre os números assim formados, quantos são quadrados perfeitos?

Problema 1.6.11. Investigue quais são os inteiros positivos a e n para os quais $a2^n + 1$ é um quadrado perfeito.

Capítulo 2

Os números racionais

2.1 Introdução

Neste Capítulo apresentamos a gênese dos números racionais e as três principais formas algébricas que utilizamos para representá-los: as frações de inteiros, a expansão decimal e as frações contínuas. Estudamos, mediante o uso dessas representações, as propriedades básicas dos números racionais.

2.2 Gênese dos números racionais

A necessidade de dividir quantidades e números faz parte do quotidiano da vida do homem. Ele precisa medir objetos, calcular peso, quantificar o tempo. Frequentemente ocorre que essas medidas são partes de inteiros. A representação dessa ideia certamente surgiu primeiro na linguagem falada, e existem muitos vocábulos destinados a isso. Na língua portuguesa temos um conjunto de palavras que traduzem a parte resultante da divisão de uma grandeza por um número inteiro ≥ 2. São os numerais fracionários. Por exemplo, meio, um terço, um vigésimo, cinco onze avos, um centésimo. Cada um desses numerais tem seu significado preciso, como cinco onze avos, que indica que a unidade foi dividida em onze partes iguais, e foram tomadas cinco dessas partes, ou, equivalentemente, que cinco unidades foram divididas em onze partes iguais, e foi tomada uma dessas partes.

Dessa forma o homem construiu, a partir dos números inteiros positivos, uma nova classe de números, que hoje denominamos *números racionais positivos*. Dados números inteiros positivos a e b, dividimos a unidade em b partes, e tomamos a dessas partes, ou, de forma equivalente, dividimos a em b partes iguais e tomamos uma parte. A mais difundida forma de representação dessa quantidade é $\dfrac{a}{b}$, ou a/b. Trata-se, assim, de uma "razão", e daí se origina o nome *racional*.

2.3 Números racionais e frações

Vimos que o homem construiu os números racionais positivos para atender necessidades práticas, e que a forma de representação mais difundida é

$$\frac{a}{b}$$

em que a e b são números inteiros positivos, chamada *fração de inteiros* ou *fração ordinária*.[1]

[1] "ordinária" aqui significa comum, usual.

Esse método de representação deriva da forma original construída com o aparecimento dos números racionais na tela mental humana, e é o formato próximo da compreensão mais concreta desses números. Uma variação dessa forma é a/b, como já comentamos.

Em uma fração ordinária $\dfrac{a}{b}$ ou a/b, o número a chama-se *numerador* e b, *denominador*. Quando estiver claro que a/b é uma fração de inteiros, chamá-la-emos simplesmente de fração.

Nosso objetivo nesta seção é estudar mais detalhadamente o significado de número racional e obter uma metodologia para o uso desses números, incluindo a construção das operações de adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação. Fazemos isso com o auxílio de sua representação por frações de inteiros.

A forma a/b indica que estamos considerando a grandeza obtida com a divisão da unidade em b partes iguais, e são tomadas a dessas partes. De maneira equivalente, o número a é dividido em b partes iguais, e é tomada uma dessas partes. Representamos essa equivalência com a identidade algébrica

$$a\,\frac{1}{b} = \frac{a}{b} \tag{2.1}$$

em que $a\,\dfrac{1}{b}$ é uma multiplicação, e significa que estamos tomando a vezes a fração $\dfrac{1}{b}$, isto é,

$$a\,\frac{1}{b} = \frac{1}{b} + \cdots + \frac{1}{b} \quad (a \text{ vezes}).$$

Para compreender melhor essa ideia façamos uma imagem geométrica. Representamos a unidade com um segmento de reta com extremos indicados por 0 e 1, conforme a Figura 2.1, à esquerda. Na mesma Figura, à direita, representamos 1/3, repartindo o segmento em três partes iguais e tomando uma dessas partes (a que está destacada pela linha mais grossa, ou outra qualquer das partes).



Figura 2.1. Ilustração geométrica da fração $\frac{1}{3}$.

Ilustramos agora a relação (2.1) acima com a representação de 2/3, primeiro dividindo a unidade em três partes iguais e tomando duas dessas partes, e depois dividindo 2 unidades em três partes iguais e tomando uma das partes. Vê-se que o resultado é o mesmo.

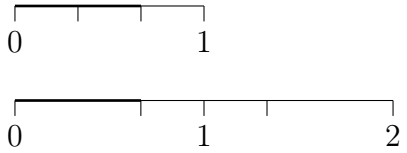


Figura 2.2. Duas ilustrações geométricas da fração $\frac{2}{3}$.

Investigando dessa forma os números a/b, vemos que o mesmo valor pode ser representado de várias maneiras, por exemplo, $3/5 = 6/10$, conforme está ilustrado na Figura 2.3.

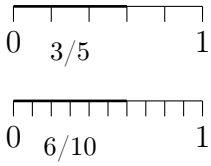


Figura 2.3. Ilustração geométrica das frações equivalentes $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$.

Duas frações a/b e c/d tais que $a/b = c/d$ são chamadas *frações equivalentes*. É importante obter uma caracterização algébrica que nos indique condições sobre a, b, c e d para que $a/b = c/d$. Investigando a questão percebemos logo que é fácil comparar duas frações com o mesmo denominador. Por exemplo, $3/7$ é menor do que $4/7$, pois estamos dividindo a unidade em sete partes iguais, e com $3/7$ estamos tomando três dessas partes, e com $4/7$ estamos tomando quatro dessas partes. Vemos que

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{b} \iff a = c, \tag{2.2}$$

quaisquer que sejam os inteiros positivos a, b e c.

Isso nos dá a seguinte ideia: para comparar duas frações a/b e c/d devemos primeiro transformá-las em duas frações com mesmo denominador. Mas, como fazer isso?

Nesse ponto precisamos observar um caso particular de equivalência de frações. Dada uma fração a/b e dado um inteiro positivo n, a fração na/nb é equivalente à primeira. De fato, com a/b estamos dividindo a unidade em b partes iguais e tomando a dessas partes. Agora, se cada uma dessas b partes for subdividida em n partes iguais, significa que estamos dividindo a unidade em nb partes iguais. Por outro lado, tomar an dessas partes menores é o mesmo que tomar a das partes maiores. Isso está ilustrado na Figura 2.3, em que $\frac{3}{5} = \frac{3\cdot 2}{5\cdot 2} = \frac{6}{10}$. Em resumo, temos a seguinte relação algébrica:

$$\frac{a}{b} = \frac{an}{bn}, \tag{2.3}$$

quaisquer que sejam os inteiros positivos a, b e n.

Sejam agora a/b e c/d. Para escrevê-las como frações com o mesmo denominador fazemos

$$\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd} \qquad \text{e} \qquad \frac{c}{d} = \frac{bc}{bd}.$$

Usando agora (2.2) vemos que

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff \frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd} \iff ad = bc, \tag{2.4}$$

quaisquer que sejam os inteiros positivos a, b, c e d.

Obtivemos assim uma caracterização algébrica para a equivalência de duas frações. Mas a Álgebra frequentemente nos dá mais do que pedimos. As considerações acima nos permitem perceber que o conjunto dos números racionais positivos é ordenado, e que podemos definir uma relação de ordem por

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \iff ad < bc, \tag{2.5}$$

quaisquer que sejam os inteiros positivos a, b, c e d. Os símbolos $>$ ou $\leq$ ou $\geq$ também podem ser utilizados em (2.5) com os significados costumeiros.

Algumas observações simples. Se tomamos um inteiro positivo e o repartimos em uma única parte, ficamos ainda com esse inteiro. Portanto

$$\frac{a}{1} = a$$

para todo inteiro positivo a. Dessa forma todo inteiro positivo pode ser visto como um número racional. Por outro lado, a fração a/a significa que dividimos a unidade em a partes iguais e tomamos essas a partes, isto é, tomamos a unidade. Portanto

$$\frac{a}{a} = 1$$

para todo inteiro positivo a.

Notamos também que não temos como repartir um inteiro positivo a em zero partes. Isto é, não faz sentido uma fração com zero no denominador. Mas podemos repartir zero em b partes, do que resulta parte nenhuma. Portanto

$$\frac{0}{b} = 0$$

para todo inteiro positivo b.

Nossa providência agora é definir as operações aritméticas no conjunto dos números racionais positivos. Começamos com a adição.

Observamos primeiro que é fácil entender como somar frações com mesmo denominador: basta somar os numeradores e conservar o denominador. Por exemplo,

$$\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{5}{7}\,.$$

Dessa forma, seguindo a mesma ideia já usada antes, para somar duas frações a/b e c/d, primeiro as colocamos no mesmo denominador. Temos

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad+bc}{bd}\,. \tag{2.6}$$

Se $a/b > c/d$ temos $ad > bc$ e podemos considerar a subtração

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} - \frac{bc}{bd} = \frac{ad-bc}{bd}\,. \tag{2.7}$$

A adição e a subtração de racionais positivos nos dá a ideia de considerar números racionais com a qualidade de negativo. Dada uma fração de inteiros positivos a/b, queremos uma fração c/d tal que $a/b + c/d = 0$. Essa fração é naturalmente $(-a)/b$, pois

$$\frac{a}{b} + \frac{-a}{b} = \frac{a-a}{b} = \frac{0}{b} = 0.$$

Dessa forma aumentamos nossa coleção de números racionais considerando as frações a/b com a um inteiro qualquer e b um inteiro positivo. Com isso já temos todos os números racionais que queremos. Mas formalmente podemos também considerar as expressões fracionárias a/b com b negativo, definindo

$$\frac{a}{b} = \frac{-a}{-b}$$

quaisquer que sejam os inteiros a e b, com $b \neq 0$. Isso não aumenta o conjunto dos números racionais, mas nos dá mais liberdade para operar com esses números.

O conjunto dos números racionais é usualmente representado pelo símbolo $\mathbb{Q}$. Portanto

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid\ a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0 \right\}.$$

Para esse conjunto consideramos (2.4) como uma caracterização fundamental das frações de inteiros equivalentes. Assim

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc \tag{2.8}$$

quaisquer que sejam os inteiros a, $b \neq 0$, c e $d \neq 0$. Por outro lado, para estender a definição de ordem (2.5) para todo o conjunto $\mathbb{Q}$ impomos a condição sobre as representações como frações de inteiros com denominador positivo. Assim

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \iff ad < bc \tag{2.9}$$

quaisquer que sejam os inteiros a, b, c e d. com $b > 0$ e $d > 0$.

Também definimos as operações de adição e de subtração como já era esperado: quaisquer que sejam os números inteiros a, $b \neq 0$, c e $d \neq 0$ temos

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \quad \text{e} \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}. \tag{2.10}$$

Observemos que $\mathbb{Z}$ é um subconjunto de $\mathbb{Q}$, pois $\dfrac{a}{1} = a$ para todo a em $\mathbb{Z}$. Assim é importante ver que essas definições são compatíveis com as respectivas operações em $\mathbb{Z}$:

$$\frac{a}{1} \pm \frac{b}{1} = \frac{a \cdot 1 \pm b \cdot 1}{1 \cdot 1} = \frac{a \pm b}{1} = a \pm b.$$

Como deve ser definida a multiplicação de números racionais? Uma condição é que ela deve preservar a multiplicação de inteiros. Portanto devemos ter

$$\frac{a}{1}\,\frac{b}{1} = ab.$$

Por outro lado, essa definição deve preservar o significado de número racional. Por exemplo, entendemos que $\frac{1}{2}\,\frac{1}{3}$ deve ser a metade de $1/3$. Para obter essa metade podemos dividir cada terça parte da unidade em duas partes iguais, o que equivale a dividir a unidade em seis partes iguais, e tomar uma parte. Portanto queremos

$$\frac{1}{2}\,\frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Mais geralmente, se a/b e c/d são frações de inteiros positivos, entendemos que o produto $\frac{a}{b}\,\frac{c}{d}$ significa que primeiro dividimos a unidade em d partes iguais, e tomamos c dessas partes. Depois dividimos cada uma das d partes em b partes iguais, e tomamos a vezes as partes antes consideradas. Dessa forma a unidade é dividida em bd partes e são tomadas ac dessas partes. Portanto adotamos como definição de multiplicação

$$\frac{a}{b}\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \tag{2.11}$$

definição essa válida quaisquer que sejam os números racionais a/b e c/d.

Para definir a divisão de a/b por c/d queremos encontrar uma fração x/y tal que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}\,\frac{x}{y}$. Mas

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}\,\frac{x}{y} \iff \frac{a}{b} = \frac{cx}{dy} \iff a(dy) = b(cx) \iff x(bc) = y(ad) \iff \frac{x}{y} = \frac{ad}{bc}.$$

Dessa forma adotamos como definição de divisão

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc} \quad \text{ou} \quad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b}\,\frac{d}{c}\,, \tag{2.12}$$

quaisquer que sejam os números inteiros a, $b \neq 0$, $c \neq 0$ e $d \neq 0$. Em particular, dados os inteiros não nulos a e b, multiplicar $\frac{a}{b}$ por $\frac{b}{a}$ é equivalente a dividir $\frac{a}{b}$ por si mesmo, do que resulta 1:

$$\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = \frac{ab}{ba} = 1,$$

de modo que $\frac{b}{a}$ é dita ser a *inversa* de $\frac{a}{b}$.

A divisão de frações nos dá o ensejo de considerar fração de números racionais. Se $r = a/b$ e $s = c/d \neq 0$, definimos

$$\frac{r}{s} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}\,.$$

Para essas frações valem todas as fórmulas das frações de inteiros.

A potenciação em $\mathbb{Q}$ se faz, a princípio, como no conjunto $\mathbb{Z}$:

$$r^n = r \cdot r \cdots r \quad (n \text{ vezes}) \text{ para todo número racional } r \neq 0 \text{ e inteiro positivo } n. \tag{2.13}$$

Entende-se que $r^1 = r$. Se $r = 0$ e $n > 0$, definimos $0^n = 0$, e se $r \neq 0$ e $n = 0$, definimos $r^0 = 1$. O símbolo 0^0 permanece indefinido.

Entretanto em $\mathbb{Q}$ podemos definir potências com expoente negativo, pois sua estrutura algébrica permite inverter números não nulos. Assim definimos

$$r^n = \frac{1}{r^{-n}} \text{ para todo número racional } r \neq 0 \text{ e inteiro negativo } n. \tag{2.14}$$

Essa definição permite estender a validade da fórmula $r^{m+n} = r^m r^n$ para todo número racional $r \neq 0$ e para quaisquer números inteiros m e n. Igualmente são válidas as fórmulas $(r^m)^n = r^{mn}$ e $r^m s^m = (rs)^m$.

Em notação de fração é válido, para frações não nulas e n inteiro, que

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \text{ para } n \geq 0 \quad \text{e} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{b^{-n}}{a^{-n}} \text{ para } n < 0, \tag{2.15}$$

fórmulas que, na verdade, valem para todo n inteiro.

Usando a representação fracionária podemos demonstrar as propriedades usuais das operações aritméticas em $\mathbb{Q}$. Por exemplo, a distributiva da multiplicação em relação à adição pode ser assim verificada:

$$\frac{a}{b}\left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b}\,\frac{cf + de}{df} = \frac{acf + ade}{bdf} = \frac{acf}{bdf} + \frac{ade}{bdf} = \frac{ac}{bd} + \frac{ae}{bf} = \frac{a}{b}\frac{c}{d} + \frac{a}{b}\frac{e}{f},$$

quaisquer que sejam os números racionais a/b, c/d e e/f.

As demais propriedades podem ser demonstradas pelo estudante. Para registro e facilidade de uso resumimos as principais propriedades:

Quaisquer que seja os números racionais r, s e t, temos:

Associatividade da adição: $(r + s) + t = r + (s + t)$.

Comutatividade da adição: $r + s = s + r$.

Associatividade da multiplicação: $(rs)t = r(st)$.

Comutatividade da multiplicação: $rs = sr$.

Distributividade: $r(s+t) = rs + rt$.

Transitividade da ordem: se $r < s$ e $s < t$, então $r < t$.

Tricotomia: ocorre uma e apenas uma das alternativas seguintes: $r = s$, ou $r < s$ ou $r > s$.

Monotonicidade da adição: se $r < s$ então $r + t < s + t$.

Monotonicidade da multiplicação: se $r < s$ e se $t > 0$ então $rt < st$. Se $r < s$ e se $t < 0$ então $rt > st$.

A monotonicidade da adição também é denominada *compatibilidade entre a ordem e a adição*. Analogamente para a multiplicação.

Para uso posterior demonstramos agora o seguinte resultado:

Teorema 2.1. *Todo número racional tem uma única representação na forma a/b, sendo a e b inteiros relativamente primos e $b > 0$.*

Demonstração. Seja $r = m/n$ um racional, com m e n inteiros e $n \neq 0$. Seja $t = \text{mdc}(m, n)$. Temos $t > 0$. Sejam a e b inteiros tais que $m = ta$ e $n = tb$. Sabemos que a e b são relativamente primos (e também $-a$ e $-b$). Ainda

$$r = \frac{m}{n} = \frac{ta}{tb} = \frac{a}{b} = \frac{-a}{-b},$$

sendo $b > 0$ ou $-b > 0$. Portanto r tem uma representação na forma requerida.

Vejamos agora a unicidade. Suponhamos que $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ são representações como frações inteiras do mesmo número racional, com $\text{mdc}(a, b) = 1$, $\text{mdc}(c, d) = 1$, $b > 0$ e $d > 0$. Pretendemos demonstrar que $a = c$ e $b = d$. Temos $ad = bc$, do que segue que d divide bc. Como $\text{mdc}(c, d) = 1$ vem que d divide b (Teorema 1.12). Novamente de $ad = bc$ segue que b divide ad, e como $\text{mdc}(a, b) = 1$ vem que b divide d. Daí $b = \pm d$, e, como $b > 0$ e $d > 0$, concluímos que $b = d$. Introduzindo essa informação em $ad = bc$ segue $a = c$. Portanto a representação é única, e isso termina a demonstração do Teorema. □

A representação de um número racional na forma a/b, sendo a e b inteiros relativamente primos e $b > 0$, chama-se *representação irredutível* do número racional dado. Portanto o Teorema 2.1 diz que toda fração de inteiros é equivalente a uma única fração irredutível.

2.4 Expansão decimal de números racionais

Nesta seção estudamos outro tipo de representação dos números racionais, denominada *expansão decimal*, que consiste em representar os números racionais no sistema posicional decimal.

O surgimento da representação dos números racionais no sistema de numeração decimal contribuiu para o estreitamento da cooperação entre a Matemática e outras ciências, como a Astronomia. Na História da Matemática vemos que um grande incentivo para o aparecimento dessa representação foi a dificuldade que os astrônomos europeus tinham na aplicação da trigonometria. A representação decimal trouxe maior facilidade na implementação de cálculos aritméticos, permitindo o uso mais eficiente da trigonometria na medição das posições dos astros. Essa técnica de representação também induziu a criação dos logaritmos, uma das ideias mais fecundas da Matemática Elementar.

Notemos que, dada uma fração de inteiros a/b, com $b > 0$, podemos escrever $a = bz + s$, sendo z e s números inteiros e $0 \leq s < b$. Portanto

$$\frac{a}{b} = z + \frac{s}{b},$$

e toda fração ordinária é a soma de um inteiro e de uma fração ordinária ≥ 0 e < 1. Por exemplo,

$$\frac{25}{7} = 3 + \frac{4}{7}.$$

Com essa ideia podemos localizar facilmente o número a/b em uma reta numérica. Escrevendo $a/b = z + (s/b)$ com $0 \leq s < b$, para localizar a/b dividimos o intervalo $[z, z+1]$ em b subintervalos iguais e tomamos s desses subintervalos a partir de z, na direção positiva. A extremidade de maior valor do último subintervalo corresponde ao número a/b.

Vemos na Figura 2.4 como localizar o número $25/7 = 3 + 4/7$ em uma reta numérica.

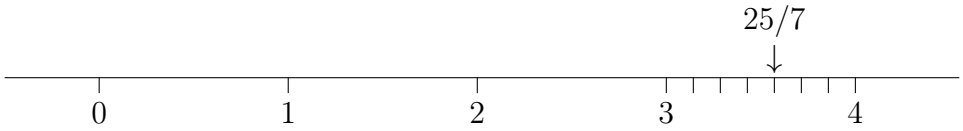


Figura 2.4. Localização da fração 25/7 em uma reta numérica.

Com essa ideia aceitamos que todo número racional corresponde a um ponto da reta numérica. Mas essa forma de identificação não é nada prática, pois cada número racional tem um denominador, e não é viável a cada vez subdividir os intervalos unitários da reta em uma quantidade diferente de partes. Buscando a uniformização, escolhemos fazer subdivisões por 10, o que permite uma sincronia com a representação decimal que utilizamos para os inteiros.

Vejamos como exemplo o número $q = 35/98$. Como $0 < q < 1$, dividimos o intervalo $[0, 1]$ em 10 partes iguais. Em qual desses subintervalos está q? Vemos que $3/10 < q$, pois $3 \cdot 98 = 294 < 350 = 35 \cdot 10$. Por outro lado, $q < 4/10$, pois $10 \cdot 35 = 350 < 392 = 4 \cdot 98$. Dessa forma localizamos q no intervalo $\left[\frac{3}{10}, \frac{4}{10}\right]$, conforme a Figura 2.5.

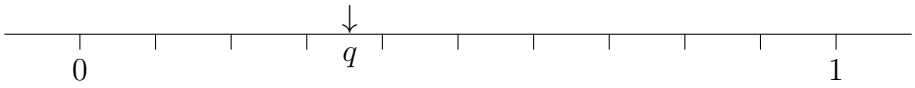


Figura 2.5. Determinação do primeiro dígito decimal de 35/98.

Em seguida subdividimos $\left[\frac{3}{10}, \frac{4}{10}\right]$ em dez subintervalos iguais, cada um de comprimento $\frac{1}{100}$. Os extremos desses subintervalos são os pontos de coordenadas $\frac{3}{10}$, $\frac{3}{10} + \frac{1}{100}$, $\frac{3}{10} + \frac{2}{100}$, ..., $\frac{3}{10} + \frac{10}{100} = \frac{4}{10}$. Localizamos q em um desses subintervalos:

$$\frac{3}{10} + \frac{5}{10^2} < q < \frac{3}{10} + \frac{6}{10^2}\,.$$

A Figura 2.6 ilustra a situação.

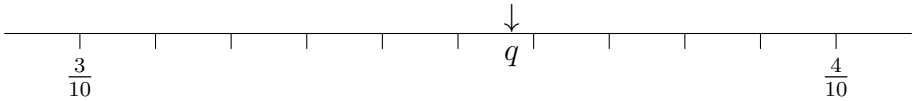


Figura 2.6. Determinação do segundo dígito decimal de 35/98.

Continuando, subdividimos $\left[\frac{3}{10}+\frac{5}{10^2}, \frac{3}{10}+\frac{6}{10^2}\right]$ em dez subintervalos iguais, e verificamos em qual desses se encontra q. E assim por diante.

Escrevemos o resultado obtido até agora na forma

$$q = \frac{3}{10} + \frac{5}{10^2} + \dots$$

Pode ocorrer que essa soma seja finita, correspondendo à situação em que q coincide com o extremo de algum subintervalo. Mas não podemos descartar que esse processo possa continuar indefinidamente, correspondendo à situação em que q nunca coincide com o extremo de algum desses subintervalos.

Essas considerações motivam o

Teorema 2.2. *Todo número racional $r \in [0,1)$ se escreve na forma*

$$r = \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + \frac{b_3}{10^3} + \dots \tag{2.16}$$

sendo cada b_i um dos algarismos decimais 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9 para todo i.

Veremos uma demonstração formal desse Teorema no Capítulo 8 (Teorema 8.15, página 159), em que estudamos um significado para somas infinitas e verificamos algebricamente a existência dessa representação.

O estudante pode se convencer da validade do Teorema 2.2 observando que podemos aplicar o procedimento descrito acima para todo número racional $r \in [0,1)$. De fato, dividimos o intervalo $[0,1]$ em 10 partes iguais. As coordenadas dos extremos desses intervalos são 0, $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$, ..., $\frac{10}{10} = 1$. Seja b_1 o inteiro $0 \leq b_1 \leq 9$ tal que $\frac{b_1}{10} \leq r < \frac{b_1+1}{10}$. Em seguida dividimos o intervalo $\left[\frac{b_1}{10}, \frac{b_1+1}{10}\right]$ em dez subintervalos iguais, cada um de comprimento $\frac{1}{100}$. Os extremos desses subintervalos são os pontos de coordenadas $\frac{b_1}{10}$, $\frac{b_1}{10}+\frac{1}{100}$, $\frac{b_1}{10}+\frac{2}{100}$, ..., $\frac{b_1}{10}+\frac{10}{100} = \frac{b_1+1}{10}$. Localizamos r em um desses subintervalos, e encontramos b_2 tal que $0 \leq b_2 \leq 9$ e

$$\frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} \leq r < \frac{b_1}{10} + \frac{b_2+1}{10^2}\,.$$

Prosseguindo, determinamos a representação de r:

$$r = \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + \frac{b_3}{10^3} + \dots$$

A representação (2.16) chama-se *expansão decimal* de r. Essa representação é mais utilizada em notação compacta na forma

$$r = 0{,}b_1b_2b_3...$$

Vimos que todo número racional q se escreve na forma $q = z + r$, em que z é um número inteiro e $0 \leq r < 1$ é um número racional. Lembrando que todo inteiro z tem uma representação no sistema decimal da forma $z = \pm a_m a_{m-1} \dots a_1 a_0$, em que cada a_i é um algarismo decimal, temos o

Teorema 2.3. *Todo número racional r se escreve na forma*

$$\begin{aligned} r &= \pm a_m \dots a_1 a_0 , b_1 b_2 b_3 \dots \\ &= \pm \left(a_m 10^m + \dots + a_1 10 + a_0 + \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + \frac{b_3}{10^3} + \dots \right) \end{aligned} \tag{2.17}$$

sendo cada a_i e cada b_i um algarismo decimal, para todo i.

Por exemplo,

$$274{,}3658 = 2 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 4 + \frac{3}{10} + \frac{6}{10^2} + \frac{5}{10^3} + \frac{8}{10^4}\,.$$

Dada uma representação (2.17), os números a_i chamam-se *dígitos da parte inteira de* r, e os números b_i chamam-se *dígitos da parte não inteira de* r. Observe que na representação compacta $r = \pm a_m \ldots a_1 a_0{,}b_1 b_2 b_3 \ldots$ utilizamos uma vírgula para separar os dígitos da parte inteira dos da parte não inteira, de acordo com a legislação brasileira determinada em [29].

Precisamos compreender melhor o significado de uma soma do tipo

$$\frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + \frac{b_3}{10^3} + \ldots \tag{2.18}$$

Em particular, na apresentação que fizemos acima, os três pontinhos ... significam "prosseguindo com os cálculos". Mas prosseguindo até quando? Será (2.18) uma soma infinita? Até agora só definimos somas de quantidades finitas de números.

Uma forma de iniciarmos esse estudo consiste em examinar vários exemplos de expansão decimal e tentar perceber alguma regularidade. Mas antes lembremos que a expansão decimal de uma fração a/b também pode ser calculada através do algoritmo da divisão continuada. Por exemplo, para encontrar a expansão decimal de $3/7$ fazemos

$$\begin{array}{rl|l} 3\ 0 & & 7 \\ \cline{3-3} \quad 2\ 0 & & 0,\ 4\ 2\ 8\ldots \\ \quad\ 6\ 0 & & \\ \quad\quad\ 4 & \cdots & \end{array}$$

e vemos que

$$\frac{3}{7} = \frac{4}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{8}{10^3} + \ldots \tag{2.19}$$

De fato, de acordo com a explicação anterior, para encontrar a expansão decimal de $3/7$ primeiro devemos determinar o algarismo b_1 tal que $\frac{b_1}{10} \leq \frac{3}{7} < \frac{b_1+1}{10}$. Isso é o mesmo que encontrar o maior algarismo b_1 tal que $\frac{b_1}{10} \leq \frac{3}{7}$, ou tal que $7b_1 \leq 30$. Mas então b_1 é o quociente da divisão de 30 por 7, e o algoritmo da divisão continuada nos diz que $b_1 = 4$. Prosseguindo com os cálculos vemos que cada um dos dígitos seguintes do quociente da divisão continuada corresponde a um dígito da expansão decimal de $30/7$.

Observemos agora o que acontece quando prosseguimos com a divisão continuada:

$$\begin{array}{rl|l} 3\ 0 & & 7 \\ \cline{3-3} \quad 2\ 0 & & 0,\ 4\ 2\ 8\ 5\ 7\ 1\ldots \\ \quad\ 6\ 0 & & \\ \quad\quad\ 4\ 0 & & \\ \quad\quad\quad\ 5\ 0 & & \\ \quad\quad\quad\quad\ 1\ 0 & & \\ \quad\quad\quad\quad\quad\ 3 & \cdots & \end{array}$$

A divisão continua, mas a partir desse ponto os dígitos se repetem, pois aparece novamente $30 \div 7$. Portanto

$$\frac{3}{7} = 0{,}428571428571428571\ldots$$

Sabemos também que a divisão para quando aparece um resto zero, como no exemplo

$$\begin{array}{rr|l} 3\ 0 & & 2\ \ 5 \\ \cline{3-3} 5\ 0 & & 0,\ 1\ \ 2 \\ 0 & & \end{array}$$

Portanto

$$\frac{3}{25} = \frac{1}{10} + \frac{2}{10^2}$$

e nesse caso a soma é finita. Já observamos que essa ocorrência corresponde ao fato de que 3/25 está localizado no extremo de um subintervalo.

Se uma expansão decimal apresenta um agrupamento de dígitos que se repete infinitas vezes, sem interrupção, dizemos que a expansão é *periódica*. O menor agrupamento que se repete chama-se *período*, e a quantidade de dígitos do período chama-se *comprimento* do período. Vimos que a parte não inteira de 3/7 tem como período o agrupamento 428571, e seu comprimento é seis.

Pode ocorrer um agrupamento de dígitos, logo no início da parte não inteira, que não faz parte do período, como em

$$\frac{13}{55} = 0{,}23636363\ldots$$

Nesse caso dizemos que a expansão é *composta*. O agrupamento que antecede o período chama-se *pré-período*, e a quantidade de dígitos do pré-período é seu comprimento. Vemos que a expansão de 13/55 tem como pré-período o agrupamento 2, e como período o agrupamento 36. Se uma expansão periódica não tem pré-período, dizemos que ela é *simples*.

Ao dividir um inteiro a por um inteiro $b \neq 0$, duas possibilidades podem ocorrer: ou a divisão termina, e temos uma representação decimal finita, ou a divisão continua infinitamente, e nesse caso a representação é periódica. De fato, ao dividir a por b, em cada etapa da divisão obtemos um resto ≥ 0 e $< b$. Se o resto for zero em algum momento, a divisão termina. Se o resto nunca for zero, então a divisão nunca termina, e em algum momento haverá repetição de um resto, pois temos $b-1$ valores possíveis para os restos $\neq 0$. Assim, no máximo depois de $b-1$ divisões haverá a repetição de um resto já ocorrido anteriormente. A partir desse ponto os restos se repetem periodicamente, gerando, no quociente, um agrupamento de dígitos que se repete sem interrupção.

Temos portanto o seguinte

Teorema 2.4. *A expansão decimal de qualquer número racional é finita ou infinita e periódica.*

Uma forma adequada de resumir a representação de uma expansão decimal periódica consiste em colocar um traço sobre o agrupamento do período, indicando que ele deve ser repetido seguidamente. Por exemplo,

$$\frac{13}{55} = 0{,}2\overline{36} \quad \text{significando que o agrupamento 36 é um período.}$$

Precisamos prosseguir em nosso estudo da soma (2.18). Já descobrimos que se ela tiver infinitos termos então é periódica. Mas o que significa essa soma infinita? Estudamos mais de perto a estrutura de uma soma desse tipo através de um exemplo:

$$0{,}\overline{13} = 0{,}131313\ldots = \frac{1}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \frac{1}{10^5} + \frac{3}{10^6}\cdots$$

Uma ideia para manipular essa soma é adicionar seus termos dois a dois. Temos

$$\begin{aligned} 0{,}\overline{13} &= \left(\frac{1}{10}+\frac{3}{10^2}\right)+\left(\frac{1}{10^3}+\frac{3}{10^4}\right)+\left(\frac{1}{10^5}+\frac{3}{10^6}\right)+\cdots \\ &= \frac{13}{10^2}+\frac{13}{10^4}+\frac{13}{10^6}\cdots \end{aligned} \tag{2.20}$$

Percebemos que temos aqui a soma dos termos de uma progressão geométrica de primeiro termo $a=\frac{13}{10^2}$ e razão $r=\frac{1}{10^2}$. Assim

$$0{,}\overline{13} = \frac{13}{10^2}+\frac{13}{10^2}\frac{1}{10^2}+\frac{13}{10^2}\left(\frac{1}{10^2}\right)^2+\cdots = a+ar+ar^2+\cdots$$

Conhecemos uma fórmula para a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica:

$$a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1} = a\frac{1-r^n}{1-r}\,.$$

No Capítulo 7 veremos que a soma infinita $a+ar+ar^2+ar^3+\cdots$ é o limite da soma finita $a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}$ para $n\to\infty$. Escrevemos assim:

$$a+ar+ar^2+ar^3+\cdots = \lim_{n\to\infty} a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1} = \lim_{n\to\infty} a\frac{1-r^n}{1-r}\,.$$

Quando transformamos uma soma (2.18), que seja resultado de uma divisão continuada de inteiros, em uma soma infinita de termos de uma progressão geométrica, a razão sempre é da forma $r=\frac{1}{10^m}$, com $m\geq 1$. Portanto temos sempre $0<r<1$, e nesse caso as potências r^n tendem para zero quando $n\to\infty$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{10^m}\right)^n = 0, \text{ em geral, } \lim_{n\to\infty} r^n = 0 \text{ sempre que } |r|<1. \tag{2.21}$$

O estudante pode fazer experimentos numéricos para melhor compreender isso. Assim

$$a+ar+ar^2+ar^3+\cdots = \lim_{n\to\infty} a\frac{1-r^n}{1-r} = a\frac{1}{1-r}\,. \tag{2.22}$$

Todos esses cálculos serão feitos com mais detalhes nos Capítulos 5 e 7, particularmente no Teorema 7.7, pág. 140.

Estamos agora em condições de terminar os cálculos iniciados em (2.20). Temos

$$\begin{aligned} 0{,}\overline{13} &= \frac{13}{10^2}+\frac{13}{10^4}+\frac{13}{10^6}\cdots = \frac{13}{10^2}+\frac{13}{10^2}\frac{1}{10^2}+\frac{13}{10^2}\left(\frac{1}{10^2}\right)^2+\cdots \\ &= \frac{13}{10^2}\,\frac{1}{1-(1/10^2)} = \frac{13}{10^2-1} = \frac{13}{99}\,. \end{aligned}$$

Com isso aprendemos duas coisas. A primeira é que compreendemos melhor que tipo de soma é (2.16), e a segunda é como podemos transformar uma representação periódica infinita em uma fração de inteiros.

Por outro lado, se uma expansão decimal é finita, um simples cálculo nos dá a fração de inteiros correspondente. Por exemplo,

$$0{,}235 = \frac{2}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{5}{10^3} = \frac{235}{10^3} = \frac{47}{200}\,.$$

Mais diretamente podemos manipular assim:

$$0{,}235 = \frac{235}{1000} = \frac{47}{200}\,.$$

De tudo isso vemos que a recíproca do Teorema 2.4 é verdadeira: toda expansão decimal finita ou periódica representa um número racional.

Resumimos nossas conclusões no seguinte

Teorema 2.5. *A expansão decimal de qualquer número racional é finita ou infinita e periódica. Reciprocamente, toda expansão decimal finita ou infinita e periódica representa um número racional.*

Para encerrar, por enquanto, o estudo do Teorema 2.5, observamos que a expansão decimal pode não ser única. Por exemplo, o número racional 1 tem duas representações, 1 e $0{,}\overline{9}$. De fato,

$$\begin{aligned} 0{,}\overline{9} = 0{,}99999\ldots &= \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \cdots \\ &= \frac{9}{10}\,\frac{1}{1-(1/10)} = 1. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Conforme veremos no Teorema 8.15, página 159, para valer a unicidade na expansão decimal é necessário impor sobre $0{,}b_1b_2b_3\ldots$ a condição de que existem infinitos dígitos $\neq 9$.

Observação 2.6. O estudante já deve ter visto que existe uma forma mais prática de encontrar a representação de $0{,}\overline{13}$ como fração de inteiros. Seja $x = 0{,}\overline{13}$. Temos $100x = 13{,}\overline{13}$, portanto $100x - x = 13{,}\overline{13} - 0{,}\overline{13} = 13$, ou $99x = 13$. Assim $x = 13/99$.

Vejamos outro exemplo: encontrar a representação de $0{,}17\overline{138}$ como fração de inteiros. Seja $x = 0{,}17\overline{138}$. Temos $100x = 17{,}\overline{138}$ e $100000x = 17138{,}\overline{138}$, portanto $100000x - 100x = 17138{,}\overline{138} - 17{,}\overline{138} = 17138 - 17 = 17121$, ou $99900x = 17121$. Assim $x = 17121/99900 = 5707/33300$.

Observação 2.7. Nos últimos parágrafos temos feito manipulações com somas infinitas, o que exige uma atenção mais detalhada. Por exemplo, se $x = 0{,}\overline{13}$, ao escrever $100x = 13{,}\overline{13}$ estamos usando a propriedade distributiva para somas infinitas, e ao fazer $100x - x = 13$ estamos implementando a subtração entre duas somas infinitas. O estudante está convidado a estudar esses detalhes no Problema 2.7.32.

Observação 2.8. O estudante já sabe que, dados números reais x e $y \neq 0$, existe a divisão de x por y, um número real que pode ser indicado por $x \div y$. Mas a notação mais comum é a fracionária $\frac{x}{y}$, ou mesmo x/y. Para essa notação valem todas as regras de manipulação algébrica usadas para frações de inteiros. Por exemplo, dados x e $y \neq 0$, e v e $w \neq 0$ reais, temos $\frac{x}{y} = \frac{v}{w} \iff xw = yv$.

2.5 Números racionais e frações contínuas

A representação dos números racionais através de frações contínuas (às vezes denominadas frações continuadas) é conhecida desde o tempo dos antigos matemáticos gregos. Sob o ponto de vista da Teoria dos Números, é considerada a que melhor retrata a estrutura do número.

Uma *fração contínua finita simples* é uma expressão da forma

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}} \tag{2.24}$$

em que a_0, a_1, a_2,..., a_n são números inteiros, sendo a_1, a_2,..., a_n positivos. Os termos a_0, a_1, a_2,..., a_n são chamados *quocientes parciais* da fração contínua. Reduzindo as frações de baixo para cima, vemos que se trata de um número racional. O número a_0 é a parte inteira, e o restante corresponde à parte não inteira, formada por frações com numeradores iguais a 1. A fração contínua (2.24) é usualmente indicada com a notação $[a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n]$.

Todo número racional não nulo se exprime na forma de uma fração contínua simples. Vejamos, por exemplo, 123/71. Inicialmente aplicamos repetidamente o algoritmo euclidiano (os quocientes estão destacados):

$$\begin{aligned}
123 &= 71 \times \mathbf{1} + 52,\\
71 &= 52 \times \mathbf{1} + 19,\\
52 &= 19 \times \mathbf{2} + 14,\\
19 &= 14 \times \mathbf{1} + 5,\\
14 &= 5 \times \mathbf{2} + 4,\\
5 &= 4 \times \mathbf{1} + 1,\\
4 &= 1 \times \mathbf{3} + 1,\\
1 &= 1 \times \mathbf{1} + 0.
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Usando a primeira relação de (2.25) vem

$$\frac{123}{71} = \mathbf{1} + \frac{52}{71} = \mathbf{1} + \cfrac{1}{\cfrac{71}{52}},$$

em que continuamos a destacar o quociente. Vemos que $a_0 = 1$ é a parte inteira de 123/71. Invertemos a fração 52/71 para obter uma fração com numerador 1 e com denominador uma fração > 1 (portanto com parte inteira ≥ 1). Usando a segunda relação de (2.25) vem

$$\frac{71}{52} = \mathbf{1} + \frac{19}{52} = \mathbf{1} + \cfrac{\mathbf{1}}{\cfrac{52}{19}}$$

que, substituído na expressão acima, gera

$$\frac{123}{71} = \mathbf{1} + \cfrac{1}{\mathbf{1} + \cfrac{1}{\cfrac{52}{19}}}.$$

E assim por diante, usando todas as relações de (2.25) temos

$$\frac{123}{71} = \mathbf{1} + \cfrac{1}{\mathbf{1} + \cfrac{1}{\mathbf{2} + \cfrac{1}{\mathbf{1} + \cfrac{1}{\mathbf{2} + \cfrac{1}{\mathbf{1} + \cfrac{1}{\mathbf{3} + \cfrac{1}{\mathbf{1}}}}}}}} \quad \text{ou} \quad \frac{123}{71} = \mathbf{1} + \cfrac{1}{\mathbf{1} + \cfrac{1}{\mathbf{2} + \cfrac{1}{\mathbf{1} + \cfrac{1}{\mathbf{2} + \cfrac{1}{\mathbf{1} + \cfrac{1}{4}}}}}} \tag{2.26}$$

Portanto $\frac{123}{71} = [1, 1, 2, 1, 2, 1, 3, 1]$ ou $\frac{123}{71} = [1, 1, 2, 1, 2, 1, 4]$. Os números da primeira representação são exatamente os quocientes destacados em (2.25). A segunda representação tem um termo a menos, pois $3 + \frac{1}{1}$ foi substituído por 4.

Em geral temos o

Teorema 2.9. *Todo número racional se exprime na forma de uma fração contínua finita simples, em exatamente duas formas, sendo que em uma delas o último termo é 1. Reciprocamente, toda fração contínua finita simples é um número racional.*

Demonstração. Já foi observado que, dada uma fração contínua finita, recompondo as frações de baixo para cima, obtemos uma representação a/b como fração de inteiros, que é um número racional.

Seja agora r um número racional. Ele pode ser escrito na forma $r = a_0 + s$, em que a_0 é inteiro e s é um número racional tal que $0 \leq s < 1$. Se $s = 0$ temos $r = [a_0] = [a_0 - 1, 1]$, que são frações contínuas de r, e terminamos.

Suponhamos $0 < s$, e seja $s = a/b$, com $0 < a < b$. Seja $b = a_1 a + r_1$, com $0 \leq r_1 < a$. Se $r_1 = 0$ temos $a_1 \geq 2$ e

$$r = a_0 + \frac{a}{b} = a_0 + \frac{1}{\dfrac{b}{a}} = a_0 + \frac{1}{a_1} = [a_0, a_1] = [a_0, a_1 - 1, 1],$$

e terminamos.

Suponhamos $r_1 > 0$. Seja $a = a_2 r_1 + r_2$, com $0 \leq r_2 < r_1$. Então

$$r = a_0 + \frac{a}{b} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \dfrac{r_1}{a}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \dfrac{1}{\dfrac{a}{r_1}}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \dfrac{1}{a_2 + \dfrac{r_2}{r_1}}}.$$

Se $r_2 = 0$ temos $a_2 \geq 2$ e $r = [a_0, a_1, a_2] = [a_0, a_1, a_2 - 1, 1]$, e terminamos. Se $0 < r_2$, invertemos $\frac{r_2}{r_1}$, escrevemos $r_1 = a_3 r_2 + r_3$, com $0 \leq r_3 < r_2$ e repetimos a substituição.

Em algum passo o resto é zero, pois os restos são positivos e diminuem estritamente. Seja $r_n = 0$. A última divisão é $r_{n-2} = a_n r_{n-1} + r_n = a_n r_{n-1}$, e a penúltima é $r_{n-3} = a_{n-1} r_{n-2} + r_{n-1}$, com $0 < r_{n-1} < r_{n-2}$. O final fica

$$\frac{1}{a_{n-1} + \dfrac{r_{n-1}}{r_{n-2}}} = \frac{1}{a_{n-1} + \dfrac{1}{\dfrac{r_{n-2}}{r_{n-1}}}} = \frac{1}{a_{n-1} + \dfrac{1}{\dfrac{a_n r_{n-1}}{r_{n-1}}}} = \frac{1}{a_{n-1} + \dfrac{1}{a_n}}.$$

Como $a_n > 1$, temos duas possíveis representações:

$$r = [a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n] = [a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n - 1, 1].$$

Essas representações são únicas, pois, recompondo uma fração contínua de baixo para cima, refazemos as divisões sucessivas de b por a, e os quocientes e os restos são únicos, de acordo com o Teorema do Algoritmo da Divisão 1.7. □

Dada uma fração contínua simples $r = [a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n]$, o número $c_i = [a_0, a_1, a_2, \ldots, a_i]$, para todo $0 \leq i \leq n$, é chamado *i-ésimo convergente* de r. Esses convergentes são aproximações racionais otimizadas de r. Confira exemplos no Problema 2.7.37 e no Tema 2.9.8.

Mais propriedades de frações contínuas simples serão abordadas na Seção 8.6.

2.6 Aproximações, frações decimais e porcentagem

Dado um número racional r, expresso como fração ou em expansão decimal, pode ser conveniente substituí-lo por um número racional $\bar{r}$, seja por imposição de erro presumível de medição em um experimento, seja por conveniência, como, por exemplo, para facilitar a percepção de seu valor. O número $\bar{r}$ chama-se *aproximação* de r, e, em geral, é desejável que essa aproximação seja a melhor possível.

Uma medida da aproximação pode ser o *erro absoluto*, calculado como $|r - \bar{r}|$. Considera-se também o *erro relativo*, calculado como $\frac{r-\bar{r}}{\bar{r}}$.

Uma aproximação pode ser obtida de forma descomprometida, usando cálculo mental. Por exemplo, se 7/17 for considerada uma fração algo desagradável, pode-se observar que $8 \approx 7$ e $16 \approx 17$, e substituir

$$\frac{7}{17} \approx \frac{8}{16} = \frac{1}{2}\,.$$

O erro absoluto aqui é $\left|\frac{7}{17} - \frac{1}{2}\right| = \frac{3}{34}$, que não é tão bom quanto possa parecer à primeira vista. De fato, esse valor é um pouco mais de 20% do valor inicial da fração, pois

$$\frac{3}{34} \div \frac{7}{17} = \frac{3}{34} \cdot \frac{17}{7} = \frac{3}{14} \approx 0{,}21 = 21\%$$

Por isso o Cálculo Numérico adota técnicas que conferem maior precisão na escolha de uma aproximação. Consideramos, inicialmente, a ideia de usar frações decimais, uma proposta defendida na Europa no Século XVI por Simon Stevin, um importante cientista flamengo.

Uma fração de inteiros da forma $\frac{a}{10^m}$ chama-se *fração decimal*. Esse formato condiz melhor com nosso sistema de representação decimal. Além disso os denominadores 10, 100, 1000, etc. facilitam nossa percepção quando comparamos mentalmente o numerador com o denominador.

Partindo da expansão decimal de um número racional r, pode-se aproximá-lo por uma fração decimal com relativa facilidade. Se a expansão for finita, basta colocar as frações decimais no mesmo denominador. Por exemplo,

$$0{,}371 = \frac{3}{10} + \frac{7}{10^2} + \frac{1}{10^3} = \frac{371}{1\,000}.$$

Nesse caso a aproximação é exata. Se a expansão for infinita, a aproximação é obtida por truncamento ou arredondamento.

O *truncamento* consiste em escolher uma casa e desprezar os dígitos das casas seguintes. No exemplo que segue escolhemos a 5ª. casa e desprezamos as seguintes:

$$0{,}\overline{37} = 0{,}373737\ldots \approx 0{,}3737 = \frac{3737}{10\,000}.$$

O *arredondamento* consiste em escolher uma casa, desprezar os dígitos das casas seguintes, e proceder com o seguinte ajuste: (i) se o dígito da 1ª. casa desprezada for < 5, a casa escolhida permanece; (ii) se o dígito da 1ª. casa desprezada for ≥ 5, o dígito da casa escolhida é acrescido de uma unidade, e os dígitos anteriores são ajustados, se necessário. Exemplos:

$$0{,}\overline{37} = 0{,}373737\ldots \approx 0{,}373 \approx 0{,}374 = \frac{374}{1\,000}$$

e

$$0{,}\overline{37} = 0{,}373737\ldots \approx 0{,}3737 = \frac{3737}{10\,000}.$$

Em ambos os casos o erro absoluto pode ser facilmente calculado. Confira o Problema 2.7.29.

Um caso particular de aproximação é a porcentagem. O denominador 100 proporciona um valor comparativo bastante conveniente. Nós mesmos já o usamos nesta seção.

A expressão x *porcento de* a é o valor $\frac{x}{100}a$. O termo "porcento" costuma ser substituído pelo símbolo %

Outra técnica que podemos usar para calcular aproximações consiste em truncar a expressão do número como fração contínua, como já observamos. A ideia aqui é um pouco diferente, pois permite obter aproximações com denominadores menores do que as aproximações correspondentes na forma de frações decimais. Confira o Problema 2.7.37 e o Tema 2.9.8.



Figura 2.7. Simon Stevin exerceu, na vida comum, as atividades de comerciante e de conselheiro estatal em Antuérpia. Na vida científica trabalhou em vários campos do conhecimento, tendo se destacado como engenheiro, físico e matemático. Em Física contribuiu em Hidrostática e Estática: formulou o Princípio de Stevin sobre pressão de fluidos e o princípio do paralogramo em composição de forças. Em Matemática defendeu o emprego das frações decimais assim como dos números negativos, e desenvolveu métodos de integração. Como engenheiro foi diretor do Departamento de Águas, muito importante nos países baixos. Ao lado, gravura de Simon Stevin. Mais detalhes na pág. 249.

2.7 Problemas

Problema 2.7.1. Escreva a fração abaixo na forma irredutível:

$$\frac{4182221}{-4674247}.$$

Problema 2.7.2. Explique por que vale a seguinte Lei de Cancelamento em frações de inteiros: se $c \neq 0$ então $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$.

Problema 2.7.3. Descubra qual das duas frações de inteiros seguintes é maior: $\dfrac{15}{-2}$ e $\dfrac{7}{-3}$.

Problema 2.7.4. a) Foi pedido a um estudante determinar todas as frações de inteiros equivalentes a 6/9. Ele respondeu que eram

$$\pm\frac{6}{9},\quad \pm\frac{12}{18},\quad \pm\frac{18}{27},\ldots,\ \text{em geral}\quad \pm\frac{6n}{9n},\ n\ \text{natural}\ \neq 0.$$

Explique por que isso não está correto.
b) Sejam a e b números inteiros, ambos não nulos. Investigue em que condições as representações equivalentes a a/b como fração de inteiros são

$$\frac{a}{b},\ \frac{2a}{2b},\ \frac{3a}{3b},\ldots,\frac{na}{nb},\ldots,n\ \text{natural}\ \neq 0.$$

c) Quais frações equivalentes a 6/9 estão faltando na lista do estudante?

Solução de a). As frações positivas dadas são equivalentes a 6/9, mas as negativas não. Por outro lado, 2/3 é equivalente a 6/9, e não está na lista proposta pelo estudante.

Solução de b). Podemos supor que $b > 0$, pois $\frac{-a}{-b}$ produz a mesma lista do enunciado. A condição necessária e suficiente é que a/b seja irredutível.

Mostremos primeiro que a condição é necessária. Suponhamos que todas as frações equivalentes a a/b estejam na lista. Seja $d = \text{mdc}(a, b)$. Temos $d \geq 1$. Escrevemos $a = a_1 d$ e $b = b_1 d$. Temos $\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}$, e $\frac{a_1}{b_1}$ está na lista. Se fosse $d > 1$, teríamos $b_1 < b$, e isso implicaria $\frac{a_1}{b_1}$ fora da lista. Portanto, $d = 1$. Como já temos $b > 0$, segue que a/b é irredutível.

Mostremos agora que a condição é suficiente. Suponhamos que a/b seja irredutível. Seja c/d equivalente a a/b. Então $a/b = c/d$ e $ad = bc$. Como $\text{mdc}(a, b) = 1$, segue $a|c$ e $b|d$. Assim existem inteiros a_1 e b_1 tais que $c = aa_1$ e $d = bb_1$. Então $ad = bc$ implica $abb_1 = baa_1$ e $a_1 = b_1$. Chamando $n = b_1$ temos $n > 0$ e c/d é da forma an/bn.

Solução de c). Estão faltando as frações $2m/3m$, com m natural não múltiplo de 3. De fato, como $6/9 = 2/3$ e $\text{mdc}(2, 3) = 1$, as frações $2m/3m$, com $m \neq 0$ natural, são as frações equivalentes a 6/9. As que estão presentes na lista do item a) são $\frac{6n}{9n} = \frac{2m}{3m}$, com $m = 3n$. Portanto, as que faltam são $2m/3m$, com m natural não múltiplo de 3.

Problema 2.7.5. É $\dfrac{\sqrt{12}}{3\sqrt{3}}$ uma fração ordinária? É um número racional?

Problema 2.7.6. Encontre (e justifique) condições necessárias e suficientes sobre os inteiros a e $b \neq 0$ para que o número racional a/b seja um inteiro.

Problema 2.7.7. Encontre (e justifique) condições necessárias e suficientes sobre os inteiros a e $b \neq 0$ para que o número racional a/b seja zero.

Problema 2.7.8. Prove que as frações irredutíveis a/b e c/d são iguais se e somente se $a = c$ e $b = d$, ou $a = -c$ e $b = -d$.

Problema 2.7.9. Demonstre a *Lei da Tricotomia*: quaisquer que sejam os números racionais r e s, ocorre uma e apenas uma das alternativas seguintes: $r = s$, ou $r < s$ ou $r > s$.

Problema 2.7.10. Demonstre a *Lei da Integridade*: quaisquer que sejam os números racionais r e s, se $rs = 0$, então $r = 0$ ou $s = 0$.

Problema 2.7.11. Para quais números $x \in \mathbb{Z}$ a fração $17/x$ é uma representação irredutível de algum número racional?

Problema 2.7.12. Sejam a e b inteiros não nulos e relativamente primos. Prove que existem inteiros c e d tais que a fração $1/ab$ pode ser escrita na forma $\frac{1}{ab} = \frac{c}{a} + \frac{d}{b}$.

Problema 2.7.13. Demonstre que as definições das operações aritméticas em $\mathbb{Q}$ não dependem dos particulares representantes tomados em um conjunto de frações equivalentes. Mais exatamente, prove que

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \quad \text{e} \quad \frac{c}{d} = \frac{c'}{d'} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{ad+bc}{bd} = \frac{a'd'+b'c'}{b'd'},$$

o mesmo para as outras operações.

Problema 2.7.14. a) Demonstre as propriedades usuais de potências em $\mathbb{Q}$: $(r^m)^n = r^{mn}$, $r^m\, r^n = r^{m+n}$, $r^m s^m = (rs)^m$, quaisquer que sejam os números racionais não nulos r e s, e m e n inteiros quaisquer. **b)** Demonstre as afirmações (2.15) e que elas valem, ambas, para todo número inteiro n. **c)** Explique por que vale a relação $\dfrac{a}{b2^\alpha 5^\beta} = \dfrac{a2^{\gamma-\alpha}5^{\gamma-\beta}}{b10^\gamma}$, com a e $b \neq 0$ inteiros, α e β naturais e $\gamma = \max\{\alpha, \beta\}$.

Problema 2.7.15. Todo número racional r se escreve de maneira única na forma $q = n + s$, em que n é um inteiro e s é um racional tal que $0 \leq s < 1$. Ainda, essa decomposição não depende da particular representação de r.

Problema 2.7.16. Localize o número $-25/7$ em uma reta numérica.

Problema 2.7.17. Localize o número $5/3$ em uma reta numérica. Sabemos que $5/3 = 10/6$. Será que, ao localizarmos $10/6$ na reta numérica, obtemos o mesmo ponto anterior?

Problema 2.7.18. Escreva $-4,87$ na forma $n + r$, sendo $n \in \mathbb{Z}$ e $r \in [0, 1)$ racional. Essa representação é única?

Problema 2.7.19. a) Encontre a expansão decimal de $1/6$. **b)** Encontre a expansão decimal de $8/17$.

Problema 2.7.20. Num experimento foi obtida a fração $81/239$ em uma medição. Como $80 \approx 81$ e $240 \approx 239$, decidiu-se considerar $80/240 = 1/3$ no lugar da fração original. Calcule o erro absoluto e o erro relativo.

Problema 2.7.21. Expresse em fração decimal o número racional de expansão 0,251978.

Problema 2.7.22. Encontre a expansão decimal de $0{,}\overline{6} + (0{,}\overline{6})^2$.

Problema 2.7.23. Represente os seguintes números racionais como fração irredutível de inteiros usando, em cada caso, os dois métodos explicados no texto: **a)** $0{,}0\overline{13}$; **b)** $0{,}32\overline{56}$

Problema 2.7.24. Um professor afirmou: "Dois terços dos estudantes universitários cometem erros de português". Outro professor disse: "Que desastre! Então, de cada 100 estudantes, quase 70 cometem erros de português". Está certo?

Problema 2.7.25. O período de uma expansão decimal periódica pode ter o algarismo zero? Quando isso ocorre? Pode ter algarismos repetidos? E quanto ao pré-período?

Problema 2.7.26. Existe um número racional cuja expansão decimal tem período de comprimento 18?

Problema 2.7.27. Mostre que a quantidade de dígitos do período da expansão decimal periódica da fração de inteiros a/b é $\leq b-1$.

Problema 2.7.28. a) Explique por que a fração de inteiros a/b tem expansão decimal finita se, e somente se, ela pode ser escrita na forma $c/10^m$ para inteiros c e m com $m \geq 0$. **b)** Determine condições necessárias e suficientes sobre as decomposições canônicas dos inteiros a e $b \neq 0$ para que a expansão decimal de a/b seja finita.

Problema 2.7.29. Considere a aproximação de $7/11 = 0{,}\overline{63}$, dada por truncamento:

$$\frac{7}{11} \approx \frac{63}{10^2} + \frac{63}{10^4} + \cdots + \frac{63}{10^{2n}}\,.$$

a) Prove que o erro absoluto R_n dessa aproximação satisfaz à condição $0 < R_n < 10^{-2n}$. **b)** Calcule uma aproximação de $7/11$ com erro $< 10^{-10}$.

Problema 2.7.30. a) Sejam a/b e c/d frações equivalentes de inteiros positivos. Explique por que, ao efetuar $a \div b$ e $c \div d$ usando o algoritmo usual de divisão continuada, se obtém a mesma expansão decimal para as duas frações. **b)** Seja a/b uma fração de inteiros positivos. Mostre que, ao efetuar $a \div b$ usando o algoritmo usual de divisão continuada, a expansão decimal obtida não tem período formado pelo dígito 9.

Solução de a) Sem perda de generalidade podemos supor que a/b seja irredutível. Então $c/d = an/bn$ para algum inteiro positivo n. A primeira redução que fazemos é observar que podemos supor $a < b$. Para ver isso, seja $a = bq + r$, $0 \leq r < b$. Temos $\frac{a}{b} = q + \frac{r}{b}$, de modo que q é a parte inteira de a/b. Agora $an = (bn)q + rn$, $0 \leq rn < bn$, logo q é novamente a parte inteira de an/bn. A expansão decimal de q é única, de forma que podemos supor que $a < b$.

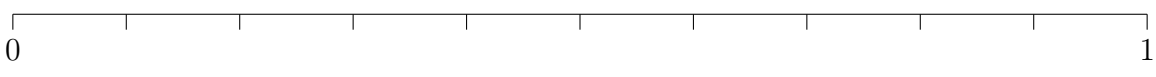
Seja agora o inteiro $m \geq 1$ tal que $10^{m-1}a \leq b < 10^m a$. Isso significa que devem ser acrescentados m zeros após a expansão de a para fazer a primeira divisão em $a \div b$, e devem ser colocados $m-1$ zeros após a vírgula no quociente. O mesmo ocorre com an/bn, pois $10^{m-1}(an) \leq (bn) < 10^m(an)$.

Seja b_1 o primeiro quociente da divisão continuada $a \div b$. Temos $10^{m-1}a = b_1 b + r_1$, com $0 \leq r_1 < b$. Então b_1 é um dígito decimal, pois se fosse $b_1 \geq 10$ viria $b_1 b + r \geq 10 \cdot 10^{m-1}a + r \geq 10^m a$, o que é uma contradição. Ocorre que b_1 é também o primeiro dígito decimal da divisão continuada $an \div bn$, pois vale $10^{m-1}(an) = b_1(bn) + (nr_1)$, com $0 \leq (nr_1) < (bn)$.

Prosseguindo na divisão, em cada um dos passos seguintes ocorrem as mesmas desigualdades, e o dígito é o mesmo para as duas divisões $a \div b$ e $an \div bn$.

Solução de b) Suponhamos que numa divisão continuada $a \div b$ tenha ocorrido que $a/b = a_n a_{n-1} \ldots a_0, b_1 b_2 \ldots b_m\,\overline{9}$. Separando a parte inteira de a/b podemos supor que $a < b$ e $a/b = 0, b_1 b_2 \ldots b_m\,\overline{9}$. Multiplicando a fração por 10^m e novamente separando a parte inteira, podemos supor que $a < b$ e $a/b = 0, \overline{9}$. Mas já vimos ((2.23), pág. 31) que $0, \overline{9} = 1$, o que implica $a = b$, e temos uma contradição.

Problema 2.7.31. Exploremos um pouco o significado de $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ para $|r| < 1$, conforme enunciado em (2.21). **a)** Tome $r = 1/2$, e calcule alguns termos r^2, r^3, etc. Localize esses termos em uma reta numérica:



Que propriedades você observa?

b) Seja ε um número tal que $0 < \varepsilon < 1$. Demonstre que existe um inteiro positivo n_0 tal que $r^{n_0} < \varepsilon$. Localize na reta numérica os valores r^n para $n \geq n_0$. Expresse com palavras essa propriedade dos números $\frac{1}{2^n}$.
c) Tome um número r qualquer, com $|r| < 1$, e estude propriedades análogas para os números r^n, com n inteiro positivo.

Problema 2.7.32. O estudante que aceitar bem a afirmação (2.22) pode agora demonstrar algumas propriedades que usamos no texto, sem se preocupar com generalizações:
a) Demonstre a seguinte versão da propriedade distributiva para somas infinitas: $a(1+r+r^2+r^3+\cdots) = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots$ para todo a e todo r tal que $0 \leq r < 1$.
b) Demonstre diretamente a seguinte versão da propriedade associativa: $a+ar+ar^2+ar^3+\cdots = (a+ar)+(ar^2+ar^3)+\cdots$ para todo a e todo r tal que $0 \leq r < 1$.
c) Demonstre que se $x = 0{,}\overline{13}$ então $100x = 13{,}\overline{13}$ e $13{,}\overline{13} - 0{,}\overline{13} = 13$.

Problema 2.7.33. Verifique que $7/11 = [0,1,1,1,3] = [0,1,1,1,2,1]$.

Problema 2.7.34. Encontre as representações de $179/19$, $22/7$ e $-22/7$ como frações contínuas.

Problema 2.7.35. Considere a sequência de Fibonacci $(a_n)_{n\geq 1}$, definida por $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, e $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ se $n \geq 3$. Encontre a representação de a_{n+1}/a_n na forma da fração contínua que termina com 1.

Problema 2.7.36. a) Seja $r = [a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n]$, com $n \geq 1$. Então $r = a_0 + s$, com a_0 inteiro e s racional, $0 < s < 1$. Ainda, $\frac{1}{s} = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$. **b)** Demonstre que a fração contínua finita simples $[a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n]$, com $a_0 \neq 0$, é inversa de $[0, a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n]$.

Problema 2.7.37. Considere $123/71 = [1,1,2,1,2,1,3,1]$ calculada no início da Seção 2.5. **a)** Calcule os convergentes $c_i = [a_0, a_1, \ldots, a_i]$, $0 \leq i \leq 7$, na forma de frações de inteiros. **b)** Verifique que c_4 e c_5 são boas aproximações de $123/71$ com denominadores menores.

Problema 2.7.38. Demonstre que, dados números racionais $r < s$, existem infinitos números racionais t tais que $r < t < s$.

Problema 2.7.39. Assim como fizemos para subconjuntos de $\mathbb{Z}$ na página 13, podemos definir subconjunto de $\mathbb{Q}$ limitado inferiormente, limitado superiormente, assim como os conceitos de limitante inferior, limitante superior, máximo e mínimo. Prove, através de exemplo, que não existe uma versão para $\mathbb{Q}$ do Princípio do Menor Número Inteiro, demonstrado no Teorema 1.6, na página 13.

Problema 2.7.40. Mostre que o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é enumerável, isto é, existe uma sequência r_1, r_2, r_3, ... de números racionais tal que todo número racional faz parte uma única vez dessa sequência.

Problema 2.7.41. Um papiro egípcio, escrito provavelmente entre os anos de 500 e 800, traz a seguinte regra para decomposição de frações:

$$\frac{a}{bc} = \frac{1}{bs} + \frac{1}{cs}$$

em que $s = (b+c)/a$. Confira, e como caso particular obtenha que $1/b = 1/(b+1) + 1/b(b+1)$. Use isso para escrever $2/b$ como soma de duas frações unitárias diferentes quando $b \geq 3$ é ímpar.

Problema 2.7.42. Verifique que se b é múltiplo de três, $2/b$ pode ser escrito como a soma de duas frações unitárias, sendo uma delas a metade de $1/b$.

2.8 Pequena história das frações de inteiros

As grandes civilizações do passado, com o desenvolvimento da comercialização de bens e com a necessidade de organizar as atividades sociais, criaram métodos para lidar com os números racionais, inventando símbolos para representá-los e algoritmos para operá-los. Lidar com as frações sem o concurso da representação posicional e sem os recursos da Álgebra moderna não foi fácil, como atestam a antiga matemática egípcia, a romana, e outras. A exceção, no mundo antigo, ocorreu na Suméria.

Segundo [42], pág. 58 e seguintes, a aritmética dos povos "entre rios" (denominados genericamente babilônios ou sumérios) pode ser rastreada desde o quarto e o quinto milênio a.C. Seu sistema sexagesimal igualmente tem longa data. Dessa forma realizavam cálculos para as mais diversas finalidades, e os números racionais eram representados como expansões sexagesimais. Essas representações eram finitas, portanto, em geral, eram aproximações.

O método dos antigos egípcios desperta atenção até nos dias atuais. Para operar com frações usavam somas de diferentes frações unitárias (frações da forma $1/b$, com $b \geq 2$ inteiro). Como a aritmética egípcia utilizava muito a duplicação, eles tinham tabelas relacionando as frações da forma $2/b$ com somas de frações unitárias diferentes. Um antigo papiro, conhecido como papiro Rhind, traz uma lista decompondo todos os números $2/b$, com $5 \leq b \leq 101$ e b ímpar. Dois exemplos dessas decomposições são:

$$\frac{2}{13} = \frac{1}{8} + \frac{1}{52} + \frac{1}{104} \quad \text{e} \quad \frac{2}{97} = \frac{1}{56} + \frac{1}{679} + \frac{1}{776}.$$

Existem problemas em aberto sobre frações unitárias. Consulte [20] para mais detalhes.

Na antiga civilização romana a matemática tinha um caráter eminentemente prático, de modo que manejavam as frações necessárias para o comércio ou medições. Segundo informa a IA do Google, sua fração básica era a uncia, o nosso $1/12$, ou um doze avos. Tinham vocábulos próprios para os seguintes múltiplos $n \times 1/12$: $n = 2$, 3, 4, 6, 8, e 9. Quanto ao sistema monetário, haviam duas moedas fracionárias, o quadrans e o semis, com valores respectivamente de $1/4$ e $1/2$ da moeda unitária, o as.

Para encerrar, destacamos que a matemática chinesa teve um grande desenvolvimento desde o início do segundo milênio de nossa era. Quanto às frações, no Século XIII o matemático chinês Yang Hui já manejava frações decimais com uma metodologia muito similar à atual.

Para estudar mais detalhes sobre antigos métodos para frações, consulte, por exemplo, [23], [28] ou [42].

2.9 Temas para investigação

Tema 2.9.1. Estude o seguinte algoritmo proposto por Fibonacci, em seu texto *Liber Abaci*. Para escrever uma fração de inteiros positivos $\frac{a}{b}$, com $a < b$, como soma de frações unitárias diferentes, proceda do seguinte modo: i) Ache a maior fração unitária $\frac{1}{n} < \frac{a}{b}$. ii) Subtraia $\frac{a}{b} - \frac{1}{n}$, e reaplique o procedimento a essa nova fração. iii) Reaplique o procedimento até que a última subtração seja uma fração unitária.

Vejamos na prática como se faz com $7/16$. Temos: i) $2 < 16/7 \approx 2,28 < 3 \Rightarrow \frac{1}{3} < \frac{7}{16} < \frac{1}{2}$, e a maior fração unitária $< \frac{7}{16}$ é $\frac{1}{3}$. ii) $\frac{7}{16} - \frac{1}{3} = \frac{5}{48}$. Agora $9 < 48/5 \approx 9,6 < 10 \Rightarrow \frac{1}{10} < \frac{5}{48} < \frac{1}{9}$, e a maior fração unitária $< \frac{5}{48}$ é $\frac{1}{10}$. iii) $\frac{5}{48} - \frac{1}{10} = \frac{1}{240}$. Logo $\frac{7}{16} = \frac{1}{3} + \frac{1}{10} + \frac{1}{240}$.

Aplique esse método para decompor $\frac{2}{97}$ e $\frac{9}{22}$ como soma de frações unitárias. Para obter mais detalhes, consulte [27]. Estude por que o algoritmo sempre termina, e dá certo para qualquer fração de inteiros positivos $\frac{a}{b}$, com $a < b$.



Figura 2.8. Leonardo de Pisa, mais conhecido como Fibonacci, é reconhecido como o primeiro grande matemático da Idade Média. Contribuiu com o renascimento das ciências exatas na Europa, depois de 1000 anos de abandono. Seu pai era mercador, o que lhe deu oportunidade de conhecer a aritmética praticada na Índia e pelos povos muçulmanos. Em 1202, aos 32 anos, publicou o *Liber Abaci*, em que introduziu na Europa o sistema decimal com os numerais hindu-arábicos. Ao lado, monumento dedicado a Fibonacci em Pisa, Itália. Mais detalhes na pág. 249.

Tema 2.9.2. Considere a expansão decimal 0,131133111333..., ou seja, os dígitos decimais que comparecem após a vírgula são definidos da seguinte forma: o primeiro grupo de dígitos tem dois dígitos, a saber, 1 e 3; o segundo grupo de dígitos tem quatro dígitos, a saber, dois 1 e dois 3, e assim sucessivamente. **a)** Verifique que essa expansão não representa um número racional. **b)** Construa outros exemplos com a mesma propriedade. **c)** Investigue se é possível que a expansão 0,131133111333... corresponda a um ponto da reta em harmonia com os racionais. Isto é, se podemos corresponder a 0,131133111333... um ponto C tal que se r e s são racionais tais que $r < 0{,}131133111333\ldots < s$ e se A e B são os pontos da reta correspondentes a r e s, respectivamente, então C está entre A e B.

Tema 2.9.3. Investigue se existe uma versão do Teorema 1.7, página 14, com a e b racionais, com quociente q e resto r também racionais.

Tema 2.9.4. Estude os períodos e pré-períodos das expansões decimais de $1/p$ para p primo $\neq 2$ e $\neq 5$. Observe regularidades e faça conjecturas. Tente fazer demonstrações, ou as procure na literatura.

Tema 2.9.5. Estude os períodos de $1/7$, $2/7$, $3/7$, etc. Faça o mesmo para outros primos. Observe regularidades e faça conjecturas. Tente fazer demonstrações, ou as procure na literatura.

Tema 2.9.6. Para obter mais informações técnicas sobre expansões decimais de racionais, siga o roteiro abaixo. Para mais detalhes, consulte [107].
a) As expansões da forma $0{,}\overline{b_1 b_2 \ldots b_\ell}$ correspondem exatamente às frações equivalentes a $\frac{b_1 b_2 \ldots b_\ell}{99\ldots9}$, em que $99\ldots9$ tem ℓ dígitos 9.
b) Se b é um inteiro positivo tal que $\mathrm{mdc}(b, 10) = 1$, existem inteiros t tais que $b \mid 10^t - 1$. Em particular, existe o menor inteiro positivo m tal que $b \mid 10^m - 1$.
c) Um teorema de Johann C. F. Gauss, de 1801, diz que se a/b é uma fração de inteiros, irredutível com $\mathrm{mdc}(b, 10) = 1$, então sua expansão decimal é periódica e simples, com período de comprimento m.
d) Seja $a/b2^\alpha 5^\beta$ uma fração irredutível de inteiros positivos tais que $b > 1$, $\alpha, \beta \geq 0$ e $\mathrm{mdc}(b, 10) = 1$. Seja $\gamma = \max\{\alpha, \beta\}$, e seja m o menor inteiro positivo tal que $b \mid 10^m - 1$. Então sua expansão decimal é composta, com pré-período de comprimento γ e com período de comprimento m. Além disso, essas propriedades não dependem de a.

Tema 2.9.7. Um teorema interessante sobre expansões de racionais: *Se o comprimento do período da expansão decimal de* $1/p$ *é* $p - 1$*, então* p *é primo.* Procure demonstrações. Uma forma de experenciar essa informação é examinar exemplos da contrapositiva.



Figura 2.9. Johann Carl Friedrich Gauss, importante matemático alemão que contribuiu nas áreas de Teoria dos Números, Álgebra, Estatística, Análise, Geometria Diferencial, Geofísica, Mecânica, Eletrostática, Astronomia, Ótica, dentre outras. Teve grande influência no desenvolvimento da Matemática e de outras ciências. Considerado um prodígio, sua maior obra, *Disquisitiones Arithmetica* [47], foi terminada quando tinha 21 anos, em 1798. Detalhes da foto na pág. 249.

Tema 2.9.8. No Século XVII, o astrônomo, físico e matemático holandês Christiaan Huygens, ao estudar a órbita de Saturno, deparou-se com a razão $r = \frac{77\,708\,431}{2\,640\,858}$. Para fins práticos ele usou a aproximação $r \approx \frac{206}{7}$. **a)** Mostre que $c_4 = \frac{206}{7}$ é o 4º convergente da fração contínua $r = [a_0, a_1, a_2, ..., a_n]$, isto é, $c_4 = [a_0, a_1, a_2, a_3]$. **b)** Calcule o erro absoluto $|r - c_4|$ na forma decimal. **c)** Aproxime r por truncamento a partir da 3ª casa da parte não inteira da sua expansão decimal, e escreva essa aproximação na forma de fração irredutível de inteiros. **d)** Compare as duas aproximações.

2.10 Atividades para licenciandos e professores

Atividade 2.10.1. Pesquise na internet as palavras percentagem e porcentagem, se são sinônimas ou não, e como são usadas em países de língua portuguesa.

Atividade 2.10.2. No ensino básico se usa o termo "dízima" para indicar uma expansão decimal. Aqui preferimos usar a última expressão, juntamente com seus derivados expansão decimal finita, expansão decimal periódica e expansão decimal não-periódica. O termo "decimal" pode ser omitido se estiver claro que se trata da base dez. Pesquise na internet outras opiniões. Como estudante, ou como professor, sinta-se à vontade para usar o que achar melhor.

Atividade 2.10.3. Estão em desuso antigas classificações de frações, trazendo nomes como *fração própria*, *fração imprópria*, *fração mista*, *fração aparente*. Faça uma pesquisa sobre isso para se precaver com perguntas de estudantes bem informados. Quanto ao termo fração ordinária, neste texto preferimos usar fração de inteiros. A antiga notação de fração mista $a\frac{b}{c}$, que significava $a + \frac{b}{c}$, com a, b e c inteiros positivos tais que $b < c$, neste presente texto indica a multiplicação $a \cdot \frac{b}{c}$. O que você acha da notação $a\frac{b}{c}$ para fração mista?

Atividade 2.10.4. Pesquise na internet os termos "por mil", "per mille", "permil", que se referem ao uso de fração comparativa com denominador 1000, ou partes por mil. Faça considerações técnicas e pedagógicas quanto ao seu uso, e descreva situações em que seu uso é mais adequado do que a porcentagem.

Atividade 2.10.5. Pesquise na internet o que é notação científica, ponto decimal flutuante, notação engenharia, notação E, e métodos correlatos. Explique como podem ser operados aritmeticamente os números $1{,}6039 \times 10^{-3}$ e $3{,}017 \times 10^{-4}$ (adição, subtração, multiplicação e divisão).

Atividade 2.10.6. Neste texto de Matemática Superior introduzimos a divisão de frações de inteiros como uma operação inversa da multiplicação. Assim para dividir a/b por c/d encontramos a fração x/y tal que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}\,\frac{x}{y}$. Isso nos levou à definição 2.12 da página 24.

No ensino de frações na escola fundamental pode ocorrer a necessidade de uma justificativa menos abstrata. Colecione essas justificativas. Uma sugestão para consulta é [56] e [69]. Estude também as possibilidades pedagógicas do seguinte truque:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{\frac{a}{b} \times \frac{d}{c}}{\frac{c}{d} \times \frac{d}{c}} = \frac{\frac{ad}{bc}}{1} = \frac{ad}{bc}\,.$$

Atividade 2.10.7. Uma interpretação para a divisão de frações consiste de uma extensão da ideia da divisão de inteiros. Assim, quando fazemos $8 \div 2$, queremos saber quantas vezes 2 "cabe" em 8. De modo análogo para obter $\frac{1}{2} \div \frac{1}{3}$ calculamos quantas vezes $\frac{1}{3}$ cabe em $\frac{1}{2}$.



Figura 2.10. Ilustração de divisão de frações $\frac{1}{2} \div \frac{1}{3} = \frac{3}{2}$.

Na Figura 2.10, à esquerda, vemos que $\frac{1}{3}$ cabe uma vez e meia em $\frac{1}{2}$. Portanto

$$\frac{1}{2} \div \frac{1}{3} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}\,.$$

Na Figura 2.10, à direita, colocamos as frações no mesmo denominador.
Explore essa ideia. Estude outros exemplos.

Atividade 2.10.8. No texto apresentamos a soma de frações da seguinte forma: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$. Mas existe outra forma:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{x}{\text{mmc}(b,d)}.$$

a) Complete a fórmula e demonstre que a fração assim obtida é equivalente à anterior.
b) Faça considerações sobre o uso de uma ou outra fórmula levando em conta o aprendizado dos estudantes.

Atividade 2.10.9. (INEP- ENC 98, adaptado) Ao perceber que um estudante efetuou uma adição de duas frações adicionando numerador a numerador e denominador a denominador, dois professores agiram da seguinte forma: O professor A corrigiu a tarefa cuidadosamente no quadro, usando redução ao mesmo denominador. O professor B, inicialmente, propôs a esse aluno que efetuasse $1/2 + 1/2$ e examinasse o resultado. Analise os procedimentos dos professores A e B sob o ponto de vista da Pedagogia.

Atividade 2.10.10. Explique por que é importante que o estudante descubra propriedades, mesmo quando não são muito gerais. Como o professor deve proceder quando isso ocorre? Como o professor pode incentivar essas descobertas? Analise a seguinte descoberta de um estudante (confira [49]): "Para dividir um número por 5 somo o número com ele mesmo e coloco a vírgula antes do último algarismo".

Atividade 2.10.11. Dada a expansão decimal de um número racional, uma fração de inteiros que a representa chama-se *geratriz* (daquela expansão). Justifique a seguinte regra, encontrada em antigos livros didáticos: "A geratriz de uma expansão periódica simples sem parte inteira é uma fração cujo numerador é o período e cujo denominador é o número formado por tantos 9's quantos forem os dígitos do período". Você pode ainda expressar essa receita através de uma fórmula algébrica.

Atividade 2.10.12. Faça o mesmo com esta outra regra: "A geratriz de uma expansão periódica composta sem parte inteira é uma fração cujo numerador é a parte não periódica seguida de um período menos a parte não periódica, e cujo denominador é o número formado por tantos 9's quantos forem os dígitos do período, seguido de tantos zeros quantos forem os dígitos da parte não periódica."

Atividade 2.10.13. Para qualquer número positivo x, dizemos que os números $x+1$ e $\dfrac{x}{x+1}$ são *filhos* de x. **a)** Encontre um irmão de $5/7$. **b)** Um número pode ser filho de dois números positivos diferentes? Por quê? **c)** Mostre que $1/2008$ é descendente de 1, isto é, ele é filho de um filho de um filho ... de um filho de 1.

Atividade 2.10.14. O que você faz se um estudante se põe a somar $0{,}23333\ldots$ com $0{,}51212\ldots$ usando o algoritmo usual?

$$\begin{array}{r} 0,\ 2\ 3\ 3\ 3\ 3\ \ldots \\ +\ 0,\ 5\ 1\ 2\ 1\ 2\ \ldots \\ \hline 0,\ 7\ 4\ 5\ 4\ 5\ \ldots \end{array}$$

Atividade 2.10.15. Um professor explicou a seus estudantes como fazer divisões com números não inteiros. Usou o método tradicional, e deu um exemplo.

$$\begin{array}{rl|l} 7\ \ 8 & & \\ & 5{,}2 & \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{rrr|l} 7 & 8 & 0 & 5\ \ 2 \\ 2 & 6 & 0 & 1\ \ 5 \\ & & 0 & \end{array}$$

Resposta: $78 \div 5{,}2 = 15$.

Na aula seguinte da mesma classe o professor propôs aos estudantes a conta $84 \div 5{,}25$ esperando que eles iriam aplicar o método que havia explicado. Um estudante, que havia faltado na aula anterior, fez diferente:

$$\begin{array}{r} 5{,}2\ 5 \\ \times\quad 4 \\ \hline 2\ 1{,}0\ 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rr|l} 8 & 4 & 2\ \ 1 \\ 0 & & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4 \\ \times\ 4 \\ \hline 1\ \ 6 \end{array}$$

Resposta: $84 \div 5{,}25 = 16$.

a) Explique o método tradicional usado pelo professor.

b) Explique o método usado pelo estudante que faltou à primeira aula. É sempre assim tão legal?

c) Qual deve ser o comportamento do professor perante uma solução diferente da que ele propôs? É errado ensinar o método tradicional? O professor deveria se prevenir e ensinar logo os dois métodos?

d) Tecnicamente falando, qual dos dois métodos é melhor? E pedagogicamente?

Atividade 2.10.16. A Base Nacional Comum Curricular [24] menciona números racionais no Sumário de Matemática a partir do 3º ano do Ensino Fundamental. Faça uma leitura dos itens sugeridos. Com o que aprendeu até aqui neste texto, você se sente seguro sobre esses assuntos?

Capítulo 3

A constante de Pitágoras

3.1 Introdução

Apresentamos neste Capítulo o número $\sqrt{2}$, denominado *constante de Pitágoras*, assim como números coligados. Eles vão nos abrir portas para o estudo dos números não racionais. Pretendemos seguir os passos dos antigos sumérios, que primeiro o investigaram, dos matemáticos da Escola Pitagórica, da Academia de Platão, da Escola Alexandrina, e de tantos outros, que se dedicaram ao estudo dessa importante constante matemática.

3.2 O aparecimento de $\sqrt{2}$

$\sqrt{2}$ é o símbolo que usamos para anotar o número positivo cujo quadrado é 2. Essa notação tem um significado trivial para quadrados perfeitos: $\sqrt{n^2} = n$ para todo número natural n. Mas os quadrados perfeitos são raros na reta numérica. Por exemplo, de 1 a 10 000 existem apenas cem. Portanto a pergunta não trivial que se faz é: $\sqrt{n}$ é um número mesmo quando n não é um quadrado perfeito?

$\sqrt{2}$ é estudado desde tempos remotos. Os Sumérios, povo que habitou a Mesopotâmia, conheciam esse número e tinham um método para calcular seu valor. Um exemplo notável pode ser visto em um tablete sumeriano, desenterrado em Susa em 1936, e ao qual foi atribuída a data de 1600 a.C. Nele vemos representado um quadrado, suas duas diagonais e três números escritos no sistema sexagesimal. Confira a Figura 3.1.

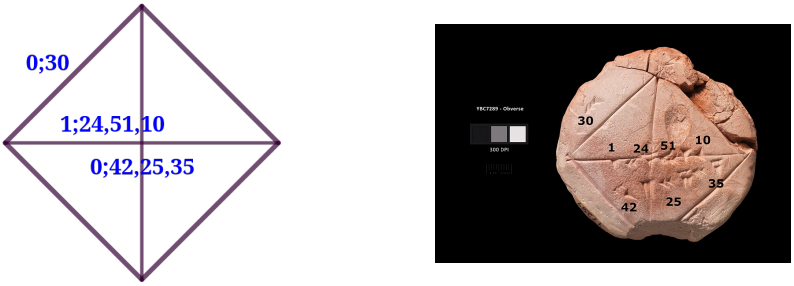


Figura 3.1 À esquerda, esquema do tablete sumério. À direita, foto do tablete etiquetada com os valores. Para mais informações, confira a pág. 249.

Na Figura 3.1 os números estão escritos segundo a notação para o sistema sexagesimal proposta por Otto Neugebauer em [88], em que as casas sexagesimais são separadas por vírgula

e a parte inteira é separada da parte não inteira por ponto e vírgula. Para fazer alguns cálculos indicamos esses números por:

$$a = (0;30)_{60} \quad b = (1;24,51,10)_{60} \quad c = (0;42,25,35)_{60}\,.$$

Qual é a relação entre eles? Calculando no sistema sexagesimal temos:

$$\begin{array}{rrrrr}
 & 1; & 24, & 51, & 10 \\
 & & \times & 0; & 30 \\
\hline
 & & & 5 & 0 \\
 & & 25 & 30 & \\
 & 12 & 0 & & \\
 & 30 & & & \\
\hline
0; & 42, & 25, & 35, & 0
\end{array}$$

portanto $c = ab$. Por outro lado, interpretando c como uma aproximação para o valor da diagonal do quadrado de lado a, conforme está sugerido na Figura 3.1, temos, em virtude do Teorema de Pitágoras, $c \approx a\sqrt{2}$. Assim, relacionando $c = ab$ e $c \approx a\sqrt{2}$, vemos que b deve ser uma aproximação de $\sqrt{2}$. Confirmamos isso mediante o cálculo

$$b^2 = [(1;24,51,10)_{60}]^2 = (1;59,59,59,38,1,40)_{60} \approx 2$$

e vemos que b^2 é uma aproximação de 2. Resulta a aproximação

$$\sqrt{2} \approx (1;24,51,10)_{60} = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} \approx 1,41421296296.$$

Comparando com nosso valor $\sqrt{2} \approx 1,414213562 \pm 10^{-9}$ vemos que a aproximação calculada pelos sumérios tem erro $< 10^{-6}$. Os matemáticos europeus obtiveram essa precisão apenas no século XIII. Como os sumérios conseguiram isso? Os historiadores têm uma possível explicação, a qual apresentamos na Seção 3.6.

Os matemáticos na Antiga Grécia reconheceram $\sqrt{2}$ como um número da reta numérica. Para eles uma entidade geométrica estava determinada desde que pudesse ser construída com régua e compasso, tomados como instrumentos teóricos (portanto, perfeitos). Um número tinha existência garantida se fosse alguma medida de uma figura geométrica (comprimento, área ou volume). Sendo $\sqrt{2}$ a medida da diagonal do quadrado de lado 1, isso implicava que $\sqrt{2}$ é um número.

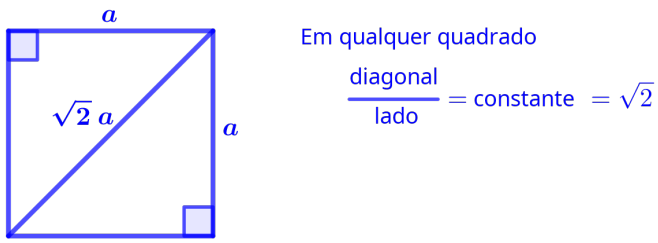


Figura 3.2 $\sqrt{2}$ como uma constante.

Na verdade, em virtude do Teorema de Pitágoras, em qualquer quadrado a razão entre a diagonal e o lado é $\sqrt{2}$. Assim $\sqrt{2}$ pode ser visto como uma constante, que a tradição consagrou com o nome de *constante de Pitágoras*. Confira ilustração na Figura 3.2.

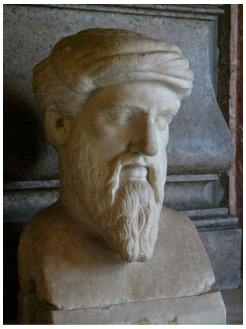


Figura 3.3. Pitágoras foi um filósofo e matemático que viveu na Grécia no 6º Século a.C. Nascido na ilha de Samos, talvez tenha sido discípulo de Tales de Mileto. Existem relatos de suas viagens ao Egito, e que teria feito ali estudos religiosos e filosóficos. Conta-se que, aos 40 anos, mudou-se para Crotona, uma colônia grega na Itália, onde fundou uma comunidade que propunha a harmonia e o ascetismo. Relatos fidedignos sobre Pitágoras e seus discípulos são poucos, mas é certo que muitos estudiosos se identificaram com suas ideias, e várias descobertas matemáticas e das ciências naturais são creditadas à assim chamada *Escola Pitagórica*. Mais detalhes sobre a foto na pág. 249.

Não precisamos do Teorema de Pitágoras para evidenciar geometricamente a existência de $\sqrt{2}$. Basta construir um quadrado com área 2. O lado desse quadrado mede $\sqrt{2}$, evidentemente.

Em *Mênon*, um dos diálogos menores de Platão, o autor coloca o sábio Sócrates dialogando com o estudante Mênon. A uma certa altura Sócrates ensina, a um menino inexperiente em Geometria, como obter um quadrado de área 2.

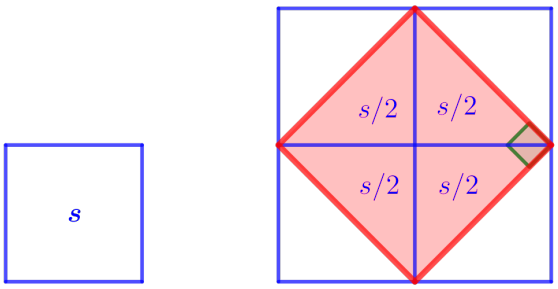


Figura 3.4 Construção do quadrado de área $2s$.

Passamos a explicar o raciocínio de Sócrates a nosso modo. Consideremos um quadrado de área s, conforme a Figura 3.4, à esquerda. Tomando quatro cópias formamos um quadrado maior, como se vê na mesma Figura, à direita. Consideremos as quatro diagonais ali desenhadas. Elas têm o mesmo comprimento e formam entre si, nos pontos em que se encontram, ângulos de 90°. Portanto elas determinam um quadrado cuja área é igual a $s/2+s/2+s/2+s/2 = 2s$. Consequentemente o quadrado cujo lado é igual à diagonal de um quadrado dado tem área igual ao dobro da área deste.

Dado um quadrado de lado 1, sua área é 1. Construindo o quadrado cujo lado é sua diagonal, obtemos um quadrado de área 2. O lado desse quadrado é $\sqrt{2}$. Fizemos isso sem usar o Teorema de Pitágoras.

Em [45], página 7, o autor esclarece que o diálogo *Mênon* de Platão é o mais antigo texto da matemática grega que sobreviveu até nossos dias, e data provavelmente de 385 a.C.

Observamos que obtivemos $\sqrt{2}$ através de construções geométricas que podem ser realizadas com régua e compasso, obedecendo às imposições de construtibilidade consideradas no antigo modelo grego. De fato, com uma régua não metrizada e um compasso, podemos traçar a perpendicular a uma reta dada por um ponto dado, ponto este na reta ou fora dela. Dessa forma construímos um quadrado de lado 1, traçamos sua diagonal e obtemos um segmento de comprimento $\sqrt{2}$ usando o Teorema de Pitágoras. Com régua e compasso podemos também usar o método descrito por Platão. Com isso vemos que $\sqrt{2}$ é um número construtível.

A diagonal de um quadrado de lado 1 pode ser transportada para uma reta numérica, e assim localizamos $\sqrt{2}$ nessa reta. Uma forma de implementar esse procedimento está descrita na Figura 3.5. Assim sendo, a princípio, $\sqrt{2}$ é um número juntamente com os outros números já conhecidos da reta numérica, a saber, os racionais (incluindo os inteiros, claro).

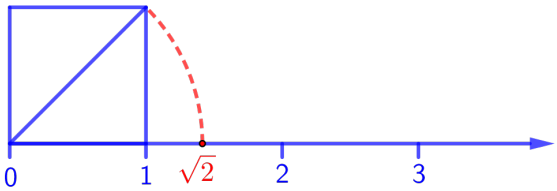


Figura 3.5 Localização de $\sqrt{2}$ na reta numérica.

Com a ideia de que $\sqrt{2}$ deve ser um número racional, o próximo passo de nossa caminhada seria encontrar inteiros a e b tais que ele se escreva na forma a/b. Ou então encontrar uma expansão decimal finita ou periódica para ele. Entretanto, uma surpresa nos espera!

3.3 Problemas

Problema 3.3.1. Verifique os seguintes detalhes sobre o estudo de $\sqrt{2}$ feito pelos sumérios. **a)** $[(1;24{,}51{,}10)_{60}]^2 = (1;59{,}59{,}59{,}38{,}1{,}40)_{60}$. **b)** A aproximação calculada pelos sumérios tem erro $< 10^{-6}$. **c)** O valor $(1;24{,}51{,}10)_{60}$, obtido pela matemática sumeriana como aproximação de $\sqrt{2}$, é a representação sexagesimal finita de um número racional. Verifique que a representação decimal de $(1;24{,}51{,}10)_{60}$ não é finita. Calcule o pré-período e o período. Explique por que motivo a representação em um sistema é finita e em outro não.

Problema 3.3.2. Verifique os detalhes da construção de $\sqrt{2}$ com régua e compasso ilustrada pela Figura 3.6. Ali temos $AB = 1$, $BC = 2$, M é o ponto médio de AC e $BD \perp AC$.

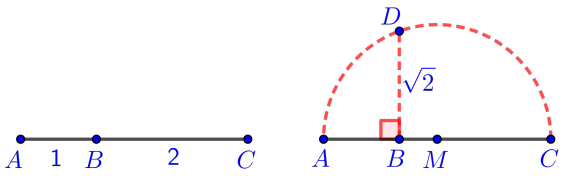


Figura 3.6 Construção de $\sqrt{2}$ com régua e compasso.

Problema 3.3.3. Mostre que, para todo inteiro positivo k, existe um segmento de reta com medida $\sqrt{k}$. Faça isto de duas maneiras diferentes: i) usando a construção da Figura 3.6; ii) usando a sugestão da Figura 3.7. Conclua que para todo inteiro positivo k, $\sqrt{k}$ é construtível com régua compasso.

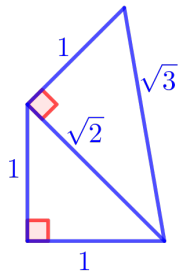


Figura 3.7 Sugestão para o Problema 3.3.3.

Problema 3.3.4. Colando dois cubos de lado 1 por duas faces, ocorrem aí segmentos de comprimento $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ e $\sqrt{6}$. Verifique isso.

Problema 3.3.5. Para quais inteiros $k \geq 2$ é possível encontrar um segmento de reta de medida $\sqrt{k}$ usando-se exclusivamente o método do diálogo *Mênon* de Platão?

Problema 3.3.6. Estude a seguinte alternativa ao raciocínio de Sócrates do texto de Platão. Dado um quadrado de área s, construa um quadrado diretamente em sua diagonal, como na Figura 3.8. Explique por que esse segundo quadrado tem área $2s$.

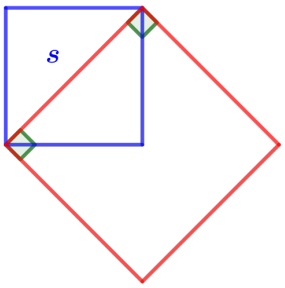


Figura 3.8 Figura para o Problema 3.3.6.

3.4 A não racionalidade de $\sqrt{2}$

Segundo [42], pág. 96 e seguintes, praticamente não sobreviveram textos dos primeiros matemáticos da Antiga Grécia. Pode-se entender de relatos posteriores e da tradição que esses estudiosos admitiam que os números racionais mediam todos os entes geométricos, e, assim, esses números preenchiam todo a semirreta positiva da reta numérica.

A descoberta da existência de números irracionais[1] é creditada à Escola Pitagórica. Talvez $\sqrt{2}$ tenha sido o primeiro a ser descoberto, mas $(\sqrt{5}-1)/2$, a razão entre o lado e a diagonal de um pentágono regular, é também um candidato. De qualquer forma, o aparato teórico usado naqueles tempos era o conceito de comensurabilidade. Veremos do que se trata no Capítulo 4, e ali apresentamos o possível argumento usado pelos pitagóricos. Indo além de $\sqrt{2}$ Teodoro de Cirene, por volta de 425 a.C., mostrou a irracionalidade dos números $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{14}$, $\sqrt{15}$ e $\sqrt{17}$. Menos de 100 anos depois Aristóteles descreveria a demonstração mais simples da não racionalidade de $\sqrt{2}$.

A propriedade de que $\sqrt{2}$ não é racional é muito comentada, não apenas na literatura matemática, mas também em tratados de Filosofia. Segundo [45], página 295, Aristóteles a cita 30 vezes em sua vasta obra filosófica.

Para informação do estudante e do futuro professor de Matemática apresentamos várias demonstrações da não racionalidade de $\sqrt{2}$, iniciando com a preferida de Aristóteles. Nas deduções feitas a seguir, ao lidar com $\sqrt{2}$, supomos que esse número pertence a um conjunto em que valem as regras usuais de manipulação algébrica.

3.4.1 Par ou ímpar

A demonstração mais conhecida da não racionalidade de $\sqrt{2}$ utiliza o fato de que todo número inteiro é ou par ou ímpar.

Teorema 3.1 (Aristóteles)**.** *$\sqrt{2}$ não é racional.*

[1] Número irracional no sentido de número não racional.

Demonstração. Procedemos por redução ao absurdo. Suponhamos que $\sqrt{2}$ seja racional. Então existem inteiros positivos a e b tais que $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$, com a/b irredutível.

Elevando $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$ ao quadrado temos $2 = \dfrac{a^2}{b^2}$, ou $2b^2 = a^2$. Vemos que a^2 é par, o que implica que a é par. Escrevemos $a = 2q$. Introduzindo esta informação em $2b^2 = a^2$ temos $2b^2 = (2q)^2$, ou $2b^2 = 4q^2$. Simplificando vem $b^2 = 2q^2$. Portanto b também é par, e chegamos a uma contradição, pois a/b é irredutível. Concluímos que $\sqrt{2}$ não é racional. □

3.4.2 Um método de descida

O estudante certamente apreciará a seguinte demonstração da não racionalidade de $\sqrt{2}$, que não faz uso de nenhum resultado típico da Teoria dos Números. Usa apenas a desigualdade $1 < \sqrt{2} < 2$, o que implica, em particular, que $\sqrt{2}$ não é inteiro. Confira o Problema 3.5.2.

Procedemos novamente por redução ao absurdo. Suponhamos que $\sqrt{2}$ seja racional. Então existe um inteiro positivo a_0 tal que $a_0\sqrt{2}$ é inteiro. Consideremos o inteiro $a_1 = a_0(\sqrt{2} - 1)$. Como $1 < \sqrt{2}$, a_1 é um inteiro positivo. Temos ainda $a_1\sqrt{2} = a_0(\sqrt{2} - 1)\sqrt{2} = 2a_0 - a_0\sqrt{2}$, que também é um número inteiro. Observe que

$$\sqrt{2} < 2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2} - 1 < 1 \quad \Rightarrow \quad a_0(\sqrt{2} - 1) < a_0 \quad \Rightarrow \quad a_1 < a_0.$$

Repetindo o argumento, encontramos um terceiro número inteiro positivo a_2 tal que $a_2\sqrt{2}$ é inteiro e $1 \leq a_2 < a_1 < a_0$. Prosseguindo, depois de um número finito de passos, encontramos um inteiro $a_n = 1$ com $a_n\sqrt{2} = \sqrt{2}$ inteiro. Chegamos a uma contradição, pois $1 < \sqrt{2} < 2$. Portanto, $\sqrt{2}$ é um número não racional.

Um argumento do tipo utilizado acima chama-se *método de descida*.

Poderíamos ter começado a redação dessa demonstração de outra forma, supondo que a_0 é o menor inteiro positivo tal que $a_0\sqrt{2}$ é inteiro. Ao encontrar $a_1 < a_0$ tal que $a_1\sqrt{2}$ é inteiro, chegaríamos igualmente a uma contradição.

3.4.3 Um método geométrico

Vejamos um método geométrico para a demonstração da não racionalidade de $\sqrt{2}$. Procedemos por redução ao absurdo. Suponhamos que $\sqrt{2}$ seja racional. Seja q o menor inteiro positivo tal que $q\sqrt{2}$ é inteiro. Consideremos o triângulo retângulo isósceles ABC com catetos de medida q. Segundo o Teorema de Pitágoras, a hipotenusa desse triângulo tem medida $q\sqrt{2}$.

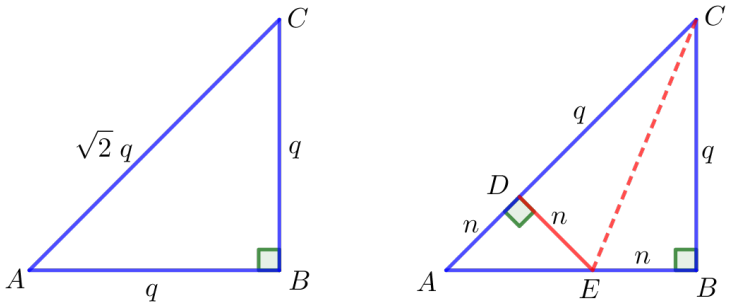


Figura 3.9 Demonstração geométrica de que $\sqrt{2}$ não é racional.

Construímos um triângulo retângulo isósceles menor. Marcamos no segmento AC um ponto D tal que $CD = q$. A medida de AD é o inteiro positivo $n = q\sqrt{2} - q = q(\sqrt{2} - 1)$. Temos $1 < n < q$ e $n < (\sqrt{2}/2)q = AC/2$.

Segue da última desigualdade que a reta perpendicular a AC passando pelo ponto D intersecta AB no ponto E. Como ABC é isósceles com base AC, o ângulo $\angle DAE$ mede 45^o. Como ADE é retângulo com hipotenusa AE, o ângulo $\angle AED$ também mede 45^o. Portanto ADE é um triângulo retângulo isósceles com base AE e catetos medindo n. Observemos ainda que CED e CEB são congruentes, portanto $DE \cong EB$. Assim $AE = AB - EB$ é inteiro. Mas $AE = n\sqrt{2}$ com $n < q$, o que contraria a hipótese de que q é o menor inteiro positivo com a propriedade de que $q\sqrt{2}$ é inteiro. Concluímos que $\sqrt{2}$ não é racional.

3.4.4 Outro método de descida

Esta é uma variante da demonstração 3.4.2. Procedemos novamente por redução ao absurdo. Suponhamos que $\sqrt{2}$ seja racional. Seja $\sqrt{2} = a/b$. Temos $a = b\sqrt{2}$. Como $1 < \sqrt{2} < 2$, isso implica $b < a$ e $a < 2b$. Em particular, $0 < a - b < b$.

Façamos agora os seguintes cálculos:

$$2b - a = \sqrt{2}(\sqrt{2}b) - a = \sqrt{2}a - a = \sqrt{2}a - \sqrt{2}b = \sqrt{2}(a - b).$$

Escrevendo $a_1 = 2b - a$ e $b_1 = a - b$, provamos que $\sqrt{2} = a_1/b_1$, com $1 \leq b_1 < b$. Repetindo o procedimento, depois de um número finito de passos, encontramos inteiros a_j e $b_j = 1$ tais que $\sqrt{2} = a_j/b_j = a_j$. Chegamos a uma contradição, pois $\sqrt{2}$ não é inteiro. Concluímos que $\sqrt{2}$ não é racional.

3.4.5 Outro método geométrico

Esta é uma versão geométrica próxima à ideia da demonstração 3.4.4. Confira [89] , *slides* 49 a 52. Procedemos igualmente por redução ao absurdo. Suponhamos que $\sqrt{2}$ seja racional. Seja $\sqrt{2} = a/b$, sendo a e b inteiros positivos, com a o menor possível. Novamente temos $a = b\sqrt{2}$, $b < a$ e $a < 2b$.

Consideremos um quadrado de lado a e, em vértices opostos desse quadrado, disponhamos dois quadrados de lado b, conforme a Figura 3.10.

Como $a < 2b$, a interseção dos dois quadrados de lado b formam um quadrado menor de lado c. Temos $c = 2b - a < 2a - a$, ou $c < a$.

Comparando as áreas temos $a^2 = 2b^2 + 2(a-b)^2 - c^2$. De $a = b\sqrt{2}$ vem $a^2 = 2b^2$. Substituindo na expressão anterior segue $c^2 = 2(a - b)^2$. Portanto $\sqrt{2} = c/(a - b)$. Da minimalidade de a obtemos uma contradição. Concluímos que $\sqrt{2}$ não é racional.

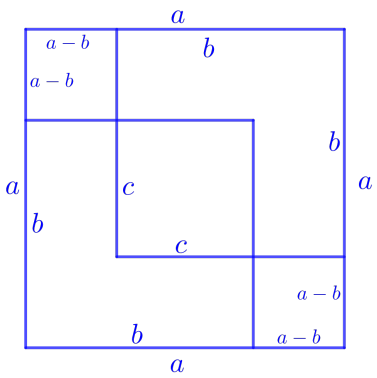


Figura 3.10 Outra demonstração geométrica de que $\sqrt{2}$ não é racional.

3.4.6 Um argumento curioso

Uma fração de inteiros a/b será chamada *honesta* quando $a/b \notin \mathbb{Z}$. Observe que se a/b é honesta então a^2/b^2 também é honesta.

Teorema 3.2. *$\sqrt{2}$ não é racional.*

Demonstração. Suponhamos $\sqrt{2}$ racional. Seja $\sqrt{2} = a/b$, sendo a e $b \neq 0$ números inteiros. Como $1 < \sqrt{2} < 2$, segue que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$, e a fração a/b é honesta. Daí a fração a^2/b^2 também é honesta. Mas isso é uma contradição, pois $a^2/b^2 = 2 \in \mathbb{Z}$. Portanto $\sqrt{2}$ não é racional. □

Observações. Este argumento está proposto em [126]. Segundo o articulista esse é um bom argumento para justificar a não racionalidade de $\sqrt{2}$ para estudantes que podem aceitar como plausível a implicação

$$\frac{a}{b} \quad \text{honesta} \quad \Rightarrow \quad \frac{a^2}{b^2} \quad \text{honesta.} \tag{3.1}$$

Dessa forma o professor evita entrar em detalhes sobre o Teorema Fundamental da Aritmética 1.14, cujo uso fica implícito em (3.1). O articulista observa que é válido o uso de argumentos plausíveis no ensino da Matemática desde que: *(i)* a demonstração omitida não tenha papel central no assunto; *(ii)* os estudantes tenham atividades prévias que os levam a acreditar no argumento; *(iii)* o professor esteja preparado para suprir o que estiver faltando.

3.5 Problemas

Nesta lista de problemas, ao lidar com $\sqrt{k}$, k inteiro positivo, suponha que esses números estejam em um conjunto em que valem as regras usuais de manipulação algébrica.

Problema 3.5.1. Imagine um argumento para justificar a afirmação: é único o número positivo x tal que $x^2 = 2$.

Problema 3.5.2. Usando apenas desigualdades e que $\sqrt{2}$ é o número positivo x tal que $x^2 = 2$, demonstre que $1 < \sqrt{2} < 2$.

Problema 3.5.3. Demonstre que $\sqrt{3}$ não é racional usando um argumento análogo ao argumento "par ou ímpar" de Aristóteles.

Problema 3.5.4. a) O estudante há que concordar que $\sqrt{4}$ é racional. Portanto um argumento tipo "par ou ímpar" desenvolvido em 3.4.1 deve falhar nesse caso. Descubra em que passo da argumentação ocorre a falha. **b)** Investigue para que números inteiros positivos k se pode demonstrar que $\sqrt{k}$ não é racional usando exatamente o argumento "par ou ímpar".

Problema 3.5.5. Demonstre que $\log_2 3$ não é racional usando um argumento do tipo "par ou ímpar". Use esse resultado para concluir que existem infinitos números não racionais além dos já conhecidos $\sqrt{k}$, com k inteiro positivo.

Problema 3.5.6. Demonstre que $\log(2^m 5^n)$ é irracional quaisquer que sejam os inteiros não negativos diferentes m e n. log é a função logarítmica de base 10. O que ocorre quando $m = n$?

Problema 3.5.7. Demonstre que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ não é racional.

Problema 3.5.8. Demonstre que $\sqrt{2 + \sqrt{37}}$ não é racional.

Problema 3.5.9. a) Demonstre que $\sqrt{5}$ não é racional usando um argumento de descida. **b)** Foi citado no texto que a razão entre o lado e a diagonal do pentágono regular é $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. O inverso desse número é $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, a chamada *razão áurea*. Qual é o seu método preferido para demonstrar que φ e φ^{-1} são irracionais?

Problema 3.5.10. Usando o método da descida demonstre que $\sqrt{k}$ é inteiro ou não racional, para todo inteiro positivo k.

Problema 3.5.11. Sejam a e b inteiros positivos tais que $\sqrt{ab}$ é irracional. Demonstre que $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ é irracional.

Problema 3.5.12. Demonstre que $\sqrt[n]{2}$ não é racional para todo inteiro $n \geq 2$ usando o argumento "par ou ímpar".

Problema 3.5.13. Explique por que $\sqrt{p}$ não é racional para todo primo p.

Problema 3.5.14. Verifique que o argumento curioso de 3.4.6 pode também ser utilizado para provar a seguinte generalização: se k é um número inteiro positivo então $\sqrt{k}$ é inteiro ou irracional.

3.6 Aproximações do valor numérico de $\sqrt{2}$

O conjunto dos números reais é estudado no Capítulo 4, mas adiantamos agora algumas ideias da Análise Numérica com o estudo de algoritmos para o cálculo de aproximações do valor de $\sqrt{2}$. Esse número é usado como pivô, mas são métodos gerais que se aplicam em muitas outras situações. Utilizamos propriedades de manipulação algébrica já conhecidas do estudante.

Todo estudante bem informado em Matemática sabe que uma aproximação do valor de $\sqrt{2}$ no sistema decimal é $\sqrt{2} \approx 1{,}4142$. Com a facilidade oferecida pelas calculadoras eletrônicas obtemos sem dificuldade o valor numérico de $\sqrt{2}$ com mais casas decimais exatas, por exemplo $\sqrt{2} \approx 1{,}41421356237$.

Já sabemos também do Teorema 2.5 que a expansão decimal de $\sqrt{2}$ não segue nenhum padrão regular de repetição. Mais exatamente, não é finita e nem periódica. Isso se deve a que $\sqrt{2}$ não é racional.

Usando um computador e um algoritmo adequado podemos calcular aproximações de $\sqrt{2}$ com quantas casas desejarmos. O estudo de métodos para o cálculo do valor numérico de $\sqrt{2}$ existe desde o tempo da antiga civilização suméria. Vejamos alguns métodos, começando com os mais simples.

3.6.1 Um método de tentativas

Observamos inicialmente que se r é um número tal que $r^2 < 2$, então $r < \sqrt{2}$. De fato, suponhamos $r \geq \sqrt{2}$. Multiplicando essa inequação por r e por $\sqrt{2}$ separadamente temos $r^2 \geq r\sqrt{2}$ e $r\sqrt{2} \geq \sqrt{2}\sqrt{2} = 2$. Portanto $r^2 \geq r\sqrt{2} \geq 2$, o que é uma contradição com a hipótese de que $r^2 < 2$. Assim $r^2 < 2$ implica $r < \sqrt{2}$. De forma análoga se verifica que se $r > 0$ é um número tal que $2 < r^2$, então $\sqrt{2} < r$. Em resumo,

$$r_1 > 0, r_2 > 0 \text{ e } r_1^2 < 2 < r_2^2 \Rightarrow r_1 < \sqrt{2} < r_2.$$

Vejamos em que consiste o *método das tentativas* para o cálculo aproximado do valor de $\sqrt{2}$. Notemos que $1^2 < 2 < 2^2$, portanto

$$1 < \sqrt{2} < 2,$$

o que nos dá uma primeira aproximação de $\sqrt{2}$.

Calculando $1{,}1^2 = 1,21$ e $1{,}2^2 = 1{,}44$ e $1{,}3^2 = 1,69$ e $1{,}4^2 = 1{,}96$ e $1{,}5^2 = 2,25$ vemos que $1{,}4^2 < 2 < 1{,}5^2$ do que segue

$$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5.$$

Calculando $1{,}41^2 = 1,9881$ e $1{,}42^2 = 2,0164$ vemos que $1{,}41^2 < 2 < 1{,}42^2$ do que segue

$$1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42.$$

Calculando $1{,}411^2 = 1{,}990921$ e $1{,}412^2 = 1{,}993744$ e $1{,}413^2 = 1{,}996569$ e $1{,}414^2 = 1{,}999396$ e $1{,}415^2 = 2{,}002225$, vemos que $1{,}414^2 < 2 < 1{,}415^2$ do que segue

$$1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415.$$

E assim sucessivamente, podemos obter quantas casas desejarmos, bastando para isso ter muita paciência.

Considerando que $1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$ podemos adotar, para fins escolares, um dos valores $\sqrt{2} \approx 1{,}414$ ou $\sqrt{2} \approx 1{,}415$. O primeiro valor é uma *aproximação por falta*, e o segundo é uma *aproximação por excesso*.

Ao tomarmos um valor x como uma aproximação de $\sqrt{2}$ o *erro da aproximação* é $E = \sqrt{2} - x$. Como não temos o valor exato de $\sqrt{2}$ nunca sabemos o valor exato de E, mas podemos cotá-lo. Um número ε é uma *cota* de E se $|E| < \varepsilon$. Quanto menor ε, melhor é a aproximação.

Por exemplo, ao tomarmos $\sqrt{2} \approx 1{,}414$ o erro é $E = \sqrt{2} - 1{,}414$ e uma cota para E é $\varepsilon = 10^{-3}$ de acordo com o seguinte cálculo:

$$|E| = \sqrt{2} - 1{,}414 < 1{,}415 - 1{,}414 = 0{,}001 = 10^{-3}.$$

3.6.2 Fazendo uma média

Se $r > 0$ é um número, uma ideia para calcular $\sqrt{r}$ é decompor r em um produto $r = xy$ com $x > 0$ e $y > 0$ e x próximo de y, e tomar a média $(x + y)/2$ como uma aproximação de $\sqrt{r}$. Por exemplo, para calcular $\sqrt{15}$ tomamos $15 = xy$ com $x = 4$ e $y = 15/4$. Como $y = 3{,}75$ vemos que x e y são valores próximos um do outro. Então

$$\sqrt{15} \approx \frac{x+y}{2} = \frac{1}{2}\left[4 + \frac{15}{4}\right] = \frac{1}{2}\,\frac{16+15}{4} = \frac{31}{8} = 3{,}875\,.$$

Para referência $\sqrt{15} \approx 3{,}872983346$ é um valor exato até a décima casa, calculado com um aplicativo computacional algébrico. Vemos que obtivemos uma boa aproximação para $\sqrt{15}$.

Por que esse método funciona? Observe o seguinte:

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - r = \frac{x^2 + 2xy + y^2}{4} - xy = \frac{x^2 - 2xy + y^2}{4} = \frac{1}{4}(x-y)^2.$$

Quanto mais x estiver próximo de y mais $x-y$ estará próximo de zero. Assim tanto mais $((x+y)/2)^2$ estará próximo de r e consequentemente $(x+y)/2$ de $\sqrt{r}$. Outra consequência desses cálculos é que $(x+y)/2$ é sempre uma aproximação por excesso.

Voltando ao assunto que mais nos interessa, isto é, o cálculo de aproximações do valor numérico de $\sqrt{2}$, vejamos um exemplo de aplicação desta técnica. Escrevamos

$$2 = \frac{4}{3}\,\frac{3}{2}\,.$$

Assim $2 = xy$, com $x = 4/3 \approx 1{,}33$ e $y = 3/2 = 1{,}5$. Portanto $x \approx y$. Aplicando a média temos

$$\sqrt{2} \approx \frac{1}{2}\left[\frac{4}{3}+\frac{3}{2}\right] = \frac{1}{2}\,\frac{8+9}{6} = \frac{17}{12} \approx 1{,}417$$

uma aproximação de $\sqrt{2}$ com erro $< 10^{-2}$. Podemos repetir o procedimento usando a aproximação $17/12$. Tomando $x = 17/12$ e $y = 24/17$, a média é $577/408 \approx 1{,}414215$, uma aproximação de $\sqrt{2}$ com erro $< 10^{-5}$.

3.6.3 Calculando raízes quadradas elevando ao quadrado

Vemos em [51] um interessante método para obter aproximações de $\sqrt{r}$. Apliquemos o método para $\sqrt{2}$. Começamos com qualquer aproximação positiva de $\sqrt{2}$. Como $1 < \sqrt{2} < 2$, podemos tomar $a_1 = 1$ como uma primeira aproximação.

Notemos que

$$\sqrt{2} \approx 1 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2}-1 \approx 0 \quad \Rightarrow \quad (\sqrt{2}-1)^2 \approx 0$$

$$\Rightarrow \quad 2-2\sqrt{2}+1 \approx 0 \quad \Rightarrow \quad 3-2\sqrt{2} \approx 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2} \approx \frac{3}{2}\,.$$

Obtivemos assim uma segunda aproximação $a_2 = 3/2$, melhor do que a_1. Prosseguindo com a mesma metodologia, temos

$$\sqrt{2} \approx \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2}-\frac{3}{2} \approx 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\sqrt{2}-\frac{3}{2}\right)^2 \approx 0$$

$$\Rightarrow \quad 2-3\sqrt{2}+\frac{9}{4} \approx 0 \quad \Rightarrow \quad 8-12\sqrt{2}+9 \approx 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2} \approx \frac{17}{12}\,.$$

A terceira aproximação $a_3 = 17/12$ é melhor do que a anterior. Será útil obtermos a_4.

$$\sqrt{2} \approx \frac{17}{12} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2}-\frac{17}{12} \approx 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\sqrt{2}-\frac{17}{12}\right)^2 \approx 0$$

$$\Rightarrow \quad 2-2\frac{17}{12}\sqrt{2}+\frac{17^2}{12^2} \approx 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2} \approx \frac{2\cdot 12^2+17^2}{2\cdot 12\cdot 17} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2} \approx \frac{577}{408}\,.$$

Portanto $a_4 = 577/408$. Para efeito de comparação fazemos um resumo:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_2 &= \frac{3}{2} = 1{,}5 \\ a_3 &= \frac{17}{12} \approx 1{,}41666666667 \\ a_4 &= \frac{577}{408} \approx 1{,}414215686 \end{aligned}$$

O valor de $\sqrt{2}$ com 16 casas exatas, calculado com um aplicativo computacional algébrico, é $\sqrt{2} \approx 1{,}414213562373095$. Comparando esse valor com os de a_3 e a_4, observamos uma tendência de, a cada iteração, dobrar o número de casas exatas. O estudante pode calcular $a_5 = 665857/470832$ e verificar essa tendência.

Por que o método funciona? Basicamente é devido ao seguinte: se r é um número tal que $0 < r < 1$, então $r^2 < r$. Assim se a é uma aproximação de $\sqrt{2}$ tal que $|\sqrt{2} - a| < 1$, temos $(\sqrt{2} - a)^2 < |\sqrt{2} - a|$, e podemos obter uma aproximação melhor do que a.

Os seguintes cálculos podem aprofundar nossa compreensão sobre o que está ocorrendo. Seja $a > 0$ uma aproximação de $\sqrt{2}$ tal que $|\sqrt{2} - a| < 1$. Temos

$$\begin{aligned} & 0 < (\sqrt{2} - a)^2 < |\sqrt{2} - a| \\ \Rightarrow \quad & 0 < 2 - 2a\sqrt{2} + a^2 < |\sqrt{2} - a| \\ \Rightarrow \quad & 0 < 2a\left[\frac{1}{a} - \sqrt{2} + \frac{a}{2}\right] < |\sqrt{2} - a| \\ \Rightarrow \quad & 0 < \frac{2 + a^2}{2a} - \sqrt{2} < \frac{1}{2a}|\sqrt{2} - a| \end{aligned}$$

Vemos que, se $a \geq 1$, a aproximação $(2 + a^2)/2a$ é melhor do que a, dividindo o erro pelo menos pela metade.

Nossos cálculos também fornecem uma relação de recorrência que permite definir a sequência a_n de aproximações de $\sqrt{2}$. O estudante também poderá se convencer de que esse método funciona para o cálculo de qualquer $\sqrt{r}$, com $r > 1$. Não fazemos mais detalhes pois esse método é equivalente ao que segue.

3.6.4 Um método muito antigo

Em [88], páginas 42 e 43, o autor sugere que os sumérios utilizavam o método da média, apresentado em 3.6.2, para calcular sua famosa aproximação de $\sqrt{2}$, que estudamos no início deste Capítulo. A seguir retomamos o método da média e o elaboramos de uma forma mais detalhada para o cálculo de $\sqrt{r}$ para todo número positivo r.

Seja r um número positivo. Para calcular $\sqrt{r}$ escrevemos $r = ab$, sendo a e b números positivos. Notemos que $b = r/a$, e que

$$a < \sqrt{r} \quad \Longleftrightarrow \quad 1 < \frac{\sqrt{r}}{a} \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{r} < \frac{r}{a} \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{r} < b \tag{3.2}$$

e, como $a = r/b$, temos a implicação simétrica, isto é,

$$b < \sqrt{r} \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{r} < a.$$

Portanto, colocando $\sqrt{r}$, a e b em uma reta numérica, vemos que a e b estão em lados opostos em relação a $\sqrt{r}$. Isso nos leva a ter esperança de que a média $c = (a + b)/2$ é uma melhor aproximação de $\sqrt{r}$ do que a ou b.



Figura 3.11. Primeiro passo do método da média

A situação delineada na Figura 3.11 sempre ocorre, de acordo com o

Lema 3.3. *Seja $r > 0$, e sejam $a > 0$ e $b > 0$ tais que $r = ab$. Denotamos $c = (a+b)/2$. Valem as seguintes propriedades:*
i) Se $a = \sqrt{r}$ (ou se $b = \sqrt{r}$) então $c = \sqrt{r}$;
ii) Se $a < b$ então $a < \sqrt{r} < c < b$;
iii) Se $a < b$ então $0 < c - \sqrt{r} < \frac{1}{2}\big(b - \sqrt{r}\big)$.

Demonstração. i) é claro. Vejamos ii). De $a < b$ temos $a^2 < ab = r$, portanto $a < \sqrt{r}$. Usando 3.2 temos $a < \sqrt{r} < b$. Ainda

$$c = \frac{b+a}{2} = \frac{b + \dfrac{r}{b}}{2} = \frac{1}{2}\left(b + \frac{r}{b}\right) = \frac{b^2 + r}{2b}\,.$$

Portanto

$$c - \sqrt{r} = \frac{b^2 + r}{2b} - \sqrt{r} = \frac{b^2 + r - 2b\sqrt{r}}{2b} = \frac{(b - \sqrt{r})^2}{2b} > 0,$$

do que segue $\sqrt{r} < c$. Ainda de $a < b$ temos $c = (a+b)/2 < (b+b)/2 = b$, ou $c < b$. Isto completa a demonstração de ii).

Vejamos agora iii). Como $a < b$ temos $a < \sqrt{r} < c < b$. De acordo com o que foi visto acima temos

$$0 < c - \sqrt{r} = \frac{\big(b - \sqrt{r}\big)^2}{2b} = \frac{1}{2}\,\frac{b - \sqrt{r}}{b}\big(b - \sqrt{r}\big).$$

Mas

$$0 < \sqrt{r} \quad \Rightarrow \quad b < \sqrt{r} + b \quad \Rightarrow \quad b - \sqrt{r} < b \quad \Rightarrow \quad \frac{b - \sqrt{r}}{b} < 1.$$

Portanto

$$0 < c - \sqrt{r} < \frac{1}{2}\,\big(b - \sqrt{r}\big).$$

Isso termina a demonstração do Lema. □

Tomando repetidamente a média das duas últimas aproximações, obtemos uma sequência de números que convergem para $\sqrt{r}$, de acordo com o

Teorema 3.4. *Seja $r > 0$. A sequência $(a_n)_{n\geq 0}$ definida por*

$$\begin{cases} a_0 > 0; \\ a_n = \dfrac{1}{2}\left(a_{n-1} + \dfrac{r}{a_{n-1}}\right), \quad n \geq 1 \end{cases}$$

converge para $\sqrt{r}$.

Observação. Estudaremos no Capítulo 5 o conceito de convergência de sequências numéricas. Dessa forma o estudante que não conhece esse conceito pode adiar o estudo do Teorema 3.4. Mas se quiser pode acompanhar a demonstração abaixo sem nenhum problema, pois não será feito nada de misterioso.

Demonstração. Notemos que a_1 é a média aritmética de a_0 e de r/a_0, e que $a_0(r/a_0) = r$. Notemos ainda que a_2 é a média aritmética de a_1 e de r/a_1, e que $a_1(r/a_1) = r$, e assim por diante. Estamos na posição de aplicar o Lema 3.3 para cada $n \geq 0$, com $a = a_n$ e $b = r/a_n$ ou vice-versa, e $c = a_{n+1}$.

Se $a_0 = \sqrt{r}$, temos $a_1 = \sqrt{r}$, em seguida temos $a_2 = \sqrt{r}$, e assim sucessivamente, vale que $a_n = \sqrt{r}$ para todo $n \geq 0$. Portanto, nesse caso a sequência $(a_n)_{n\geq 0}$ é constante $= \sqrt{r}$.

Se $a_0 \neq \sqrt{r}$, examinamos os casos $a_0 < \sqrt{r}$ e $a_0 > \sqrt{r}$. Suponhamos primeiro $a_0 < \sqrt{r}$. Aplicando 3.2 com $a = a_0$ e $b = r/a_0$ temos $\sqrt{r} < b$, portanto $a < b$. Pela parte ii) do Lema 3.3 vem $\sqrt{r} < a_1$. Aplicando agora 3.2 com $a = r/a_1$ e $b = a_1$, temos $\sqrt{r} < a_1 \Rightarrow a < \sqrt{r} \Rightarrow a < b$. Novamente da parte ii) do Lema 3.3 segue $\sqrt{r} < a_2$. Aplicando a parte iii) do Lema 3.3 vem $0 < a_2 - \sqrt{r} < \frac{1}{2}\left(a_1 - \sqrt{r}\right)$.

Repetindo o argumento para $a = r/a_2$ e $b = a_2$ segue que

$$\sqrt{r} < a_3 \quad \text{e} \quad 0 < a_3 - \sqrt{r} < \frac{1}{2}\left(a_2 - \sqrt{r}\right) < \frac{1}{2^2}\left(a_1 - \sqrt{r}\right).$$

Procedendo indutivamente temos $\sqrt{r} < a_n$ para todo $n \geq 1$ e

$$0 < a_n - \sqrt{r} < \frac{1}{2^{n-1}}\left(a_1 - \sqrt{r}\right) \quad \text{para todo } n \geq 2. \tag{3.3}$$

Por outro lado, se $\sqrt{r} < a_0$, procedemos da mesma forma e obtemos novamente 3.3.

Como o fator $\dfrac{1}{2^{n-1}}$ tende a zero quando $n \to \infty$ e o valor $a_1 - \sqrt{r}$ está fixo, segue de 3.3 que $a_n - \sqrt{r}$ tende a zero. Isto significa que a_n converge para $\sqrt{r}$, conforme queríamos demonstrar. □

Aplicando a fórmula do Teorema 3.4 para calcular aproximações de $\sqrt{2}$ com o valor inicial $a_0 = 2$ obtemos

$$a_0 = 2 \quad a_1 = \frac{3}{2} \quad a_2 = \frac{17}{12} \quad a_3 = \frac{577}{408} \quad a_4 = \frac{665857}{470832}$$

$$a_5 = \frac{886731088897}{627013566048} \quad a_6 = \frac{1572584048032918633353217}{1111984844349868137938112}$$

$$a_7 = \frac{4946041176255201878775086487573351061418968498177}{3497379255757941172020851852070562919437964212608}$$

Podemos utilizar um aplicativo computacional algébrico para calcular a expansão decimal de cada uma dessas frações e ter uma ideia da velocidade com que elas se aproximam de $\sqrt{2}$. Calculamos a expansão decimal de cada fração acima com precisão de 60 casas:
$a_0 = 2$;
$a_1 = 1{,}5$;
$a_2 \approx 1{,}416666666666666666666666666666666666666666666666666666666666667$;
$a_3 \approx 1{,}414215686274509803921568627450980392156862745098039215686628$;
$a_4 \approx 1{,}414213562374689910626295578890134910116559622115744044584 90$;
$a_5 \approx 1{,}414213562373095048801689623502530243614981925776197428498 29$;
$a_6 \approx 1{,}414213562373095048801688724209698078569671875377234001561 01$;
$a_7 \approx 1{,}414213562373095048801688724209698078569671875376948073176 68$.

Para comparar calculamos $\sqrt{2}$ com 62 casas exatas usando um aplicativo computacional algébrico:
$\sqrt{2} \approx 1{,}414213562373095048801688724209698078569671875376948073176 67797$.

Inspecionando esses valores vemos que as casas exatas de a_n, $1 \leq n \leq 6$, são:

$a_1 = 1{,}5$ (1 casa exata);
$a_2 \approx 1{,}41$ (3 casas exatas);
$a_3 \approx 1{,}41421$ (6 casas exatas);
$a_4 \approx 1{,}41421356237$ (12 casas exatas);
$a_5 \approx 1{,}4142135623730950488016 8$ (24 casas exatas);

$a_6 \approx 1{,}414213562373095048801688724209698078569671875 37$ (48 casas exatas).

Os cálculos não permitem decidir qual o número de casas exatas de a_7, que é certamente maior ou igual a 60. Observamos que a cada iteração do algoritmo conseguimos o dobro de casas exatas em relação à aproximação anterior. De fato, vemos em (3.3) que o erro de a_n é a metade do erro de a_{n-1}.

3.7 $\sqrt{2}$ e frações contínuas

Calculamos novamente aproximações de $\sqrt{2}$ por números racionais, mas de uma forma diferente da que estivemos fazendo na seção anterior. Sabendo que $1 < \sqrt{2} < 2$, tomamos $c_0 = 1$ como uma primeira aproximação de $\sqrt{2}$. Para calcular uma segunda aproximação c_1, melhor do que c_0, escrevamos $\sqrt{2} = 1 + \varepsilon$, sendo $0 < \varepsilon < 1$. A ideia diferente aqui é escrever ε na forma $\varepsilon = 1/\alpha$. Portanto

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{\alpha}\,.$$

Manipulando a relação acima vemos que $\alpha = 1 + \sqrt{2}$. Portanto

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}}\,. \tag{3.4}$$

Lembrando que $\sqrt{2} \approx c_0 = 1$ temos

$$\sqrt{2} \approx 1 + \frac{1}{1+c_0} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}\,.$$

e assim obtemos a segunda aproximação $c_1 = 3/2$.

Retomando (3.4), substituímos a $\sqrt{2}$ do denominador por $\sqrt{2} = 1 + (1/\alpha)$. Assim

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{1+1+\dfrac{1}{\alpha}} = 1 + \frac{1}{2+\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}}\,. \tag{3.5}$$

Como $\sqrt{2} \approx c_0 = 1$, substituímos por esse valor a $\sqrt{2}$ do último denominador de (3.5) e temos

$$\sqrt{2} \approx 1 + \frac{1}{2+\dfrac{1}{1+1}} = 1 + \frac{1}{2+\dfrac{1}{2}} = \frac{7}{5}\,,$$

e assim obtemos a terceira aproximação $c_2 = 7/5$.

Retomando (3.5), substituímos novamente a $\sqrt{2}$ do denominador por $\sqrt{2} = 1 + (1/\alpha)$. Portanto

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2+\dfrac{1}{1+1+\dfrac{1}{\alpha}}} = 1 + \frac{1}{2+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}}}\,. \tag{3.6}$$

Novamente substituímos a $\sqrt{2}$ do último denominador de (3.6) por 1 e temos

$$\sqrt{2} \approx 1 + \frac{1}{2+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2}}} = \frac{17}{12}\,,$$

e assim obtemos a quarta aproximação $c_3 = 17/12$.

Em resumo, obtivemos as seguintes aproximações de $\sqrt{2}$:

$$c_0 = 1; \qquad c_1 = 1 + \frac{1}{2}; \qquad c_2 = 1 + \frac{1}{2 + \dfrac{1}{2}}; \qquad c_3 = 1 + \frac{1}{2 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{2}}}.$$

Elas nos fornecem, respectivamente, os valores

$$c_0 = 1; \qquad c_1 = \frac{3}{2} = 1{,}5; \qquad c_2 = \frac{7}{5} = 1{,}4; \qquad c_3 = \frac{17}{12} \approx 1{,}41666.$$

Fica claro que podemos continuar com esse procedimento indefinidamente e obter uma sequência $(c_n)_{n\geq 0}$ que, ao que tudo indica, converge para $\sqrt{2}$. Observamos que c_n depende recorrentemente de c_{n-1}, pois este reaparece no primeiro denominador daquele. Por exemplo,

$$c_3 = 1 + \frac{1}{2 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{2}}} = 1 + \frac{1}{1 + \left[1 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{2}}\right]} = 1 + \frac{1}{1 + c_2}.$$

Dessa forma, em geral temos

$$c_n = 1 + \frac{1}{1 + c_{n-1}} \quad \text{para todo } n \geq 1. \tag{3.7}$$

Usamos agora algumas notações e propriedades que veremos no Capítulo 5. Suponhamos que já temos demonstrado que existe $\lim_{n\to\infty} c_n$. Chamamos esse limite de L. Como $c_n > 0$ para todo $n \geq 0$, podemos admitir que $L \geq 0$. É válido também $L = \lim_{n\to\infty} c_{n-1}$, pois as sequências são as mesmas. Usando (3.7) e algumas propriedades de limites temos

$$L = 1 + \frac{1}{1 + L}.$$

Resolvendo essa equação em L obtemos $L = \sqrt{2}$. Portanto $\lim_{n\to\infty} c_n = \sqrt{2}$.

Relembrando a notação de fração contínua introduzida na Seção 2.5, página 32, temos

$$c_0 = [1], \quad c_1 = [1,2], \quad c_2 = [1,2,2], \quad c_3 = [1,2,2,2],$$

em geral

$$c_n = [1,2,2,\ldots,2] \quad \text{com } n \ 2's.$$

Com essas notações podemos escrever

$$\sqrt{2} = [1,2,2,2\ldots] = [1,\overline{2}]$$

e

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{}{\ddots}}}$$

Enfim, vimos, sem muitas pretensões, como obter a representação de $\sqrt{2}$ como fração contínua simples, e como os convergentes são suas aproximações.

3.8 Problemas

Problema 3.8.1. Demonstre que $x^3 - 3x - 1 = 0$ não tem solução racional. Portanto, pelo menos uma das soluções é irracional.

Problema 3.8.2. Iniciando com a aproximação $a_1 = 1$ de $\sqrt{2}$, calcule a aproximação $a_2 = (2 + a_1^2)/2a_1$. Aplique novamente o mesmo processo a a_2 e encontre as aproximações seguintes a_3, a_4 e a_5. Encontre uma cota para o erro de cada uma dessas aproximações.

Problema 3.8.3. Calcule aproximações de $\sqrt{10}$ usando o método iterativo 3.6.3. Como $3 < \sqrt{10} < 4$, uma sugestão é iniciar com $a_1 = 3$.

Problema 3.8.4. Se a e r são inteiros, explique por que $\sqrt{a^2 + r} \approx a + \frac{r}{2a}$ é uma aproximação.

Problema 3.8.5. Dado um número natural $n > 0$, seja m o inteiro positivo tal que $m \leq \sqrt{n} < m + 1$, isto é, $m = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$. Escrevamos $n = m^2 + \varepsilon$. Os matemáticos árabes da Idade Média usavam os valores $m + \varepsilon/(2m)$ e $m + \varepsilon/(2m + 1)$ como aproximações de $\sqrt{n}$. Verifique que o primeiro valor é uma aproximação por excesso, e o segundo, por falta. Calcule aproximações de $\sqrt{2}$ e de $\sqrt{10}$ usando essas fórmulas.

Problema 3.8.6. No início da Seção 3.6.4 foi comentado que em [88] o autor sugere que os sumérios utilizaram o método da média para calcular sua famosa aproximação $(1; 24{,}51{,}10)_{60}$ de $\sqrt{2}$. Ao aplicar o método da média para $\sqrt{2}$ começando com $a_0 = 2$ obtivemos $a_3 = 577/408$. Calcule a expansão de a_3 no sistema sexagesimal. Calcule os comprimentos do período e do pré-período.

Problema 3.8.7. Calcule aproximações de $\sqrt{17}$ usando o método descrito na Seção 3.6.4. Estude a velocidade das aproximações. (Sugestão: comece com $a_0 = 5$, e calcule seis termos em forma de fração de inteiros. Expanda cada fração com 70 casas exatas.)

Problema 3.8.8. Calcule passo a passo a fração contínua infinita simples de $\sqrt{3}$.

Problema 3.8.9. Calcule passo a passo a fração contínua infinita simples de $\sqrt{17}$.

Problema 3.8.10. Considere a sequência $c_0 = [1]$, $c_1 = [1, 1]$, $c_2 = [1, 1, 1]$, $c_3 = [1, 1, 1, 1]$, etc. Calcule $[1, 1, 1, \ldots]$ supondo que essa sequência tenha limite. Calcule os primeiros convergentes na forma de frações de inteiros.

Problema 3.8.11. Seja x um número positivo tal que $x^2 - 7x - 1 = 0$. Observe que $x = 7 + (1/x)$. Usando isso expresse x como uma fração contínua. Calcule x na forma de uma expressão com raízes.

3.9 Temas para investigação

Tema 3.9.1. Os argumentos apresentados na Seção 3.4 para demonstrar a irracionalidade de $\sqrt{2}$ usam, todos eles, contradição. Nesse ponto de nossos estudos já não deveria existir um argumento direto, sem o uso de contradição? Por exemplo, tomando sua expansão decimal, se constatarmos que ela não é periódica, isso não demonstra que ele é irracional?

Tema 3.9.2. Complete os detalhes do argumento. *Afirmação:* "Para todo inteiro positivo k, $\sqrt{k}$ é inteiro ou não racional". *Argumento:* Se $\sqrt{k}$ for racional, podemos escrever $\sqrt{k} = a/b$, sendo a e b inteiros positivos. Logo $kb^2 = a^2$, e, em virtude do Teorema Fundamental da Aritmética, existe um inteiro positivo c tal que $k = c^2$. Portanto $\sqrt{k} = c$ é inteiro.

Tema 3.9.3. **a)** Como vimos no texto, uma fração de inteiros a/b é chamada *honesta* quando $a/b \notin \mathbb{Z}$. Demonstre que $\frac{a}{b}$ honesta $\Rightarrow \frac{a^2}{b^2}$ honesta. Para essa demonstração é mesmo necessário o uso do Teorema Fundamental da Aritmética? **b)** Investigue em que situações se pode afirmar: uma fração de inteiros positivos a/b é honesta quando $b > 1$.

Tema 3.9.4. Se a e b são inteiros positivos, definimos $\sqrt{a/b}$ como o número positivo cujo quadrado é a/b. **a)** Usando propriedades que você já conhece dos números reais, demonstre que $\sqrt{a/b} = \sqrt{a}/\sqrt{b}$. **b)** Encontre condições sobre a e b para que $\sqrt{a/b}$ seja : (i) racional; (ii) irracional.

Tema 3.9.5. Investigue condições sobre o inteiro positivo m para que $\log m$ seja racional ou não.

Tema 3.9.6. Consideremos o conjunto $\mathcal{A}$ dos números inteiros múltiplos positivos de 4. Portanto $\mathcal{A} = \{4, 8, 12, 16, \dots\}$. Um $\mathcal{A}$-composto é um elemento $a \in \mathcal{A}$ que pode ser escrito na forma $a = bc$, sendo b e c elementos de $\mathcal{A}$. Um $\mathcal{A}$-primo é um elemento de $\mathcal{A}$ que não é composto. Por exemplo, 4 e 8 são $\mathcal{A}$-primos. **a)** Demonstre que todo elemento de $\mathcal{A}$ é $\mathcal{A}$-primo ou se escreve como um produto de $\mathcal{A}$-primos. **b)** Dê exemplos para mostrar que a decomposição de elementos de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{A}$-primos pode não ser única. Portanto em $\mathcal{A}$ não temos um resultado equivalente ao Teorema Fundamental da Aritmética. **c)** Uma fração a/b, sendo a e $b \neq 0$ elementos de $\mathcal{A}$, é chamada $\mathcal{A}$-*honesta* se $a/b \notin \mathcal{A}$. Mostre que em $\mathcal{A}$ não vale a implicação: "se a/b é $\mathcal{A}$-honesta, então a^2/b^2 é $\mathcal{A}$-honesta". **d)** Um racional denomina-se $\mathcal{A}$-racional se puder ser escrito na forma de uma fração a/b, sendo a e $b \neq 0$ elementos de $\mathcal{A}$. Encontre exemplos de $p \in \mathcal{A}$ que são $\mathcal{A}$-primos mas que $\sqrt{p}$ seja $\mathcal{A}$-racional.

Tema 3.9.7. **a)** Investigue se é possível demonstrar que $\sqrt{2}$ não é racional através de sua expansão decimal. **b)** Investigue se é possível demonstrar que $\sqrt{2}$ não é racional através de sua fração contínua simples.

Tema 3.9.8. Complete os detalhes da seguinte demonstração de que $\sqrt{2}$ é irracional e generalize para outras situações. Supondo que $\sqrt{2}$ seja racional, $\sqrt{2} - 1$ também é, e podemos escrever $\sqrt{2} - 1 = m/n$ como uma fração de inteiros posivos e irredutível. Então seu inverso é $\sqrt{2} + 1 = n/m$. Como $\sqrt{2} + 1 - (\sqrt{2} - 1) = 2$, isso implica $m = n$. Mas então $\sqrt{2} = 2$, o que é falso. Consequentemente $\sqrt{2}$ é irracional.

Tema 3.9.9. Investigue $\sqrt[3]{2}$. Em 1837 Pierre L. Wantzel demonstrou que $\sqrt[3]{2}$ não é construtível com régua e compasso. Por isso os antigos matemáticos gregos tiveram dificuldades em comprovar a existência desse número, o que exige processos infinitos. Admita que seja um número e que podemos manipulá-lo. **a)** Demonstre que $\sqrt[3]{2}$ é irracional. **b)** Calcule (e justifique) uma aproximação de sua expansão decimal por um método de tentativas. **c)** Use também um método de média, isto é, escreva $2 = xyz$, e veja se $\sqrt[3]{2} \approx \frac{1}{3}(x + y + z)$. **d)** Ainda no método da média, tome uma aproximação a_0, e experimente com $x = a_0$, $y = a_0$ e $z = 2/a_0^2$. Apresente um algoritmo com essa ideia, similar ao do Teorema 3.4. **e)** Calcule uma fração contínua simples para $\sqrt[3]{2}$.

Tema 3.9.10. **a)** Investigue fórmulas para a fração contínua simples dos números $\sqrt{a^2 + 1}$ e $\sqrt{a^2 - 1}$, para todo a inteiro positivo. **b)** Calcule a fração contínua simples de $\sqrt{31}$, e encontre situações similares (isto é, com períodos longos). **c)** Encontre fórmulas para outras situações.

Tema 3.9.11. Examinando os convergentes da fração contínua de $\sqrt{2}$

$$c_n = [1, 2,2, \ldots ,2] \quad \text{com } n \ 2's$$

obtidos na Seção 3.7, podemos compará-los com os valores da sequência $(a_n)_{n\geq 0}$ que começa com $a_0 = 1$ e que converge para $\sqrt{2}$, definida no Teorema 3.4. Investigue as regularidades que podem ser observadas e faça conjecturas. Alguma demonstração?

Tema 3.9.12. Alguns convergentes $c_n = [a_0, a_1, \ldots, a_n]$ da fração contínua de $\sqrt{2}$ surgem com insistência em vários dos métodos que estudamos. Por exemplo, $c_1 = 3/2$, $c_3 = 17/12$ e $c_7 = 577/408$ apareceram nos métodos 3.6.3 e 3.6.4. Isto ocorre pelo motivo de que, sob certas condições, os convergentes de um número irracional são suas melhores aproximações. Investigue e demonstre as seguintes afirmações. **a)** Dado um número positivo ξ, mostre que para todo inteiro positivo b existe uma fração de inteiros j/b que é uma aproximação de ξ com erro menor do que $1/2b$. **b)** Verifique que $c_1 = 3/2$ é a melhor aproximação de $\sqrt{2}$ dentre todas as frações de inteiros j/b com $b \leq 2$. **c)** Verifique que o convergente $c_2 = 7/5$ é a melhor aproximação de $\sqrt{2}$ dentre todas as frações de inteiros j/b com $b \leq 5$. **d)** Verifique que o convergente $c_3 = 17/12$ é a melhor aproximação de $\sqrt{2}$ dentre todas as frações de inteiros j/b com $b \leq 12$ **e)** Verifique que para os convergentes $c = p/q$ de $\sqrt{2}$ considerados acima, o erro $|\sqrt{2} - c|$ da aproximação é bem menos do que $1/2q$, sendo na verdade $< 1/q^2$. Pesquise um teorema geral desse tipo para qualquer número ξ.

Tema 3.9.13. As seguintes aproximações são encontradas em textos antigos. Veja como se pode verificar se realmente são boas fórmulas e em quais condições sobre r.

$$\sqrt{a^2+r} \approx \frac{a^2+r}{a+\frac{r}{2a}} \qquad \sqrt{a^2+r} \approx \frac{1}{2}\left(\frac{a^2+r}{a+\frac{r}{2a}} + a + \frac{r}{2a}\right)$$

$$\sqrt{a^2+r} \approx a + \frac{r}{2a+\frac{r}{2a}} \qquad \sqrt{a^2+r} \approx a + \frac{r}{2a} - \frac{\left(\frac{r}{2a}\right)^2}{2\left(a+\frac{r}{2a}\right)}$$

Tema 3.9.14. Pesquisar a presença de $\sqrt{2}$ na Matemática, buscando na literatura propriedades não mencionadas neste texto e fórmulas em que $\sqrt{2}$ se faz presente. Como exemplo apresentamos ao estudante a bela fórmula de Luis A. Santaló

$$E = \frac{\sqrt{2} + 2 + 5\ln(1+\sqrt{2})}{15}.$$

Essa fórmula ocorre no seguinte problema de probabilidade geométrica. São lançados randomicamente n pares de pontos em um quadrado unitário. Seja d_i a distância entre os pontos do i-ésimo par. Então E é o limite para $n \to \infty$ da média $(d_1 + \ldots + d_n)/n$.

Tema 3.9.15. Pesquisar a presença de $\sqrt{5}$ na Matemática.

3.10 Atividades para licenciandos e professores

Atividade 3.10.1. Pesquise, nos livros de História da Matemática, a origem do símbolo $\sqrt{\ }$ como notação de raízes quadradas.

Atividade 3.10.2. Examine mais detalhadamente a observação feita em 3.4.6 sobre o uso de argumentos plausíveis no ensino da Matemática. Dê a sua opinião. Descreva outras situações em que os professores das escolas fundamental e média utilizam argumentos plausíveis.

Atividade 3.10.3. O que dizer sobre apresentar ou não a estudantes do ensino básico a demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$? Em que nível e em que circunstâncias isso seria adequado? Nesse caso, qual seria o melhor método?

Atividade 3.10.4. $\sqrt[3]{2}$ é chamado *constante de Delos*, ou *número de Delos*, relacionado com o antigo problema da duplicação do cubo. Pesquise sobre isso em livros de História da Matemática, ou na internet.

Atividade 3.10.5. Busque métodos "fáceis" para o cálculo de raízes quadradas e cúbicas (a internet pode ser uma boa fonte). Examine esses métodos, estude sua validade e suas limitações.

Capítulo 4

Modelos para os números reais

4.1 Introdução

Apresentamos neste Capítulo algumas considerações sobre a história da construção de modelos de representação para o conjunto dos números reais. Essa história reflete o esforço e o amadurecimento psicológico do homem pensante ao analisar fenômenos quantitativos do campo abstrato. Alertamos o estudante de que nossa exposição não se aprofunda no tema e não tem perfeita exatidão histórica. Abordamos as principais ideias com o intuito de estimular uma reflexão sobre esse tema da Matemática muito importante para a formação do professor.

4.2 O primeiro modelo de números

Descrevemos nesta seção o antigo modelo grego de números reais, vigente até o tempo de Pitágoras. Consistia de uma síntese do conhecimento matemático gerado pelos povos que antecederam a civilização grega. Tinha como base a relação entre o conjunto dos números racionais e a reta euclidiana.

Vimos, nos Capítulos 1 e 2 deste texto, como as necessidades práticas de contar e medir deram origem aos números naturais e aos racionais positivos. Dessa forma os conjuntos $\mathbb{Z}_+$ e $\mathbb{Q}_+$, juntamente com as operações aritméticas fundamentais, constituíram os primeiros modelos numéricos. Mas esse desenvolvimento não parou aí.

O estudo das formas geométricas foi induzido pelas necessidades práticas e pela busca da expressão da beleza, como construções arquitetônicas, pintura de utensílios, confecção de tapeçarias artísticas. Esse labor deu ensejo à construção psicológica de objetos geométricos abstratos, como o ponto, a reta, o plano, o espaço, assim como seus subconjuntos especiais, como segmentos, retângulos, circunferências, esferas, etc.

Os estudiosos das formas e dos números compreenderam que havia uma estreita relação entre esses dois aspectos do mundo abstrato. Os números podiam expressar grandezas características das formas, como comprimento de um segmento, área de uma figura plana, volume de um sólido. Por outro lado, o uso das formas geométricas para o estudo dos números era imprescindível. As formas realizam os números no mundo concreto, pensavam, já que a todo número parecia corresponder um segmento. Isso os deixava mais seguros ao trabalhar com números. Na verdade, para trabalhar abstratamente com os números, é necessário o desenvolvimento de uma linguagem algébrica, e os matemáticos gregos do tempo de Pitágoras não a tinham. Por isso o estudo das propriedades dos números sempre era feito com figuras e dependia da Geometria.

Firmou-se assim, na mente dos estudiosos, o modelo de números tendo a reta como representação geométrica. Esse modelo é a reta numérica.

Já consideramos a reta numérica no Capítulo 2. Incluímos ali os racionais negativos, embora os antigos gregos não os adotavam.

O *reta numérica* consiste de um segmento UV, chamado *segmento unitário*, ou simplesmente *unidade*, e de uma reta na qual marcamos um ponto O. Usando um compasso com abertura UV e com a ponta seca em O, marcamos o ponto A. Temos duas escolhas para A. Depois que ele foi escolhido, com a ponta seca do compasso em A marcamos o ponto B de modo que A esteja entre O e B. Marcamos os pontos C, D, ..., de forma que B esteja entre A e C, C esteja entre B e D, e assim sucessivamente. Confira a Figura 4.1.

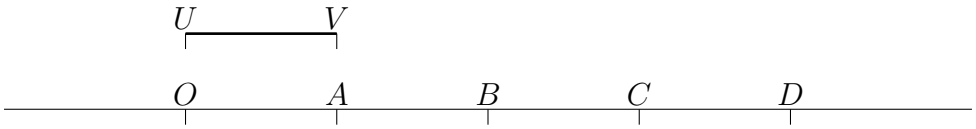


Figura 4.1. Início da construção da reta numérica.

Em seguida, conforme a Figura 4.2, fazemos corresponder a cada número racional um ponto da reta. Começamos com os números inteiros não negativos, associando 0 a O, 1 a A, 2 a B, e assim por diante. A cada número racional positivo r associamos um ponto P da semirreta $\overrightarrow{OA}$ de origem O usando o processo descrito na Seção 2.4. Em seguida, com um procedimento simétrico, associamos os números racionais negativos a pontos da semirreta oposta. Se a um ponto P da reta numérica corresponde um número r, dizemos que r é a *coordenada* de P. A semirreta $\overrightarrow{OA}$ chama-se *semirreta positiva*, e a semirreta oposta, *semirreta negativa*. O ponto O chama-se *origem das coordenadas*.

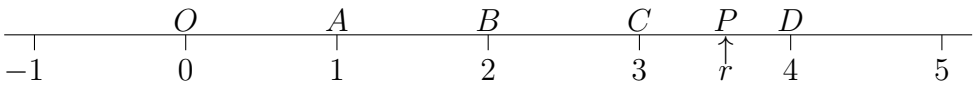


Figura 4.2. A reta numérica.

Se P e Q são pontos de uma reta numérica com coordenadas r e s, respectivamente, o *comprimento* do segmento PQ é definido por $|PQ| = |r - s|$. Em particular, $|OP| = |r|$.

Obtemos assim um *modelo geométrico* para os números, em que a cada número racional pode ser associado o ponto da reta do qual esse número é a coordenada. Essa relação pode ser representada pelo esquema:

$$\begin{array}{ccc} \text{números racionais} & \to & \text{reta numérica} \\ r & \to & \text{ponto de coordenada } r \end{array}$$

Essa associação, parece, a princípio, ser bem satisfatória. Por exemplo, podemos comparar, somar e subtrair segmentos, assim como multiplicar segmentos por um inteiro positivo, de forma compatível com sua associação com os números. Vejamos.

Consideremos uma reta numérica e sejam AB e CD segmentos dessa reta (esses segmentos podem estar em qualquer localização na reta). Tomando um compasso com abertura AB transportamos esse segmento de modo que A coincida com a origem das coordenadas e B esteja na semirreta positiva. O mesmo fazemos com CD, de modo que A coincida com C, e D esteja na semirreta positiva. Confira a Figura 4.3.

Se B está entre A e D dizemos que $AB < CD$, se B coincide com D dizemos que AB e CD são congruentes e escrevemos $AB \cong CD$, e se D está entre A e B dizemos que $AB > CD$. Essa

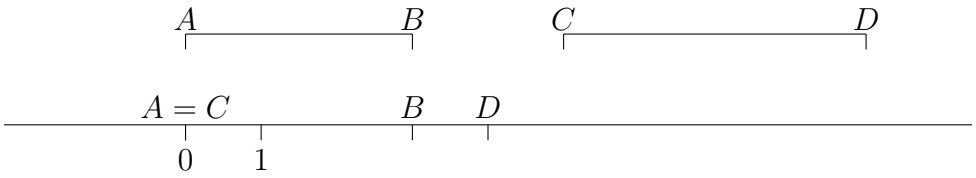


Figura 4.3. Comparação de segmentos.

comparação é compatível com a relação de ordem nos números. De fato, a coordenada de A é zero, assim como a de C (depois que os segmentos foram transportados). Sejam b a coordenada de B e d a de D. Se B está entre A e D então $b < d$, ou $|AB| < |CD|$ o que combina com a definição de que $AB < CD$. O mesmo ocorre nos outros casos.

Para obter $AB + CD$ procedemos da mesma forma, exceto que, ao transportarmos CD colocamos C em B, e colocamos D de modo que B esteja entre A e D. Definimos $AB + CD$ como qualquer segmento congruente a AD. Confira a Figura 4.4. Essa definição também combina com a adição de números, pois $|AB + CD| = |AB| + |CD|$.

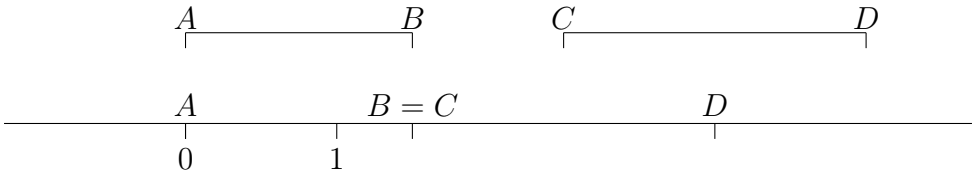


Figura 4.4. Soma de segmentos.

Dados um segmento AB e um inteiro positivo n, indicamos por nAB qualquer segmento congruente à soma $AB + \cdots + AB$ (n vezes).

Se $AB < CD$, fazemos a mesma construção da Figura 4.3 e definimos $CD - AB = BD$. Temos também que $|CD - AB| = |CD| - |AB|$.

Outra observação sobre a relação "números $\rightarrow$ reta numérica" é que à reta está associada a noção de continuidade. A abstração que fazemos da reta é a de uma linha sem interrupções. Em particular isso implica que entre dois pontos da reta sempre existem outros. Isso parece condizer com as propriedades dos números racionais, pois entre dois números racionais $r < s$ sempre existem outros, por exemplo $(r + s)/2$.

Outra abstração que fazemos da reta é a de uma linha não limitada, no seguinte sentido. Dados segmentos AB e CD, existe um inteiro positivo n tal que justapondo-se o segmento AB n vezes obtemos um segmento maior do que CD. Na Figura 4.5, tomando $n = 6$ temos $nAB > CD$. Chamamos a essa propriedade de *Princípio da não limitação da reta.*

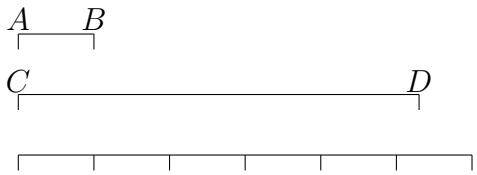


Figura 4.5. Princípio da não-limitação da reta.

Essa propriedade da reta é acompanhada pelos números racionais, de acordo com o

Teorema 4.1. *Se M e r são números racionais positivos, então existe um número inteiro positivo n tal que $nr > M$.*

O estudante certamente achou óbvia a afirmação desse Teorema. Mas, mesmo assim, podemos fazer uma demonstração, deduzindo-a do Teorema do Algoritmo da Divisão 1.7.

Demonstração. Sejam $r = a/b$ e $M = c/d$, com a, b, c e d inteiros positivos. Aplicando o Teorema do Algoritmo da Divisão aos números inteiros positivos bc e ad podemos escrever $bc = adq + r$ para inteiros q e r tais que $q \geq 0$ e $0 \leq r < ad$. Dividindo essa expressão por ad temos $\frac{bc}{ad} = q + s$, com s racional tal que $0 \leq s < 1$. Seja $n = q + 1$. Então $\frac{bc}{ad} < n \Rightarrow \frac{c}{d} < n\frac{a}{b}$ $\Rightarrow nr > M$. □

Em resumo, vimos que todo número racional pode ser representado por um ponto da reta numérica. Vimos também que podemos adicionar e subtrair segmentos de forma análoga à que fazemos com os números (a questão de multiplicar e dividir segmentos será comentada mais abaixo). Ainda, as propriedades abstratas da reta parecem condizer com as propriedades do conjunto dos números racionais. Criamos, dessa forma, um modelo geométrico para os números:

$$\text{números racionais} \quad \to \quad \text{reta numérica.}$$

Um importante problema que se coloca nesse momento é se podemos estender esse modelo para um do tipo

$$\text{números racionais} \quad \leftrightarrows \quad \text{reta numérica} \qquad (?)$$

perguntando se a associação entre os números racionais e a reta numérica é biunívoca, no sentido de que a cada racional corresponde um único ponto da reta, e a cada ponto da reta corresponde um único racional. Para resolver isso precisamos aprofundar nossa compreensão sobre a relação entre os números e a reta.

4.3 A hipótese da comensurabilidade

Na seção anterior descrevemos o modelo numérico que foi basicamente herdado de outros povos pelos antigos gregos. Os matemáticos gregos do tempo de Tales e Pitágoras assumiram a tarefa de aprofundar esse modelo aplicando seus novos métodos de estudo, incluindo o uso mais intensivo da dedução. Vejamos, nesta seção, as conclusões a que chegaram.

No modelo "números $\to$ reta numérica" existe uma correspondência que combina propriedades dos números com propriedades da reta, como adição, subtração e multiplicação por um inteiro positivo.

O que podemos dizer sobre divisão de segmentos? Dados segmentos AB e CD, o que seria $\frac{AB}{CD}$? Para investigar isso, lembramos que sabemos dividir números racionais. Examinamos então mais de perto como o fazemos e ver se podemos nos inspirar nesse conhecimento para propor um significado para a divisão de segmentos.

Começamos com os inteiros. Dados inteiros positivos a e b existem inteiros q e r com $q \geq 0$ e $0 \leq r < b$ tais que $a = bq + r$ (esse resultado é uma adaptação do Teorema 1.7). Os números q e r podem ser obtidos da seguinte forma. Se $a < b$ tomamos $q = 0$ e $r = a$. Se $a \geq b$ fazemos as subtrações sucessivas $a - b$, $a - 2b$, $a - 3b$, ..., até que essa diferença fique negativa. Seja q o maior inteiro positivo tal que $a - bq \geq 0$. Pondo $r = a - bq$, temos o resultado.

Isso nos dá o primeiro passo para obtermos a/b, pois de $a = bq + r$ temos

$$\frac{a}{b} = q + \frac{r}{b}\,.$$

Como $r/b < 1$ escrevemos

$$\frac{a}{b} = q + \frac{1}{b/r}\,.$$

Para obter b/r procedemos a novas reduções, e dividimos b por r aplicando novamente o mesmo Teorema 1.7. Fazendo assim divisões sucessivas aparece um sequência de restos $r > r_1 > r_2 > \cdots \geq 0$. Esse processo tem uma quantidade finita de passos até que se obtém resto zero, pois entre r e zero existe uma quantidade finita de números inteiros. Sabemos também que o menor resto positivo é o máximo divisor comum $d = \text{mdc}(a, b)$ de a e b. Portanto existem inteiros positivos m e n tais que $a = md$ e $b = nd$, e

$$\frac{a}{b} = \frac{md}{nd} = \frac{m}{n}\,.$$

Vemos que d é uma "medida comum" de a e b.

Dados números racionais positivos $u = a/b$ e $v = c/d$, eles também têm uma medida comum, no seguinte sentido: existe um número racional positivo w e existem números inteiros positivos m e n tais que

$$u = mw \qquad \text{e} \qquad v = nw.$$

De fato, $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$ é um número racional, que escrevemos na forma $\frac{m}{n}$, com m e n positivos (podemos também tomar m e n relativamente primos, se for conveniente). Portanto $\frac{ad}{bc} = \frac{m}{n}$, do que segue $\frac{a}{bm} = \frac{c}{dn}$. Chamamos esse valor de w. Então w é um número racional com a propriedade desejada, e temos

$$\frac{u}{v} = \frac{mw}{nw} = \frac{m}{n}\,.$$

Aplicamos a seguir esse mesmo processo a segmentos com o objetivo de construir um significado para a divisão de segmentos. Dados segmentos AB e CD tais que $AB > CD$, fazemos as subtrações sucessivas $AB - CD$, $AB - 2CD$, $AB - 3CD$, ..., enquanto AB for maior do que $2CD$, $3CD$, ... Pelo Princípio da não limitação da reta, comentado na página 67, em algum momento isso não mais ocorre. Se encontrarmos um inteiro positivo q tal que $AB \cong qCD$ cessamos o processo. Caso contrário, seja q o maior inteiro positivo tal que $AB > qCD$. Seja $RS \cong AB - qCD$. Então $RS < CD$ e $AB \cong qCD + RS$. Prosseguimos repetindo o processo para CD e RS, e assim sucessivamente. Supondo que esse processo termina após uma quantidade finita de passos, e chamando o último segmento de TU, encontramos inteiros positivos m e n tais que $AB \cong mTU$ e $CD \cong nTU$. Vemos que, se isso for válido, os segmentos AB e CD têm TU como uma "medida comum", e podemos propor a seguinte definição de "divisão" de segmentos:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{m}{n}\,.$$

A dificuldade aqui é que, no caso de segmentos, não conseguimos provar que esse processo tem uma quantidade finita de passos. Isso atrapalha tudo, pois, se a quantidade de passos é infinita, não podemos encontrar uma "medida comum" dos dois segmentos. Entretanto, se estamos em uma situação em que não temos um conhecimento mais profundo dos números, podemos perfeitamente acreditar que isso é verdadeiro. Afinal das contas, os números racionais são todos os números que conhecemos, e nem nos perguntamos se existem outros. Como dois números racionais têm sempre uma medida comum, nada mais justo do que acreditarmos que isso também seja verdadeiro para segmentos.

Parece que assim pensavam os matemáticos gregos antes de Pitágoras. Denominamos essa ideia de

Hipótese da comensurabilidade Dados segmentos quaisquer AB e CD, existem um segmento TU e inteiros positivos m e n tais que $AB = mTU$ e $CD = nTU$.

Convém fazer as definições:

Definição 4.2. Os números r e s se dizem *comensuráveis* se existem um número u e números inteiros positivos m e n tais que $r = mu$ e $s = nu$. De forma análoga, os segmentos AB e CD se dizem comensuráveis se existem um segmento TU e números inteiros positivos m e n tais que $AB = mTU$ e $CD = nTU$.

Foi demonstrado acima que dois números racionais positivos quaisquer são comensuráveis, e, se admitirmos a hipótese da comensurabilidade, dois segmentos quaisquer são comensuráveis. Com essa hipótese os antigos matemáticos gregos tinham a seguinte interpretação para a divisão de segmentos:

Definições 4.3. Dados segmentos AB e CD e números inteiros positivos m e n, dizemos que AB *está para* CD *na razão* $\frac{m}{n}$ se $nAB \cong mCD$. Nesse caso escrevemos $\frac{AB}{CD} = \frac{m}{n}$. Seja AB um segmento e E um ponto em seu interior. Dizemos que E divide AB na razão $\frac{AE}{EB}$. Se $\frac{AE}{EB} = \frac{m}{n}$, dizemos também que E divide AB na razão $\frac{m}{n}$.

Essa interpretação é complementada pelas Proposições 4.4 e 4.8. Para sua demonstração usamos, sem maiores detalhes, as seguintes propriedades sobre os segmentos AB e CD e números inteiros positivos m e n:

Propriedade 1: $n\,(mAB) = nmAB$;

Propriedade 2: $nAB = nCD \Rightarrow AB = CD$.

Propriedade 3: $AB = nCD \Rightarrow |AB| = n|CD|$.

Proposição 4.4. *Dados segmentos AB e CD comensuráveis, existem inteiros positivos m e n tais que $\frac{AB}{CD} = \frac{m}{n}$.*

Demonstração. Como AB e CD são comensuráveis existem um segmento TU e inteiros positivos m e n tais que $AB \cong mTU$ e $CD \cong nTU$. Portanto $nAB \cong n(mTU) \cong nmTU \cong m(nTU) \cong mCD$, o que implica $\frac{AB}{CD} = \frac{m}{n}$. □

Usando esse modelo de número os antigos matemáticos gregos desenvolveram uma teoria para a Geometria. Vejamos como era a demonstração do importante Teorema da Proporcionalidade de Tales com o uso da Hipótese da Comensurabilidade.

Começamos com a seguinte Proposição, conforme [15], páginas 93 e 94.

Proposição 4.5. *Sejam a, b e c três retas paralelas que intersectam outras duas retas d e e nos pontos A, B e C e nos pontos A', B' e C', respectivamente. Se B está entre A e C, então B' está entre A' e C'. Ainda, se $AB \cong BC$, então $A'B' \cong B'C'$.*

Demonstração. A Figura 4.6 ilustra a demonstração.

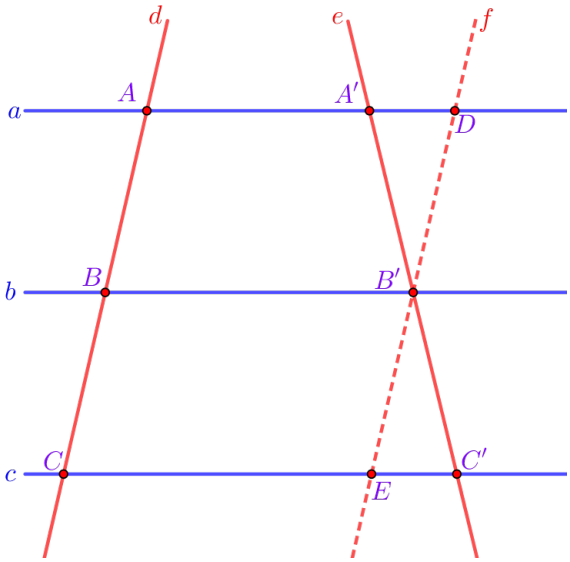


Figura 4.6 Preparação do Teorema da Proporcionalidade de Tales.

Suponhamos que B está entre A e C. Então A e C estão em semiplanos opostos em relação à reta b. Como as retas a, b e c são paralelas, A e A' estão no mesmo semiplano, e C e C' estão no outro semiplano, ainda em relação à reta b. Portanto A' e C' estão em semiplanos opostos em relação à reta b. Logo o segmento $A'C'$ intersecta b em um ponto, que é B'. Segue que B' está entre A' e C'.

Suponhamos $AB \cong BC$. Consideremos a reta f paralela a d e que contém B'. Sejam D a interseção de a e f, e E a interseção de c e f. Como num paralelogramo os lados opostos têm o mesmo comprimento, segue que $AB \cong DB'$ e $BC \cong B'E$. Portanto $DB' \cong B'E$. Usando que ângulos alternos internos determinados por duas paralelas e uma transversal são congruentes, temos $B'DA' \cong B'EC'$. Segue que $A'B' \cong B'C'$. □

Corolário 4.6. *Sejam a_1, a_2, ..., a_k k retas paralelas que intersectam outras duas retas d e e nos pontos A_1, A_2, ..., A_k e nos pontos A'_1, A'_2, ..., A'_k, respectivamente. Se A_i está entre A_{i-1} e A_{i+1}, então A'_i está entre A'_{i-1} e A'_{i+1}, para todo $1 < i < k$. Ainda, se $A_1A_2 \cong A_2A_3 \cong \ldots \cong A_{k-1}A_k$, então $A'_1A'_2 \cong A'_2A'_3 \cong \ldots \cong A'_{k-1}A'_k$.*

Precisaremos do

Corolário 4.7. *Dados um segmento AB e um inteiro positivo n, AB é a soma de n segmentos congruentes.*

Demonstração. A Figura 4.7 sugere como fazer isso. Tomamos um segmento AA_1 e construímos $AA_n = nAA_1$, marcando em AA_n os pontos A, A_1, A_2, ..., A_n de modo que $AA_1 \cong A_1A_2 \cong \ldots \cong A_{n-1}A_n$. Traçamos A_nB e as paralelas pelos pontos A_1, A_2, ... A_{n-1}. Em virtude do Corolário 4.6, essas paralelas determinam em AB n segmentos congruentes. □

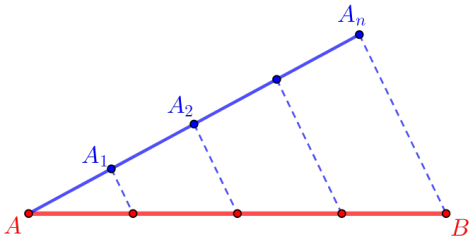


Figura 4.7 Divisão de um segmento em partes iguais.

Obtemos a recíproca da Proposição 4.4:

Proposição 4.8. *Dados segmentos AB e CD, se existem números inteiros positivos m e n tais que $\frac{AB}{CD} = \frac{m}{n}$ então AB e CD são comensuráveis.*

Demonstração. Temos $nAB \cong mCD$. Dividimos AB em m segmentos congruentes, e seja AA_1 um deles. Então $AB \cong mAA_1$. Logo $nAB \cong nmAA_1 \Rightarrow mCD \cong nmAA_1 \Rightarrow CD \cong nAA_1$. Portanto AB e CD são comensuráveis. □

O Teorema da Proporcionalidade de Tales fornece um instrumento para identificar segmentos que estão na mesma razão. Esse teorema está na base da teoria de semelhança. Vejamos como era feita sua demonstração usando a hipótese da comensurabilidade.

Teorema 4.9 (da Proporcionalidade de Tales)**.** *Se uma reta, paralela a um dos lados de um triângulo, intersecta os outros dois lados, então ela os divide na mesma razão.*

Demonstração usando a hipótese da comensurabilidade.

A Figura 4.8 ilustra o Teorema. ABC é o triângulo dado, DE é paralelo a BC, com D entre A e B, e com E entre A e C. Dizer que a reta $\overleftrightarrow{DE}$ divide os lados AB e AC na mesma razão significa que $AD/DB = AE/EC$. Isso é o que devemos provar.

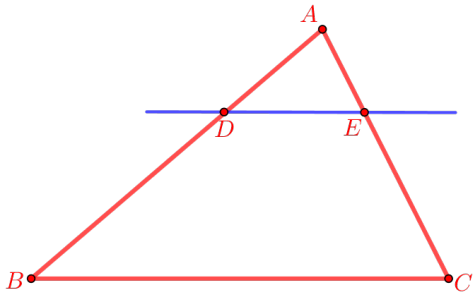


Figura 4.8 Teorema da Proporcionalidade de Tales.

Acompanhamos a Figura 4.9. Suponhamos que AD e BD sejam comensuráveis. Existem um segmento ST e números inteiros positivos m e n tais que $AD = mST$ e $BD = nST$. Portanto $\frac{AD}{DB} = \frac{m}{n}$. Sejam A_1, A_2, ..., A_m pontos do segmento AD de modo que $A_m = D$, A_1 está entre A e A_2, A_2 está entre A_1 e A_3, e assim por diante, e $AA_1 \cong A_1A_2 \cong \ldots \cong A_{m-1}A_m \cong ST$. Sejam B_1, B_2, ..., B_n pontos do segmento DB de modo que $B_n = B$, B_1 está entre D e B_2, B_2 está entre B_1 e B_3, e assim por diante, e $DB_1 \cong B_1B_2 \cong \ldots \cong B_{n-1}B_n \cong ST$. Para todo $1 \leq i \leq m$, consideremos por A_i a reta paralela a BC, e seja A'_i o ponto em que essa reta intersecta AE. Para todo $1 \leq j \leq n$, consideremos por B_j a reta paralela a BC, e seja B'_j o ponto em que essa reta intersecta EC. Temos $A'_m = E$ e $B'_n = C$, e, em virtude do Corolário 4.6,

$$AA'_1 \cong A'_1A'_2 \cong \ldots \cong A'_{m-1}E \cong ST \cong EB'_1 \cong B'_1B'_2 \cong \ldots \cong B'_{n-1}C.$$

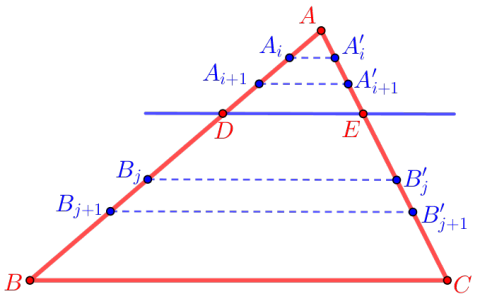


Figura 4.9 Detalhes do Teorema da Proporcionalidade de Tales.

Portanto $AE = mST$ e $EC = nST$, do que segue $\frac{AE}{EC} = \frac{m}{n}$. Consequentemente

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}\,.$$

□

Vemos assim que o importante Teorema de Tales tinha uma demonstração que dependia inteiramente da hipótese da comensurabilidade. Podemos imaginar o que ocorreu quando se verificou que essa hipótese era falsa.

4.4 A descoberta da incomensurabilidade

Contam os livros de História da Matemática que os antigos matemáticos gregos, por volta de 500 a.C., estavam satisfeitos com o modelo numérico constituído pelo conjunto dos números racionais e sua relação com a reta numérica. Parece que supunham que entre os números racionais e os pontos da reta existia uma associação biunívoca: a cada ponto da reta numérica corresponderia exatamente um número racional. Admitiam, assim, a hipótese da comensurabilidade. Com essa suposição demonstravam inúmeros teoremas da Geometria Euclidiana.

Mas, em determinado momento, através de dedução, descobriram que existiam segmentos incomensuráveis (ou seja, não comensuráveis). Isso significa que existem pontos da reta numérica que não correspondiam a números racionais. Assim, se admitíssemos a existência apenas de números racionais, a reta não seria completa. Em outros termos, existiriam "furos", o que contradiz nosso entendimento de que a reta é contínua. Confira a Figura 4.10.

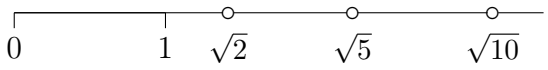


Figura 4.10. Alguns furos não racionais na reta numérica.

Os historiadores não têm clareza se a descoberta de segmentos não comensuráveis foi feita primeiro com $\sqrt{2}$, através da manipulação da diagonal do quadrado, ou com $\sqrt{5}$, mediante a manipulação da diagonal do pentágono regular. De qualquer forma conta a tradição que essa descoberta se deu na Escola Pitagórica, provavelmente no início do 5º Século a.C.

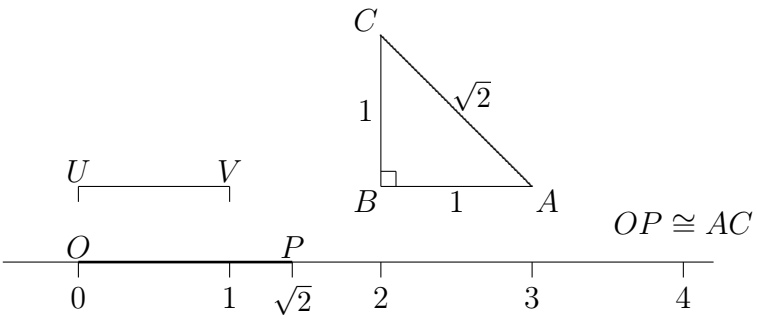


Figura 4.11. Localização de $\sqrt{2}$ na reta numérica.

Números não racionais correspondem a segmentos não comensuráveis em relação ao segmento unitário. Por exemplo, dado um quadrado de lado AB de medida 1 e diagonal AC, se

AC e AB fossem comensuráveis, existiriam um segmento TU e inteiros positivos m e n tais que $AB = mTU$ e $AC = nTU$. Logo $|AB| = m|TU|$ e $|AC| = n|TU|$, do que segue $1 = m|TU|$ e $\sqrt{2} = n|TU|$. Dividindo vem $\sqrt{2} = n/m$, o que é uma contradição. Confira a Figura 4.11.

Com essa descoberta abriu-se uma crise na Matemática. Como demonstrar o Teorema da Proporcionalidade de Tales e outros teoremas da Geometria sem a hipótese de que os segmentos são comensuráveis?

Afinal, o que são os números? É válido o modelo "números $\leftrightarrows$ reta numérica" ?

Uma solução para esse impasse só viria com os estudos realizados por matemáticos gregos do Século IV a.C. Veremos na próxima seção como a Teoria das Proporções de Eudoxo permitiu a construção de um novo modelo para os números.

4.5 O modelo de número de Eudoxo

Platão fundou sua famosa Academia em Atenas por volta de 380 a.C. Era uma escola que se dedicava a estudos filosóficos e científicos. Por essa época ainda persistia o problema originado pela descoberta dos números incomensuráveis. Platão incentivava seus discípulos a resolver essa questão, o que foi feito por Eudoxo e outros matemáticos de seu tempo, com sua original definição de igualdade entre proporções. A Teoria das Proporções de Eudoxo, como é chamada, permitiu refazer a demonstração dos teoremas da Geometria que haviam sido postos em dúvida pela descoberta da incomensurabilidade.

A definição de Eudoxo nos dá condições para sabermos quando a razão de dois segmentos é igual à razão de outros dois segmentos. Para isso Eudoxo utiliza desigualdades entre segmentos.

A definição de Eudoxo de segmentos proporcionais pode ser assim colocada:

Definição 4.10. Dados segmentos AB, CD, EF e GH, dizemos que AB está para CD assim como EF está para GH se, dados inteiros positivos m e n quaisquer, temos:

(i) se $nAB \cong mCD$ então $nEF \cong mGH$,
e
(ii) se $nAB > mCD$ então $nEF > mGH$,
e
(iii) se $nAB < mCD$ então $nEF < mGH$.

Nessas condições escrevemos $\frac{AB}{CD} = \frac{EF}{GH}$.

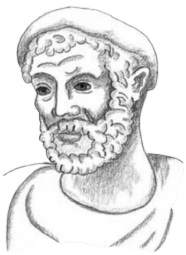


Figura 4.12. Eudoxo de Cnido foi um filósofo, matemático, geógrafo, astrônomo e médico que viveu na cidade de Cnido, Anatólia, atual Turquia, no 4º Século a.C. Discípulo de Platão e Arquitas, suas contribuições se identificam com as ideias da Academia de Platão. Particularmente em Matemática, ofereceu uma teoria das proporções, possibilitando a superação da descoberta dos incomensuráveis. Mais detalhes sobre o desenho de Eudoxo na pág. 250.

O estudante mais inexperiente talvez tenha dificuldade na interpretação dessa definição. Nós a explicaremos com mais detalhes logo adiante. Antes disso vejamos como ela permite demonstrar o Teorema da Proporcionalidade de Tales 4.9.

Demonstração do Teorema 4.9 da Proporcionalidade de Tales para segmentos quaisquer.

Consideremos a Figura 4.13, em que $\triangle ABC$ é o triângulo dado, DE é paralelo a BC, com D entre A e B, e com E entre A e C. Queremos provar que $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$.

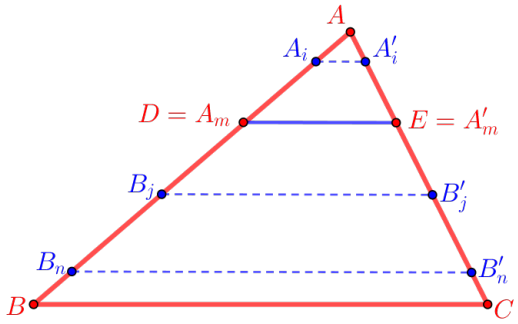


Figura 4.13 Teorema da Proporcionalidade de Tales para segmentos quaisquer.

Sejam m e n números inteiros positivos. Dividindo o segmento AD em m segmentos congruentes (Corolário 4.7) obtemos pontos A_1, A_2, ..., A_m de modo que $A_m = D$, A_1 está entre A e A_2, A_2 está entre A_1 e A_3, e assim por diante, e $AA_1 \cong A_1A_2 \cong \ldots \cong A_{m-1}A_m$. Portanto $AD = mAA_1$. Sejam B_1, B_2, ..., B_n pontos da semirreta $\overrightarrow{DB}$ de modo que B_1 está entre D e B_2, B_2 está entre B_1 e B_3, e assim por diante, e $DB_1 \cong B_1B_2 \cong \ldots \cong B_{n-1}B_n \cong AA_1$. Portanto $DB_n = nAA_1$. Para todo $1 \leq i \leq m$, consideremos por A_i a reta paralela a BC, e seja A'_i o ponto em que essa reta intersecta AE. Para todo $1 \leq j \leq n$, consideremos por B_j a reta paralela a BC, e seja B'_j o ponto em que essa reta intersecta $\overrightarrow{EC}$. Em virtude do Corolário 4.6 temos

$$AA'_1 \cong A'_1A'_2 \cong \ldots \cong A'_{m-1}A'_m \cong EB'_1 \cong B'_1B'_2 \cong \ldots \cong B'_{n-1}B'_n$$

Portanto $AE \cong mAA'_1$ e $EB'_n \cong nAA'_1$.

Notemos que

$$AD \cong mAA_1 \text{ e } DB_n \cong nAA_1 \Rightarrow nAD \cong nmAA_1 \text{ e } mDB_n \cong mnAA_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow nAD \cong mDB_n$$

e

$$AE \cong mAA'_1 \text{ e } EB'_n \cong nAA'_1 \Rightarrow nAE \cong nmAA'_1 \text{ e } mEB'_n \cong mnAA'_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow nAE = mEB'_n$$

Temos agora três casos a considerar.

Caso 1. $nAD \cong mDB$. Então $B_n = B$ e $B'_n = C$, o que implica $nAE \cong mEC$. Portanto

$$nAD \cong mDB \Rightarrow nAE \cong mEC.$$

Caso 2. $nAD < mDB$. Então $mDB_n < mDB$ e B_n está entre D e B (como na Figura 4.13). Então B'_n está entre E e C e $mEB'_n < mEC$. Logo $nAE < mEC$. Provamos assim que

$$nAD < mDB \Rightarrow nAE < mEC.$$

Caso 3. Considerando a situação contrária $nAD > mDB$ demonstramos, de modo análogo ao caso 2, que

$$nAD > mDB \Rightarrow nAE > mEC.$$

O resultado segue da Definição 4.10. Aqui termina a demonstração do Teorema da Proporcionalidade de Tales 4.9. □

Uma consequência desse teorema é que podemos construir uma Teoria de Semelhança $\sim$ de triângulos. Isso está feito no Capítulo 7 de [15].

Podemos também utilizar essa teoria para multiplicar e dividir segmentos de reta. A Figura 4.14 ilustra como é obtido o produto dos segmentos AB e CD.

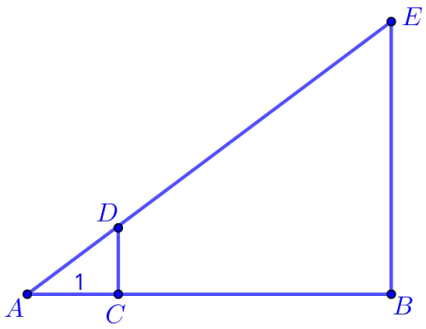


Figura 4.14 Multiplicação de segmentos usando a Teoria de Semelhança.

Na semirreta $\overrightarrow{AB}$ marcamos o ponto C tal que $|AC| = 1$ (o ponto C pode estar entre A e B ou não). Traçamos o segmento CD perpendicular a $\overrightarrow{AB}$. Seja E o ponto de encontro entre a semirreta $\overrightarrow{AD}$ e a reta perpendicular a $\overrightarrow{AB}$ por B. Então $ABE \sim ACD$, e

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BE|}{|CD|} \quad \Rightarrow \quad |BE| = |AB| \times |CD|.$$

Definimos então $AB \times CD = BE$.

A Figura 4.15, por sua vez, ilustra como é obtida divisão $AB \div CD$ de segmentos dados AB e CD. Desenhamos $AB \perp CD$ identificando $A = D$. Marcamos em $\overrightarrow{CD}$ o ponto E tal que $|CE| = 1$ (E pode ou não estar entre C e D). O ponto F é encontro da perpendicular a $\overrightarrow{CD}$ por E com $\overrightarrow{CB}$.

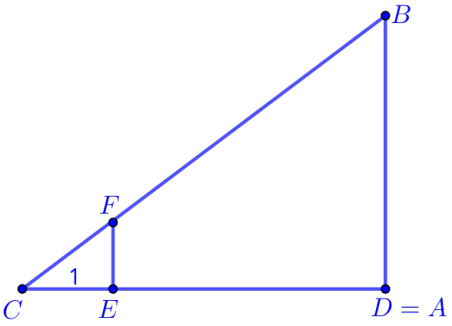


Figura 4.15 Divisão de segmentos usando a Teoria de Semelhança.

Temos $CEF \sim CDB$ e

$$\frac{|EF|}{|CE|} = \frac{|AB|}{|CD|} \quad \Rightarrow \quad |EF| = \frac{|AB|}{|CD|}.$$

Definimos então $AB \div CD = EF$.

Com essas considerações, como fica nosso novo modelo geométrico de números? Lembramos que o antigo modelo ficou prejudicado com a descoberta de números não racionais. Estávamos construindo a associação

$$\text{números} \quad \sim \quad \text{reta numérica},$$

começando com a construção do conjunto $\mathbb{Q}$ e depois associando a cada número um ponto do reta numérica. Na verdade fizemos o movimento

$$\text{números} \quad \longrightarrow \quad \text{reta numérica},$$

quando descobrimos que existem pontos da reta que não ficaram associados a números. Para completar a construção parece que agora é melhor implementar o movimento inverso

$$\text{números} \quad \longleftarrow \quad \text{reta numérica},$$

aumentando dessa forma nosso conjunto de números.

Dado uma reta numérica com origem de coordenadas O, queremos definir um novo conjunto de números considerando todos os segmentos OP para todo ponto P da reta numérica. Dessa forma esse novo conjunto inclui os números racionais já definidos, e outros números, como $\sqrt{2}$.

Notemos que, na definição de reta numérica da Seção 4.2, escolhemos, antes de mais nada, um segmento UV como unidade. Esse segmento tem tamanho arbitrário, mas, depois de construída a reta numérica com essa unidade, todo comprimento de segmento dado nessa reta se refere a ela. Em outros termos, o comprimento de um segmento é sempre um valor relativo, referente a uma unidade previamente escolhida. A ideia assim é representar os novos números pelos quocientes OP/UV. Adotando a Definição 4.10 de Eudoxo como critério para comparar razões entre segmentos, podemos adotar como números (positivos) os símbolos AB/CD, e definir um novo conjunto

$$\mathbb{R}_+ = \left\{ \frac{AB}{CD} \;\mid\; AB,\, CD \text{ segmentos quaisquer} \right\},$$

denominado *conjunto dos números reais positivos*.

O próximo passo seria compreender melhor esse novo conjunto de números, e descrever suas propriedades. Em particular, precisaríamos definir nesse conjunto as operações aritméticas básicas e verificar que essas operações constituem uma extensão das respectivas operações no conjunto $\mathbb{Q}$.

Seria muito penoso continuar o estudo dos números reais usando esse modelo geométrico. Na próxima seção construiremos um modelo algébrico para o conjunto $\mathbb{R}$, que facilita muito continuarmos nossos estudos. Para o momento vejamos uma interpretação da Definição 4.10 de Eudoxo.

Sejam P e Q pontos de uma reta numérica com origem O, e consideremos os símbolos OP/UV e OQ/UV. Segundo Eudoxo, escrevemos $\frac{OP}{UV} = \frac{OQ}{UV}$ quando, dados inteiros positivos quaisquer m e n, temos

(i) se $nOP \cong mUV$ então $nOQ \cong mUV$,
e
(ii) se $nOP > mUV$ então $nOQ > mUV$,
e
(iii) se $nOP < mUV$ então $nOQ < mUV$.

Passando da notação geométrica para a notação algébrica, sejam $|OP| = x$ e $|OQ| = y$. Considerando $|UV| = 1$, as condições acima equivalem a

(i) se $nx = m$ então $ny = m$, e **(ii)** se $nx > m$ então $ny > m$, e **(iii)** se $nx < m$ então $ny < m$,

ou ainda a

(i) se $x = \frac{m}{n}$ então $y = \frac{m}{n}$, e **(ii)** se $x > \frac{m}{n}$ então $y > \frac{m}{n}$, e **(iii)** se $x < \frac{m}{n}$ então $y < \frac{m}{n}$.

Essas condições significam que os números reais x e y são iguais quando:

$$\text{todo racional} > x \text{ é também} > y \text{ e vice-versa,}$$

ou

$$\text{todo racional} < x \text{ é também} < y \text{ e vice-versa.}$$

Podemos agora fazer a seguinte leitura da Definição 4.10 de Eudoxo: todo número real x fica caracterizado pelo conjunto dos números racionais que são menores do que ele (ou, equivalentemente, x fica caracterizado pelo conjunto dos números racionais que são maiores do que ele).

Isso nos traz a ideia de fazer a associação

$$x \quad \leftrightarrows \quad \{ \text{racionais} < x \}.$$

Essa foi justamente a ideia usada por Richard Dedekind para construir um modelo algébrico para o conjunto dos números reais. Estudamos esse modelo na próxima seção.

A Teoria das Proporções de Eudoxo, combinada com o método de dupla redução ao absurdo, permitiu a demonstração de resultados famosos, como o seguinte teorema de Arquimedes: "as áreas de dois discos estão entre si assim como os quadrados de seus raios". Para ver uma demonstração confira, por exemplo, [38], Capítulo 1. Para estudar mais detalhes sobre a Teoria das Proporções de Eudoxo confira [85], Capítulo 20.

4.6 O modelo de número de Dedekind

Vimos como o modelo geométrico permitiu ampliar o conceito de número, e criar um novo modelo, o conjunto $\mathbb{R}$. Essa identificação entre a reta numérica e $\mathbb{R}$ foi e continua sendo importante, mas na Matemática atual o conjunto dos números reais é construído algebricamente, o que nos dá uma agilidade muito maior em sua manipulação. A construção algébrica de $\mathbb{R}$ foi feita no Século XIX por vários matemáticos, dentre eles se destaca Richard Dedekind. O principal instrumento teórico dessa proposta é o uso da Teoria dos Conjuntos.

Dedekind, segundo ele mesmo relata, inspirou-se na Teoria das Proporções de Eudoxo: todo número real a é inteiramente determinado pelo números racionais que são menores do que a. Usando a linguagem de conjuntos, ele definiu os chamados *cortes*, hoje conhecidos como *cortes de Dedekind*.

Passamos a explicar as ideias de Dedekind. Estamos supondo que já está construído o conjunto $\mathbb{Q}$. Começamos com a

Definição 4.11. Dado um subconjunto não vazio A de $\mathbb{Q}$, dizemos que A tem *máximo* se existir $m \in A$ tal que $a \leq m$ para todo $a \in A$. Dizemos que A tem *mínimo* se existir $m \in A$ tal que $m \leq a$ para todo $a \in A$.

Segue a

Definição 4.12. Um *corte* é um subconjunto $L \subset \mathbb{Q}$ que satisfaz às seguintes propriedades: (i) $L \neq \emptyset$ e $\mathbb{Q} - L \neq \emptyset$; (ii) se $r \in L$ e se s é um número racional tal que $s < r$ então $s \in L$; (iii) L não tem máximo em $\mathbb{Q}$.

Temos agora a

Definição 4.13. O conjunto

$$\mathbb{R} = \{L \subset \mathbb{Q} \mid L \text{ é um corte } \}$$

chama-se *conjunto dos números reais*.



Figura 4.16. Richard Dedekind (1831-1916) foi um matemático, filósofo e professor universitário alemão. Estudou na Universidade de Göttingen, e foi o último aluno de Carl F. Gauss. Contribuiu nas áreas de Teoria dos Anéis, fundamentação axiomática dos números naturais e Teoria Algébrica dos Números. Durante suas aulas como professor de Cálculo Diferencial e Integral na escola politécnica de sua cidade natal, desenvolveu os denominados cortes de Dedekind. Mais detalhes sobre a foto na pág. 250.

A primeira observação que fazemos é:

Proposição 4.14. *Seja r um número racional. O conjunto $L_r = \{s \in \mathbb{Q} \mid s < r\}$ é um corte.*

Demonstração. Devemos verificar as três condições da Definição 4.12. É claro que as condições (i) e (ii) estão satisfeitas. Para ver (iii), suponhamos que L_r tenha máximo m. Então $m < r$. Mas entre m e r existe um número racional s. Logo $m < s < r$ e $s \in L_r$. Mas $m < s$ contraria o fato de m ser máximo de L_r. Portanto L_r não tem máximo, e isso termina a demonstração. □

Para todo $r \in \mathbb{Q}$ o corte L_r será chamado *corte racional*. Os outros cortes serão chamados *cortes irracionais*. Fazendo a identificação $L_r \cong r$ vemos que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Sabemos que $\mathbb{R} - \mathbb{Q} \neq \emptyset$. Os elementos desse conjunto chamam-se *números irracionais*.

Quando definimos um novo conjunto numérico a primeira providência é definir operações nesse conjunto. No caso de $\mathbb{R}$ devemos definir as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão de modo que sejam uma extensão das respectivas operações já definidas em $\mathbb{Q}$. Em $\mathbb{R}$ devemos também definir uma ordem compatível com a ordem de $\mathbb{Q}$. Para não sobrecarregar este texto fazemos isso de forma sintética, e não nos preocupamos em demonstrar todas as propriedades. O estudante pode obter mais detalhes em [65], página 43 e seguintes, e em [106], página 3 e seguintes.

Definição 4.15. Se L e T são cortes, escrevemos $L < T$ quando existe um número racional r tal que $r \in T$ e $r \notin L$.

Também usamos para os cortes as notações $>$, $\leq$ e $\geq$ com os significados de costume. É fácil ver que vale a Lei da Tricotomia: quaisquer que sejam os cortes L e T temos: $L < T$ ou $L = T$ ou $L > T$. Também é fácil verificar a transitividade: dados cortes L, S e T tais que $L < S$ e $S < T$ então $L < T$. Vale também a seguinte propriedade: se r e s são racionais, então $L_r < L_s$ se e somente se $r < s$. Ainda, para todo corte L, temos $r \in L$ se e somente se $L_r < L$.

Uma propriedade esperada é a

Proposição 4.16. *Sejam L e T cortes e suponha que para todo corte racional S_r tal que $S_r < L$ então $S_r < T$, e vice-versa. Nessas condições vale que $L = T$.*

Em outros termos, os números reais x e y são iguais quando todo racional $< x$ é também $< y$ e vice-versa.

Proposição 4.17. *Sejam L e T cortes tais que $L < T$. Então existe um corte racional L_s tal que $L < L_s < T$.*

Portanto entre dois números reais quaisquer sempre existe um número racional.

Demonstração. Da definição de $L < T$ temos que existe um racional r tal que $r \in T$ e $r \notin L$. Como T não tem máximo, então r não é máximo de T. Portanto existe um racional s tal que $r < s$ e $s \in T$. Como $s \in T$ e $s \notin L_s$, então $L_s < T$. Como $r \in L_s$ e $r \notin L$ vem $L < L_s$. □

Definimos agora adição de cortes. Precisamos primeiro da

Proposição 4.18. *Se L e T são cortes, então o conjunto $L+T = \{r+s \mid r \in L \text{ e } s \in T\}$ é um corte.*

Definição 4.19. $L+T$ chama-se *soma* dos cortes L e T.

Fica definida uma operação de *adição* em $\mathbb{R}$. É fácil verificar as propriedades associativa e comutativa. Temos também que L_0 é o elemento neutro dessa operação. Se r e s são racionais então $L_r + L_s = L_{r+s}$.

Proposição 4.20. *Seja L um corte. Então o conjunto $S = \{r \in \mathbb{Q} \mid -r \in \mathbb{Q} - L \text{ e } -r \text{ não é mínimo de } \mathbb{Q} - L\}$ é um corte. Ainda, S é o único corte tal que $L + S = L_0$.*

Definição 4.21. Seja L um corte. Indicaremos por $-L$ o corte S definido na Proposição 4.20, chamado *corte oposto* de L.

Portanto $L+(-L) = L_0 = (-L)+L$. Se L e T são cortes tais que $L < T$ então $L+S < T+S$ para todo corte S.

Proposição 4.22. *Sejam L e T cortes. Então existe um único corte S tal que $L + S = T$.*

Definição 4.23. Sejam L e T cortes. O corte S definido na Proposição 4.22 é chamado *corte diferença* de T e L, e é indicado por $T - L$. Fica definida uma operação de *subtração* em $\mathbb{R}$.

Proposição 4.24. *Sejam L e T cortes tais que $L \geq L_0$ e $T \geq L_0$. Consideremos o conjunto*

$$LT = \{r \in \mathbb{Q} \mid r < 0\} \cup \{rs \mid r \in L \text{ e } r \geq 0 \text{ e } s \in T \text{ e } s \geq 0\}.$$

Então LT é um corte.

Definição 4.25. Seja L um corte. O *valor absoluto* de L é

$$|L| = \begin{cases} L & \text{se } L \geq L_0; \\ -L & \text{se } L < L_0. \end{cases}$$

Definição 4.26. Sejam L e T cortes. Definimos o *produto* de L e T por

$$LT = \begin{cases} LT & \text{se } L \geq L_0 \text{ e } T \geq L_0 \text{ (Proposição 4.24)} ; \\ -|L||T| & \text{se } L < L_0 \text{ e } T \geq L_0; \\ -|L||T| & \text{se } L \geq L_0 \text{ e } T < L_0; \\ |L||T| & \text{se } L < L_0 \text{ e } T < L_0. \end{cases}$$

Fica definida uma operação de *multiplicação* em $\mathbb{R}$. Podem ser verificadas as propriedades comutativa, associativa e distributiva. Ainda L_1 é o elemento neutro. Para todo corte L temos $LL_0 = L_0$. Quaisquer que sejam os cortes L e T, se $LT = L_0$ então $L = L_0$ ou $T = L_0$. Se $L_0 < L < T$ e se $S > L_0$, então $LS < TS$. Se r e s são racionais então $L_r L_s = L_{rs}$.

Finalmente temos a

Proposição 4.27. *Sejam L e T cortes tais que $L \neq L_0$. Então existe um único corte S tal que $LS = T$.*

Em particular, se L é um corte tal que $L \neq L_0$, então existe um único corte S tal que $LS = L_1$. O corte S é chamado *inverso* de L.

O conjunto $\mathbb{R}$ assim definido resguarda uma importante propriedade da reta numérica, a continuidade, isto é, no conjunto $\mathbb{R}$ não existem "furos". As lacunas que foram observadas na associação números racionais $\sim$ reta numérica não existem mais na associação números reais $\sim$ reta numérica.

Dedekind descreveu essa propriedade através do

Teorema 4.28. *Sejam A e B subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}$ tais que $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = \mathbb{R}$ e se $x \in A$ e $y \in B$ então $x < y$. Nessas condições existe um único número real z tal que $x \leq z$ para todo $x \in A$ e $z \leq y$ para todo $y \in B$.*

Corolário 4.29. *Nas condições do Teorema 4.28 ou A tem máximo ou B tem mínimo.*

A afirmação do Teorema 4.28 é referida como *Propriedade da Completitude* de $\mathbb{R}$. Ela pode ser descrita de outra forma, mais fácil de utilizar. Antes de fazê-lo vejamos algumas definições.

Definição 4.30. Dado um subconjunto não vazio A de $\mathbb{R}$, dizemos que A é *limitado inferiormente* se existe $s \in \mathbb{R}$ tal que $s \leq a$ para todo $a \in A$. Nesse caso chamamos s de *limitante inferior*. Por outro lado, A se diz *limitado superiormente* se existe $r \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq r$ para todo $a \in A$. Nesse caso chamamos r de *limitante superior*. Dizemos que A é *limitado* se for limitado inferiormente e limitado superiormente. Caso contrário dizemos que A é *ilimitado*. Dizemos que A tem *máximo* se existir $m \in A$ tal que $a \leq m$ para todo $a \in A$. Dizemos que A tem *mínimo* se existir $m \in A$ tal que $m \leq a$ para todo $a \in A$. Se A é limitado superiormente, o mínimo do conjunto de seus limitantes superiores, se existir, é chamado *supremo* de A. Se A é limitado inferiormente, o máximo do conjunto de seus limitantes inferiores, se existir, é chamado *ínfimo* de A.

Temos agora o

Teorema 4.31 (Propriedade da completitude dos números reais)**.** *Todo subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ limitado superiormente tem supremo.*

Por simetria temos também que todo subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ limitado inferiormente tem ínfimo. Para ver uma demonstração desse teorema consulte [106], página 13.

Exemplo 4.32. Vejamos o que é $\sqrt{2}$ na forma de um corte. Seja

$$L = \{r \in \mathbb{Q} \mid r < 0\} \cup \{r \in \mathbb{Q} \mid r \geq 0 \text{ e } r^2 < 2\}.$$

Provemos primeiro que L é um corte, em acordo com a Definição 4.12. Como $1 \in L$, temos $L \neq \emptyset$. Como $2 \notin L$, temos $\mathbb{Q} - L \neq \emptyset$. Portanto está satisfeita a condição (i) da Definição. Sejam $x \in L$ e y um número racional tal que $y < x$. Se $x \leq 0$ então $y < 0$ e $y \in L$. Suponhamos $x > 0$. Se $y < 0$ então $y \in L$. Seja $y \geq 0$. Então $y^2 < x^2$, logo $y^2 < 2$ e $y \in L$. Portanto está também satisfeita a condição (ii) da Definição. Falta provar que L não tem máximo.

Seja $x \in L$ tal que $x > 0$. Então $x^2 < 2$ e $\frac{2-x^2}{2x+1} > 0$. Portanto existe um número racional t tal que

$$0 < t < 1 \quad \text{e} \quad 0 < t < \frac{2 - x^2}{2x + 1}.$$

Notemos que $x + t \in L$. De fato, $x + t > 0$ e

$$(x + t)^2 = x^2 + 2xt + t^2 = x^2 + (2x + t)t < x^2 + (2x + 1)t < x^2 + (2 - x^2) = 2.$$

Portanto, para todo $x \in L$ existe $y \in L$ tal que $x < y$. Isso prova que L não tem máximo, e que L é um corte. Como $L > L_0$, usando a Proposição 4.24 temos

$$LL = \{r \in \mathbb{Q} \mid r < 0\} \cup \{rs \mid r, s \in L, r \geq 0, s \geq 0\}.$$

Provamos agora que $LL = L_2$, em que $L_2 = \{s \in \mathbb{Q} \mid s < 2\}$ é o corte racional determinado por 2. Vejamos primeiro que $LL \subseteq L_2$. Seja $x \in LL$. Se $x < 0$, é claro que $x \in L_2$. Suponhamos $x \geq 0$. Então $x = rs$, com $r \geq 0$, $s \geq 0$, $r^2 < 2$ e $s^2 < 2$. Então $r^2 s^2 < 4 \Rightarrow (rs)^2 < 4 \Rightarrow rs < 2$ $\Rightarrow x < 2$. Logo $x \in L_2$, e $LL \subseteq L_2$.

Seguimos provando que $L_2 \subseteq LL$. Seja $x \in L_2$. Se $x < 0$, é claro que $x \in LL$. Se $0 \leq x \leq 1$ escrevemos $x = x \cdot 1$, com $x^2 < 2$ e $1^2 < 2$. Portanto $x \in LL$. Suponhamos $1 < x < 2$. Queremos escrever $x = rs$, com $r > 0$ e $s > 0$ racionais tais que $r^2 < 2$ e $s^2 < 2$. Para isso nos inspiramos na Subseção 3.6.2, página 54.

Começamos com $r_0 = x$ e $s_0 = 1$. Temos $r_0, s_0 \in \mathbb{Q}$, $r_0 > s_0 > 0$, $x = r_0 s_0$ e $r_0 - s_0 = x - 1 < 2 - 1 = 1$.

Definimos agora $r_1 = (r_0 + s_0)/2$ e $s_1 = x/r_1$. Temos $r_1, s_1 \in \mathbb{Q}$, $r_1 > 0$, $s_1 > 0$, $x = r_1 s_1$. Ainda

$$r_1^2 - x = \left(\frac{r_0 + s_0}{2}\right)^2 - r_0 s_0 = \frac{r_0^2 + 2r_0 s_0 + s_0^2 - 4r_0 s_0}{4} = \frac{(r_0 - s_0)^2}{4}.$$

Isso implica $r_1^2 > x \Rightarrow r_1^2 > r_1 s_1 \Rightarrow r_1 > s_1$. Ainda

$$r_1 - s_1 = \frac{r_0 + s_0}{2} - \frac{x}{r_1} = \frac{r_0 + s_0}{2} - \frac{2r_0 s_0}{r_0 + s_0} = \frac{r_0 - s_0}{r_0 + s_0}\,\frac{r_0 - s_0}{2} < \frac{r_0 - s_0}{2}.$$

Em seguida definimos $r_2 = (r_1 + s_1)/2$ e $s_2 = x/r_2$. Temos $r_2, s_2 \in \mathbb{Q}$, $r_2 > 0$, $s_2 > 0$, $x = r_2 s_2$. Ainda

$$r_2^2 - x = \frac{(r_1 - s_1)^2}{4} \quad \text{e} \quad r_2 > s_2 \quad \text{e} \quad r_2 - s_2 < \frac{r_1 - s_1}{2}.$$

Dessa forma definimos indutivamente, para todo número natural $n \geq 0$, números racionais positivos r_n e s_n tais que $x = r_n s_n$, $r_0 > s_0$, $r_0 - s_0 < 1$, e, para todo $n \geq 1$,

$$r_n^2 - x = \frac{(r_{n-1} - s_{n-1})^2}{4} \quad \text{e} \quad r_n > s_n \quad \text{e} \quad r_n - s_n < \frac{r_{n-1} - s_{n-1}}{2}.$$

Portanto

$$r_n - s_n < \frac{1}{2^n} \quad \text{e} \quad r_n^2 - x < \frac{1}{2^{2n+2}}$$

para todo $n \geq 1$. Escolhendo n suficientemente grande para que $1/2^{2n+2} < 2 - x$ temos

$$r_n^2 < x + \frac{1}{2^{2n+2}} < x + 2 - x = 2 \quad \text{e} \quad s_n^2 < r_n^2 < 2.$$

Para esse n temos $x = r_n s_n$, $r_0 > s_0 > 0$, $r_n^2 < 2$ e $s_n^2 < 2$. Logo $x \in LL$, e terminamos a demonstração de que $LL = L_2$. Definimos $L = \sqrt{2}$. Como identificamos $L_2 = 2$, temos $(\sqrt{2})^2 = 2$, demonstrando assim que existe um número real positivo y tal que $y^2 = 2$.

Terminamos aqui nossa exposição sobre o modelo de Dedekind e a gênese histórica dos números reais. O estudante certamente ficou com a impressão de que não é simples trabalhar com os cortes de Dedekind. Isso é verdade. Por isso esse recurso é utilizado apenas para definir o conjunto dos números reais e obter suas propriedades. Depois disso podemos esquecer os cortes, e para investigar as propriedades dos números reais utilizamos de preferência as sequências convergentes, que serão estudadas no capítulo seguinte.

4.7 Pequeno dicionário de propriedades de $\mathbb{R}$

As operações de adição e multiplicação de $\mathbb{R}$ satisfazem às seguintes propriedades fundamentais:

A1. *Associatividade da adição*: quaisquer que sejam a, b e c em $\mathbb{R}$ tem-se $(a+b)+c = a+(b+c)$.

A2. *Elemento neutro da adição*: o elemento $0 \in \mathbb{R}$ satisfaz à seguinte condição: $a + 0 = a = 0 + a$, qualquer que seja $a \in \mathbb{R}$.

A3. *Elemento simétrico da adição*: para todo $a \in \mathbb{R}$ existe um elemento b em $\mathbb{R}$ tal que $a + b = 0 = b + a$. O elemento b chama-se *simétrico* de a em $\mathbb{R}$ e é indicado por $-a$.

A4. *Comutatividade da adição*: quaisquer que sejam a e b em $\mathbb{R}$ tem-se $a + b = b + a$.

M1. *Associatividade da multiplicação*: quaisquer que sejam a, b e c em $\mathbb{R}$ tem-se $(ab)c = a(bc)$.

M2. *Elemento neutro da multiplicação*: o elemento $1 \in \mathbb{R}$ satisfaz à seguinte condição: $a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$, qualquer que seja $a \in \mathbb{R}$.

M3. *Elemento inverso da multiplicação*: para todo $a \neq 0$ em $\mathbb{R}$ existe um elemento b em $\mathbb{R}$ tal que $ab = 1 = ba$. O elemento b chama-se *inverso* de a em $\mathbb{R}$, e é indicado por a^{-1}.

M4. *Comutatividade da multiplicação*: quaisquer que sejam a e b em $\mathbb{R}$ tem-se $ab = ba$.

D. *Distributividade*: quaisquer que sejam a, b e c em $\mathbb{R}$ tem-se $a(b + c) = ab + ac$.

Dados a e b em $\mathbb{R}$, a soma $a + (-b)$ será indicada por $a - b$, e é chamada *diferença* entre a e b. A operação que associa a a e b sua diferença $a - b$ é chamada *subtração*.

Dados a e b em $\mathbb{R}$, com $b \neq 0$, o elemento ab^{-1} será indicado também por a/b, ou $\frac{a}{b}$, e é chamado *quociente* entre a e b. A operação que associa a a e a b seu quociente a/b é chamada *divisão*.

O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ é *ordenado*. Isso significa que $\mathbb{R}$ tem um subconjunto $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$, chamado *conjunto dos números reais positivos*, satisfazendo às seguintes condições:

P1. A soma e o produto de números reais positivos são positivos.

P2. Dado $a \in \mathbb{R}$, uma e apenas uma das seguintes alternativas ocorre: ou $a = 0$, ou $a \in \mathbb{R}_+$ ou $-a \in \mathbb{R}_+$.

Se indicarmos por $\mathbb{R}_-$ o conjunto dos elementos $-a$, com $a \in \mathbb{R}_+$, temos

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \cup \mathbb{R}_-$$

(união disjunta). $\mathbb{R}_-$ chama-se *conjunto dos números reais negativos*.

Se a e b são elementos de $\mathbb{R}$, escrevemos $a < b$ quando $b - a \in \mathbb{R}_+$. Isso equivale a dizer que existe $c \in \mathbb{R}_+$ tal que $b = a + c$.

Escrevemos $b > a$ quando $a < b$. Se $a < b$ dizemos que a é menor do que b, e se $b > a$ dizemos que b é maior do que a. Em particular $a > 0$ significa que a é positivo, ou seja, que $a \in \mathbb{R}_+$. Por outro lado, $a < 0$ significa que a é negativo. Escrevemos $a \leq b$ para indicar que $a < b$ ou $a = b$. Analogamente para $a \geq b$.

A relação de ordem $a < b$ tem as seguintes propriedades:

O1. *Transitividade*: quaisquer que sejam a, b e c em $\mathbb{R}$, se $a < b$ e $b < c$, então $a < c$.

O2. *Tricotomia*: quaisquer que sejam a e b em $\mathbb{R}$, ocorre uma e apenas uma das alternativas seguintes: ou $a = b$, ou $a < b$ ou $a > b$.

O3. *Monotonicidade da adição*: quaisquer que sejam a, b e c em $\mathbb{R}$, se $a < b$ então $a+c < b+c$.

O4. *Monotonicidade da multiplicação*: quaisquer que sejam a, b e c em $\mathbb{R}$, se $a < b$ e se $c > 0$ então $ac < bc$. Se $a < b$ e se $c < 0$ então $ac > bc$.

Definição 4.33. Dado $a \in \mathbb{R}$, seu *valor absoluto*, é anotado por $|a|$ e definido por

$$|a| = \begin{cases} a & \text{se } a \geq 0 \\ -a & \text{se } a < 0. \end{cases}$$

O valor absoluto tem as seguintes propriedades, dentre outras:

VA1. Para todo $a \in \mathbb{R}$ se tem $|a| \geq 0$.

VA2. $|a| = 0 \iff a = 0$.

VA3. Para todo $a \in \mathbb{R}$ se tem $|-a| = |a|$.

VA4. $|ab| = |a||b|$, quaisquer que sejam $a, b \in \mathbb{R}$.

VA5. $|a \pm b| \leq |a| + |b|$, quaisquer que sejam $a, b \in \mathbb{R}$.

VA6. $|a| \leq b \iff -b \leq a \leq b$, quaisquer que sejam $a, b \in \mathbb{R}$.

Lembramos também a

Propriedade da completitude Todo subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ limitado superiormente tem supremo.

Todo conjunto numérico satisfazendo as propriedades listadas acima chama-se *corpo ordenado completo*. Portanto $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado completo.

Daqui por diante, em todo este texto, investigamos o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ utilizando a linguagem algébrica sugerida em nosso "pequeno dicionário de propriedades". Vejamos como exemplo duas situações.

No final da Seção 4.2 vimos o que denominamos de *princípio da não limitação da reta*. Relacionamos essa propriedade com o conjunto dos números racionais no Teorema 4.1. Como fica esse resultado agora com o novo conjunto $\mathbb{R}$?

Temos:

Teorema 4.34 (Princípio da ordenação de Eudoxo)**.** *Quaisquer que sejam os números reais positivos M e δ, existe um inteiro positivo n tal que $n\delta > M$.*

O Princípio da ordenação de Eudoxo é chamado de Princípio de Arquimedes por muitos autores. Vejamos sua demonstração.

Demonstração. Suponhamos que existam números reais positivos M e δ para os quais a afirmação seja falsa. Então é limitado superiormente por M o conjunto $A = \{n\delta \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$. Seja s o supremo de A. Como $s - \delta < s$, então $s - \delta$ não é um limitante superior de A, e assim existe $n\delta \in A$ tal que $n\delta > s - \delta$. Segue que $(n+1)\delta > s$. Mas $(n+1)\delta \in A$, o que contraria o fato de ser s o supremo de A. Portanto vale a afirmação do Teorema. □

No Capítulo 9 precisaremos do seguinte resultado:

Problema resolvido 4.35. Prove que, para todo número real $a > 0$ e para todo número inteiro $n \geq 2$, existe um único número real positivo b tal que $b^n = a$. Esse número b é denominado *raiz n-ésima de a* e é anotado por $\sqrt[n]{a}$, ou por $\sqrt{a}$ quando $n = 2$.

Demonstração. Seja $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^n < a\}$. Como $0 \in B$, vem que $B \neq \emptyset$. Por outro lado, seja $y = 1 + a$. Então $y^n > y > a$. Afirmo que y é um limitante superior de B. Seja $x \in B$. Se $x \leq 0$, temos $x < y$, pois y é positivo. Se $0 < x$, de $x^n < a$ temos $x^n < y^n$, o que implica $x < y$ (caso contrário, se $y \leq x$, temos $yy \leq xy$ e $xy \leq xx \Rightarrow y^2 \leq x^2$, etc.). Portanto y é um limitante superior de B. Seja b o supremo de B. Vamos provar que $b^n = a$.

Suponhamos primeiro que $b^n < a$. Seja $h \in \mathbb{R}$ tal que

$$0 < h < 1 \quad \text{e} \quad h < \frac{a - b^n}{(1+b)^n - b^n}.$$

Temos

$$(b+h)^n = b^n + \binom{n}{1} b^{n-1}h + \binom{n}{2} b^{n-2}h^2 + \cdots + \binom{n}{n} h^n \leq$$

$$\leq b^n + h\left[\binom{n}{1} b^{n-1} + \binom{n}{2} b^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n}\right] =$$

$$= b^n + h[(1+b)^n - b^n] < b^n + (a - b^n) = a.$$

Portanto $b^n < a \Rightarrow b + h \in B$, contrariando o fato de que b é o supremo de b.

Suponhamos agora que $b^n > a$. Seja $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$0 < k < 1 \quad \text{e} \quad k < \frac{b^n - a}{(1+b)^n - b^n}.$$

Para todo número real t tal que $t \geq b - k$ temos

$$t^n \geq (b-k)^n = b^n - \binom{n}{1} b^{n-1}k + \binom{n}{2} b^{n-2}k^2 - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} k^n =$$

$$= b^n - k\left[\binom{n}{1} b^{n-1} - \binom{n}{2} b^{n-2}k + \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n} k^{n-1}\right] \geq$$

$$\geq b^n - k\left[\binom{n}{1} b^{n-1} + \binom{n}{2} b^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n}\right] =$$

$$= b^n - k[(1+b)^n - b^n] > b^n - (b^n - a) = a.$$

Portanto $b - k$ é um limitante superior de B, contrariando o fato de que b é o supremo de b. Segue que $b^n = a$.

Para ver a unicidade, sejam b_1 e b_2 números reais positivos tais que $b_1^n = a$ e $b_2^n = a$. Se fosse $b_1 < b_2$, aplicando a propriedade de compatibilidade entre a ordem a a multiplicação teríamos $b_1^n < b_2^n$, o que não é possível. Igualmente não podemos ter $b_2 < b_1$. Logo $b_1 = b_2$.

Terminamos. □

4.8 Problemas

Problema 4.8.1. Use o esquema da Figura 4.15 para desenhar um segmento de medida $3/\sqrt{2}$.

Problema 4.8.2. Use o Princípio de Eudoxo 4.34 para demonstrar o seguinte resultado. Seja $r \in \mathbb{R}$ tal que $0 \leq r < 1/n$ para todo inteiro positivo n. Então $r = 0$.

Problema 4.8.3. Usando o Princípio de Eudoxo 4.34 demonstre que para todo $x \in \mathbb{R}$ existem inteiros m e n tais que $m < x < n$.

Problema 4.8.4. Use o Princípio de Eudoxo 4.34 para demonstrar o seguinte resultado. Sejam a_0, a_1, a_2, ... números reais positivos tais que $a_1 < a_0/2$, $a_2 < a_1/2$, ... Seja $\varepsilon > 0$ um número real. Então existe n tal que $a_n < \varepsilon$.

Problema 4.8.5. Vimos, na Seção 4.4, que a diagonal de um quadrado unitário e seu lado são incomensuráveis. **a)** Redija a demonstração de que a diagonal de um quadrado qualquer e seu lado são incomensuráveis. **b)** Em um dado desenho geométrico, se dois segmentos são incomensuráveis em relação ao segmento unitário, eles são necessariamente incomensuráveis entre si? **c)** Demonstre que, em um dado desenho geométrico, se a medida de um segmento é um número irracional, então ele é incomensurável em relação a um segmento unitário.

Problema 4.8.6. a) Prove que a soma ou o produto de um número racional (não nulo no caso de produto) com um número irracional é irracional. **b)** Prove que o inverso de qualquer número irracional é irracional. **c)** Demonstre que, se ξ é irracional, então $\sqrt[n]{\xi}$, quando existir, também é. **d)** Dê exemplos para mostrar que a soma ou o produto de números irracionais positivos pode ser racional. **e)** Dê exemplos para mostrar que o quadrado de um número irracional pode ser irracional.

Problema 4.8.7. Dê exemplos ou prove que não existe. **a)** dois números irracionais diferentes cujo produto seja racional e cujo quociente seja também racional. **b)** dois números irracionais diferentes cuja soma seja racional e cuja diferença seja também racional.

Problema 4.8.8. Já sabemos que existem infinitos números irracionais, por exemplo, $\sqrt{k}$ para todo inteiro positivo k tal que $\sqrt{k}$ não é inteiro. **a)** Existem finitos ou infinitos irracionais no intervalo $[0, 1]$? **b)** No intervalo $[1, 2]$ existem mais ou menos números irracionais do que no intervalo $[0, 1]$? **c)** Na semirreta numérica positiva $[0, \infty)$ existem mais ou menos números irracionais do que na semirreta numérica negativa $(-\infty, 0]$? **d)** No intervalo $[1, \infty)$ existem mais ou menos números irracionais do que no intervalo $[17, 18]$?

Problema 4.8.9. Complete os detalhes da seguinte demonstração da Proposição 4.17, que não usa cortes. A afirmação é: entre dois números reais quaisquer existe um número racional. Conclua que entre dois números reais quaisquer existem infinitos números racionais.

Sejam $x < y$ números reais, e seja $\delta = y - x$. Existe um inteiro positivo n tal que $n\delta > 1$. Existe um inteiro k tal que $k > xn$. Portanto é não vazio o conjunto $A = \{k \in \mathbb{Z} \mid \frac{k}{n} > x\}$. A tem mínimo m. Portanto $\frac{m}{n} > x$ e $\frac{m-1}{n} \leq x$. Logo $x < \frac{m}{n} < y$.

Problema 4.8.10. Demonstre que entre dois números reais quaisquer existem infinitos números irracionais.

Problema 4.8.11. a) Demonstre que, para todo número real a e para todo número real $\varepsilon > 0$, existem um número racional r tal que $|a - r| < \varepsilon$, e um número irracional ξ tal que $|a - \xi| < \varepsilon$. **b)** Explique por que os números racionais são densos na reta, assim como os irracionais. Isto é, todo intervalo não vazio aberto da reta contém um número racional e um número irracional.

Problema 4.8.12. Seja S o subconjunto de $\mathbb{R}$ formado pelos números $n/(n+1)$ para todo $n \geq 0$ inteiro. Mostre que S é limitado e encontre o supremo e o ínfimo de S.

Problema 4.8.13. Prove que existem números irracionais ξ e μ tais que ξ^μ é racional.

Problema 4.8.14. Considere um sistema de coordenadas cartesianas no plano. Demonstre que a reta determinada por $(0,0)$ e $(1,\sqrt{2})$ não contém ponto (m,n) com $m,n \in \mathbb{Z}$ e $m \neq 0$ ou $n \neq 0$.

Problema 4.8.15. Usando apenas as propriedades dadas na Seção 4.7, prove os resultados enunciados a seguir para números reais quaisquer. **a)** $a+c = b+c$ implica $a = b$. **b)** O elemento neutro 0 para a operação de adição é único. **c)** Todo número real tem um único simétrico. **d)** $-(-a) = a$ e $-(a+b) = (-a)+(-b)$. **e)** $b+(a-b) = a$, $0-a = -a$ e $a-a = 0$. **f)** $a(b-c) = ab-ac$. **g)** $a \cdot 0 = 0$. **h)** O elemento neutro 1 para a operação de multiplicação é único. **i)** Se $a \cdot b = 0$, então $a = 0$ ou $b = 0$. **j)** O inverso de qualquer número $a \neq 0$ é único. **k)** Se $c \neq 0$ e se $ac = bc$, então $a = b$. **l)** $(-a)b = -(ab)$ e $(-a)(-b) = ab$. **m)** Se $a \neq 0$ e $b \neq 0$ então $(a^{-1})^{-1} = a$ e $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$.

Problema 4.8.16. Usando apenas as propriedades dadas na Seção 4.7, prove que a^2 é positivo para todo $a \neq 0$ em $\mathbb{R}$. Demonstre que 1 é positivo.

Problema 4.8.17. Dados a e b em $\mathbb{R}$, com $b \neq 0$, na Seção 4.7 definimos a fração $\frac{a}{b}$, ou a/b, por ab^{-1}. Usando apenas as propriedades da referida Seção prove que

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \qquad \frac{a}{b}\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \qquad \frac{a}{b}\Big/\frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$$

Problema 4.8.18. Usando apenas as propriedades dadas na Seção 4.7, prove os resultados enunciados a seguir para números reais quaisquer. **a)** $|a+b| \geq |a| - |b|$. **b)** $|x-a| < \varepsilon \iff a-\varepsilon < x < a+\varepsilon$. **c)** $|a-b| \geq |a| - |b|$. **d)** $|a-b| \geq |b| - |a|$. **e)** $|a| \leq |a+b| + |b|$. **f)** $||a| - |b|| \leq |a-b|$.

Problema 4.8.19. Demonstre para quaisquer números reais a e b positivos: (i) $\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$; (ii) $0 < a < b$ implica $0 < \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$.

Problema 4.8.20. Complete os detalhes da seguinte demonstração, ao estilo da matemática da Antiga Grécia, de que o lado e a diagonal de qualquer quadrado são incomensuráveis.

Considere, como na Figura 4.17 , o quadrado $ABCD$ e sua diagonal AC. Suponhamos que AB e AC sejam comensuráveis. Então existe um segmento UV e números inteiros positivos m e n tais que $AB = mUV$ e $AC = nUV$. Notemos que $n > m$ e $2m > n$.

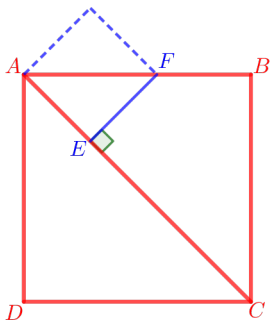


Figura 4.17 Incomensurabilidade entre o lado e a diagonal do quadrado.

Seja E o ponto de AC tal que $CE = BC$, e seja F o ponto de AC tal que $EF \perp AC$. Temos $A-E-C$ (E está entre A e C), e $A-F-B$. Temos também $|EF| = |BF|$ e $|AE| = |EF|$. Logo $AE = AC - AB = nUV - mUV = (n-m)UV$ e $AF = AB - BF = AB - AE = mUV - (n-m)UV = (2m-n)UV$. Portanto encontramos um novo quadrado com lado e diagonal comensuráveis em relação ao mesmo segmento UV. Repetindo o procedimento n vezes, chegamos a uma contradição.

Solução. Traçando o segmento de B ao ponto médio M de AC, e aplicando a desigualdade triangular ao triângulo isósceles AMB, temos $|AB| < 2 \cdot \frac{1}{2}|AC| = |AC|$, logo $m < n$. Aplicando a desigualdade triangular ao triângulo isósceles ABC, temos $|AC| < 2|AB|$, logo $n < 2m$.

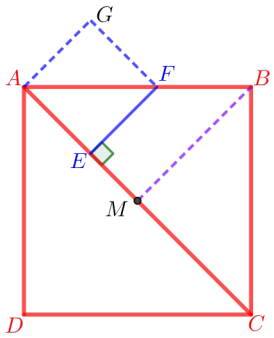


Figura 4.18 Incomensurabilidade entre o lado e a diagonal do quadrado - solução.

Sejam E e F dados como no enunciado. Como $|AB| > \frac{1}{2}|AC|$, vem $|CE| > |CM|$. Ainda, $|AB| < |AC|$ implica $|CE| < |AC|$, portanto vale $A - E - M$. Examinando o triângulo ABC, temos $EF \parallel BM$, logo $A - F - B$.

Temos $AE = AC - CE = AC - AB = nUV - mUV = (n - m)UV$. Por outro lado $CEF \cong CBF$ pelo caso lado-hipotenusa de triângulo retângulo, então $|EF| = |BF|$. Notemos ainda que, no quadrilátero $BCEF$, $m(\angle BFE) = 180° - 45°$, de modo que $m(\angle AFE) = 180° - (180° - 45°) = 45°$. Logo AEF é isósceles de base AF, e temos $|AE| = |EF|$. Portanto $AF = AB - BF = AB - EF = AB - AE = mUV - (n - m)UV = (2m - n)UV$.

Em seguida observamos que o lado AE do quadrado $AEBG$ satisfaz $|AE| < \frac{1}{2}|AC| < |AB|$, ou seja, é menor do que a metade do quadrado original $ABCD$. Ainda no quadrado $AEBG$, o lado e a diagonal são comensuráveis em relação ao mesmo segmento UV. Repetindo o procedimento n vezes, obtemos um quadrado com lado e diagonal comensuráveis em relação a UV, e com lado $< \frac{1}{2^n}|AB|$. Seja n suficientemente grande tal que $\frac{1}{2^n}|AB| < |UV|$. Então o lado do último quadrado é $< |UV|$, o que é uma contradição.

Fica provado que o lado e a diagonal de qualquer quadrado são incomensuráveis.

Problema 4.8.21. Complete os detalhes da seguinte demonstração do Teorema 4.9 usando áreas de triângulos. Considere a Figura 4.19. É dado o triângulo ABC, DE é paralelo a BC, com D entre A e B e com E entre A e C. Queremos provar que $AD/DB = AE/EC$.

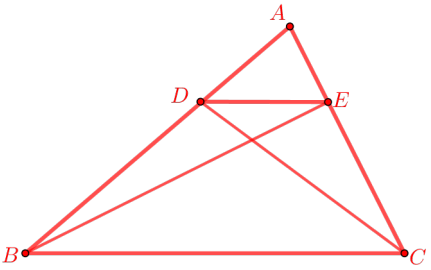


Figura 4.19 Uma demonstração do Teorema da Proporcionalidade de Tales.

Consideremos os segmentos BE e CD. Indicamos a área de uma figura do plano F por $a(F)$. Temos $a(BDE) = a(CDE)$. Ainda $a(ADE)/a(BDE) = AD/BD$ e $a(ADE)/a(CDE) = AE/CE$. Conclua.

4.9 Temas para investigação

Tema 4.9.1. Sejam λ e μ números irracionais tais que $\lambda + \mu$ é racional. Encontre condições necessárias e suficientes sobre os racionais r e s para que a combinação linear $r\lambda + s\mu$ seja irracional.

Tema 4.9.2. Um retângulo $ABCD$ chama-se *áureo* quando tiver a seguinte propriedade: se marcarmos o quadrado $ABEF$, com $B - E - C$ e $A - F - D$, o retângulo remanescente $DFEC$ é semelhante ao retângulo inicial. Confira a Figura 4.20. **a)** Pondo $a = AB$ e $b = EC$, mostre que $a/(a+b) = b/a$. **b)** Prove que o retângulo remanescente $DFEC$ também é áureo. **c)** Podemos assim obter uma infinidade de retângulos áureos. Os lados menores desses retângulos formam a sequência a, b, $a-b$, $2b-a$, $2a-3b$, ... Dê uma fórmula geral para essa sequência. **d)** Calcule o valor exato da razão a/b. Esse é o chamado *número áureo*. **e)** Prove que os lados de um retângulo áureo são incomensuráveis. **f)** Pesquise outras propriedades do retângulo áureo e do número áureo.

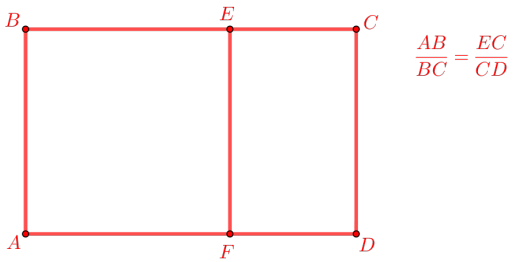


Figura 4.20 Retângulo áureo.

Tema 4.9.3. Faça uma pesquisa sobre outros números irracionais conhecidos, como a *razão de prata*.

Tema 4.9.4. Em geral, raios, diagonais, alturas, apótemas de polígonos regulares (assim como outras medidas) não são comensuráveis em relação a seus lados. Faça uma pesquisa sobre isso.

4.10 Atividades para licenciandos e professores

Atividade 4.10.1. A Base Nacional Comum Curricular [24] menciona números reais pela primeira vez no Sumário de Matemática do 9º ano do Ensino Fundamental. Faça uma leitura dos itens ali sugeridos. Com o que aprendeu até aqui neste texto, você se sente seguro sobre esses assuntos?

Atividade 4.10.2. Apresentar os números reais para estudantes da escola básica é certamente uma questão complicada. Como os autores de livros textos lidam com esse tema? Faça uma leitura sobre isso em livros didáticos.

Atividade 4.10.3. A construção dos números reais e a investigação de suas propriedades é um dos maiores feitos da mente analítica humana. Alguns desses aspectos podem ser despertados em estudantes da escola básica? Como? Pesquise opiniões de autores especializados em ensino da Matemática.

Atividade 4.10.4. Nas ciências, em geral, as medidas dos fenômenos são números expressos em notação decimal finita. Portanto, são números racionais. Sendo assim, existem aspectos teóricos dos números irracionais que possam interessar aos cientistas?

Capítulo 5

Sequências numéricas

5.1 Introdução

As sequências numéricas aparecem em todos os ramos da Matemática. São utilizadas para a descrição de conceitos e objetos matemáticos, implementação de processos iterativos, cálculo aproximado, dedução de propriedades, etc. Em particular, as sequências convergentes constituem um dos melhores instrumentos para investigação dos números reais.

5.2 Presença das sequências na Matemática

Uma sequência bem conhecida do estudante é a chamada *progressão aritmética*, definida por

$$a_1 = a \quad \text{e} \quad a_n = a_{n-1} + r \quad \text{para todo } n \geq 2, \tag{5.1}$$

em que a e r são números reais dados, chamados, respectivamente, *primeiro termo* e *razão*. As condições 5.1 definem a sequência passo a passo. Assim temos primeiro $a_1 = a$, depois $a_2 = a_1 + r = a + r$, em seguida $a_3 = a_2 + r = (a + r) + r = a + 2r$, e assim sucessivamente. Esse tipo de definição é denominada *por recorrência*, pois para obter um termo a_n precisamos "recorrer" ao termo anterior a_{n-1}. Conforme o estudante bem sabe, podemos transformar 5.1 em uma fórmula direta em que a_n depende apenas de n e dos números dados a e r:

$$a_n = a + (n-1)r \quad \text{para todo } n \geq 1. \tag{5.2}$$

Do ponto de vista computacional a fórmula direta é, em geral, melhor do que a expressão recorrente, pois para obter um determinado termo da sequência não é necessário calcular os termos anteriores. Transformar uma definição por recorrência em uma fórmula direta chama-se *resolver a recorrência*.

Outro exemplo de sequência bem conhecida do estudante é a chamada *progressão geométrica*, definida por

$$a_1 = a \quad \text{e} \quad a_n = qa_{n-1} \quad \text{para todo } n \geq 2, \tag{5.3}$$

em que a e q são números reais dados, também chamados, respectivamente, *primeiro termo* e *razão*. A fórmula direta para essa sequência é

$$a_n = aq^{n-1} \quad \text{para todo } n \geq 1. \tag{5.4}$$

Talvez a sequência mais famosa da Matemática seja a *sequência de Fibonacci*. Ela aparece na solução do seguinte problema, proposto por Leonardo de Pisa (conhecido também por Fibonacci) em seu livro *Liber Abaci* (Livro do Ábaco): "Quantos pares de coelhos serão produzidos num ano, começando com um só par, se, em cada mês, cada par gera um novo par, o qual se torna produtivo a partir do segundo mês?" Talvez seja esse o primeiro problema de crescimento populacional conhecido. Admitimos algumas hipóteses simplificadoras, por exemplo, nenhum coelho morre e sempre nascem aos pares, isto é, um macho e uma fêmea. Indicando por a_n a quantidade de pares no final do n-ésimo mês, temos $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 5$, e assim por diante, no final do mês n temos os pares que já existiam no final do mês $n-1$, portanto, a_{n-1}, e mais os que acabaram de nascer, cada par gerado por um par que existia no final do mês $n-2$, portanto, a_{n-2} pares. Dessa forma temos $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Podemos calcular $a_{12} = 233$, que é a quantidade de pares ao final de um ano, incluindo o par inicial.

Consideramos a seguinte definição adaptada: a sequência de Fibonacci $(f_n)_{n\geq 0}$ é dada por

$$\begin{cases} f_0 &= 0, \quad f_1 = 1, \\ f_n &= f_{n-1} + f_{n-2}, \quad n \geq 2. \end{cases} \tag{5.5}$$

Vemos que a sequência $(f_n)_{n\geq 0}$ é constituída pelos números 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ..., sendo que cada termo é a soma dos dois anteriores.

Nem sempre é fácil resolver uma definição por recorrência. O estudante pode verificar que a sequência de Fibonacci é dada pela fórmula direta

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right],$$

a qual pode ser demonstrada pelo Segundo Princípio da Indução Completa (cf. [96], Cap. 10, pág. 215).

Definição 5.1. Uma sequência é uma regra ou função que associa a cada inteiro positivo n um número real a_n. É usual representar uma sequência na forma "$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$", ou na forma $(a_n)_{n\geq 1}$. Diz-se que a_n é o *termo de ordem* n da sequência, e se lê "a índice n". O conjunto $\{a_n \mid n \geq 1\}$ chama-se *conjunto de valores* da sequência.

Na definição de sequência não é obrigatório começar com $n = 1$. Também não é obrigatório que o conjunto de índices seja infinito. Uma definição mais geral é a seguinte. Seja S um subconjunto do conjunto dos números inteiros. Uma função $f\colon S \to \mathbb{R}$ é uma *sequência indexada* por S. Pondo $a_n = f(n)$ para todo n em S, a sequência pode ser anotada por $(a_n)_{n\in S}$. Quando não for necessário especificar o domínio S da sequência ela pode ser indicada simplesmente por (a_n). Uma sequência (a_n) se diz *constante* quando $a_n = c$ para todo n, em que c é um número real.

As três sequências que apresentamos como exemplo nos dão uma pequena ideia da diversidade de aplicações que elas proporcionam. Mesmo nos limitando aos números inteiros, os tipos de sequências são praticamente infinitos. O estudante pode acessar o portal da internet [115] e consultar provavelmente todas as sequências de inteiros usadas na Matemática.

Mas aqui estamos interessados em uma classe particular de sequências, denominadas *convergentes*.

5.3 Sequências numéricas convergentes

A grosso modo dizemos que uma sequência (a_n) é convergente quando ela tende para um determinado número a, chamado *limite* da sequência. Nesse caso escrevemos $a_n \to a$.

Examinemos, como exemplo, a sequência $(1/n)_{n\geq 1}$. À medida que n aumenta, seus valores diminuem. Temos assim

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{1}{3}, \quad a_4 = \frac{1}{4}, \quad \ldots$$

Vemos que os valores dessa sequência se aproximam cada vez mais de 0, o que nos sugere que $a_n \to 0$. O mesmo ocorre com $(1/2^n)_{n\geq 1}$ e $(1/\sqrt{n})_{n\geq 1}$. Examinando seus valores podemos imaginar que $1/2^n \to 0$ e $1/\sqrt{n} \to 0$. Por outro lado, examinando os valores de $a_n = (n^2 - 1)/(n^2 + n + 1)$ vemos que

$$\begin{array}{llllll} a_1 & = 0 & a_6 & = 0{,}813 & a_{11} & = 0{,}902 \\ a_2 & = 0{,}428 & a_7 & = 0{,}842 & a_{12} & = 0{,}910 \\ a_3 & = 0{,}615 & a_8 & = 0{,}863 & a_{13} & = 0{,}918 \\ a_4 & = 0{,}714 & a_9 & = 0{,}879 & a_{14} & = 0{,}924 \\ a_5 & = 0{,}774 & a_{10} & = 0{,}891 & a_{15} & = 0{,}929 \end{array}$$

o que nos leva a considerar que o limite dessa sequência pode ser 1. Entretanto a tabela acima não nos autoriza descartar que o limite seja $19/20 = 0{,}95$, por exemplo. Mesmo aumentando a tabela e calculando $a_{50} \approx 0{,}9796$, o limite poderia ser $49/50 = 0{,}98$, por exemplo. Para constatar que realmente $a_n \to 1$ necessitamos de algo mais do que uma tabela.

Nos exemplos considerados acima as sequências são crescentes ou descrescentes. Podemos ter exemplos mais estranhos, como é o caso de $a_n = (1/n)\operatorname{sen} n$, $n \geq 1$ (n em radianos). Listamos abaixo seus quinze primeiros valores.

$$\begin{array}{llllll} a_1 & \approx +0{,}8415 & a_6 & \approx -0{,}0466 & a_{11} & \approx -0{,}0909 \\ a_2 & \approx +0{,}4546 & a_7 & \approx +0{,}0939 & a_{12} & \approx -0{,}0447 \\ a_3 & \approx +0{,}0470 & a_8 & \approx +0{,}1237 & a_{13} & \approx +0{,}0323 \\ a_4 & \approx -0{,}1892 & a_9 & \approx +0{,}0458 & a_{14} & \approx +0{,}0708 \\ a_5 & \approx -0{,}1918 & a_{10} & \approx -0{,}0544 & a_{15} & \approx +0{,}0434 \end{array}$$

O exame desses valores não nos esclarece se a sequência se acumula em algum ponto. Mas, podemos verificar algebricamente que a sequência converge para zero. Lembrando que $|\operatorname{sen} x| \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, temos $|a_n| \leq 1/n$ para todo $n \geq 1$. Como $1/n \to 0$, isso nos indica que $|(1/n)\operatorname{sen} n| \to 0$, e que $(1/n)\operatorname{sen} n \to 0$.

Essas considerações nos mostram que necessitamos de técnicas precisas para trabalhar com sequências convergentes. Precisamos ter uma definição e propriedades que permitam operacionalizar seu uso, por exemplo, as propriedades que foram utilizadas logo acima:

$$|a_n| < \frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad |a_n| \to 0$$

e

$$|a_n| \to 0 \quad \Rightarrow \quad a_n \to 0.$$

Vejamos primeiro como deve ser a definição de convergência para sequências. Suponhamos que temos uma sequência (a_n) e que o número $a \in \mathbb{R}$ seja um canditato a limite. Como essa sequência deve se aproximar de a?

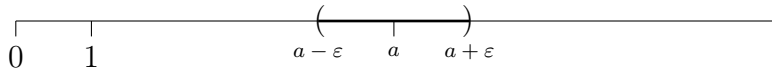


Figura 5.1. Intervalo de raio ε com centro em a.

Dado um número real $\varepsilon > 0$, consideremos os números $r \in \mathbb{R}$ que estão a uma distância $< \varepsilon$ de a. Eles formam o intervalo $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, conforme ilustra a Figura 5.1.

Se ocorrer $a_n \to a$ então, em algum momento, a sequência deve adentrar esse intervalo e não mais sair. Isso significa que deve existir um inteiro positivo n_0 tal que

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon).$$

Temos portanto a

Definição 5.2. Uma sequência de números reais $(a_n)_{n\geq 1}$ *converge* para um número real a quando, para todo número real $\varepsilon > 0$, existe um inteiro positivo n_0 tal que $n \geq n_0 \Rightarrow a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$.

Se isso ocorrer anotamos $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$, ou, se não houver perda de clareza, $\lim a_n = a$, ou simplesmente $a_n \to a$. O número a chama-se *limite* da sequência. Se uma sequência converge, dizemos que é *convergente*. Caso contrário, ela se diz *divergente*.

Um detalhe importante dessa definição é que a sequência pode entrar no intervalo e sair, mas existe um momento em que ela entra e não sai mais. Na ilustração da Figura 5.2 n_0 é algum inteiro $> m+1$.

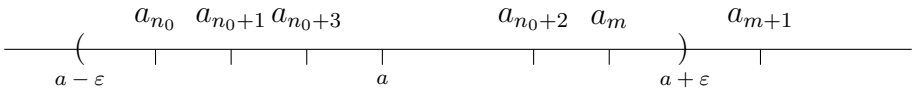


Figura 5.2. Sequência no intervalo de raio ε com centro em a.

Sobre a Definição 5.2 esclarecemos que a ideia é que o valor dado $\varepsilon > 0$ seja arbitrariamente pequeno. Notemos ainda que n_0 depende de ε. Se diminuirmos ε a tendência é que temos que aumentar o valor de n_0. Por isso às vezes essa definição é escrita da seguinte forma mais ilustrativa: "Uma sequência de números reais $(a_n)_{n\geq 1}$ converge para um número real a quando, para todo número real $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeno, existe um inteiro positivo arbitrariamente grande n_ε tal que $n \geq n_\varepsilon \Rightarrow a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$".

Observamos ainda que

$$\begin{aligned} a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) &\iff a-\varepsilon < a_n < a+\varepsilon \\ &\iff -\varepsilon < a_n - a < \varepsilon \\ &\iff |a_n - a| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto, na Definição 5.2, a condição

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$$

é equivalente a

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{para todo } n \geq n_0.$$

Exemplo 5.3. Demonstramos a seguir que $1/n \to 0$. Seja $\varepsilon > 0$ um número real. Consideremos o número $1/\varepsilon$. Em virtude do Princípio de Eudoxo 4.34, página 84, existe um inteiro positivo n_0 tal que $n_0 > 1/\varepsilon$. Temos

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad n > 1/\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon.$$

Aplicando a Definição 5.2 vemos que $1/n \to 0$. □

Exemplo 5.4. Demonstramos agora que $1/2^n \to 0$. Verificamos primeiro que $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{n}$ para todo $n \geq 1$. Para isso podemos usar o Método da Indução Finita, ou então a Fórmula Binomial, como segue:

$$\begin{aligned} 2^n &= (1+1)^n \\ &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} \\ &> \binom{n}{1} \\ &> n, \end{aligned}$$

para todo $n \geq 1$. Logo, $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{n}$ para todo $n \geq 1$.

Seja $\varepsilon > 0$ um número real. Sabemos que existe um inteiro positivo n_0 tal que $n_0 > 1/\varepsilon$. Temos

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad n > 1/\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2^n} < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{1}{2^n} - 0\right| < \varepsilon.$$

Aplicando a Definição 5.2 temos $1/2^n \to 0$. □

Exemplo 5.5. Afirmamos que $1/\sqrt{n} \to 0$. De fato, existe um inteiro positivo n_0 tal que $n_0 > 1/\varepsilon^2$. Temos

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad n > 1/\varepsilon^2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{n} > 1/\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{1}{\sqrt{n}} - 0\right| < \varepsilon.$$

Aplicando a Definição 5.2 vemos que $1/\sqrt{n} \to 0$. □

Exemplo 5.6. Provamos a seguir que $\lim \dfrac{n^2-1}{n^2+n+1} = 1$. Temos

$$\left|\frac{n^2-1}{n^2+n+1} - 1\right| = \frac{n+2}{n^2+n+1}\,.$$

Como $0 < n+2 < 2n$ e $0 < n^2 < n^2+n+1$ para todo $n \geq 3$, temos

$$\frac{n+2}{n^2+n+1} < \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n}.$$

Portanto

$$\left|\frac{n^2-1}{n^2+n+1} - 1\right| < \frac{2}{n}.$$

Dado um número real $\varepsilon > 0$, seja n_0 um inteiro positivo tal que $n_0 > 2/\varepsilon$. Então, para todo $n \geq n_0$, se tem $n > 2/\varepsilon$, e daí $2/n < \varepsilon$, do que segue

$$\left|\frac{n^2-1}{n^2+n+1} - 1\right| < \varepsilon \quad \text{para todo } n \geq n_0.$$

Em consequência, $\lim \dfrac{n^2-1}{n^2+n+1} = 1$. □

Esses exemplos são bem simples. Em geral, trabalhar com limites usando diretamente a definição pode ser bastante complicado. Devido a isso são utilizadas propriedades como as que vemos a seguir.

5.4 Propriedades fundamentais das sequências convergentes

As propriedades fundamentais facilitam bastante o cálculo de limites, evitando o uso direto da Definição 5.2 dada na seção anterior. Começamos com o

Teorema 5.7. *O limite de qualquer sequência convergente é único.*

Demonstração. Seja (a_n) uma sequência convergente e suponhamos que existam dois limites b_1 e b_2 (diferentes). Seja ε um número real tal que $0 < \varepsilon < |b_2 - b_1|$. Como $a_n \to b_1$, existe um inteiro positivo n_1 tal que $|a_n - b_1| < \varepsilon/2$ para todo $n \geq n_1$. Como $a_n \to b_2$, existe um inteiro positivo n_2 tal que $|a_n - b_2| < \varepsilon/2$ para todo $n \geq n_2$. Seja $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Então, para todo $n \geq n_0$, temos

$$|b_2 - b_1| = |(a_n - b_1) - (a_n - b_2)| \leq |a_n - b_1| + |a_n - b_2| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

o que é uma contradição. Portanto o limite é único. □

Teorema 5.8. *Sejam (a_n) e (b_n) sequências convergentes. Então $(a_n + b_n)$ é convergente e*

$$\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n.$$

Demonstração. Sejam $a = \lim a_n$ e $b = \lim b_n$. Dado $\varepsilon > 0$, existem números inteiros positivos n_1 e n_2 tais que

$$|a_n - a| < \epsilon/2 \quad \text{para todo } n \geq n_1$$

e

$$|b_n - b| < \epsilon/2 \quad \text{para todo } n \geq n_2.$$

Seja n_0 o maior dos números n_1 e n_2. Então $|a_n - a| < \epsilon/2$ e $|b_n - b| < \epsilon/2$ para todo $n \geq n_0$. Daí

$$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (a + b)| &= |(a_n - a) + (b_n - b)| \\ &\leq |a_n - a| + |b_n - b| \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

para todo $n \geq n_0$. Fica provado que $(a_n + b_n)$ é convergente e $\lim(a_n + b_n) = a + b$. Em outros termos, $\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n$. □

Proposição 5.9. *Se $a_n = c$ é uma sequência constante, então (a_n) é convergente e $a_n \to c$.*

Demonstração. De fato, seja $\varepsilon > 0$. Escolhamos $n_0 = 1$. Então, para todo $n \geq 1$, $|a_n - c| = 0 < \varepsilon$, e isso significa que (a_n) é convergente e $\lim a_n = c$. □

Teorema 5.10. *Seja (a_n) uma sequência convergente, e seja r um número real qualquer. Então (ra_n) é convergente e*

$$\lim ra_n = r \lim a_n.$$

Demonstração. Se $r = 0$, temos que $0a_n = 0$ é uma sequência constante, do que segue $\lim 0a_n = 0 = 0 \lim a_n$, e isso prova a propriedade nesse caso.

Suponhamos $r \neq 0$. Seja $\lim a_n = a$. Dado $\varepsilon > 0$, ponhamos $\varepsilon' = \varepsilon/|r|$. Existe n_0 tal que $n \geq n_0$ implica

$$|a_n - a| < \varepsilon'.$$

Portanto

$$\begin{aligned} &|a_n - a| < \varepsilon/|r| \\ \Longrightarrow &|r||a_n - a| < \varepsilon \\ \Longrightarrow &|r(a_n - a)| < \varepsilon \\ \Longrightarrow &|ra_n - ra| < \varepsilon \end{aligned}$$

para todo $n \geq n_0$. Em consequência (ra_n) é convergente e $\lim ra_n = ra = r \lim a_n$. □

Corolário 5.11. *Se (a_n) e (b_n) são sequências convergentes, então $(a_n - b_n)$ é convergente e*

$$\lim(a_n - b_n) = \lim a_n - \lim b_n.$$

Demonstração. Temos $\lim(a_n - b_n) = \lim(a_n + (-1)b_n) = \lim a_n + \lim(-1)b_n = \lim a_n + (-1)\lim b_n = \lim a_n - \lim b_n$. □

Corolário 5.12. *Sejam (a_n) é uma sequência convergente e $a \in \mathbb{R}$. Então $\lim a_n = a$ se e somente se $\lim(a_n - a) = 0$.*

Demonstração. Seja $\lim a_n = a$. Vendo a como uma sequência constante, temos que $(a_n - a)$ é convergente e que $\lim(a_n - a) = \lim a_n - \lim a = a - a = 0$. Reciprocamente, suponhamos que $\lim(a_n - a) = 0$. Então $\lim a_n - \lim a = 0 \Rightarrow \lim a_n = \lim a = a$. □

Teorema 5.13. *Se (a_n) e (b_n) são sequências convergentes, então $(a_n b_n)$ é convergente e*

$$\lim a_n b_n = (\lim a_n)\,(\lim b_n).$$

Demonstração. Sejam $\lim a_n = a$ e $\lim b_n = b$. Provamos primeiro que $\lim(a_n - a)(b_n - b) = 0$. Seja $\epsilon > 0$, e seja $\varepsilon' = \sqrt{\varepsilon}$. Existem números naturais n_1 e n_2 tais que

$$n \geq n_1 \quad \text{implica} \quad |a_n - a| < \varepsilon'$$

e

$$n \geq n_2 \quad \text{implica} \quad |b_n - b| < \varepsilon'.$$

Seja $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Então $n \geq n_0$ implica

$$\begin{aligned} |(a_n - a)(b_n - b) - 0| &= |(a_n - a)(b_n - b)| \\ &= |a_n - a|\,|b_n - b| \\ &< \varepsilon'\,\varepsilon' \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto $\lim(a_n - a)(b_n - b) = 0$. Considere agora a identidade

$$a_n b_n - ab = (a_n - a)(b_n - b) + a(b_n - b) + b(a_n - a).$$

Temos

$$\begin{aligned} \lim(a_n b_n - ab) &= \lim(a_n - a)(b_n - b) + \lim a(b_n - b) + \lim b(a_n - a) \\ &= 0 + a\lim(b_n - b) + b\lim(a_n - a) \\ &= 0 + a \cdot 0 + b \cdot 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, $\lim(a_n b_n - ab) = 0$. Então $(a_n b_n)$ é convergente e em virtude do Corolário 5.12, temos

$$\lim a_n b_n = ab,$$

que é o mesmo que

$$\lim a_n b_n = (\lim a_n)\,(\lim b_n).$$

□

Para demonstrar a propriedade seguinte precisaremos do

Lema 5.14. *Se* $\lim a_n = a$ *e se* $a \neq 0$, *existe um inteiro positivo* n_1 *tal que* $n \geq n_1$ *implica* $|a_n| > |a|/2$.

Demonstração. Seja $\varepsilon = |a|/2$. Como $a \neq 0$, vem $\varepsilon > 0$. Então existe um inteiro positivo n_1 tal que $n \geq n_1$ implica $|a_n - a| < \varepsilon$. Mas

$$\big|\, |a_n| - |a| \,\big| \leq |a_n - a|$$

(Problema 4.8.18 (f)) do que segue

$$\big|\, |a_n| - |a| \,\big| < \varepsilon$$

ou

$$\big|\, |a_n| - |a| \,\big| < \frac{|a|}{2}.$$

Isso equivale a

$$-\frac{|a|}{2} < |a_n| - |a| < \frac{|a|}{2}.$$

Tomando apenas a desigualdade da esquerda, vem

$$|a| - \frac{|a|}{2} < |a_n|$$

ou

$$\frac{|a|}{2} < |a_n| \quad \text{para todo } n \geq n_1.$$

□

Teorema 5.15. *Seja* (a_n) *uma sequência convergente, com* $\lim a_n \neq 0$. *Então* $(1/a_n)$ *é convergente e*

$$\lim \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\lim a_n}\,.$$

Demonstração. Seja $a = \lim a_n$. Em virtude do Lema 5.14, existe um número inteiro positivo n_1 tal que $n \geq n_1$ implica $|a_n| > |a|/2$. Em particular, $a_n \neq 0$ para todo $n \geq n_1$, e podemos considerar a sequência $1/a_n$ para $n \geq n_1$.

Por outro lado, seja $\varepsilon > 0$, e seja $\varepsilon' = \frac{1}{2}|a|^2\varepsilon$. Existe um inteiro positivo n_2 tal que $n \geq n_2$ implica $|a_n - a| < \varepsilon'$.

Seja $n_0 = \max\{n_1,n_2\}$. Então $n \geq n_0$ implica

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}\right| &= \left|\frac{a - a_n}{a_n a}\right| \\ &= \frac{|a_n - a|}{|a_n|\,|a|} \\ &= |a_n - a|\,\frac{1}{|a_n|}\,\frac{1}{|a|} \\ &< \varepsilon'\,\frac{2}{|a|}\,\frac{1}{|a|} \\ &< \varepsilon.\end{aligned}$$

Em consequência

$$\lim \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a}$$

ou

$$\lim \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\lim a_n}\,.$$

□

Corolário 5.16. *Sejam* (a_n) *e* (b_n) *sequências convergentes tais que* $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$ *e* $b \neq 0$. *Então* (a_n/b_n) *é convergente e*

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}\,.$$

Demonstração. Em virtude do Teorema 5.15 $(1/b_n)$ é convergente. Como $a_n/b_n = a_n(1/b_n)$, aplicando o Teorema 5.13 segue o resultado. □

Exemplo 5.17. Ao calcularmos $\lim \dfrac{5n^2 - 3n + 7}{2n^2 + n - 1}$, poderíamos pensar, num primeiro momento, em aplicar o Corolário 5.16. Entretanto, não é possível fazer isso de imediato, pois as sequências $(5n^2 - 3n + 7)$ e $(2n^2 + n - 1)$ são divergentes. Para que seja válida a propriedade $\lim a_n/b_n = \lim a_n / \lim b_n$, o Corolário 5.16 exige, antes de mais nada, que as sequências (a_n) e (b_n) sejam convergentes. Por isso, para calcular o limite acima, primeiro transformamos a fração dada em outra fração equivalente, da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\frac{5n^2 - 3n + 7}{2n^2 + n - 1} &= \frac{\dfrac{1}{n^2}(5n^2 - 3n + 7)}{\dfrac{1}{n^2}(2n^2 + n - 1)} \\ &= \frac{5 - \dfrac{3}{n} + \dfrac{7}{n^2}}{2 + \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^2}}\,.\end{aligned}$$

Obtivemos assim uma fração cujo numerador e denominador são sequências convergentes:

$$\lim \left(5 - \frac{3}{n} + \frac{7}{n^2}\right) = 5 - 0 + 0 = 5$$

e

$$\lim \left(2 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right) = 2 + 0 - 0 = 2.$$

Podemos agora aplicar o Corolário 5.16:

$$\begin{aligned}\lim \frac{5n^2-3n+7}{2n^2+n-1} &= \lim \frac{5-\dfrac{3}{n}+\dfrac{7}{n^2}}{2+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}} \\ &= \frac{\lim\left(5-\dfrac{3}{n}+\dfrac{7}{n^2}\right)}{\lim\left(2+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}\right)} \\ &= \frac{5}{2}\,.\end{aligned}$$

Uma propriedade muito útil é o

Teorema 5.18 (Teorema da Compressão)**.** *Sejam* (a_n), (b_n) *e* (c_n) *sequências tais que* $\lim a_n = \lim b_n = a$ *e* $a_n \le c_n \le b_n$ *para todo* n*. Então* (c_n) *é convergente e* $\lim c_n = a$*.*

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$. Existe um inteiro positivo n_0 tal que $n \ge n_0$ implica

$$a-\varepsilon < a_n < a+\varepsilon \quad \text{e} \quad a-\varepsilon < b_n < a+\varepsilon.$$

Então $n \ge n_0$ implica

$$a-\varepsilon < a_n < c_n < b_n < a+\varepsilon$$

ou

$$a-\varepsilon < c_n < a+\varepsilon.$$

Portanto, $\lim c_n = a$. □

Terminamos com uma propriedade que nos permite operar limites com raízes quadradas. Observamos primeiro que se $\lim a_n = a$ e $a > 0$ então existe um inteiro positivo n_0 tal que $n \ge n_0$ implica $a_n > 0$ (Problema 5.7.11). Assim, para $n \ge n_0$, podemos considerar $(\sqrt{a_n})$.

Teorema 5.19. *Se* $\lim a_n = a$ *e* $a > 0$ *então existe um inteiro positivo* n_0 *tal que* $(\sqrt{a_n})_{n\ge n_0}$ *está definida e converge para* $\sqrt{a}$*.*

Demonstração. Combinando os resultados do Problema 5.7.11 e do Lema 5.14, vemos que existe um inteiro positivo n_0 tal que $n \ge n_0$ implica $a_n > 0$ e $a_n > a/2$. Então $\sqrt{a/2} < \sqrt{a_n}$ e $\sqrt{2a} = 2\sqrt{a/2} < \sqrt{a_n} + \sqrt{a}$, e

$$\frac{1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a}} < \frac{1}{\sqrt{2a}}, \quad n \ge n_0.$$

Portanto

$$\begin{aligned}0 \le |\sqrt{a_n}-\sqrt{a}| &= \frac{|a_n-a|}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a}} \\ &< \frac{1}{\sqrt{2a}}\,|a_n-a|.\end{aligned}$$

Como $\lim |a_n - a| = 0$ (Problema 5.7.13), podemos aplicar o Teorema da Compressão 5.18, e obter $\lim |\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| = 0$. Daí $\lim \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$. □

5.5 Sequências monótonas

As sequências monótonas e limitadas constituem uma classe importante de sequência convergente.

Definições 5.20. Uma sequência de números reais (a_n) se diz *crescente* quando $a_n \leq a_{n+1}$ para todo n, e *decrescente* quando $a_{n+1} \leq a_n$ para todo n. A sequência é *estritamente crescente* quando $a_n < a_{n+1}$ para todo n, e *estritamente decrescente* quando $a_{n+1} < a_n$ para todo n. Uma sequência crescente ou decrescente (estritamente ou não) se diz *monótona*. Dada uma sequência (a_n) de números reais, podemos aplicar ao seu conjunto de valores $\{a_n | n \geq 1\}$ a Definição 4.30. Temos assim os conceitos de *limitante superior* de uma sequência, *limitante inferior*, sequência *limitada superiormente*, *limitada inferiormente*, *limitada* e *ilimitada*.

Exemplo 5.21. Vejamos um exemplo de sequência monótona e limitada. Verifiquemos que a sequência $a_n = n/(2n+1)$, $n \geq 1$, é estritamente crescente. Temos, para todo n inteiro positivo,

$$\begin{aligned} 2n^2 + 3n < 2n^2 + 3n + 1 &\Rightarrow n(2n+3) < (n+1)(2n+1) \\ &\Rightarrow \frac{n}{2n+1} < \frac{n+1}{2n+3} \\ &\Rightarrow \frac{n}{2n+1} < \frac{n+1}{2(n+1)+1} \\ &\Rightarrow a_n < a_{n+1}. \end{aligned}$$

Portanto, a sequência $a_n = n/(2n+1)$, $n \geq 1$, é estritamente crescente. Além disso, $n < 2n+1$, o que implica $0 < a_n < 1$ para todo $n \geq 1$, e assim a sequência é limitada.

Proposição 5.22. *Toda sequência convergente é limitada.*

Demonstração. De fato, seja $(a_n)_{n\geq 1}$ uma sequência convergente para o limite L. Escolhamos $\epsilon = 1$ na definição de limite. Existe um número natural n_0 tal que $n \geq n_0$ implica $L - 1 < a_n < L + 1$. Seja M o maior dos números $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n_0-1}, L+1$, e seja K o menor dos números $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n_0-1}, L-1$. Então $K < a_n < M$ para todo n. Portanto (a_n) é limitada. □

Vejamos agora o principal resultado dessa seção:

Teorema 5.23 (Teorema das Sequências Monótonas)**.** *Toda sequência monótona e limitada é convergente.*

Demonstração. Restringimo-nos ao caso de uma sequência decrescente e limitada. Seja pois (a_n) uma tal sequência. Consideremos seu conjunto de valores $C = \{a_n \mid \text{para todo } n\}$. Então C é limitado e, em virtude do Teorema 4.31, tem ínfimo ℓ. Mostremos que $\lim a_n = \ell$. Dado $\epsilon > 0$, $\ell + \epsilon$ não é limitante inferior de C. Logo existe $a_{n_0} \in C$ tal que $a_{n_0} < \ell + \epsilon$. Como a sequência é decrescente, vem $a_n < a_{n_0}$ para todo $n \geq n_0$. Daí $a_n < \ell + \epsilon$ para todo $n \geq n_0$. Por outro lado, sendo ℓ um limitante inferior, tem-se $\ell \leq a_n$ para todo n. Fica assim provado que $\ell - \epsilon < a_n < \ell + \epsilon$ para todo $n \geq n_0$, o que significa que $\lim a_n = \ell$.

Se a sequência for crescente e limitada, verifica-se de modo análogo que ela converge para o supremo de C. Isso demonstra o teorema. □

Problema resolvido 5.24. Mostre que a sequência $(n/2^n)_{n\geq 1}$ é convergente, e calcule seu limite.

Demonstração. Seja $a_n = n/2^n$, $n \geq 1$. Essa sequência é decrescente (Problema 5.7.22). Do Exemplo 5.4, página 95, temos $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{n}$ para todo $n \geq 1$. Portanto $0 < a_n < 1$ para todo $n \geq 1$ e a sequência é monótona e limitada. Em virtude do Teorema das Sequências Monótonas 5.23, existe $\ell = \lim a_n$.

Para descobrir o que é ℓ, observe que, na fração $n/2^n$, tanto o numerador quanto o denominador crescem arbitrariamente. Entretanto, o denominador cresce mais rapidamente, o que fica claro comparando-se alguns termos:

$$\begin{array}{cccccccc} n & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \\ 2^n & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 & \dots \end{array}$$

Isso nos leva a pensar que $\ell = 0$. Demonstremos que isso realmente acontece. Observemos primeiro que $\lim a_{n+1} = \ell$, pois a sequência é a mesma. Notemos também que

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\,\frac{n}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2^{n+1}}\,.$$

Portanto,

$$\ell = \lim a_{n+1} = \lim\left(\frac{1}{2}\,a_n + \frac{1}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{2}\,\lim a_n + \lim\frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\,\ell + 0 = \frac{1}{2}\ell.$$

O único número ℓ tal que $\ell = \frac{1}{2}\,\ell$ é $\ell = 0$. Fica provado que a sequência $(n/2^n)$ converge para zero. □

Podemos demonstrar que a sequência $(n/2^n)$ converge para zero de outra forma. Usando a fórmula binomial temos:

$$\begin{aligned} 2^n &= (1+1)^n \\ &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} \\ &> \binom{n}{2} \\ &> \frac{n(n-1)}{2} \\ &> \frac{n^2}{4} \end{aligned}$$

para todo $n \geq 2$. Segue que $0 < n/2^n < 4/n$ para todo $n \geq 1$. Como $4/n \to 0$, o Teorema da Compressão 5.18 garante que $n/2^n \to 0$.

5.6 Sequências divergentes e subsequências

Apresentamos nesta seção exemplos de sequências não convergentes, e explicamos o significado das expressões $\lim a_n = +\infty$ e $\lim a_n = -\infty$. Apresentamos também o conceito de subsequência.

Conforme já comentamos, uma sequência é chamada *divergente* quando não é convergente. Portanto, a definição de sequência divergente é a negativa da definição de convergente. Em outros termos, uma sequência (a_n) é divergente quando, para todo número real a, existe um

número real $\varepsilon > 0$ tal que, qualquer que seja o inteiro positivo n_0, existe um inteiro $n_1 > n_0$ tal que $|a_{n_1} - a| \geq \varepsilon$.

Equivalentemente, uma sequência (a_n) é divergente quando, para todo número real a, existem um número real $\varepsilon > 0$ e uma infinidade de índices n para os quais $a_n \notin (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Exemplo 5.25. A sequência $a_n = (-1)^n$, $n \geq 1$, é divergente. Qualquer que seja o número real a, podemos encontrar um número $\varepsilon > 0$ e uma infinidade de índices n para os quais a_n está fora do intervalo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. De fato, suponhamos primeiro que $a = 1$. Tomando algum $\varepsilon \leq 2$, por exemplo, $\varepsilon = 1$, todos os termos $a_{2k+1} = -1$ estão fora do intervalo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) = (0, 2)$. Confira a Figura 5.3.

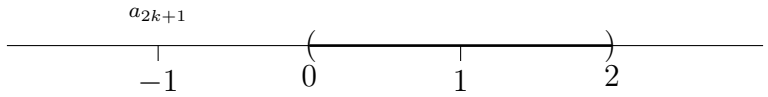


Figura 5.3. Parte de sequência fora do intervalo de raio $\varepsilon = 1$ com centro em $a = 1$.

Suponhamos agora que $a \neq 1$. Seja $\varepsilon > 0$ um número menor ou igual à distância entre a e 1. Então todo termo de índice par $a_{2k} = 1$ está fora do intervalo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Confira a Figura 5.4.

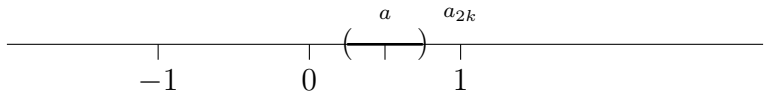


Figura 5.4. Parte de sequência fora do intervalo de raio ε com centro em $a \neq 1$.

Concluímos assim a verificação de que a sequência $a_n = (-1)^n$ é divergente.

Exemplo 5.26. A sequência $a_n = n^2$, $n \geq 1$, é divergente. De fato, essa sequência é ilimitada. Lembrando que toda sequência convergente é limitada, segue a afirmação.

Definição 5.27. Diz-se que uma sequência (a_n) *tende para mais infinito* quando para todo número real M existe um número natural n_0 tal que $a_n > M$ para todo $n \geq n_0$. Nesse caso anotamos

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty\,, \quad \lim a_n = +\infty \quad \text{ou} \quad a_n \to +\infty$$

(lê-se: o limite de a índice n para n tendendo para mais infinito é mais infinito). De modo análogo, diz-se que uma sequência (a_n) *tende para menos infinito* quando para todo número real K existe um número natural n_0 tal que $a_n < K$ para todo $n \geq n_0$. Nesse caso anotamos

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = -\infty\,, \quad \lim a_n = -\infty \quad \text{ou} \quad a_n \to -\infty$$

(lê-se: o limite de a índice n para n tendendo para mais infinito é menos infinito).

Se uma sequência tem limite $+\infty$ ou $-\infty$, ela ainda é uma sequência divergente, pois $+\infty$ e $-\infty$ não são números reais. São símbolos utilizados para descrever um determinado comportamento da sequência.

Exemplo 5.28. Mostremos que $\lim_{n \to +\infty} \dfrac{n^3 - 3}{n^2 + 5} = +\infty$. Observe que

$$n^3 - 3 > \frac{1}{2} n^3 > 0 \quad \text{e} \quad 0 < n^2 + 5 < 2n^2 \quad \text{para todo } n \geq 3,$$

portanto

$$\frac{n^3-3}{n^2+5} > \frac{(1/2)n^3}{2n^2} = \frac{1}{4}n \quad \text{para todo } n \geq 3.$$

(Essa desigualdade vale também para $n = 2$, mas isso não importa aqui.) Seja então M um número real. Seja n_0 um número inteiro tal que $n_0 > 4M$ e $n_0 \geq 3$. Então, para todo n tal que $n \geq n_0$, tem-se

$$\begin{aligned} n \geq n_0 > 4M \quad &\Longrightarrow \quad \frac{1}{4}n > M \\ &\Longrightarrow \quad \frac{n^3-3}{n^2+5} > M. \end{aligned}$$

Portanto $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n^3-3}{n^2+5} = +\infty$.

Definição 5.29. Dada uma sequência $(a_n)_{n\geq 1}$, seja $(n_i)_{i\geq 1}$ uma sequência infinita de números naturais tais que

$$1 \leq n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_i < n_{i+1} < \cdots$$

Diz-se que $(a_{n_i})_{i\geq 1}$ é uma *subsequência* de (a_n).

Exemplo 5.30. A sequência $a_n = (-1)^n$ tem duas subsequências que se destacam: a subsequência constituída pelos termos de índice par, a saber, (a_{2i}), e a subsequência formada pelos termos de índice ímpar, (a_{2i+1}). Temos $a_{2i} = 1$ para todo i, logo a subsequência (a_{2i}) é convergente, e seu limite é igual a 1. Ainda, $a_{2i+1} = -1$ para todo i, e essa subsequência converge para -1. Portanto, a sequência $a_n = (-1)^n$ é um exemplo de sequência divergente com duas subsequências convergentes.

Teorema 5.31. *Se $(a_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência convergente, então toda subsequência $(a_{n_i})_{i\geq 1}$ é convergente, e o limite é o mesmo.*

Demonstração. Suponhamos $a_n \to a$. Seja $\varepsilon > 0$. Como $a_n \to a$, existe um inteiro positivo m tal que $n \geq m \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$. Seja i_0 um inteiro positivo tal que $n_{i_0} \geq m$ (por exemplo, $i_0 = m$). Então, para todo $i \geq i_0$ temos $n_i \geq m \Rightarrow |a_{n_i} - a| < \varepsilon$. Portanto $\lim_{i\to\infty} a_{n_i} = a$. □

Corolário 5.32. *Se $(a_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência convergente e se existe uma subsequência $(a_{n_i})_{i\geq 1}$ tal que $\lim_{i\to+\infty} a_{n_i} = a$, então $\lim a_n = a$.*

5.7 Problemas

Problema 5.7.1. Mostre que a sequência $a_n = n^2$ dos quadrados dos números inteiros positivos satisfaz à relação de recorrência $a_{n+3} = 3a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n$ para todo $n \geq 1$. Reciprocamente, essa relação e mais as condições iniciais $a_1 = 1$, $a_2 = 4$ e $a_3 = 9$ caracterizam a sequência dos quadrados.

Problema 5.7.2. Argumente sobre a validade da sequinte afirmação. Sejam $(a_n)_{n\geq 1}$ uma sequência e k um inteiro positivo. Então a sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ converge se e somente se a sequência $(a_{n+k})_{n\geq 1}$ converge, e nesse caso o limite é o mesmo.

Problema 5.7.3. Verifique que $n/(n+1) \to 1$ usando diretamente a Definição 5.2.

Problema 5.7.4. Verifique que $\lim \frac{3n^2}{2n^2+1} = \frac{3}{2}$ usando diretamente a Definição 5.2.

Problema 5.7.5. Verifique que $\lim \frac{3n^2+1}{5n^2-n+1} = \frac{3}{5}$ usando a técnica do Exemplo 5.17.

Problema 5.7.6. Demonstre que $\lim \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = 0$.

Problema 5.7.7. Verifique se a sequência $\left(\dfrac{1+(-1)^n}{n}\right)$ é convergente.

Problema 5.7.8. Mostre que é convergente a sequência

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{se } n \text{ for par,} \\ \dfrac{1}{2^n} & \text{se } n \text{ for ímpar.} \end{cases}$$

Problema 5.7.9. Diga quais das seguintes afirmações pode ser equivalente à definição de sequência convergente:

(?)(a) Uma sequência (a_n) de números reais converge para um número real L quando, dado um número real $\varepsilon > 0$, existe uma infinidade de índices n para os quais a_n está a uma distância de L menor do que ε.

(?)(b) Uma sequência (a_n) de números reais converge para um número real L quando, dado um número real $\varepsilon > 0$, todos os termos da sequência, com possível excessão de um número finito deles, estão a uma distância de L menor do que ε.

(?)(c) Uma sequência (a_n) de números reais converge para um número real L quando, dado um número real $\varepsilon > 0$, todos os valores da sequência, com possível excessão de um número finito deles, estão a uma distância de L menor do que ε.

Problema 5.7.10. Verifique que a sequência $\left(\dfrac{(-1)^n\, n}{n+1}\right)$ é divergente.

Problema 5.7.11. Mostre que se $\lim a_n = a$ e se $a > 0$ então existe n_0 tal que $a_n > 0$ para todo $n \geq n_0$.

Problema 5.7.12. Demonstre que se $\lim a_n = a$ então $\lim |a_n| = |a|$. Mostre que a recíproca não é verdadeira.

Problema 5.7.13. Mostre que $\lim |a_n| = 0$ se, e somente se, $\lim a_n = 0$.

Problema 5.7.14. Calcule os seguintes limites:

a) $\lim \dfrac{3n^3 - 7n^2 + 6n - 1}{4n^3 + n - 9}$; b) $\lim \dfrac{15n^4 - n + 1}{9n^5 + 2n^2}$;

c) $\lim \dfrac{(n^2+2)^2}{2n^4 + 3n^2 - 2}$; d) $\lim \dfrac{7 \cdot 3^n - 1}{2 \cdot 3^n + 4}$.

Problema 5.7.15. Usando o Teorema da Compressão 5.18, calcule os seguintes limites:

a) $\lim \dfrac{(-1)^n}{n}$; b) $\lim \dfrac{\operatorname{sen} n}{n}$; c) $\lim \dfrac{2}{n!}$;

d) $\lim \dfrac{\cos(n\pi)}{\sqrt{n}}$; e) $\lim \dfrac{e^{-n}}{n}$.

Problema 5.7.16. Demonstre que se (a_n) é uma sequência tal que $\lim a_n = 0$ e $a_n \geq 0$ para todo n, então $\lim \sqrt{a_n} = 0$.

Problema 5.7.17. Demonstre que se $\lim a_n = 0$ e se (b_n) é limitada, então $\lim a_n b_n = 0$.

Problema 5.7.18. Calcule:

$$\lim \left(\sqrt{n^2+n} - n\right); \qquad \lim \frac{\sqrt{2n^2-n+7}}{3n-1}; \qquad \lim \frac{1}{n}\sqrt{(1-\sqrt{n})(3-\sqrt{n})}.$$

Problema 5.7.19. Encontre o limite da sequência

$$\left(7+\frac{1}{2}\right)^2, \quad \left(7+\frac{1}{2^2}\right)^2, \quad \left(7+\frac{1}{2^3}\right)^2, \ldots$$

caso exista.

Problema 5.7.20. Demonstre as seguintes propriedades: **a)** se (a_n) é convergente e $a_n \leq M$ para todo n, então $\lim a_n \leq M$; **b)** se (a_n) e (b_n) são convergentes e $a_n \leq b_n$ para todo n, então $\lim a_n \leq \lim b_n$. Dê um exemplo para mostrar que $a_n < b_n$ para todo n não implica necessariamente $\lim a_n < \lim b_n$. Considere as afirmações com as desigualdades invertidas.

Problema 5.7.21. Verifique se são monótonas ou não as seguintes sequências:

a) $\left(\dfrac{2n+1}{3n+5}\right)_{n\geq 0}$; b) $\left(\dfrac{3^n}{1+3^n}\right)_{n\geq 0}$;

c) $\left(2^{-n}\right)_{n\geq 0}$; d) $\left(\dfrac{n^n}{n!}\right)_{n\geq 1}$;

e) $\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)_{n\geq 0}$.

Problema 5.7.22. A sequência $(n/2^n)_{n\geq 0}$ não é monótona. Mas a sequência $(n/2^n)_{n\geq 1}$ é decrescente, e $(n/2^n)_{n\geq 2}$ é estritamente decrescente.

Problema 5.7.23. Usando o Teorema das Sequências Monótonas 5.23, demonstre que converge para $3/11$ a sequência (a_n) definida por

$$a_n = 0{,}2727\ldots27 \qquad \text{(em que aparecem } n \text{ grupos } 27\text{)}.$$

Problema 5.7.24. Seja r um número real tal que $|r| < 1$. Usando o Teorema das Sequências Monótonas 5.23, mostre que $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$.

Problema 5.7.25. Considere a sequência (a_n) definida recorrentemente por

$$\begin{cases} a_1 &= \sqrt{2} \\ a_n &= \sqrt{2+a_{n-1}}\,, \quad n \geq 2. \end{cases}$$

Usando o Teorema das Sequências Monótonas 5.23, prove que essa sequência é convergente, e encontre o limite.

Problema 5.7.26. Faça o mesmo para a sequência

$$\begin{cases} a_1 &= \sqrt{2} \\ a_n &= \sqrt{2a_{n-1}}\,, \quad n \geq 2. \end{cases}$$

Problema 5.7.27. Seja $r > 0$ um número real. Demonstre que a sequência $(a_n)_{n\geq 0}$ definida por

$$\begin{cases} a_0 > 0; \\ a_n = \dfrac{1}{2}\left(a_{n-1} + \dfrac{r}{a_{n-1}}\right), \quad n \geq 1, \end{cases}$$

converge para $\sqrt{r}$ usando (i) o Teorema da Compressão (ii) o Teorema das Sequências Monótonas.

Problema 5.7.28. Demonstre que a sequência $(a_n)_{n\geq 0}$ definida por

$$\begin{cases} a_0 > 0; \\ a_n = \dfrac{1}{3}\left(2a_{n-1} + \dfrac{r}{a_{n-1}^2}\right), \quad n \geq 1, \end{cases}$$

converge para $\sqrt[3]{r}$.

Problema 5.7.29. Demonstre o Corolário 5.32.

Problema 5.7.30. A sequência $a_n = \operatorname{sen}(n\pi/2)$, $n \geq 1$, tem três subsequências que se destacam. Descreva essas subsequências.

Problema 5.7.31. Mostre que as seguintes sequências são divergentes:

a) (2^n); b) $\left(\dfrac{(-1)^n 5n}{1+n}\right)$;

c) (rn), sendo r um número real não nulo;

d) $\left(\dfrac{n^3+3}{n}\right)$; e) $\left(\operatorname{sen}\dfrac{n\pi}{2}\right)$;

f) $\left(1+(-1)^n\right)$; g) $\left(n^2+(-1)^n n\right)$;

h) $\left(5n^2-3n+7\right)$.

Problema 5.7.32. Para cada uma das sequências (a_n) abaixo, verifique se $\lim a_n = +\infty$ ou $\lim a_n = -\infty$.

a) (3^n); b) $\left(\dfrac{n^2+3n+1}{n+7}\right)$;

c) (rn), $r \neq 0$; d) $\left(n^2 + (-1)^n n\right)$.

Problema 5.7.33. Seja (a_n) uma sequência tal que $\lim a_n = +\infty$. Prove que existe n_0 tal que a sequência $(1/a_n)_{n\geq n_0}$ está definida, e que $\lim 1/a_n = 0$.

Problema 5.7.34. Seja $r > 1$ um número real. Mostre que $\lim_{n\to\infty} r^n = +\infty$.

Problema 5.7.35. A fórmula direta da sequência de Fibonacci (f_n), definida na página 92,

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

foi observada pelo matemático Abraham De Moivre em 1718 e demonstrada dez anos mais tarde por Nicolaus Bernoulli. Complete os detalhes. Sejam α e β as raízes da equação $x^2 = x + 1$. Portanto $\alpha^2 = \alpha + 1$ e $\beta^2 = \beta + 1$. Multiplicando essas igualdades por α^{n-2} e β^{n-2} respectivamente, obtemos $\alpha^n = \alpha^{n-1} + \alpha^{n-2}$ e $\beta^n = \beta^{n-1} + \beta^{n-2}$ para todo $n \geq 2$. O estudante pode notar que as potências α^n e β^n obedecem à mesma lei da recorrência que a sequência de Fibonacci: cada termo é igual à soma dos dois termos anteriores. Por isso $x^2 = x + 1$ chama-se *equação característica* dessa lei de recorrência, e a experiência sugere que f_n é uma combinação linear de α^n e β^n, isto é, existem números reais A e B tais que $f_n = A\alpha^n + B\beta^n$.

Problema 5.7.36. Se (f_n) é a sequência de Fibonacci, definida na página 92, demonstre que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_n}{f_{n+1}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\,.$$

Problema 5.7.37. Seja $(a_n)_{n\geq 1}$ uma sequência e sejam $(a_{n_j})_{j\geq 1}$ e $(a_{n_i})_{i\geq 1}$ subsequências que convergem para o mesmo limite a e tais que $\{n_j \mid j \geq 1\} \cup \{n_i \mid i \geq 1\} = \mathbb{Z}_+$. Prove que $a_n \to a$.

Problema 5.7.38. Seja $x \in \mathbb{R}$. Demonstre: **a)** Existe uma sequência estritamente crescente (r_n) de números racionais tais que $r_n \to x$; **b)** Existe uma sequência estritamente decrescente (r_n) de números racionais tais que $r_n \to x$; **c)** Existe uma sequência estritamente crescente (ξ_n) de números irracionais tais que $\xi_n \to x$; **d)** Existe uma sequência estritamente decrescente (ξ_n) de números irracionais tais que $\xi_n \to x$.

5.8 Temas para investigação

Tema 5.8.1. Investigue quando a sequência $a_n = n^k$, $n \geq 1$, é convergente ou divergente, sendo k inteiro.

Tema 5.8.2. Investigue propriedades e aplicações da sequência de Fibonacci. Por exemplo, o que são $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n$? Tomando o determinante, o que obtemos? Investigue outras propriedades.

Tema 5.8.3. (OBMEP 2008, adaptado) Dispomos de uma quantidade ilimitada de ladrilhos 2×1. Se n é um número inteiro positivo, de quantas maneiras diferentes podemos cobrir um retângulo $2 \times n$ com esses ladrilhos? Estude generalizações. A Figura 5.5 ilustra que podemos cobrir um retângulo 2×3 de três maneiras diferentes.

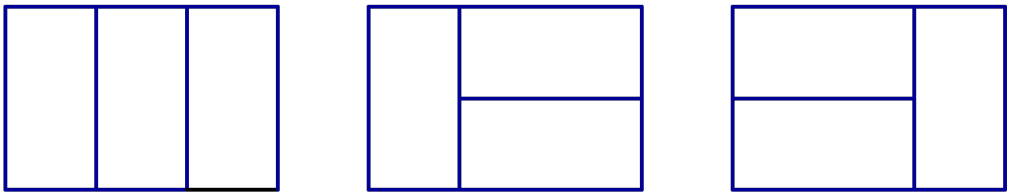


Figura 5.5 Ladrilhamentos de uma faixa 2×3 com ladrilhos 2×1.

Tema 5.8.4. Pesquise fórmulas recorrentes para o cálculo aproximado de $\sqrt[r]{r}$. Por exemplo, dada uma primeira aproximação tentativa a_0, investigue como a sequência $(a_k)_{k\geq 0}$ definida por

$$\begin{cases} a_0; \\ a_{k+1} = a_k - \dfrac{a_k^n - r}{n a_k^{n-1}}, \quad k \geq 0, \end{cases}$$

converge (ou não) para $\sqrt[n]{r}$.

Consulte o verbete *nth root* de [129].

5.9 Atividades para licenciandos e professores

Atividade 5.9.1. a) Qual é a primeira sequência numérica que o estudante aprende na escola? **b)** Dê exemplos de outras sequências que aparecem. **c)** Em que ano escolar o estudante é introduzido à notação algébrica de sequência, com letras indexadas?

Atividade 5.9.2. Os textos da Educação Básica apresentam sequências recorrentes a dois termos anteriores, ou mais? Dê exemplos com eventuais aplicações que foram consideradas.

Atividade 5.9.3. a) Sequências convergentes são consideradas na Educação Básica? Pesquise em [24]. **b)** Na Escola, um símbolo como 0,999... é considerado uma sequência?

Atividade 5.9.4. Um professor estava procurando uma atividade para apresentar a seus estudantes. Viu em seu livro texto o seguinte problema:

1. *Que lugar da progressão aritmética 1, 6, 11, ... ocupa o número 131?*

e resolveu modificá-lo para o seguinte:

2. *Consideremos os números naturais dispostos, em sua sequência natural, em linhas com cinco números em cada linha*:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

Investigue regularidades nesse esquema. Faça conjecturas e as demonstre.

Resolva você mesmo as duas versões do problema. Compare-as considerando aspectos psicológicos e pedagógicos.

Capítulo 6

A constante de Arquimedes π

6.1 Introdução

O conhecimento do número π é muito significativo para o estudante de Matemática, de modo que dedicamos este Capítulo a essa constante. O número π tem presença marcante em várias partes da Matemática Elementar, tais como a Geometria Plana e Espacial, assim como na Trigonometria. Na Matemática Superior é, sem dúvida, um dos números mais importantes. O nome *constante de Arquimedes* atribuído ao número π se deve à contribuição decisiva desse cientista ao seu conhecimento.

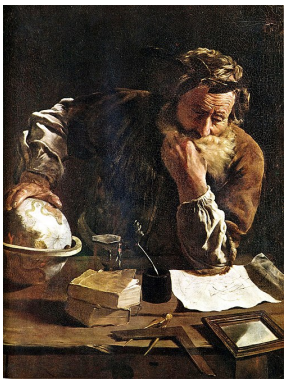


Figura 6.1. Arquimedes de Siracusa, matemático, físico, engenheiro, astrônomo e inventor, considerado o principal cientista da Antiga Grécia. Em Matemática seu trabalho foi superlativo. Desvendou o "mistério" do número π, demonstrando que esse número é o pivô do comprimento da circunferência e, ao mesmo tempo, da área do disco. Utilizava grande inventividade para perceber propriedades e depois, para demonstrá-las, adotava a dupla redução ao absurdo. Antecipou assim, em quase dois milênios, o Cálculo e a Análise. Aplicou a Matemática no estudo da Física, contribuindo em Estática e Hidrostática. Detalhes da pintura na pág. 250.

6.2 Reconhecimento do número π

Os antigos estudiosos, antes de Arquimedes, certamente tinham alguma ideia sobre uma possível constante, fruto da divisão do comprimento de uma circunferência qualquer pelo seu diâmetro. O estudante também pode ter esse primeiro contato através de medições de objetos circulares. Em um cenário didático, o professor leva à sala de aula latas cilíndricas, tampas circulares de recipientes caseiros, esferas de isopor, etc., assim como vários instrumentos de medida, como régua, fita métrica, paquímetro, barbante, etc. O professor explica o que é circunferência e diâmetro. Estimula então os estudantes a fazerem medições e preencherem uma tabela, como a que vemos abaixo.

Observamos que, apesar de se tratar de objetos com circunferências de várias medidas, a razão circunferência $\div$ diâmetro é aproximadamente constante. Podemos presumir que a variação observada na tabela pode ser devida a erros de medição e às imperfeições dos objetos.

Objeto	**Instrumento de medida**	**c** (cm)	**d** (cm)	**c/d**
tampa redonda	fita métrica	23	7	3,28
esfera de isopor média	paquímetro, barbante e régua	47,4	14,8	3,20
esfera de isopor grande	barbante e régua	92,1	29,7	3,10
lata de refrigerante	paquímetro, barbante e régua	20,7	6,3	3,28
tampa redonda	fita métrica e régua	23	7,4	3,11
latinha	fita métrica barbante e régua	21	6,2	3,39
disco de madeira	barbante e régua	31,5	10	3,15

Tabela 6.1. **c**=medida da circunferência e **d**=diâmetro. Dados obtidos por estudantes de uma turma de Licenciatura em Matemática da UFSCar.

Tendo em vista esses resultados, podemos conjecturar sobre a existência dessa constante. Isso tem uma consequência importante, pois da relação

$$\frac{\text{comprimento da circunferência}}{\text{diâmetro}} = \text{constante}$$

obtemos

$$\text{comprimento da circunferência} = \text{diâmetro} \times \text{constante},$$

que permite calcular o comprimento de uma circunferência sem medi-la, desde que saibamos os valores do diâmetro e o da tal constante. A média dos números da última coluna da tabela acima é 3,21, o que nos dá uma primeira aproximação da constante presumida.

Os observadores dos fenômenos naturais, particularmente os matemáticos, perceberam essas regularidades presentes sob vários aspectos em objetos com forma circular ou esférica, tanto no que diz respeito ao comprimento quanto à área e volume. No final desse capítulo descrevemos alguns experimentos que podem ser realizados.

Como os experimentos fornecem aproximações, ficamos na dúvida sobre se realmente existe a constante mencionada. Cumpre à Matemática imaginar procedimentos dedutivos e algoritmos que permitam abordar o problema e fornecer respostas.

6.3 Comprimento da circunferência

A Geometria Plana define inicialmente comprimento de segmentos. Vimos na Seção 4.2 que, dado um segmento PQ, podemos medi-lo transportando-o para uma reta numérica. Se a coordenada de P for r e a de Q for s, então esse comprimento é $|r - s|$. Confira a Figura 6.2.

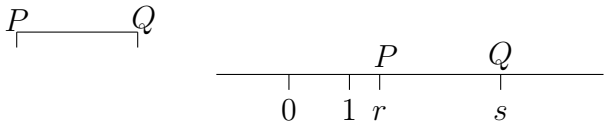


Figura 6.2. Comprimento de segmentos.

Com isso podemos calcular o perímetro de polígonos. O passo seguinte é a definição de comprimento de curvas não retilíneas. A mais importante delas é, certamente, a circunferência.

Como definir comprimento de uma circunferência? Essa definição deve fornecer um instrumento teórico operacional. Podemos imaginar, por exemplo, o seguinte procedimento: corte a circunferência em um ponto e a estique, transformando-a em um segmento, conforme está sugerido na Figura 6.3. Definimos então a medida da circunferência como a medida do segmento assim obtido. Essa pode ser uma definição de comprimento de uma circunferência desde que seja esclarecido o que é cortar e o que é esticar de um modo que seja possível operacionalizar essas ações com instrumentos matemáticos.

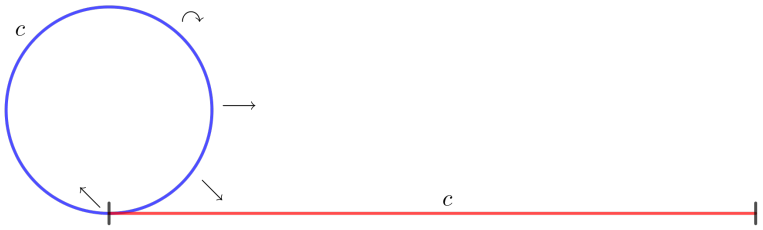


Figura 6.3 Retificação da circunferência.

Transformar uma circunferência em um segmento é uma operação à qual damos o nome de *retificação da circunferência*. Os matemáticos da Antiga Grécia encontraram vários métodos para isso. Observaram que todos os métodos que conseguiam perceber exigiam uma quantidade infinita de operações com régua e compasso. Por muito tempo se perguntou se existiria um método que exigisse uma quantidade finita. Em 1882 Carl Lindemann provou que tal método não existe. Portanto qualquer método de retificação da circunferência exige algum processo infinito, como limites de sequências.

Estudamos a seguir o método de Arquimedes de retificação da circunferência. A ideia é simples: dada uma circunferência, consideramos os polígonos regulares nela inscritos. Podemos perceber que, à medida que cresce o número de lados, o polígono se confunde com a circunferência.

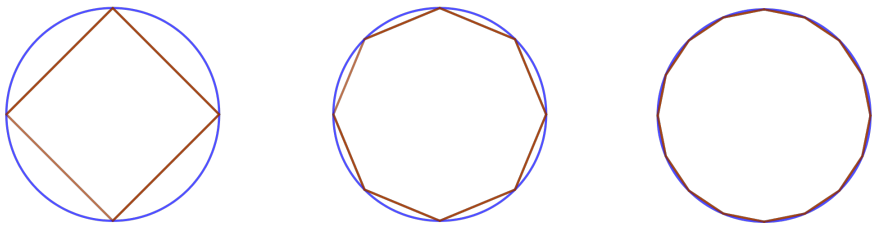


Figura 6.4 Polígonos regulares de 4, 8 e 16 lados inscritos em uma circunferência.

Naturalmente a percepção visual sugerida pela Figura 6.4 deve ser verificada com métodos analíticos. Para constatar essa necessidade o estudante pode examinar o Problema 6.11.4, em que se vê que a convergência visual não implica necessariamente na convergência de comprimentos.

O perímetro p_n de um polígono regular de n lados inscrito em uma circunferência de raio r é um número que estamos supondo já definido. O que temos que fazer é mostrar que existe o limite de p_n (ou de uma subsequência) para $n \to \infty$, e então definir o comprimento da circunferência como esse limite. Para isso usamos o Teorema das Sequências Monótonas 5.23, segundo o qual toda sequência de números reais crescente e limitada é convergente.

O comprimento de um segmento AB será indicado também por AB. Lembramos o Teorema do Ângulo Externo, em virtude do qual a medida de um ângulo externo a um triângulo é maior

do que a medida de qualquer um dos ângulos internos não adjacentes. Lembramos também que se dois ângulos internos de um triângulo não têm a mesma medida, então os lados que se opõem a esses ângulos têm medidas diferentes e o maior lado se opõe ao maior ângulo.

Lema 6.1. *No triângulo ABC, sejam D um ponto de AB e E um ponto de AC tais que $AD = AE$. Então $BC \geq DE$.*

Demonstração. Se $AB = AC$, temos $DE/BC = AD/AB \leq 1$, do que segue $DE \leq BC$. Então, sem perda de generalidade, podemos supor que $AB < AC$. Seja F um ponto de AC tal que $AB = AF$. Vimos que $DE \leq BF$. Provemos que $BF \leq BC$. Tomando como referência a Figura 6.5, indicamos por $\hat{x}$ o ângulo $\angle BFC$ e por x sua medida, etc. Temos $x > w$, pois $\hat{x}$ é externo ao ABF. Por motivo análogo, $z > y$. Como $z = w$, segue que $x > y$. Observe agora que no BCF, o lado BC se opõe a $\hat{x}$ e o lado BF se opõe a $\hat{y}$. Portanto $BF < BC$. Isso termina a demonstração do Lema. □

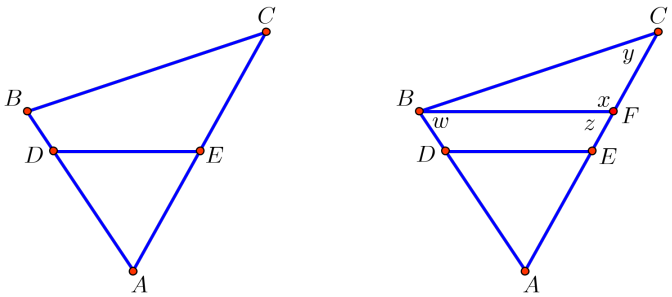


Figura 6.5 Desigualdade em um triângulo.

Lema 6.2. *Dada uma circunferência $\mathcal{C}$ de raio r, seja p_n o perímetro do polígono regular de n lados inscrito em $\mathcal{C}$. A sequência $(p_n)_{n\geq 3}$ é limitada superiormente.*

Demonstração. Acompanhando a Figura 6.6, consideramos o quadrado circunscrito a $\mathcal{C}$, cujo perímetro do é $8r$. Mostremos que $p_n \leq 8r$ para todo $n \geq 3$.

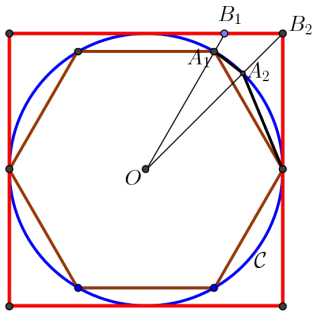


Figura 6.6 A sequência (p_n) é limitada superiormente.

Seja O o centro da circunferência. Os segmentos que unem O aos vértices do quadrado circunscrito determinam 4 pontos na circunferência. Considerando esses 4 pontos e mais os vértices do polígono, temos um conjunto com m pontos. Nomeamos esses pontos como A_1, A_2, ..., A_m, seguindo um mesmo sentido ao longo da circunferência. Consideremos o polígono simples fechado $\mathcal{A}$ formado por esses pontos. Usando a desigualdade triangular vemos que seu perímetro é $\geq p_n$. Para cada i tal que $1 \leq i \leq m$, consideremos a semirreta começando em O e passando por A_i. Seja B_i a interseção dessa semirreta com o quadrado circunscrito à circunferência. Aplicando o Lema 6.1 ao OB_iB_{i+1}, temos $A_iA_{i+1} \leq B_iB_{i+1}$ para todo $1 \leq i \leq m-1$, e $A_mA_1 \leq B_mB_1$. A soma de A_iA_{i+1}, $1 \leq i \leq m-1$, e A_mA_1 é o perímetro de $\mathcal{A}$, e a soma de B_iB_{i+1}, $1 \leq i \leq m-1$, e B_mB_1 é $8r$. Isso termina a demonstração do Lema. □

Lema 6.3. *Dada uma circunferência $\mathcal{C}$ de raio r, seja p_n o perímetro do polígono regular de n lados inscrito em C. Então $p_n < p_{2n}$ para todo $n \geq 3$.*

Demonstração. Consideremos um polígono regular $A_1A_3A_5 \ldots A_{2n-1}$ de n lados inscrito em $\mathcal{C}$ e um polígono regular $A_1A_2A_3A_4A_5 \ldots A_{2n}$ de $2n$ lados inscrito em $\mathcal{C}$. Confira a Figura 6.7. Devido à desigualdade triangular temos $A_1A_3 < A_1A_2 + A_2A_3$, $A_3A_5 < A_3A_4 + A_4A_5$, ..., $A_{2n-1}A_1 < A_{2n-1}A_{2n} + A_{2n}A_1$. Portanto $p_n < p_{2n}$, e isso demonstra o Lema. □

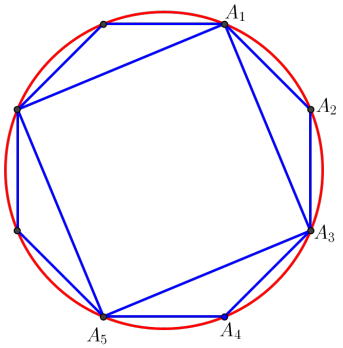


Figura 6.7 Ilustração de $p_n < p_{2n}$.

Teorema 6.4. *Dada uma circunferência $\mathcal{C}$ de raio r, seja p_n o perímetro do polígono regular de n lados inscrito em C. A sequência p_4, p_8, p_{16}, ... é convergente.*

Demonstração. Devido aos lemas anteriores, a sequência p_4, p_8, p_{16}, ... é limitada e crescente. Então, em virtude do Teorema das Sequências Monótonas 5.23, é convergente. □

Isso nos permite definir comprimento de uma circunferência qualquer.

Definição 6.5. O comprimento de uma circunferência qualquer é o limite dos perímetros p_4, p_8, p_{16}, ... dos polígonos regulares de 2^n lados inscritos.

Observação 6.6. Na Definição 6.5 podemos usar os perímetros p_3, p_6, p_{12}, p_{24}, ... ou qualquer subsequência p_k, p_{2k}, p_{4k}, p_{8k}, ... Por uma questão de facilidade nos limitamos à sequência considerada. Todas essas sequências têm o mesmo limite. Na verdade a sequência (p_n) é crescente, e portanto convergente. Esse resultado está demonstrado na Seção 10.8.

6.4 Existência da constante π

Na Seção 6.2 vimos que, medindo objetos circulares e calculando a razão entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro, obtemos valores próximos, o que nos leva a presumir que essa razão seja constante. Com a definição de comprimento de circunferência dada em 6.5 é fácil demonstrar esse fato.

Teorema 6.7. *É constante a razão entre o comprimento de uma circunferência qualquer e seu diâmetro.*

Demonstração. Consideremos duas circunferências $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ com centros O e O', raios r e r' e comprimentos c e c', respectivamente. Sejam $A_1A_2 \ldots A_n$ e $A'_1A'_2 \ldots A'_n$ polígonos regulares de n lados inscritos em $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$, com perímetros p_n e p'_n, respectivamente.

Tomando como referência a Figura 6.8, os triângulos OA_1A_2 e $O'A'_1A'_2$ são semelhantes pois são isósceles e os ângulos $\angle A_1OA_2$ e $\angle A'_1O'A'_2$ são iguais (ambos medem $360^o/n$). Portanto

$$\frac{A_1A_2}{r} = \frac{A'_1A'_2}{r'} \quad \Rightarrow \quad \frac{nA_1A_2}{2r} = \frac{nA'_1A'_2}{2r'} \quad \Rightarrow \quad \frac{p_n}{2r} = \frac{p'_n}{2r'}$$

para todo $n \geq 3$. Em particular

$$\frac{p_{2^n}}{2r} = \frac{p'_{2^n}}{2r'} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{p_{2^n}}{2r} = \lim_{n\to\infty} \frac{p'_{2^n}}{2r'} \quad \Rightarrow \quad \frac{c}{2r} = \frac{c'}{2r'}\,.$$

Isso termina a demonstração do Teorema. □

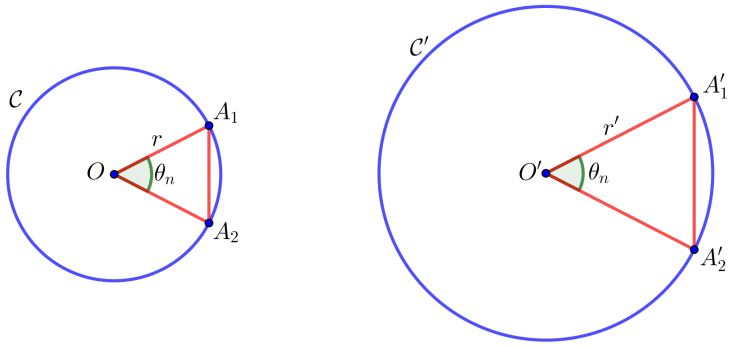


Figura 6.8 Existência da constante π.

Definição 6.8. A constante cuja existência foi demonstrada no Teorema 6.7 é designada com o símbolo π, e denominada *constante de Arquimedes*.

Teorema 6.9. *O comprimento c de uma circunferência de raio r é dado pela fórmula*

$$c = 2\pi r.$$

Demonstração. Vimos no Teorema 6.7 que $c/2r = \pi$. Portanto $c = 2\pi r$. □

6.5 Área de um disco

A Geometria Euclidiana define inicialmente a área de uma região quadrada.

Definição 6.10. A área de uma região quadrada de lado a é a^2.

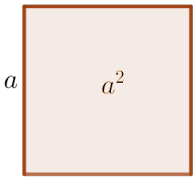


Figura 6.9 Área do quadrado de lado a.

Dada uma região plana, chamamos de *quadratura* à transformação da região em um quadrado de mesma área. Dessa forma podemos obter a área da região. Os antigos matemáticos gregos constataram que toda região poligonal pode ser quadrada através de um número finito de operações com régua e compasso. Com isso podiam obter a área dessas regiões. Passaram então ao estudo da quadratura de regiões não poligonais, e a mais importante região estudada foi o disco. Tinham esperança de conseguir, pois Hipócrates descobriu como quadrar lúnulas,

que são partes de um disco delimitadas por outro disco. Entretanto, por mais que tentassem, só conseguiam quadrar o disco através de um número infinito de operações com régua e compasso. Essa questão perdurou por quase dois mil anos, e foi finalmente respondida por Carl Lindemann em 1822. O mesmo teorema em que Lindemann demonstrou que a circunferência não pode ser retificada com régua e compasso prova também que o disco não pode ser quadrado com uma quantidade finita de operações.

Portanto qualquer método de quadratura do disco exige algum processo infinito, como limites de sequências.

Estudamos a seguir o método de Arquimedes de quadratura do disco. A ideia é similar ao caso da retificação da circunferência: dado um disco, consideramos regiões poligonais regulares nele inscritas. Na Figura 6.10 percebemos que, à medida que cresce o número de lados do polígono, a região poligonal se confunde com o disco.

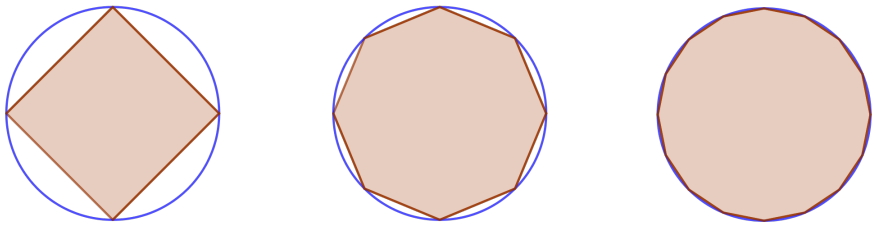


Figura 6.10 Regiões poligonais regulares de 4, 8 e 16 lados inscritos em uma circunferência.

Dado um disco de raio r, indicamos por s_n a área da região delimitada por um polígono regular de n lados inscrito no disco (isto é, inscrito na circunferência que delimita o disco). Com a experiência adquirida no estudo da Seção 6.3, o estudante poderá constatar facilmente que $s_n < s_{2n}$ e $s_n < 4r^2$ para todo $n \geq 3$. Aliás, essa constatação é até mais simples do que no caso da retificação da circunferência. Basta examinar a Figura 6.7 e observar que $4r^2$ é a área do quadrado circunscrito. Lembrando de usar o Teorema das Sequências Monótonas 5.23, temos a

Definição 6.11. A área de um disco de raio r é o limite da sequência s_4, s_8, s_{16}, ..., sendo s_n a área da região delimitada por um polígono regular de n lados inscrito na circunferência que delimita o disco.

Provamos agora o

Teorema 6.12. *A área de um disco de raio r é πr^2.*

Demonstração. Seja $\mathcal{D}$ um disco de raio r e $\mathcal{C}$ sua circunferência. Consideremos um polígono de n lados inscrito em $\mathcal{C}$. Sejam l_n o lado desse polígono, a_n seu apótema e p_n seu perímetro. Na Figura 6.11 temos $l_n = AB$.

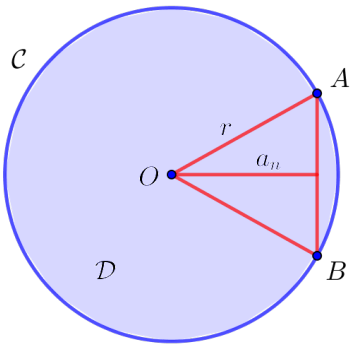


Figura 6.11 Esquema para o cálculo da área do disco de raio r.

A área da região delimitada pelo polígono é

$$s_n = n\frac{1}{2}l_n a_n = \frac{1}{2}p_n a_n.$$

Mas $a_n = \sqrt{r^2 - (l_n/2)^2}$. Como $\lim l_n = 0$ (Problema 6.11.7), segue que $\lim a_n = r$. Lembremo-nos ainda de que $\lim_{n\to\infty} p_{2^n} = 2\pi r$. Portanto a área de $\mathcal{D}$ é

$$\lim_{n\to\infty} s_{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}p_{2^n}a_{2^n} = \frac{1}{2}2\pi r r = \pi r^2.$$

Isso termina a demonstração do Teorema. □

O celebrado resultado de Arquimedes é

Escólio 6.13. *É constante a razão entre a área de um disco qualquer e o quadrado de seu raio, e essa constante é* π.

6.6 O algoritmo de Arquimedes

Seja $\mathcal{C}$ uma circunferência de raio r. Para todo $n \geq 3$, sejam P_n e p_n os perímetros dos polígonos regulares de n lados respectivamente circunscrito e inscrito em $\mathcal{C}$. O *algoritmo de Arquimedes* é dado pelas fórmulas recorrentes

$$P_{2n} = \frac{2p_n P_n}{p_n + P_n} \quad \text{e} \quad p_{2n} = \sqrt{p_n P_{2n}}. \tag{6.1}$$

Essas fórmulas podem ser usadas, por exemplo, para calcular p_{2^n}, para $n \geq 2$, iniciando com $p_4 = 4r\sqrt{2}$ e $P_4 = 8r$. Desse modo obtemos aproximações de π.

As fórmulas (6.1) não foram exatamente descobertas por Arquimedes, mas constituem uma implementação de seu método desenvolvida por Willebrord Snell e Christiaan Huygens.

Para demonstrar as fórmulas (6.1) começamos com uma circunferência $\mathcal{C}$ de raio r e centro O. Seja $AB = l_n$ o lado de um polígono regular de n lados inscrito em $\mathcal{C}$. Consideremos o diâmetro AA', conforme a Figura 6.12. A corda $A'B$ é chamada complemento de AB, e sua medida será indicada por c_n. Aplicando o Teorema de Pitágoras ao $AA'B$ temos

$$l_n = \sqrt{4r^2 - c_n^2} \quad \text{e} \quad c_n = \sqrt{4r^2 - l_n^2}, \quad n \geq 3. \tag{6.2}$$

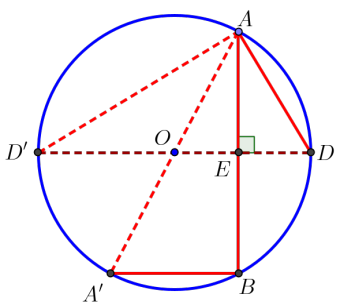


Figura 6.12 Complemento de uma corda em uma circunferência.

Consideremos ainda na Figura 6.12 o diâmetro DD' tal que $DD' \perp AB$. Portanto $AD = l_{2n}$ e $AD' = c_{2n}$. Seja E a interseção de DD' com AB. Como $AED' \sim DAD'$ temos

$$\frac{AE}{DA} = \frac{AD'}{DD'} = \frac{ED'}{AD'} \,. \tag{6.3}$$

Uma consequência de 6.3 é que $AD'^2 = D'E \cdot DD'$. Notemos que O e E são pontos médios respectivamente dos lados AA' e AB do $AA'B$, do que segue $D'E = r + OE = r + (1/2)A'B = r + (1/2)c_n$. Portanto $c_{2n}^2 = (r + (1/2)c_n)2r$, ou

$$c_{2n}^2 = 2r^2 + rc_n. \tag{6.4}$$

Outra consequência de 6.3 é que $AE \cdot DD' = AD \cdot AD'$. Portanto $(1/2)l_n 2r = l_{2n}c_{2n}$, do que segue

$$c_{2n} = r\frac{l_n}{l_{2n}} \,. \tag{6.5}$$

Antecipamos o resultado do Problema 6.11.12, em que

$$L_n = \frac{2rl_n}{\sqrt{4r^2 - l_n^2}},$$

sendo L_n o lado do polígono regular de n lados circunscrito a $\mathcal{C}$. Atualizando a notação temos

$$c_n = 2r\frac{l_n}{L_n} \,. \tag{6.6}$$

Juntando as fórmulas 6.5 e 6.6 temos $2r(l_{2n}/L_{2n}) = c_{2n} = r(l_n/l_{2n})$, ou $2l_{2n}^2 = L_{2n}l_n$. Multiplicando a última identidade por $2n^2$ obtemos

$$p_{2n}^2 = P_{2n}p_n.$$

Usando novamente 6.5 e 6.6 temos $c_{2n}^2 = c_{2n}c_{2n} = 2r(l_{2n}/L_{2n})r(l_n/l_2n)$. Combinando com 6.4 segue $2r(l_{2n}/L_{2n})r(l_n/l_2n) = 2r^2 + rc_n = 2r^2 + r2r(l_n/L_n)$. Manipulando essa relação vem

$$\frac{1}{L_{2n}} = \frac{1}{l_n} + \frac{1}{L_n} \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{2nL_{2n}} = \frac{1}{nl_n} + \frac{1}{nL_n} \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{P_{2n}} = \frac{1}{p_n} + \frac{1}{P_n} \,.$$

Segue

$$P_{2n} = \frac{2p_nP_n}{p_n + P_n} \,.$$

Dessa forma completamos a demonstração do

Teorema 6.14 (Algoritmo de Arquimedes)**.** *Dada uma circunferência, para todo $n \geq 3$ sejam P_n e p_n os perímetros dos polígonos regulares de n lados a ela circunscrito e inscrito, respectivamente. Então*

$$P_{2n} = \frac{2p_nP_n}{p_n + P_n} \quad e \quad p_{2n} = \sqrt{p_nP_{2n}}$$

para todo $n \geq 3$.

Diversos problemas da Seção 6.11 complementam esse Teorema.

6.7 Cálculo do valor numérico de π

Além do Algoritmo de Arquimedes, foram desenvolvidos muitos métodos para o cálculo do valor numérico de π. Certamente é útil para o estudante o resumo abaixo.

Antes do surgimento dos antigos matemáticos gregos muitos povos utilizavam o número π. O valor $\pi \approx 3$ era frequentemente adotado. No Problema 50 do Papiro de Ahmes afirma-se que a área de um campo circular com diâmetro de 9 unidades é igual à área de um quadrado com lado de oito unidades. Isso equivale a $\pi \approx 3,16$. Em um tablete sumeriano, descoberto na localidade de Susa, é dada a razão $(0;57,36)_{60}$ entre o perímetro do hexágono regular e o comprimento da circunferência circunscrita, equivalendo a $\pi \approx 3,125$. Confira os Problemas 6.11.24 e 6.11.25.

Os primeiros métodos sistemáticos utilizados para o cálculo do valor numérico de π derivam diretamente de sua definição geométrica, conforme fizemos na Seção 6.6. No Século III a.C., Arquimedes, usando os perímetros dos polígonos inscrito e circunscrito de 96 lados, calculou

$$3+\frac{10}{71}<\pi<3+\frac{1}{7} \qquad \text{ou} \qquad \frac{223}{71}<\pi<\frac{22}{7}\,.$$

Essa estimativa equivale a

$$3,1408<\pi<3,1428.$$

Liu Hui, no ano 300, calculou o perímetro de um polígono de $3072 = 2^9 \cdot 6$ lados, obtendo $\pi \approx 3,14159$. Em 480 Tsu Ch'ung-chih calculou $3,1415926 < \pi < 3,1415927$, e ficou famoso. Ghiyath al-Kashi, proeminente matemático árabe do século XV, calculou $\pi \approx 3,1415926535897932$. Ludolph van Ceulen, matemático europeu, calculou em 1596 o valor de π com 35 casas exatas, usando o perímetro de um polígono de 2^{62} lados. Devido a esse feito, o número π é às vezes denominado "constante de Ludolph".

François Viéte obteve a primeira expressão analítica para π:

$$\frac{1}{\pi}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdot\ \cdots$$



Figura 6.13. François Viéte nasceu e viveu na França no Século XVI, e se dedicou à Matemática e à Advocacia. Foi também criptógrafo e conselheiro real, além de apreciar ainda a Astromonia, a Navegação e a Arquitetura. Em Matemática sua grande contribuição foi o desenvolvimento da Álgebra e seu uso no estudo de outras áreas do conhecimento. Seguindo Diofanto, desenvolveu notação algébrica, passando a resolver problemas de forma independente de processos geométricos. Além disso, unificou a matemática grega e a Álgebra em um mesmo sistema lógico, exercendo influência decisiva em matemáticos posteriores. Detalhes do desenho na pág. 250.

Pouco depois foi a vez de John Wallis:

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdots$$

Com a descoberta da série do arcotangente

$$\operatorname{arctg} x=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots \qquad \text{para} \qquad |x|<1,$$

e lembrando que $\operatorname{arctg} 1 = \pi/4$, Gottfried Leibnitz observou que

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots$$

A série de Leibnitz converge muito lentamente. Um pouco melhor é a fórmula de John Machin $\pi/4 = 4\operatorname{arctg}(1/5) - \operatorname{arctg}(1/239)$. Em 1873 William Shanks usou essa fórmula para calcular π com 707 casas.

Com o aparecimento dos computadores eletrônicos os recordes do cálculo de π foram constantemente ultrapassados. Por exemplo, em 1981 dois matemáticos japoneses Kazunori Miyoshi e Kazuhika Nakayama calcularam π com mais de 2 milhões de casas usando a fórmula

$$\pi = 32\operatorname{arctg}\frac{1}{10} - 48\operatorname{arctg}\frac{1}{239} - 16\operatorname{arctg}\frac{1}{515}\,.$$

O uso de computadores assim como de algoritmos cada vez mais sofisticados permitiram o cálculo do valor numérico de π com bilhões de casas exatas. O estudante pode experimentar o seguinte algoritmo, de convergência quíntica.

Sejam

$$s_0 = 5(\sqrt{5} - 2) \quad \text{e} \quad s_{n+1} = \frac{25}{(z + (x/z) + 1)^2 s_n}\,,$$

sendo

$$x = \frac{5}{s_n} - 1, \quad y = (x-1)^2 + 7 \quad \text{e} \quad z = \left(\frac{1}{2}x\left(y + \sqrt{y^2 - 4x^3}\right)\right)^{1/5}.$$

Sejam

$$\alpha_0 = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \alpha_{n+1} = s_n^2\alpha_n - 5^n\left(\frac{s_n^2 - 5}{2} + \sqrt{s_n(s_n^2 - 2s_n + 5)}\right).$$

Então $\alpha_n \to 1/\pi$ com ordem cinco. Isso significa que, a cada iteração, acrescentam-se, em média, cinco casas exatas.

6.8 Comprimento de arco de circunferência

Nesta seção definimos comprimento de um arco qualquer de circunferência e demonstramos o seguinte teorema:

Teorema 6.15. *Seja $\mathcal{C}$ uma circunferência de raio r e centro O, e seja $\overset{\frown}{AB}$ um arco dessa circunferência determinado pelo ângulo central $\angle AOB$ de medida θ (em graus). Então o comprimento do arco é $\pi r\theta/180°$.*

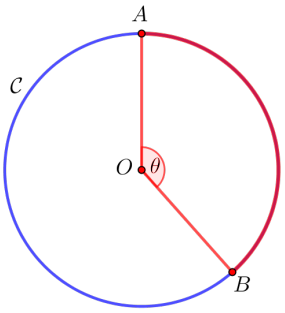


Figura 6.14 Arco em uma circunferência.

Se $A = B$ e se considerarmos que o arco se reduz a um ponto então $\theta = 0$ e a fórmula acima diz que o comprimento do arco é zero. Se $A = B$ e se considerarmos que o arco é toda a circunferência $\mathcal{C}$ então $\theta = 360°$ e a fórmula acima se reduz a $2\pi r$, de acordo com o que já sabemos. No que segue, supomos $A \neq B$.

Começamos definindo comprimento de arco de circunferência. Seja $\mathcal{C}$ uma circunferência de raio r e centro O, e seja $\overset{\frown}{AB}$ um arco dessa circunferência determinado por um ângulo de medida θ (em graus). Confira a Figura 6.14. Seja $n_0 \geq 2$ um inteiro suficientemente grande. Para todo $n \geq n_0$ consideremos os polígonos regulares $\mathcal{P}_n$ de 2^n lados inscritos em $\mathcal{C}$, com vértices $A_1A_2 \ldots A_{2^n}$, de modo que $A_1 = A$, A_2 está no interior do arco $\overset{\frown}{AB}$ e A_{2^n} está no interior do arco complementar $\overset{\frown}{BA}$ (lembrando que $A \neq B$). Confira a Figura 6.15.

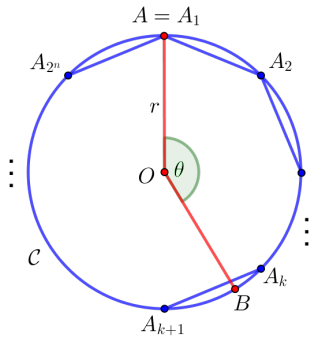


Figura 6.15 Medindo um arco de circunferência.

Para cada $n \geq n_0$ definimos o inteiro $k = k(n)$ tal que $2 \leq k < 2^n$ e com a seguinte propriedade: A_k está no arco $\overset{\frown}{AB}$ e A_{k+1} está fora. Definimos o número

$$q_n = A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_{k-1}A_k,$$

que é o comprimento da linha poligonal $A_1A_2 \ldots A_k$.

Provamos a seguir que a sequência (q_n), $n \geq n_0$, é crescente e limitada superiormente. q_n é menor do que o perímetro de $\mathcal{P}_n$, o qual, por sua vez, é menor do que $8r$, como foi visto no Lema 6.2. Portanto (q_n) é limitada. Passamos a verificar a monotonicidade.

Dado $n \geq n_0$, seja $\mathcal{P}'_n$ o polígono regular $A_1A'_1A_2A'_2 \ldots A_{2^n}A'_{2^n}$ de 2^{n+1} lados inscrito em $\mathcal{C}$ (portanto contendo todos os vértices de $\mathcal{P}_n$). Temos dois casos a considerar:

Primeiro caso A'_k está fora do arco. Temos

$$q_n = A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_{k-1}A_k$$

e

$$q_{n+1} = \underbrace{A_1A'_1 + A'_1A_2}_{} + \underbrace{A_2A'_2 + A'_2A_3}_{} + \ldots + \underbrace{A_{k-1}A'_{k-1} + A'_{k-1}A_k}_{}.$$

Vemos, em virtude da desigualdade triangular, que $q_n < q_{n+1}$.

Segundo caso A'_k está no arco. Temos

$$q_n = A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_{k-1}A_k$$

e

$$q_{n+1} = \underbrace{A_1A'_1 + A'_1A_2}_{} + \underbrace{A_2A'_2 + A'_2A_3}_{} + \ldots + \underbrace{A_{k-1}A'_{k-1} + A'_{k-1}A_k}_{} + A_kA'_k.$$

Em virtude da desigualdade triangular, e considerando que q_{n+1} tem um termo a mais, temos novamente $q_n < q_{n+1}$.

Fica demonstrado que a sequência (q_n), para $n \geq n_0$, é crescente e limitada superiormente, portanto converge. Com isso podemos enunciar a

Definição 6.16. Com as notações acima, o comprimento do arco $\overset{\frown}{AB}$ é o limite da sequência (q_n), para $n \to \infty$.

Vejamos agora a

Demonstração do Teorema 6.15. Usando as notações acima, tomamos como referência a Figura 6.15. Seja l_n a medida do lado do polígono regular inscrito de n lados, e seja c o comprimento do arco $\overset{\frown}{AB}$.

Notemos primeiro que

$$\theta = m\angle A_1OA_2 + m\angle A_2OA_3 + \ldots + m\angle A_{k-1}OA_k + m\angle A_kOB = (k-1)\frac{360^\circ}{2^n} + m\angle A_kOB.$$

Observando que $m\angle A_kOB < m\angle A_kOA_{k+1}$ e que $A_kA_{k+1} = l_{2^n} \to 0$ para $n \to \infty$, temos $\lim_{n\to\infty} m\angle A_kOB = 0$. Portanto

$$\theta = \lim_{n\to\infty} \theta = \lim_{n\to\infty} (k-1)\frac{360^\circ}{2^n}\,.$$

Agora calculamos

$$c = \lim_{n\to\infty} q_n = \lim_{n\to\infty} (k-1)l_{2^n} = \lim_{n\to\infty} (k-1)l_{2^n},$$

portanto

$$c = \lim_{n\to\infty} (k-1)\frac{360^\circ}{2^n} 2^n l_{2^n} \frac{1}{360^\circ} = \theta 2\pi r \frac{1}{360^\circ} = \frac{\pi r\theta}{180^\circ}.$$

Isso termina a demonstração do Teorema 6.15. □

Uma *semicircunferência* é uma arco de circunferência determinado por um ângulo central de 180°. Portanto, os lados desse ângulo contêm um diâmetro. O raio da semicircunferência é o raio da circunferência. Temos o

Escólio 6.17. *Qualquer semicircunferência de raio r tem comprimento πr.*

Demonstração. Basta usar a fórmula do Teorema 6.15. □

Observe que a medida de um arco é dimensional de comprimento, como dizem os físicos. Assim, se uma circunferência tem raio $r = 5$ cm, sua semicircunferência mede 5π cm.

Os resultados acima nos permitem definir a medida em radianos de um ângulo. A Figura 6.16 ilustra a ideia.

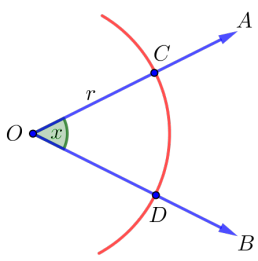


Figura 6.16 Definindo radiano.

Definição 6.18. Seja $\angle AOB$ um ângulo e consideremos a circunferência com centro O e raio r. Sejam C e D os pontos do ângulo que intersectam a circunferência. A medida x em radianos do $\angle AOB$ é o número real positivo definido por

$$x = \frac{\text{comprimento de } \overset{\frown}{CD}}{r}. \tag{6.7}$$

Juntando essa definição com o resultado do Teorema 6.15 temos a seguinte fórmula de conversão. Se um ângulo mede θ graus, sua medida em radianos é

$$x = \frac{\pi}{180^0}\theta. \tag{6.8}$$

A fórmula (6.8) implica que a Definição 6.18 não depende do raio r, e portanto não depende da circunferência ali considerada. Da fórmula (6.7) temos de imediato o

Teorema 6.19. *Seja $\mathcal{C}$ uma circunferência de raio r e centro O, e seja $\overset{\frown}{AB}$ um arco dessa circunferência determinado pelo ângulo $\angle AOC$ de medida x (em radianos). Então o comprimento do arco é rx.*

Observamos que o radiano é uma medida adimensional. Por outro lado, o comprimento, em radianos, de um arco de circunferência é dimensional, e a unidade é a mesmo da do raio.

Dado um disco $\mathcal{D}$, um *setor* desse disco é o subconjunto formado pelos pontos do disco que fazem parte de um ângulo central e seu interior. Na Figura 6.17 vemos o setor do disco de centro O delimitado pelo ângulo $\angle AOB$. Dizemos que $\angle AOB$ determina o setor.

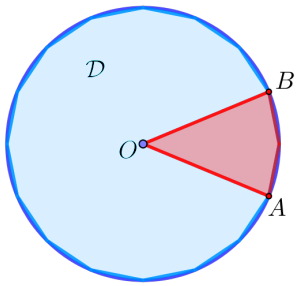


Figura 6.17 Setor de um disco.

Definimos a seguir área de um setor de disco. Seja $\mathcal{D}$ um disco delimitado pela circunferência $\mathcal{C}$ de centro O e raio r, e seja $\angle AOB$ um ângulo central, sendo OA e OB raios de $\mathcal{C}$. Consideremos o setor S determinado por esse ângulo. Seja θ (em graus) a medida de $\angle AOB$. Com as notações utilizadas na demonstração do Teorema 6.15 definimos, para todo $n \geq n_0$, a sequência

$$s_n = a(A_1OA_2) + a(A_2OA_3) + \ldots + a(A_{k-1}OA_k),$$

em que a notação $a(XYZ)$ indica a área do triângulo XYZ.

A sequência (s_n) é crescente e limitada superiormente (confira o Problema 6.11.16). Portanto (s_n) é convergente, e podemos enunciar a

Definição 6.20. Com as notações acima, a área do setor S é o limite da sequência (s_n), para $n \to \infty$.

Temos agora o

Teorema 6.21. *Seja $\mathcal{D}$ um disco de raio r e centro O, e seja S a área do setor delimitado pelos raios OA e OB. Seja θ (em graus) a medida do ângulo que delimita o setor. Então*

$$S = \frac{\pi r^2 \theta}{360^0}.$$

Se a medida do ângulo determinado pelo setor for x radianos, então

$$S = \frac{1}{2} x r^2 \, .$$

Demonstração. A cargo do estudante. Confira o Problema 6.11.16 □

Um *semidisco* é a região delimitada por uma circunferência e um diâmetro. Portanto, um semidisco é um setor determinado por um ângulo de 180°. Aplicando o Teorema acima, temos:

Escólio 6.22. *A área de um semidisco de raio r é $\frac{1}{2}\pi r^2$.*

6.9 Funções trigonométricas

Usando os resultados da seção anterior podemos definir as funções trigonométricas. Consideremos um sistema de coordenadas cartesianas Oxy e a circunferência $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ de raio 1. Seja $A = (1, 0)$. Para todo número real s tal que $0 \leq s < 2\pi$, seja $B = (x, y)$ o ponto de $\mathcal{C}$ tal que

$$s = \text{ comprimento de } \overset{\frown}{AB}$$

em que o arco $\overset{\frown}{AB}$ começa em A e continua até B percorrendo $\mathcal{C}$ no sentido anti-horário (contrário ao movimento dos ponteiros de um relógio comum). Confira a Figura 6.18.

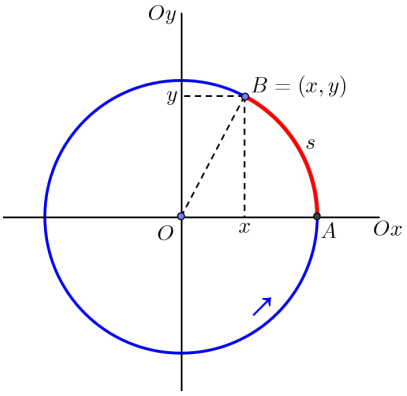


Figura 6.18 Definição das funções reais sen e cos.

Observemos agora que para todo $t \in \mathbb{R}$ podemos escrever, de forma única, $t = 2k\pi + s$, sendo k inteiro e $s \in \mathbb{R}$ tal que $0 \leq s < 2\pi$. Para esse s consideremos o ponto $B = (x, y)$ de $\mathcal{C}$ definido acima. Pomos

$$\cos(t) = x \qquad \text{e} \qquad \operatorname{sen}(t) = y.$$

Com isso ficam definidas funções $\cos : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ e $\operatorname{sen} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. A partir desse ponto a teoria das funções trigonométricas se desenvolve da forma já conhecida do estudante. Confira, por exemplo, [74], volume 1, páginas 209 a 233.

6.10 1000 casas de π

Segue abaixo o valor de π no sistema decimal com 1001 casas exatas, portanto com 1000 casas exatas após a vírgula. O cálculo foi executado com um aplicativo computacional algébrico. O dígito da casa 1002 é 3. Cada linha, a partir da segunda, tem 50 dígitos, separados em agrupamentos de dez.

3,
1415926535 8979323846 2643383279 5028841971 6939937510
5820974944 5923078164 0628620899 8628034825 3421170679
8214808651 3282306647 0938446095 5058223172 5359408128
4811174502 8410270193 8521105559 6446229489 5493038196
4428810975 6659334461 2847564823 3786783165 2712019091
4564856692 3460348610 4543266482 1339360726 0249141273
7245870066 0631558817 4881520920 9628292540 9171536436
7892590360 0113305305 4882046652 1384146951 9415116094
3305727036 5759591953 0921861173 8193261179 3105118548
0744623799 6274956735 1885752724 8912279381 8301194912
9833673362 4406566430 8602139494 6395224737 1907021798
6094370277 0539217176 2931767523 8467481846 7669405132
0005681271 4526356082 7785771342 7577896091 7363717872
1468440901 2249534301 4654958537 1050792279 6892589235
4201995611 2129021960 8640344181 5981362977 4771309960
5187072113 4999999837 2978049951 0597317328 1609631859
5024459455 3469083026 4252230825 3344685035 2619311881
7101000313 7838752886 5875332083 8142061717 7669147303
5982534904 2875546873 1159562863 8823537875 9375195778
1857780532 1712268066 1300192787 6611195909 2164201989

6.11 Problemas

Problema 6.11.1. Um arquiteto foi contratado para fazer uma praça circular em um terreno quadrado de 80 metros de lado. O projeto do arquiteto prevê o plantio de árvores ornamentais em uma circunferência. Diga como ele pode traçar a maior circunferência possível dentro do quadrado. Calcule o número aproximado de mudas que ele precisa encomendar, sabendo-se que a distância entre duas árvores consecutivas deve ser de aproximadamente 4 metros.

Problema 6.11.2. Conta-nos a História da Matemática que Eratóstenes de Cirene, geógrafo, matemático e bibliotecário do famoso Museu de Alexandria, conseguiu, no terceiro século antes de Cristo, medir o raio da Terra usando trigonometria. O valor obtido por Eratóstenes é bem próximo do atual, que é de 6 378,752 km (média equatorial). Supondo que a linha do equador tem a forma de uma circunferência, você pode calcular seu comprimento sem precisar andar por todo ele, medindo-o com uma trena.

Problema 6.11.3. Supondo que a Terra percorra um caminho circular em torno do Sol, e sabendo-se que a distância média da Terra ao Sol é de quase 150 000 000 km, calcule a velocidade da Terra em seu movimento de translação, em km/h e em km/s.

Problema 6.11.4. Considere a Figura 6.19. Vemos um quadrado, uma diagonal e uma sequência de linhas poligonais tipo "escada" convergindo visualmente para a diagonal. A n-ésima linha

poligonal é obtida dividindo a diagonal em 2^n partes iguais e tomando segmentos paralelos aos lados, conforme sugerido pela Figura 6.19. Se c_n é o comprimento da n-ésima linha poligonal, verifique se (c_n) converge para o comprimento da diagonal. Qual é a lição que podemos obter desse fenômeno?

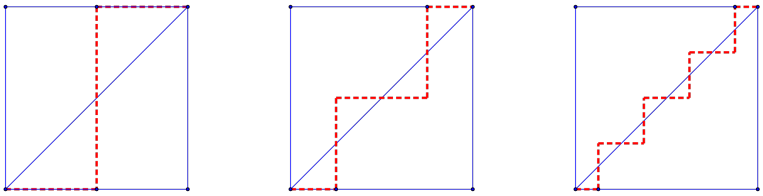


Figura 6.19 Linhas poligonais convergindo visualmente para a diagonal do quadrado.

Problema 6.11.5. Seja $\mathcal{C}$ uma circunferência, e seja p_n o perímetro do polígono regular de n lados inscrito em $\mathcal{C}$. Mostre que $(p_{5\cdot 2^n})_{n\geq 0}$ converge. Qual é o limite?

Problema 6.11.6. Seja $\mathcal{C}$ uma circunferência, e seja P_n o perímetro do polígono regular de n lados circunscrito em $\mathcal{C}$. Mostre que $P_{2n} < P_n$ para todo $n \geq 3$. Conclua que existe $\lim_{n\to\infty} P_{2^n}$.

Problema 6.11.7. Seja $\mathcal{C}$ uma circunferência, e seja l_n o lado do polígono regular de n lados inscrito em $\mathcal{C}$. Prove que $\lim_{n\to\infty} l_n = 0$.

Problema 6.11.8. Seja $\mathcal{C}$ uma circunferência de raio r, e sejam l_n e L_n os lados dos polígonos regulares de n lados inscrito e circunscrito em $\mathcal{C}$, respectivamente. Sejam $p_n = nl_n$ e $P_n = nL_n$. Prove que

$$P_n - p_n < \frac{P_n l_n}{2r} \quad \text{para todo } n \geq 3.$$

(Sugestão: considere a Figura 6.20, em que $AB = l_n$ e $CD = L_n$. Seja $a_n = OE$. Verifique que

$$\frac{l_n}{L_n} = \frac{a_n}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{p_n}{P_n} = \frac{a_n}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{P_n - p_n}{P_n} = \frac{r - a_n}{r}\,.$$

Ainda $r < a_n + l_n/2$.)

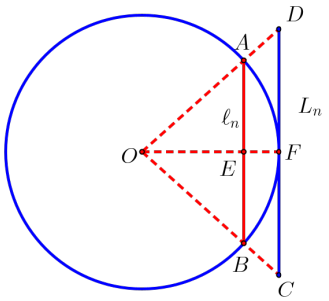


Figura 6.20 Relação entre L_n e l_n.

Problema 6.11.9. Prove que $\lim p_{2^n}$ e $\lim P_{2^n}$ são iguais. Assim na Definição 6.5 podemos usar polígonos circunscritos em vez de inscritos.

Problema 6.11.10. Defina área do disco usando polígonos circunscritos em vez de inscritos. Demonstre que o limite é o mesmo que o obtido com polígonos inscritos.

Problema 6.11.11. Verifique se é ou não verdadeira a seguinte afirmação: "Dada uma circunferência $\mathcal{C}$ de raio r, os valores p_n, para $n \geq 3$, dos perímetros dos polígonos inscritos de n lados em $\mathcal{C}$ converge para o comprimento da circunferência". Se a afirmação for verdadeira, demonstre. Se não for, dê um contraexemplo.

Problema 6.11.12. Dada uma circunferência $\mathcal{C}$ de raio r, seja l_n o lado do polígono regular de n lados inscrito em $\mathcal{C}$, e seja L_n o lado do polígono regular de n lados circunscrito a $\mathcal{C}$. Demonstre a seguinte relação entre l_n e L_n:

$$L_n = \frac{2rl_n}{\sqrt{4r^2 - l_n^2}}$$

Problema 6.11.13. Calcule: **a)** o lado e o perímetro de um quadrado inscrito em uma circunferência de raio r; o lado e o perímetro de um quadrado circunscrito em uma circunferência de raio r; com esse resultado obtenha aproximações por falta e por excesso do valor numérico de π; **b)** repita o item anterior, dessa vez para o octógono regular; **c)** usando hexadecágonos regulares (polígono de 16 lados) inscrito e circunscrito, obtenha aproximações por falta e por excesso do valor numérico de π.

Problema 6.11.14. É dada uma circunferência $\mathcal{C}$ de raio r. Usando o Teorema 6.19, calcule a medida, em radianos, de: (i) uma semicircunferência de $\mathcal{C}$; (ii) um quarto de circunferência de $\mathcal{C}$, isto é, um arco de ângulo central de medida 90°; (iii) do arco complementar ao anterior; (iv) do arco de ângulo central de medida 45°. Faça desenhos ilustrando todos esses casos.

Problema 6.11.15. É dada uma circunferência $\mathcal{C}$ de raio $r = 5$ cm. Calcule o valor da área de um setor determinado por um ângulo central de medida 45°. Use a fórmula da área em graus e em radianos.

Problema 6.11.16. a) Explique por que a sequência (s_n) usada na Definição 6.20 é crescente e limitada superiormente. **b)** Demonstre o Teorema 6.21.

Problema 6.11.17. Considere um triângulo retângulo isósceles $\triangle ABC$ com hipotenusa BC. Tomando o ponto A como centro e AB como raio, consideremos o arco de circunferência delimitado pela corda BC. Consideremos ainda a semicircunferência de diâmetro BC, conforme a Figura 6.21. Designamos por T a área da região triangular delimitada por ABC, e por S e L as áreas das outras duas regiões. A região de área L é chamada *luna de Hipócrates*. Prove que $L = T$. Portanto a luna de Hipócrates descrita acima pode ser quadrada com régua e compasso.

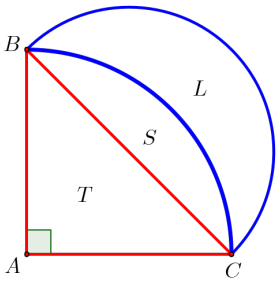


Figura 6.21 Uma luna de Hipócrates.

Problema 6.11.18. No interior de um triângulo equilátero de lado L são colocados k discos de mesmo raio de forma otimizada, com os discos tangenciando o triângulo e uns aos outros. Na Figura 6.22 vemos como são colocados 6 discos. Se a é a área do triângulo e se a_k é a soma das áreas do k discos, pergunto se $\lim_{k\to\infty}(a_k/a) = 1$, ou quem sabe próximo de 1, tipo assim, no limite os discos preenchem $\approx 90,7\%$ da região triangular.

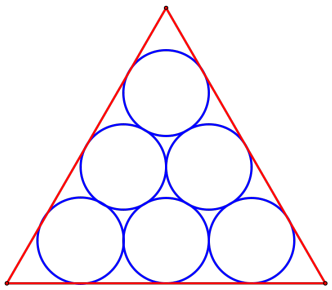


Figura 6.22 Preenchendo um triângulo com discos.

Problema 6.11.19. Se $\mathcal{C}$ é uma circunferência de raio $r = 1$, mostre que $p_6 = 6$ e $P_6 = 4\sqrt{3}$. Usando o algoritmo de Arquimedes calcule os valores exatos de p_{12} e P_{12}. Use esses resultados para obter aproximações de π.

Problema 6.11.20. Usando um aplicativo computacional algébrico, calcule p_{96} e P_{96}. Obtenha a aproximação de Arquimedes $3,14 < \pi < 3,142$.

Problema 6.11.21. Calcule p_{3072} e P_{3072}. Obtenha a aproximação de Liu Hui (ano 300) $\pi \approx 3,14159$.

Problema 6.11.22. Dada uma circunferência $\mathcal{C}$ de raio r, seja l_n o lado do polígono regular de n lados nela inscrito. Prove que $l_{2n} = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - l_n^2}}$ para todo $n \geq 3$.

Problema 6.11.23. Demonstre que a sequência

$$a_n = 2^{n-1} \underbrace{\sqrt{2 - \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}_{n-1 \text{ radicais}}$$

converge para π.

Problema 6.11.24. No Problema 50 do Papiro de Ahmes (1650 a.C.) afirma-se que a área de um campo circular com diâmetro de 9 unidades é igual à área de um quadrado com lado de 8 unidades. Calcule o valor de π assumido com essa aproximação.

Problema 6.11.25. Em um tablete sumeriano encontrado em Susa o escriba dá como sendo $(0; 57, 36)_{60}$ a razão entre o perímetro do hexágono regular e o comprimento da circunferência circunscrita. Calcule a aproximação de π equivalente a essa afirmação. Aqui estamos usando a notação para o sistema sexagesimal proposta por Otto Neugebauer, em que as casas sexagesimais são separadas por vírgula e a parte inteira é separada da parte fracionária por ponto e vírgula.

Problema 6.11.26. Em 1685 o monge polonês A. Kochansky obteve

$$\pi \approx \sqrt{\frac{40}{3} - \sqrt{12}}$$

Calcule o número de casas decimais exatas que essa aproximação fornece.

Problema 6.11.27. Mostre que a aproximação $\pi \approx \sqrt{2} + \sqrt{3}$, dada por Platão, tem erro menor do que 5 partes em mil.

Problema 6.11.28. Srinivasa Ramanujan propôs

$$\pi \approx \sqrt[4]{\frac{2143}{22}}$$

Calcule o número de casas decimais exatas que essa aproximação fornece.

Problema 6.11.29. Dada uma circunferência de raio r, consideremos o quadrado circunscrito. Dividindo cada lado do quadrado em três segmentos de mesmo comprimento, construímos um octógono (não regular), conforme a Figura 6.23. **a)** O que é maior, a área do disco ou do octógono? **b)** Se tomarmos a área do octógono no lugar da área do disco, qual a aproximação de π assumida?

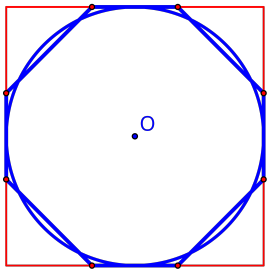


Figura 6.23 Calculando π com um octógono.

Problema 6.11.30. Calcule quantas casas exatas se obtém com as seguintes aproximações de π:

$$a)\ \pi \approx \sqrt{10} \qquad b)\ \pi \approx \frac{3(3+\sqrt{5})}{5} \qquad c)\ \pi \approx \frac{14+10\sqrt{2}}{33-17\sqrt{2}}$$

$$d)\ \pi \approx \frac{140+26\sqrt{29}}{99\sqrt{29}-444} \qquad e)\ \pi \approx \frac{63(17+15\sqrt{5})}{25(7+15\sqrt{5})}$$

Problema 6.11.31. Complete a definição de funções trigonométricas feita na seção 6.9 provando o seguinte: **a)** Dado $t \in \mathbb{R}$, existem e são únicos o inteiro k e o real s tais que $t = 2k\pi + s$ e $0 \leq s < 2k\pi$. **b)** Dado $0 \leq s < 2\pi$, existe um único ponto B de $\mathcal{C}$ tal que o comprimento do arco $\overset{\frown}{AB}$ é s, sendo que o arco é tomado a partir de A no sentido anti-horário.

Problema 6.11.32. Tomando como referência a definição das funções trigonométricas sen e cos feita na seção 6.9 verifique o seguinte: **a)** Se $0 < t < \pi/2$, $\cos(t)$ e $\operatorname{sen}(t)$ têm os mesmos valores que as funções homônimas definidas na trigonometria do triângulo retângulo. **b)** Para todo $t \in \mathbb{R}$ temos $\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$, em que anotamos $\cos^2 t = (\cos(t))^2$ e $\operatorname{sen}^2 t = (\operatorname{sen}(t))^2$. **c)** $\cos(t+2k\pi) = \cos t$ e $\operatorname{sen}(t+2k\pi) = \operatorname{sen} t$, quaisquer que sejam $t \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{Z}$. **d)** $\cos(-t) = \cos t$ e $\operatorname{sen}(-t) = -\operatorname{sen} t$, qualquer que seja $t \in \mathbb{R}$. **e)** $\cos(t+\pi) = -\cos t$, e as outras fórmulas de redução.

Problema 6.11.33. ([Borwein1], pág. 338) Tomando como referência as notações relativas ao Teorema 6.14 (Algoritmo de Arquimedes), prove que

a)

$$P_{2n} - p_{2n} = \frac{P_{2n}p_n}{\big(P_{2n}+p_{2n}\big)\big(P_n+p_n\big)}\big(P_n - p_n\big)$$

para todo $n \geq 3$;

b) Existe para cada $n \geq 3$ um ε_n tal que $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ e

$$\frac{P_{2n}p_n}{\big(P_{2n}+p_{2n}\big)\big(P_n+p_n\big)} < \frac{1}{4-\varepsilon_n}$$

para todo $n \geq 3$.

c) Mostre que, para n suficientemente grande, ao iterarmos o algoritmo de Arquimedes conseguimos, a cada duas iterações, pelo menos uma casa decimal exata a mais para π.

6.12 Temas para investigação

Tema 6.12.1. Investigue como seria possível operacionalizar a retificação da circunferência conforme sugerido para Figura 6.3 da página 113.

Tema 6.12.2. Informe-se sobre possíveis métodos de obter aproximações do valor numérico de π através de probabilidade.

Tema 6.12.3. Defina uma sequência de polígonos externos a uma circunferência, conforme sugerido pela Figura 6.24. **a)** Investigue se os perímetros dos polígonos dessa sequência convergem para o comprimento da circunferência. **b)** Investigue se a sequência das áreas das regiões delimitadas por esses polígonos converge para a área do disco.

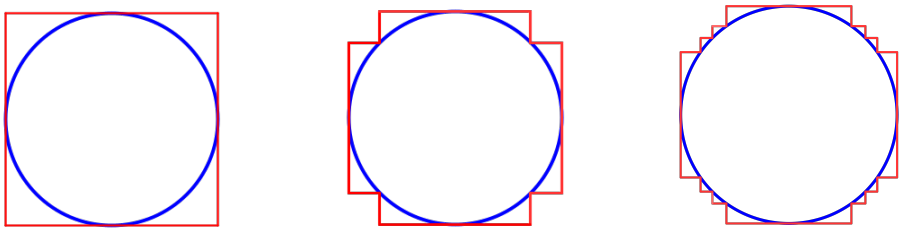


Figura 6.24 Polígonos externos a uma circunferência.

Tema 6.12.4. Estude o artigo [16]. Usando Geometria Analítica, construa a seguinte versão da proposta dos autores. Suponha que já foi provado que o comprimento de uma circunferência de raio r é igual a $2\pi r$. Queremos, a partir disso, obter a área do disco.

Em um plano, considere um sistema de coordenadas cartesianas Oxy e um disco de raio $r > 0$ com centro em $(0, r)$, conforme a Figura 6.25.

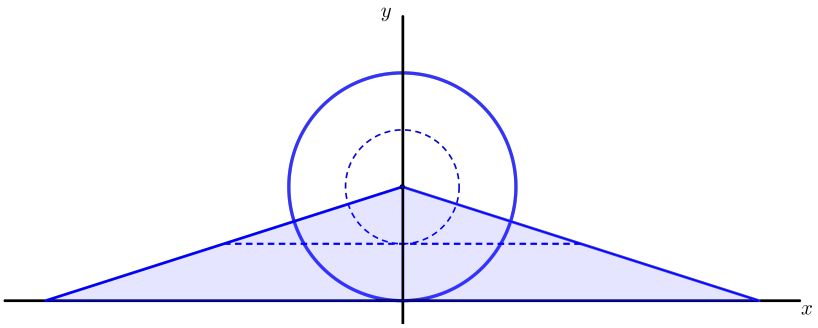


Figura 6.25 "Triangularização" do disco.

Para todo $y \in [0, r]$, considere a circunferência com centro em $(0, r)$ e raio $r - y$. Retifique essa circunferência, transformando-a em um segmento paralelo ao eixo Ox e centrado em $(0, y)$. Obtenha dessa forma a área do disco. Está tudo correto? Complete os dados da figura.

Tema 6.12.5. Verifique se o Algoritmo de Arquimedes, descrito na Seção 6.6, tem uma versão usando áreas no lugar de perímetros.

Tema 6.12.6. Um estudante perguntou se, dado um disco, existe um número natural $n \geq 3$ tal que a área do disco é a média aritmética entre as áreas das regiões poligonais regulares de n lados inscrita e circunscrita no disco. Se não valer, quem sabe a média geométrica?

Tema 6.12.7. Seja $n \geq 3$ um inteiro. Defina diâmetro de um polígono regular de n lados. O que se pode dizer sobre a razão entre o perímetro e o diâmetro de um polígono regular de n lados?

Tema 6.12.8. Na mídia impressa ou eletrônica aparece, às vezes, notícias sobre quebra de recordes no cálculo do valor de π com bilhões de casas decimais exatas. Por que existe interesse nesse tipo de cálculo?

Tema 6.12.9. Colecione fórmulas nas quais o número π tem presença marcante. Para contribuir apresentamos a *identidade de Euler*

$$e^{i\pi} + 1 = 0,$$

considerada por muitos como a mais bela fórmula da Matemática.

6.13 Atividades para licenciandos e professores

Atividade 6.13.1. Faça uma pesquisa bibliográfica em diversos livros textos de Matemática da escola básica para verificar como são as propostas dos autores para o ensino do número π, do comprimento da circunferência, da área do disco e do volume da esfera.

Atividade 6.13.2. A Tabela 6.1 descreve experimentos para reconhecimento do número π como constante usando comprimento de circunferências. Tente experimentos análogos considerando áreas de discos. Verifique se é viável usar esses experimentos em sala de aula. Como podem ser feitas essas medições? Como sugerir que, no caso de áreas, o valor deve ser dividido pelo quadrado do raio? Veja como lidar com a possibilidade das áreas serem divididas pelo diâmetro ao quadrado.

Atividade 6.13.3. Verifique se é viável construir experimentos em sala de aula que indiquem que o volume de uma esfera dividido pelo raio ao cubo é uma constante. Como podem ser feitas essas medições? Nesse caso a constante não é exatamente π, mas $\frac{4}{3}\pi$. Por que não se usa definir uma nova constante?

Atividade 6.13.4. Um livro didático apresenta, sem muita explicação, uma fórmula e três desenhos (confira a Figura 6.26):

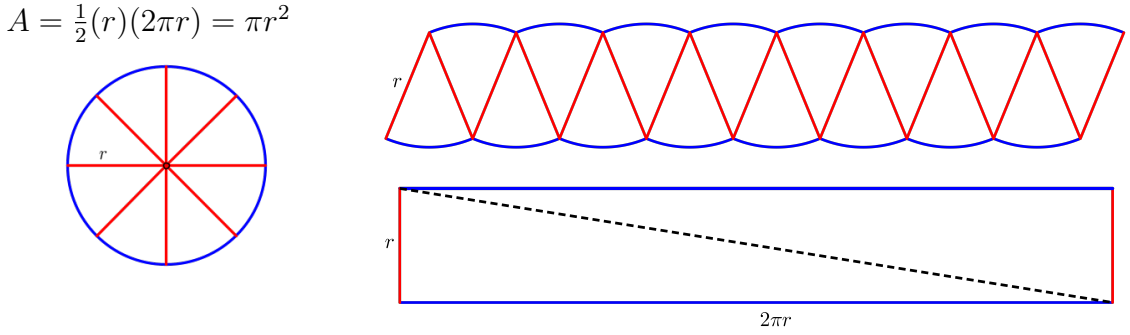


Figura 6.26 Brincando com tesoura.

Parece que aí tem alguma ideia, mas do que? Você sabe explicar essa ideia? Demonstrar? Qual a validade dessa ideia como recurso didático? Você está usando um argumento plausível? Que estratégia poderia ser adequada para implementar essa ideia em uma aula?

Atividade 6.13.5. Alguns estudantes utilizaram arranjos diferentes. Estude suas possibilidades.

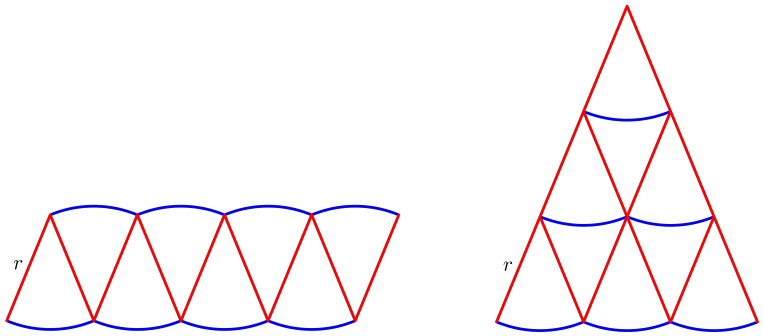


Figura 6.27 Brincando com tesoura 2.

Atividade 6.13.6. A Figura 6.28 sugere algum problema a ser apresentado a estudantes?

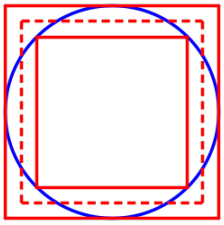


Figura 6.28 Problema dos três quadrados.

Atividade 6.13.7. Crie uma atividade para estudantes tomando como ideia básica uma pista de corrida de atletismo com a parte curva em forma de semicircunferência. A Figura 6.29 é uma sugestão.

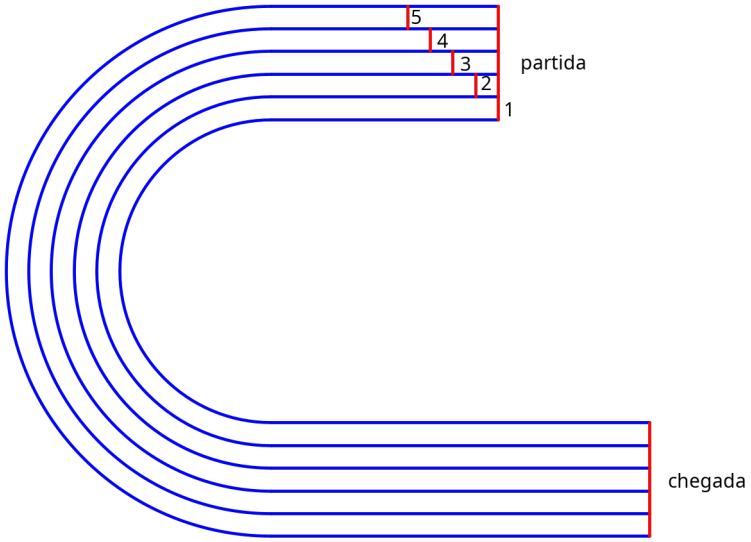


Figura 6.29 Pista de atletismo.

Atividade 6.13.8. Imagine uma atividade para estudantes que começa assim: *Operários rolam um cubo de granito de 1 m de aresta ...*

Capítulo 7

A série geométrica

7.1 Introdução

Somas infinitas aparecem naturalmente na Matemática, e a série geométrica é o exemplo mais simples.

7.2 Estudos iniciais sobre a série geométrica

Já comentamos, no início do Capítulo 5, que um exemplo de sequência bem conhecida do estudante é a chamada *progressão geométrica*, definida por

$$a_1 = a \quad \text{e} \quad a_n = ra_{n-1} \text{ para todo } n \geq 2, \tag{7.1}$$

em que a e r são números reais dados, chamados, respectivamente, *primeiro termo* e *razão*. A fórmula direta para essa sequência é

$$a_n = ar^{n-1} \text{ para todo } n \geq 1. \tag{7.2}$$

A progressão geométrica e a regra para obter a soma de seus termos são conhecidas desde a Antiguidade. No antigo Papiro de Ahmes o escriba apresenta o seguinte problema (adaptado): "Em um conjunto de sete casas, cada casa tem um gato, cada gato come sete ratos, cada rato comeria sete espigas, e cada espiga produz sete medidas de grãos." Em seguida, o escriba calcula quantas medidas de grãos foram economizadas, e, curiosamente, calcula a soma do número de casas, gatos, ratos, espigas e medidas de grãos.

Esse problema do Papiro de Ahmes parece ser o antepassado do seguinte desafio, escrito em versos, muito difundido na Idade Média:

> "Quando ia a Saint Ives,
> encontrei um homem com sete mulheres;
> cada mulher tinha sete sacos,
> cada saco tinha sete gatos,
> cada gato tinha sete gatinhos.
> Gatinhos, gatos, sacos e mulheres,
> quantos iam a Saint Ives?"

Euclides de Alexandria apresenta, em *Os Elementos*, uma regra para o cálculo da soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ Sua regra pode ser descrita

pela fórmula não muito prática

$$\frac{a_{n+1}-a_1}{a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1}=\frac{a_2-a_1}{a_1}\,.$$

Em um tratado de Aritmética, escrito em 1410 por Prosdócimo de Beldamandi, aparece uma regra na forma:

$$a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}=ar^{n-1}+\frac{ar^{n-1}-a}{r-1}\,.$$

Nos tempos atuais a soma

$$s_n=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}$$

dos n primeiros termos de uma progressão geométrica é dada pela fórmula

$$s_n=\begin{cases} a\,\dfrac{1-r^n}{1-r} & \text{se } r\neq 1,\\ an & \text{se } r=1.\end{cases} \tag{7.3}$$

Se $r=1$, a progressão geométrica é uma sequência constante, a saber, $a_n=a$ para todo n, e portanto $s_n=a+a+\cdots+a$ (n termos), ou $s_n=na$. Se $r\neq 1$, a fórmula (7.3) pode ser demonstrada através do Método da Indução Completa. Outra forma de demonstrar é considerar a disposição

$$\begin{array}{rr} & s_n= a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}\\ - & rs_n= \quad ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+ar^n\\ \hline s_n-rs_n= a & -ar^n \end{array}$$

a qual implica a fórmula (7.3) para $r\neq 1$.

Mas aqui estamos interessados na soma infinita dos termos de uma progressão geométrica. Segundo [116], vol. II, página 503, a primeira série geométrica infinita conhecida é a que foi calculada por Arquimedes em seu trabalho *A Quadratura da Parábola*. A série calculada foi

$$1+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{4}\right)^n+\cdots=\frac{4}{3}\,,$$

que é a área da região sob a parábola gráfico de $f(x)=1-x^2$, $-1\leq x\leq 1$.

Definição 7.1. Dados números reais a e r, a *série geométrica* de *primeiro termo* a e *razão* r é a soma infinita

$$a+ar+ar^2+ar^3+\cdots+ar^n+\cdots \tag{7.4}$$

Naturalmente precisamos esclarecer o que significa uma soma infinita. Mas antes observamos que existem muitos motivos pelos quais a Matemática considera esse tipo de soma. Apresentamos inicialmente dois exemplos.

Exemplo 7.2. De acordo com o que estudamos no Capítulo 2, a expansão decimal de um número racional pode ser uma soma infinita. Por exemplo, $1/3=0{,}333\ldots$, o que significa

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}=0{,}333\ldots&=\frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{3}{10^3}+\cdots\\ &=\frac{3}{10}+\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{10}+\frac{3}{10}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^2+\cdots\end{aligned}$$

portanto $1/3$ se escreve como a soma infinita dos termos da progressão geométrica cujo primeiro termo é $a=3/10$ e cuja razão é $r=1/10$. □

Exemplo 7.3. Consideremos o quadrado unitário. Dividindo-o ao meio com um segmento vertical, obtemos dois retângulos, cada um com área igual a 1/2. Dividindo o retângulo da direita ao meio com um segmento horizontal, obtemos dois retângulos, cada um com área igual a 1/4. Dentre esses dois, escolhemos o retângulo superior, e o dividimos ao meio com um segmento vertical, e temos dois retângulos, cada um com área igual a 1/8. Podemos continuar indefinidamente esse processo. Confira a Figura 7.1. Isso nos indica que deve ser verdadeira uma identidade do tipo

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots \tag{7.5}$$

a qual envolve uma soma infinita dos termos da progressão geométrica cujo primeiro termo é $a = 1/2$ e cuja razão é $r = 1/2$. □

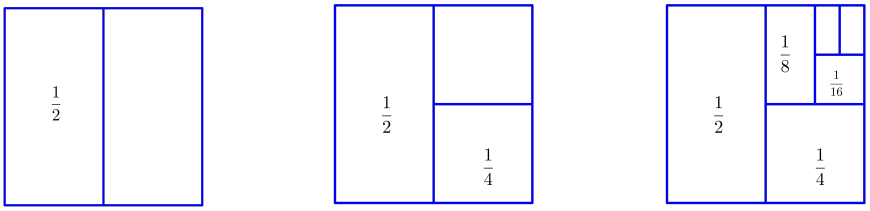


Figura 7.1 Decomposição infinita do quadrado unitário.

Podemos tentar uma demonstração algébrica para uma identidade do tipo (7.5) imitando a demonstração feita para o caso finito. Temos

$$\begin{array}{rrl} & S = & \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots \\ ? \quad - & \frac{1}{2}\,S = & \quad\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots \\ \hline S - \frac{1}{2}\,S = & \frac{1}{2} + 0 + 0 + 0 + \cdots \end{array}$$

Portanto $(1/2)S = 1/2$, ou $S = 1$, como esperávamos. O estudante poderá verificar que esse método também se aplica à série geométrica do exemplo 7.2, em que

$$\frac{1}{3} = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \cdots$$

Mas, a Matemática tem seus próprios caminhos. Se o estudante aplicasse o método acima para a "soma infinita"

$$S = 1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \cdots$$

obteria $S = -1/4$. Isso, sem dúvida, seria muito esquisito. Como poderia a "soma" $1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \cdots$ ser igual a $-1/4$, se todas as parcelas são positivas? Se isso fosse verdade, a Matemática estaria de pernas para o ar!

A propósito, a história ocorrida entre o rei e o sábio, contada no Problema 7.6.5, tem outra versão. Um rei, desejando recompensar os feitos de seu melhor guerreiro, perguntou-lhe o que desejava. O guerreiro era um aficcionado do jogo de xadrez. Mostrando ao rei um tabuleiro de xadrez, pediu-lhe um grão de trigo pela primeira casa, dois grãos pela segunda casa, quatro pela terceira, e assim por diante. Julgando ser modesto o guerreiro, o rei prometeu-lhe atender o pedido, e lhe ordenou voltar ao palácio no dia seguinte. Chamou então o rei o contador e o dispenseiro da corte, e ordenou-lhes que tomassem as providências necessárias para atender ao pedido do guerreiro. Depois de muitos cálculos, o contador e o dispenseiro constataram que, mesmo considerando toda a produção de trigo do reinado durante cem anos, não se atingiria a quantidade necessária. O rei ficou estupefato. Previu que o guerreiro exigiria a mão de sua

única filha. Como, no íntimo, não gostasse de guerreiros, pediu ao mais famoso sábio de seu reino que apresentasse uma solução para o problema.

O sábio sugeriu ao rei que oferecesse ao guerreiro todo o trigo correspondente não apenas a um tabuleiro com 64 casas, mas a um tabuleiro infinito. O imprudente guerreiro aceitou. O sábio fez então o seguinte cálculo:

$$\begin{array}{rl} & S = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots \\ - & 2S = \quad 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots \\ \hline & -S = 1, \end{array}$$

portanto, $S = -1$.

O guerreiro tinha noções de Matemática, mas não soube contestar os cálculos do sábio. Teve então que pagar um grão de trigo ao rei.

Por que o cálculo

$$\begin{array}{rl} & S = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots \\ - & rS \quad\quad = \quad ar + ar^2 + ar^3 + \cdots \\ \hline & (1-r)S = a \end{array}$$

funciona para algumas progressões geométricas e para outras não? Para responder a isso precisamos olhar a questão mais de perto. Ao fazer a conta

$$rS = r(a + ar + ar^2 + \cdots) = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots$$

estamos usando a propriedade distributiva da multiplicação em relação a uma "soma infinita". Ora, sabemos que vale a propriedade distributiva da multiplicação em relação a uma soma finita. E quanto a uma soma infinita? Por outro lado, ao efetuarmos $S - rS$, estamos usando a propriedade associativa em somas infinitas:

$$\begin{aligned} S - rS &= (a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots) - (ar + ar^2 + ar^3 + \cdots) \\ &= a + (ar - ar) + (ar^2 + ar^2) + (ar^3 + ar^3) + \cdots \\ &= a + \quad 0 \quad + \quad 0 \quad + \quad 0 \quad + \cdots \\ &= a. \end{aligned}$$

Para saber se essas propriedades são válidas nesse contexto, necessitamos ter mais clareza sobre o significado de soma infinita.

7.3 Convergência da série geométrica

Para definir o que se entende por soma infinita reexaminamos o Exemplo 7.3. Vimos ali que a identidade

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

foi gerada mediante a partição da área de um quadrado unitário. Essa partição é um processo infinito, o que nos sugere considerar o limite de alguma sequência. No Exemplo referido, aproximamo-nos da área total do quadrado à medida que adicionamos mais um novo retângulo à soma das áreas dos retângulos anteriores.

Isso nos sugere estudar a sequência

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{1}{2} \\ s_2 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \\ s_3 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \\ &\vdots \\ s_n &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}\,. \end{aligned}$$

Calculamos a seguir $\lim_{n\to\infty} s_n$. Sabemos, da fórmula 7.3, que

$$s_n = \frac{1}{2}\ \frac{1-(1/2)^n}{1-(1/2)} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Como $\lim_{n\to\infty}(1/2)^n = 0$, segue que $\lim_{n\to\infty} s_n = 1$. Isso é o que queríamos. Essas considerações nos sugerem a

Definição 7.4. Dada uma progressão geométrica infinita $(ar^n)_{n\geq 0}$, a sequência $(s_n)_{n\geq 1}$, definida por

$$s_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1},$$

é chamada *sequência das somas parciais* de $(ar^n)_{n\geq 0}$. Essa sequência também é indicada pela *soma infinita* $a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots$, e é também chamada *série geométrica*.

É usual indicar a soma infinita $a+ar+ar^2+ar^3+\cdots$ com a notação de somatória $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$, que se lê "somatória de $n = 0$ a infinito de ar^n".

Definição 7.5. Se a e r são números reais, dizemos que a série geométrica $a+ar+ar^2+ar^3+\cdots$ é *convergente* se existir o limite $\lim s_n$ da sequência $(s_n)_{n\geq 1}$ das somas parciais. Nesse caso o limite é indicado por $a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots$ ou por $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$, e é chamado de *soma* da série.

Insistimos em observar que estamos usando uma notação de duplo sentido. Dessa forma

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots \quad \text{ou} \quad \sum_{n=0}^{\infty} ar^n$$

indicam tanto a sequência das somas parciais como o limite, se existir. Por outro lado, se não existir $\lim s_n$, dizemos que a série é *divergente*. Quando não houver ambiguidade podemos escrever $\sum ar^n$ no lugar de $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$.

Para calcular a soma de uma série geométrica, necessitamos primeiro conhecer $\lim_{n\to\infty} r^n$ para todo número real r. Para isso demonstramos o

Teorema 7.6. *Para todo número real r temos*

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0 & \text{se } |r| < 1; \\ 1 & \text{se } r = 1; \\ +\infty & \text{se } r > 1; \\ \text{não existe se} & r \leq -1. \end{cases} \tag{7.6}$$

Demonstração. 1º Caso: $r = 1$.

Temos $\lim_{n\to\infty} r^n = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$.

2º Caso: $|r| < 1$.

Se $r = 0$, temos $\lim_{n\to\infty} r^n = \lim 0 = 0$. Suponhamos $r \neq 0$. Seja $s = (1/|r|) - 1$. Então $s > 0$ e $|r| = 1/(1+s)$. Aplicando a fórmula binomial, obtemos

$$\begin{aligned}(1+s)^n &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1}s + \binom{n}{2}s^2 + \cdots \binom{n}{n}s^n \\ &> \binom{n}{1}s \\ &> ns\end{aligned}$$

para todo $n \geq 1$. Portanto

$$0 < |r|^n = \frac{1}{(1+s)^n} < \frac{1}{ns}\,.$$

Como $\lim_{n\to\infty} 1/(ns) = 0$, o Teorema da Compressão 5.18 garante que $\lim |r|^n = 0$.

3º Caso: $r > 1$.

Seja $s = r - 1$. Então $s > 0$ e $r = 1 + s$. Usando a desigualdade do caso anterior temos

$$r^n = (1+s)^n > ns \quad \text{para todo } n \geq 1.$$

Como $\lim_{n\to\infty} ns = +\infty$, segue que o mesmo vale para (r^n).

4º Caso: $r < -1$.

Observe que $|r| > 1$. Pelo que provamos acima no 3º caso, a subsequência dada pelos valores pares de n tende para $+\infty$, enquanto $r^n < -1$ para todo n ímpar. Portanto não existe $\lim r^n$.

5º Caso: $r = -1$.

A sequência $\big((-1)^n\big)_{n\geq 1}$ oscila, assumindo o valor 1 para n par, e -1 para n ímpar. Logo, não existe $\lim (-1)^n$.

Isso termina a demonstração. □

Temos agora o

Teorema 7.7. *Sejam r e a números reais com $a \neq 0$. Então*

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n \begin{cases} = \dfrac{a}{1-r} & \text{se } |r| < 1; \\ \text{é divergente} & \text{se } |r| \geq 1. \end{cases} \tag{7.7}$$

Demonstração. Seja $(s_n)_{n\geq 1}$ a sequência das somas parciais, isto é,

$$s_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}.$$

Queremos calcular $\lim s_n$. Sabemos que

$$s_n = \begin{cases} a\dfrac{1-r^n}{1-r} & \text{se } r \neq 1; \\ an & \text{se } r = 1. \end{cases}$$

Consideremos três casos.

1º Caso: $|r| < 1$.
Temos $\lim r^n = 0$ e $s_n = a(1 - r^n)/(1 - r)$. Portanto,

$$\lim s_n = \frac{a}{1-r} \lim(1 - r^n) = \frac{a}{1-r}(1 - 0) = \frac{a}{1-r} \, .$$

2º Caso: $r = 1$.
Então $s_n = an$ (sendo $a \neq 0$), e $\lim s_n$ não existe.

3º Caso: $|r| \geq 1$ e $r \neq 1$.
Temos $s_n = a(1-r^n)/(1-r)$ e $\lim r^n$ não existe. Consequentemente, $\lim s_n$ não existe. Isso termina a demonstração. □

Exemplo 7.8. Recalculamos a soma da série geométrica

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$$

à luz do resultado acima. Temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^n \\ &= \frac{(1/2)}{1 - (1/2)} \\ &= 1, \end{aligned}$$

confirmando o que já esperávamos. □

Exemplo 7.9. Observe que

$$\begin{aligned} 0{,}333\ldots &= \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{10} \left(\frac{1}{10} \right)^n \\ &= \frac{(3/10)}{1 - (1/10)} \\ &= \frac{1}{3} \, , \end{aligned}$$

o que está de acordo com o que vimos na Seção 2.4. □

Exemplo 7.10. Examinemos a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^{2n}}{5^{3n+2}}$. Observemos primeiro que ela é igual a $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{5^2} \left(\frac{4^2}{5^3} \right)^n$. Portanto, a série pode ser colocada na forma $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$, e vemos assim que se trata de uma série geométrica de primeiro termo $a = 1/5^2$ e razão $r = 4^2/5^3$. Como $|r| < 1$, a série é convergente. De acordo com o Teorema 7.7, sua soma é

$$\frac{1}{5^2} \, \frac{1}{1 - (4^2/5^3)} = \frac{5}{5^3 - 4^2} = \frac{5}{109} \, .$$

□

Exemplo 7.11. Considere a série geométrica $\sum_{n=2}^{\infty} 5(1/3)^n$. Um estudante mais apressado poderá concluir erroneamente que se trata da série geométrica de razão igual a $1/3$ e primeiro termo igual a 5. Observe, entretanto, que o índice n começa com 2, e não com zero. Assim

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty} 5\left(\frac{1}{3}\right)^n &= 5\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 5\left(\frac{1}{3}\right)^3 + 5\left(\frac{1}{3}\right)^4 + \cdots \\ &= \frac{5}{9} + \frac{5}{9}\frac{1}{3} + \frac{5}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^n,\end{aligned}$$

e a progressão tem primeiro termo igual a $\dfrac{5}{9}$ e razão $\dfrac{1}{3}$. A soma é $\dfrac{5/9}{1-(1/3)} = \dfrac{5}{6}$. □

7.4 Aplicações da série geométrica

Na Seção 2.4 vimos como as séries geométricas aparecem na expansão decimal de números racionais. Em particular, a recíproca do Teorema 2.5 afirma que toda expansão decimal periódica representa um número racional. Passamos a fazer uma demonstração geral dessa afirmação, pois na Seção 2.4 foi feito apenas um exemplo.

Consideremos um representação decimal periódica

$$a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0, b_1 b_2 \ldots b_{N-1} \overline{b_N \ldots b_{N+k-1}}$$

em que $a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0$ é a parte inteira, $b_1 b_2 \ldots b_{N-1}$ é a parte não inteira não periódica e $b_N \ldots b_{N+k-1}$ é a parte periódica. Observemos primeiro que

$$\begin{aligned}a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0, b_1 b_2 \ldots b_{N-1} \overline{b_N \ldots b_{N+k-1}} = \\ = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + a_1 10 + a_0 + \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + \cdots + \frac{b_{N-1}}{10^{N-1}} + \\ + \frac{1}{10^{N-1}} \left[0, \overline{b_N \ldots b_{N+k-1}} \right].\end{aligned}$$

Basta demonstrar, portanto, que é racional toda representação periódica simples da forma $0,\overline{b_1 b_2 \ldots b_k}$. Temos

$$\begin{aligned}0,\overline{b_1 b_2 \ldots b_k} &= \frac{\left(b_1 b_2 \ldots b_k\right)_{10}}{10^k} + \frac{\left(b_1 b_2 \ldots b_k\right)_{10}}{10^{2k}} + \frac{\left(b_1 b_2 \ldots b_k\right)_{10}}{10^{3k}} + \cdots \\ &= \frac{\left(b_1 b_2 \ldots b_k\right)_{10}}{10^k} \left[1 + \left(\frac{1}{10^k}\right) + \left(\frac{1}{10^k}\right)^2 + \left(\frac{1}{10^k}\right)^3 + \cdots \right] \\ &= \frac{\left(b_1 b_2 \ldots b_k\right)_{10}}{10^k} \frac{1}{1-\left(1/10^k\right)} \\ &= \frac{\left(b_1 b_2 \ldots b_k\right)_{10}}{10^k - 1},\end{aligned}$$

que é um número racional.

As séries geométricas podem ser utilizadas em diversos problemas de Física, conforme podemos ver no exemplo seguinte e nos Problemas 7.6.10 a 7.6.12.

Exemplo 7.12. Uma bola elástica é solta de uma altura ℓ metros sobre um piso horizontal. O movimento da bola ficará perfeitamente descrito se dissermos que, a cada vez que a bola se choca com o piso, ela sobe até uma altura igual a r vezes a altura do salto anterior, sendo r um número tal que $0 < r < 1$. Consideramos que a bola salta um número infinito de vezes.

Calculamos primeiro a distância total percorrida pela bola. A bola é solta, e desce ℓ metros até o piso. Depois sobe $r\ell$ metros, e desce a mesma distância. Portanto, percorre $\ell + 2r\ell$ metros após o primeiro salto. E assim sucessivamente, a distância total percorrida é

$$\begin{aligned} d &= \ell + 2r\ell + 2r^2\ell + 2r^3\ell + \cdots \\ &= \ell + 2r\ell + (2r\ell)r + (2r\ell)r^2 + \cdots \\ &= \ell + 2r\ell\,\frac{1}{1-r} \\ &= \ell\,\frac{1+r}{1-r} \text{ metros.} \end{aligned}$$

Calculamos agora o tempo que a bola leva para percorrer essa distância. Um corpo em queda livre satisfaz às equações $v_f = v_i - gt$ e $v_f^2 = v_i^2 - 2gy$, sendo v_i é a velocidade inicial, v_f é a velocidade final, g a aceleração da gravidade, t o intervalo de tempo e y a distância percorrida. Como referencial consideramos o eixo Oy conforme a Figura 7.2.

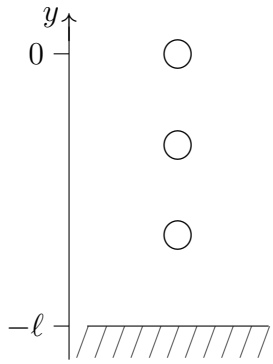


Figura 7.2. Uma bola elástica é solta de uma altura ℓ.

Fazendo $v_i = 0$ nessas equações, obtemos $v_f = -gt$ e $v_f^2 = -2gy$. Lembrando que v_f aponta para baixo, vem

$$v_f = -\sqrt{-2gy} = -\sqrt{2g|y|}.$$

Daí

$$t = \frac{v_f}{-g} = \sqrt{\frac{2|y|}{g}}\,.$$

Esse é o tempo que o corpo leva para percorrer, em queda livre, a distância $|y|$. Portanto,

o tempo total é

$$\begin{aligned} t_T &= \sqrt{\frac{2\ell}{g}} + 2\sqrt{\frac{2r\ell}{g}} + 2\sqrt{\frac{2r^2\ell}{g}} + 2\sqrt{\frac{2r^3\ell}{g}} + \cdots \\ &= \sqrt{\frac{2\ell}{g}} + 2\sqrt{\frac{2r\ell}{g}} \left[1 + \sqrt{r} + \left(\sqrt{r}\right)^2 + \left(\sqrt{r}\right)^3 + \cdots\right] \\ &= \sqrt{\frac{2\ell}{g}} + 2\sqrt{\frac{2r\ell}{g}} \, \frac{1}{1-\sqrt{r}} \\ &= \sqrt{\frac{2\ell}{g}} \, \frac{1+\sqrt{r}}{1-\sqrt{r}} \text{ segundos.} \end{aligned}$$

□

Para encerrar nossa apresentação das aplicações da série geométrica, vejamos como ela resolve o paradoxo de Zeno chamado *Aquiles e a tartaruga*. Esse paradoxo, proposto por Zeno por volta de 450 a.C., apontou algumas limitações do modelo matemático da época. De fato, esse modelo tinha dificuldade em lidar com processos infinitos. Por exemplo, pode ser um número uma soma de infinitos números positivos? Nas seções anteriores vimos que isso é possível dentro de nosso modelo de números reais. Mas o modelo numérico do tempo de Zeno não esclarecia essa questão.



Figura 7.3. Zeno foi um filósofo grego do 5º século a.C., discípulo de Parmênides e antecessor de Sócrates. No campo matemático Zeno é conhecido por seus paradoxos, que puseram à prova os conceitos sobre tempo, espaço e movimento vigentes à sua época, e particularmente sobre o conceito de infinito. Com os paradoxos denominados *dicotomia* e *Aquiles* Zeno argumenta que nenhum espaço pode ser percorrido. Com o paradoxo da *flecha* Zeno argumenta que seu movimento não é possível, e com o paradoxo do *estádio*, o conceito vigente de tempo é contestado. Confira [23] e [42]. Mais detalhes sobre o desenho de seu busto na pág. 250.

Para descrever seu paradoxo Zeno utiliza dois personagens, Aquiles, considerado o guerreiro mais rápido da Antiguidade, e a tartaruga, conhecida por sua lentidão ao caminhar. Aquiles aposta uma corrida com a tartaruga, que sai com uma vantagem inicial. Naturalmente o bom senso nos diz que Aquiles alcançará facilmente a tartaruga. Mas, segundo argumenta Zeno, isso não ocorre (por isso esse argumento é denominado paradoxo). No instante $t = 0$, Aquiles está no ponto A, e a tartaruga no ponto B. Começam a correr, e, depois de um certo tempo, Aquiles alcança o ponto B. Mas, nesse ínterim, a tartaruga já atingiu o ponto C mais adiante. Quando Aquiles chega no ponto C, a tartaruga está mais adiante em D, e assim *ad infinitum*. E por isso, afirma Zeno, Aquiles nunca alcança a tartaruga.

Utilizando o conceito de convergência de séries podemos construir um modelo matemático para o paradoxo de Zeno em que Aquiles alcança a tartaruga, e podemos calcular a distância e o tempo que ele gasta para isso. Consideremos dois pontos A e T que se movimentam com velocidade constante em uma reta numérica. Sejam V a velocidade de A, e v a de T, de forma

que $V > v > 0$. Suponhamos que no instante $t = 0$ o ponto A está na origem das coordenadas e T está em P_1, com coordenada $d > 0$. No instante $t_1 > 0$, A está em P_1 e T está em P_2. No instante t_2, A está em P_2 e T em P_3. E assim sucessivamente. Confira a Figura 7.4.

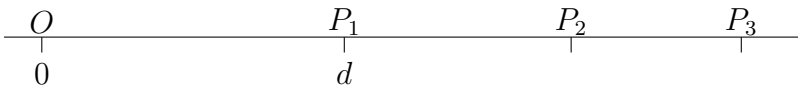


Figura 7.4. Esquema para estudo do paradoxo de Zeno "Aquiles e a tartaruga".

Calculemos o tempo e a distância percorrida por A até que T seja alcançado. Escrevemos $V = kv$, em que $k > 1$ é constante. Como t_1 é o intervalo de tempo necessário para A ir de O a P_1, temos $t_1 = d/V = d/kv$. Nesse intervalo de tempo, T vai de P_1 a P_2. Seja d_1 essa distância. Então $d_1 = vt_1 = d/k$. Para percorrer a distância d_1 entre P_1 e P_2 A gasta o intervalo de tempo $t_2 = d_1/V = d/k^2v$. Nesse ínterim, T alcança P_3, e percorre a distância $d_2 = vt_2 = d/k^2$. Para chegar até P_3, A gasta o intervalo de tempo $t_3 = d_2/V = d/k^3v$. E assim sucessivamente. A distância total percorrida por T é finita e vale

$$d_1 + d_2 + d_3 + \cdots = \frac{d}{k} + \frac{d}{k^2} + \frac{d}{k^3} + \cdots = \frac{d}{k}\frac{1}{1-\frac{1}{k}} = \frac{d}{k-1}\,.$$

O tempo total dispendido por A e por T na corrida também é finito e vale

$$t = t_1 + t_2 + t_3 + \cdots = \frac{d}{kv} + \frac{d}{k^2v} + \frac{d}{k^3v} + \cdots = \frac{d}{kv}\left[1 + \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} + \ldots\right] =$$

$$= \frac{d}{kv}\frac{1}{1-\frac{1}{k}} = \frac{d}{v(k-1)}\,.$$

Nesse tempo A percorre a distância

$$Vt = kv\frac{d}{v(k-1)} = \frac{dk}{k-1} = d + \frac{d}{k-1}\,.$$

Portanto, no tempo t, A percorre a distância inicial d que a separava de T e mais a distância percorrida por T. Vemos que A alcança T num intervalo de tempo finito. Assim, no modelo numérico dos números reais, esse paradoxo de Zeno está explicado.

7.5 Outras séries numéricas

Definição 7.13. Dada uma sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ de números reais, a sequência $(s_n)_{n\geq 1}$ definida por $s_n = a_1 + \cdots + a_n$, para todo $n \geq 1$, denomina-se *sequência das somas parciais* de $(a_n)_{n\geq 1}$. A expressão $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, também indicada por $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$, denomina-se *série associada* à sequência, ou série de *termo geral* a_n. Diz-se que a série *converge*, ou que é *convergente*, se existir $\lim s_n$. Caso contrário, diz-se que a série *diverge*, ou que é *divergente*. Se $\lim s_n = a$, escrevemos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a$, e a chama-se *soma* da série.

No teorema demonstrado a seguir vemos que podemos somar séries convergentes e multiplicar uma série convergente, termo a termo, por uma constante.

Teorema 7.14. *Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ séries convergentes. Então $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ é convergente e*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n).$$

Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é uma série convergente e c é um número real, então $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ é convergente e

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Demonstração. Sejam $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ e $t_n = b_1 + \cdots + b_n$. Como $\lim s_n$ e $\lim t_n$ existem, segue que existe $\lim(s_n + t_n)$ e

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = (\lim s_n) + (\lim t_n) = \lim(s_n + t_n) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n).$$

Por outro lado, $\lim cs_n$ existe e

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = \lim cs_n = c\lim s_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

□

No Capítulo 8 usaremos o

Teorema 7.15 (Teste da Comparação)**.** *Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ séries tais que $0 \leq a_n \leq b_n$ para todo n. Se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.*

Demonstração. Sejam $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ e $t_n = b_1 + \cdots + b_n$. Como $0 \leq a_n$ temos que a sequência (s_n) é crescente. Temos também $0 \leq s_n \leq t_n \leq \lim t_n$, e vemos que a sequência s_n é limitada superiormente. Em virtude do Teorema das Sequências Monótonas 5.23 a sequência s_n é convergente, portanto $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. □

7.6 Problemas

Problema 7.6.1. Resolva o problema do Papiro de Ahmes: "Em um conjunto de sete casas, cada casa tem um gato, cada gato come sete ratos, cada rato comeria sete espigas, e cada espiga produz sete medidas de grãos." Calcule quantas medidas de grãos foram economizadas e a soma do número de casas, gatos, ratos, espigas e medidas de grãos.

Problema 7.6.2. Resolva o desafio da Idade Média, descrito no texto: Quando ia a Saint Ives, encontrei um homem com sete mulheres; cada mulher tinha sete sacos, cada saco tinha sete gatos, cada gato tinha sete gatinhos. Gatinhos, gatos, sacos e mulheres, quantos iam a Saint Ives?

Problema 7.6.3. Confira: outra maneira de demonstrar a fórmula 7.3 para $r \neq 1$, além das sugeridas no texto, consiste em utilizar a identidade polinomial

$$(1 - x)(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}) = 1 - x^n, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Problema 7.6.4. Um homem muito rico e sovina contrata o pedreiro João, e quer lhe pagar 30 reais por semana, durante um ano. João faz uma contraproposta: que lhe seja pago 1 centavo de real na 1ª. semana, 2 centavos na 2ª. semana, 4 centavos na 3º, e assim sucessivamente, seu salário em cada semana será o dobro do da semana precedente. Assinale a melhor alternativa e explique: (i) João é bobo, vai ganhar muito menos do que a proposta inicial. (ii) O homem rico poderá aceitar a proposta de João, pois pagará não muito mais do que o dobro do que iria gastar, e estava mesmo disposto a aumentar a oferta até 70 reais por semana. (iii) João se sairá bem, mas ganhará o suficiente para viver somente após o 6º mês. Até lá, terá que usar o dinheiro que tem na poupança. (iv) todas as alternativas anteriores não são corretas.

Problema 7.6.5. Conta-se que um rei, desejando recompensar o sábio inventor do jogo de xadrez, perguntou-lhe o que desejava. O sábio, com o intuito de lhe dar uma lição de humildade, lhe pediu um grão de trigo pela primeira casa do tabuleiro de xadrez, dois grãos pela segunda casa, quatro grãos pela terceira, e assim sucessivamente, o número de grãos deveria sempre dobrar, até a última casa do tabuleiro. Poderá o rei atender o pedido do sábio?

Problema 7.6.6. Em cada um dos casos abaixo, coloque a série na forma $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$. Decida se a série é convergente ou não. Se for convergente, calcule a soma.

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{7^n}{5}$; b) $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \frac{5}{7^{3i}}$; c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n}$;

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{5^{2n}}$; e) $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^{j+1}}{3^j}$; f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{5}{3^n}$;

g) $\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1+5^{2l}}{7^{3l+3}}$; h) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{k+1}}{3^{k-3}}$.

Problema 7.6.7. Coloque as séries abaixo na forma $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$. Calcule a soma, quando existir.

a) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} 5^n$; b) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$; c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{7}{8}\right)^{n+1}$.

Problema 7.6.8. Demonstre que se a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente, então $\lim a_n = 0$.

Problema 7.6.9. a) Considere um eixo numérico. Para cada número racional r, tome o intervalo com centro em r e raio 10^{-15}. Prove que a união desses intervalos é toda a reta. **b)** Seja $(r_i)_{i\geq 1}$ uma enumeração dos números racionais. Para cada racional r_i, cubra-o com o intervalo de centro em r_i e raio 2^{-i}. Verifique se a união desses intervalos é toda a reta.

Problema 7.6.10. Uma amostra de carbono 14 apresentou, num determinado ano, uma atividade de $3{,}5 \times 10^6$ desintegrações por grama de material. Sabendo-se que a atividade do carbono 14 em um determinado ano é $999876/10^6$ da atividade do ano anterior, calcule o número total de desintegrações por grama de material a partir do ano em que foi feita a medição.

Problema 7.6.11. Uma amostra de material radioativo emite anualmente uma quantidade de radiação igual a $998/10^3$ da quantidade do ano anterior. Em um determinado ano, a radiação foi de $2{,}5 \times 10^4$ roentgens. Calcule a radiação total emitida a partir do ano em que foi feita a medição.

Problema 7.6.12. Um corpo está sendo resfriado em um ambiente de temperatura constante. Ele emite, a cada minuto, 9/10 da quantidade de calorias emitida no minuto anterior. Se no primeiro minuto o corpo emite 50 calorias, calcule a quantidade hipotética total de calorias que o corpo emitirá. Calcule ainda em quanto tempo o corpo emitirá 90% desse total.

Problema 7.6.13. Na Figura 7.5 o triângulo maior é equilátero e tem lado igual a ℓ. Unindo os pontos médios e seus lados obtemos, em seu interior, um triângulo equilátero t_1, de lado $\ell/2$. Repetindo o procedimento, temos uma infinidade de triângulos t_n, $n \geq 1$. Calcule a soma das áreas e dos perímetros dos triângulos t_n, $n \geq 1$.

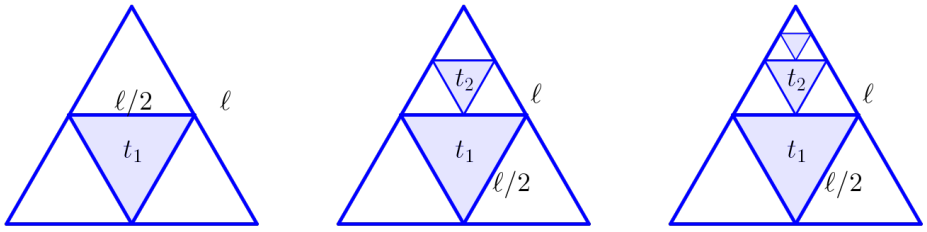


Figura 7.5 Área e perímetro de infinitos triângulos.

Problema 7.6.14. Na Figura 7.6 o triângulo ABC é equilátero. Unindo os pontos médios A_1 e B_1, obtemos o trapézio $T_1 = ABB_1A_1$. Unindo os pontos médios A_2 e B_2 de A_1C e B_1C, respectivamente, obtemos o trapézio $T_2 = A_1B_1B_2A_2$. Repetindo o procedimento, temos uma infinidade de trapézios T_n, $n \geq 1$. Se vê que, para qualquer m, a reunião das regiões trapezoidais T_1, T_2, ..., T_m não preenchem o triângulo. A soma das áreas desses trapézios converge para a área do triângulo ABC? Justifique.

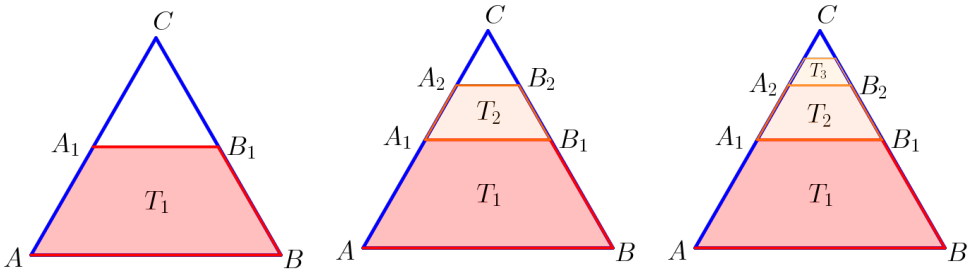


Figura 7.6 Áreas de infinitos trapézios.

Problema 7.6.15. Uma espiral infinita é formada por segmentos. O primeiro segmento mede 1, o segundo r, o terceiro r^2, e assim por diante, sendo $0 < r < 1$ um número real. Um segmento qualquer é perpendicular ao anterior, conforme sugerido pela Figura 7.7. Mostre que existe um ponto limite e o localize.

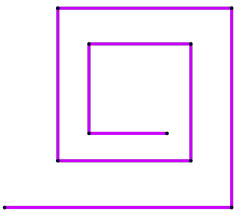


Figura 7.7 Limite de uma espiral infinita.

Problema 7.6.16. Usando a definição de convergência de séries demonstre que $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ não é convergente.

Problema 7.6.17. Demonstre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ é convergente. Sugestão: a sequência das somas parciais s_n é crescente. Para ver que é limitada basta encontrar uma subsequência limitada.

Problema 7.6.18. Em geral não se consegue exprimir facilmente a soma de uma série convergente. No caso da *série telescópica* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ isso é fácil.

Problema 7.6.19. Supondo que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ é uma série convergente, ache seu valor. Para verificar que essa série é convergente, o estudante pode usar o teste da razão. Confira [52], vol. 4, ou [73].

Problema 7.6.20. Demonstre que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (chamada *série harmônica*) é divergente, Sugestão: considere a seguinte subsequência da sequência s_n das somas parciais: s_2, s_4, s_8, etc.

Problema 7.6.21. Demonstre a seguinte generalização do Teste da Comparação 7.15. Sejam $\sum a_n$ e $\sum b_n$ séries tais que $a_n \geq 0$ e $b_n \geq 0$, e seja $c > 0$ um número. Suponhamos que exista n_0 tal que $a_n \leq cb_n$ para todo $n \geq n_0$. Se $\sum b_n$ converge então $\sum a_n$ converge, e se $\sum a_n$ diverge então $\sum b_n$ diverge.

Problema 7.6.22. Verifique se converge a série $\sum \frac{n}{5n+1}$.

Problema 7.6.23. Use o Teste da Comparação visto no Problema 7.6.21 para verificar se as seguintes séries são convergentes ou divergentes:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$; b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $p \geq 2$ inteiro; c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|}{n^2+n}$;

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$; e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n^2}{n^3+20}$; f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{3^n}$.

Problema 7.6.24. Se você se interessou pelo Tema 7.7.3 poderá calcular a soma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)}$.

Problema 7.6.25. Considere os seguintes cálculos:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n = 1-1+1-1+\cdots = (1-1)+(1-1)+\cdots = 0+0+\cdots = 0$$

e

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n = 1-1+1-1+\cdots = 1+(-1+1)+(-1+1)+\cdots = 1+0+\cdots = 1.$$

O que você conclui?

Problema 7.6.26. Ao fazer o cálculo 2.20 usamos um caso particular da propriedade associativa para somas infinitas. Prove que, se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é uma série convergente, então valem as operações associativas

$$a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots = (a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\cdots = a_1+(a_2+a_3)+(a_4+a_5)+\cdots$$

Problema 7.6.27. Relendo o final da Seção 7.2, explique agora por que o cálculo

$$\begin{array}{rr} & S = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots \\ - & rS \qquad\quad ar + ar^2 + ar^3 + \cdots \\ \hline & (1-r)S = a \end{array}$$

funciona para algumas progressões geométricas e para outras não.

7.7 Temas para investigação

Tema 7.7.1. A *curva de Koch* ou *curva floco-de-neve*, foi observada pelo matemático sueco Helge Von Koch em 1904. Ela é o limite de uma sequência de curvas poligonais fechadas que começa com um triângulo equilátero de lado 1. Para obter a segunda curva dessa sequência, cada lado da curva anterior é subdividido em três partes iguais. A parte do meio (em cada lado) é lado de um novo triângulo equilátero, com o terceiro vértice fora da região poligonal anterior. Em seguida eliminamos cada uma dessas partes do meio. Obtemos a região poligonal desenhada no centro da Figura 7.8. Para obter a terceira curva dessa sequência repetimos o procedimento. Confira a terceira figura em 7.8. E assim sucessivamente.

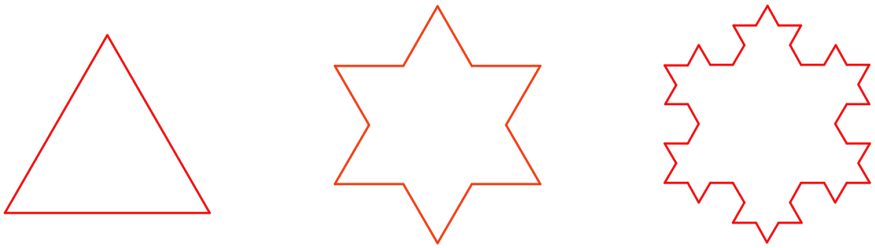


Figura 7.8 Três etapas da curva de Koch.

a) Considerando o n-ésimo estágio da construção da curva de Koch, calcule: a quantidade q_n de lados, o comprimento ℓ_n de cada lado, e o perímetro p_n. Supondo que o perímetro da curva de Koch seja $\lim_{n\to\infty} p_n$, calcule-o.

b) Calcule a área a_n da região poligonal do n-ésimo estágio da construção da curva de Koch. Supondo que a área da região determinada pela curva de Koch seja $\lim_{n\to\infty} a_n$, calcule-a.

c) Investigue se é possível generalizar a curva de Koch iniciando com outros polígonos regulares. E iniciando com um tetraedro regular?

Tema 7.7.2. Considere o seguinte procedimento. Na primeira etapa, do intervalo $[0,1]$ da reta numérica retira-se o intervalo aberto $(1/3, 2/3)$, sua terça parte central. Na segunda etapa retira-se, do mesmo modo, a terça parte central de cada um dos dois intervalos que restaram da etapa 1. Confira a Figura 7.9. Na n-ésima etapa retira-se a terça parte central de cada um dos 2^{n-1} intervalos que restaram da etapa $n-1$. O procedimento é executado para todo $n \geq 1$. **a)** Calcule a soma m_n dos comprimentos dos intervalos que são retirados na execução da etapa n. Esses intervalos são disjuntos, e podemos dizer que m_n é a medida do conjunto formado pela sua união. **b)** Calcule $m = \sum_{n=1}^{\infty} m_n$, que pode ser visto como a medida do conjunto retirado de $[0,1]$. **c)** Mostre que o conjunto $\mathcal{C}$ dos pontos de $[0,1]$ que não foram retirados é infinito, e calcule sua medida $1-m$. **d)** Pesquise outras propriedades de $\mathcal{C}$, que é denominado na literatura *conjunto ternário de Cantor*.



Figura 7.9. Construção do conjunto de Cantor.

Tema 7.7.3. *Problema de Basileia* é o nome que a História da Matemática consagrou para a questão de calcular a soma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Vimos no Problema 7.6.17 que essa série é convergente. Pesquise esse tema na internet para se inteirar desse assunto.

7.8 Atividades para licenciandos e professores

Atividade 7.8.1. Bole um problema sobre um gerente de hotel que pensou em fazer a seguinte promoção: todo hóspede paga 1 diária completa no primeiro dia; no segundo dia, paga 5/6 de uma diária, no terceiro dia 5/6 sobre o custo do dia anterior, e assim por diante.

Atividade 7.8.2. Construa atividades que usem somas infinitas inspirando-se na Figura 7.10.

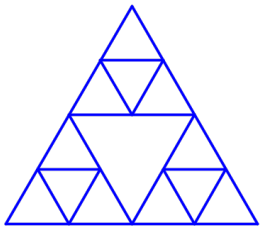


Figura 7.10 Imagine uma atividade para estudantes.

Atividade 7.8.3. Construa atividades que usem somas infinitas inspirando-se na Figura 7.11.

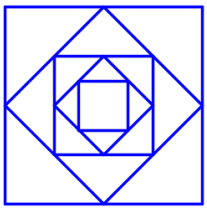


Figura 7.11 Imagine uma atividade para estudantes.

Atividade 7.8.4. Construa atividades que usem somas infinitas inspirando-se na Figura 7.12.

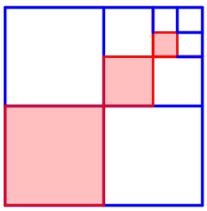


Figura 7.12 Imagine uma atividade para estudantes.

Capítulo 8

Tópicos sobre números irracionais

8.1 Introdução

Continuamos neste capítulo o estudo dos números reais, agora com maior ênfase nos números irracionais. Em particular, estudamos as duas formas mais utilizadas para representá-los, as expansões decimais e as frações contínuas infinitas simples. Apresentamos também explicações sobre a classificação dos reais como algébricos e transcendentes.

8.2 Expansões decimais

No Capítulo 2, mais exatamente no Teorema 2.2, vimos que todo número racional tem representação na forma de expansão decimal. Isso também ocorre com qualquer número real. Consideramos primeiro os números reais do intervalo $[0, 1)$.

Teorema 8.1. *Todo número real $r \in [0, 1)$ se escreve na forma*

$$r = \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_3}{10^3} + \cdots = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{d_j}{10^j} \tag{8.1}$$

em que, para todo $j \geq 1$, d_j é um algarismo decimal. Ainda, os números d_j's são únicos se existirem infinitos j's para os quais $d_j \neq 9$. Reciprocamente, toda série da forma (8.1) representa um número real do intervalo $[0, 1]$. Ainda, se existe um $d_j \neq 9$, esse número é < 1.

É bem conhecida do estudante a *notação compacta*, em que a expressão (8.1) é escrita na forma

$$r = 0{,}d_1d_2d_3\ldots \tag{8.2}$$

O Teorema 8.1 considera números reais no intervalo $[0, 1)$, mas qualquer número real tem uma expansão decimal. De fato, todo número real se escreve na forma $r = n + s$, com n inteiro e $s \in [0, 1)$. Escrevendo $n = \pm a_m a_{m-1} \ldots a_1 a_0$ e $s = 0, b_1 b_2 b_3 \ldots$ temos

$$r = \pm a_m a_{m-1} \ldots a_1 a_0{,}b_1 b_2 b_3 \ldots$$

em que cada a_i e cada b_j é um algarismo decimal.

Dado um número real $r \in [0, 1)$, os números d_j da representação (8.1) são denominados *dígitos decimais* de r, ou, simplesmente, *dígitos* de r, se a base dez estiver estabelecida.

Veremos na Seção 8.5 uma demonstração formal do Teorema 8.1 em um contexto mais geral. Para o momento preferimos fazer algumas observações.

Conforme afirma o Teorema 8.1, se existirem infinitos dígitos $\neq 9$ na expansão (8.1), então são unicamente determinados. Para ver que a condição dada é necessaria para a unicidade dos dígitos observemos que o número real $1/2$ tem duas representações como expansão decimal, a saber,

$$\frac{1}{2} = 0{,}5 = 0{,}4999\ldots$$

De fato, $0{,}5 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} 0{,}4999\ldots &= \frac{4}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \ldots \\ &= \frac{4}{10} + \frac{9}{10^2}\left[1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \ldots\right] \\ &= \frac{4}{10} + \frac{9}{10^2}\,\frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{4}{10} + \frac{9}{10^2-10} = \frac{4}{10} + \frac{9}{90} = \frac{4}{10} + \frac{1}{10} = \frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

Vemos, portanto, que a condição dada no Teorema 8.1 é necessaria para a unicidade dos dígitos.

A afirmação recíproca enunciada no Teorema 8.1 pode ser facilmente provada com o conhecimento que agora temos das séries numéricas. Demonstremos que toda série numérica da forma (8.1) é convergente. De fato, seja $(s_n)_{n\geq 1}$ a sequência das somas parciais de $\big(d_i/10^i\big)_{i\geq 1}$. Como $s_n = s_{n-1} + d_n/10^n$ e $d_n/10^n \geq 0$, vem que $s_n \geq s_{n-1}$ para todo $n \geq 2$, e portanto a sequência $(s_n)_{n\geq 1}$ é crescente. Por outro lado,

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_3}{10^3} + \cdots + \frac{d_n}{10^n} \\ &\leq \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \cdots + \frac{9}{10^n} \\ &\leq \frac{9}{10}\;\frac{1-1/10^{n+1}}{1-1/10} \\ &\leq 1 - \frac{1}{10^{n+1}} \\ &\leq 1, \end{aligned}$$

e concluimos que a sequência $(s_n)_{n\geq 1}$ é limitada. Em consequência, existe $\lim s_n$, e a série é convergente. Concluímos que toda série numérica da forma (8.1) é convergente para um número real $r \in [0,1]$. De acordo com o Problema 8.7.2, se $d_j \neq 9$ para algum j, então $r \in [0,1)$.

Dado um número real $r = 0{,}d_1d_2d_3\ldots \in [0,1)$, qual o significado geométrico de cada um dos dígitos d_j? Isso já foi visto na Seção 2.4 para números racionais, e para números reais o significado é o mesmo. Suponhamos que a representação $r = 0{,}d_1d_2d_3\ldots$ tenha infinitos dígitos $\neq 9$. Dividimos o intervalo $[0,1]$ em dez subintervalos iguais, e podemos ver que $r \in \big[\frac{d_1}{10}, \frac{d_1+1}{10}\big)$. Confira a Figura 8.1.

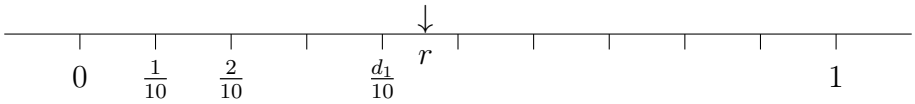


Figura 8.1. Determinação de dígito decimal

De fato,

$$r = 0{,}d_1d_2d_3\cdots = \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \cdots \geq \frac{d_1}{10}$$

Por outro lado, notemos que

$$\frac{d_2}{10^2}+\frac{d_3}{10^3}+\cdots\leq\frac{9}{10^2}\left[1+\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\ldots\right]=\frac{1}{10}$$

sendo que a igualdade ocorre se e somente se $d_j=9$ para todo $j\geq 2$. Como existem infinitos dígitos $\neq 9$, temos $r<\frac{d_1}{10}+\frac{1}{10}=\frac{d_1+1}{10}$.

Uma caracterização algébrica de d_1 é que esse dígito é a parte inteira de $10r$. De fato,

$$10r=d_1+\frac{d_2}{10}+\frac{d_3}{10^2}+\cdots=d_1{,}d_2d_3\ldots$$

portanto $\lfloor 10r\rfloor=d_1$.

Em seguida subdividimos $\left[\frac{d_1}{10},\frac{d_1+1}{10}\right)$ em dez subintervalos iguais, cada um de comprimento $\frac{1}{100}$. Os extremos desses subintervalos são os pontos de coordenadas $\frac{d_1}{10}$, $\frac{d_1}{10}+\frac{1}{100}$, $\frac{d_1}{10}+\frac{2}{100}$, ..., $\frac{d_1}{10}+\frac{10}{100}=\frac{d_1+1}{10}$. O número r está no subintervalo

$$\frac{d_1}{10}+\frac{d_2}{10^2}\leq r<\frac{d_1}{10}+\frac{d_2+1}{10^2}$$

o que se pode demonstrar de forma análoga. E assim sucessivamente, vemos que os dígitos localizam o número r em intervalos bem determinados e cujo comprimento tende a zero.

8.3 Números algébricos

Reconhecer se um dado número real é racional ou irracional pode não ser uma tarefa simples. Um critério que será útil em determinadas situações é o seguinte:

Teorema 8.2. *Um número real é irracional se e somente se sua expansão decimal for infinita e não periódica.*

Esse resultado é uma decorrência do Teorema 2.5. Ele nos permite construir exemplos de números irracionais, como

$$0{,}1010010001000010000010000001\ldots$$

em que temos o algarismo 1 seguido de um zero, depois o algarismo 1 seguido de dois zeros, depois o algarismo 1 seguido de três zeros, e assim por diante, esse número é construído por agrupamentos de dígitos, sendo que o n-ésimo agrupamento consiste do algarismo 1 seguido de n zeros. Podemos ver que essa expansão não é periódica, portanto se trata de um número irracional.

Dado um número racional $a{,}a_1a_2\ldots a_n\overline{b_1b_2\ldots b_m}$, podemos construir infinitos números irracionais intercalando entre a primeira ocorrência do período e a segunda um agrupamento de dígitos $c_1c_2\ldots c_k$, depois entre a segunda ocorrência do período e a terceira o agrupamento $c_1c_2\ldots c_kc_1c_2\ldots c_k$, e assim sucessivamente. Portanto a cada número racional podemos associar infinitos números irracionais.

Reconhecer se um dado número é racional ou irracional através do Teorema 8.2 não é prático, pois em geral não temos acesso à totalidade de sua expansão decimal. Um recurso melhor é o do teorema abaixo, que constitui um instrumento importante para o estudo de uma certa classe de números irracionais.

Teorema 8.3. *Se α é raiz real do polinômio $p(x) = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1x + c_0$, sendo $n \geq 1$ e c_i um número inteiro para todo $0 \leq i \leq n-1$, então α é inteiro ou irracional. Ainda, se α é inteiro, então ele é divisor de c_0.*

Demonstração. Suponhamos que α seja racional e não inteiro. Escrevamos $\alpha = a/b$, sendo a e b inteiros relativamente primos, com $b > 1$. Por hipótese $p(\alpha) = 0$, ou

$$\frac{a^n}{b^n} + c_{n-1}\frac{a^{n-1}}{b^{n-1}} + \cdots + c_1\frac{a}{b} + c_0 = 0.$$

Multiplicando essa equação por b^n vem

$$a^n + c_{n-1}a^{n-1}b + \cdots + c_1ab^{n-1} + c_0b^n = 0,$$

ou

$$a^n = b\,(-c_{n-1}a^{n-1} - \cdots - c_1ab^{n-2} - c_0b^{n-1}).$$

Segue que b é divisor de a^n. Usando $\mathrm{mdc}(a, b) = 1$ e o Teorema 1.12, b é divisor de a. Portanto $\mathrm{mdc}(a, b) = b$, contrariando o fato de ser $b > 1$. Logo α é irracional ou inteiro.

Por outro lado, se α é inteiro, temos $b = 1$ e $\alpha = a$, e a segunda relação acima fica

$$a^n + c_{n-1}a^{n-1} + \cdots + c_1a + c_0 = 0,$$

e está claro que α é divisor de c_0. Isso termina a demonstração. □

A praticidade do Teorema 8.3 no reconhecimento da irracionalidade de um dado número ξ consiste em que, obtido um polinômio do qual ξ seja raiz nas condições do Teorema, descartar que ele seja um inteiro pode ser uma tarefa relativamente simples. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 8.4. Usamos o resultado do Teorema 8.3 para obter outra demonstração de que $\sqrt{2}$ é irracional. Seja $\alpha = \sqrt{2}$. Elevando essa identidade ao quadrado, vem $\alpha^2 = 2$, ou $\alpha^2 - 2 = 0$. Consequentemente α é raiz real do polinômio $p(x) = x^2 - 2$. Notemos que esse polinômio tem coeficiente líder igual a 1 e o outro coeficiente é inteiro. Podemos então aplicar o resultado do Teorema 8.3 e concluir que α é inteiro ou irracional. Observando que $1 < 2 < 4 \Rightarrow 1 < \sqrt{2} < 2$, vemos que α não é inteiro. Portanto $\alpha = \sqrt{2}$ é irracional. □

Exemplo 8.5. $\sqrt{2 + \sqrt{3}}$ é irracional. De fato, seja $\alpha = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$. Elevando essa identidade ao quadrado, vem $\alpha^2 = 2 + \sqrt{3}$, ou $\alpha^2 - 2 = \sqrt{3}$. Elevando ao quadrado novamente vem $\alpha^4 - 4\alpha^2 + 1 = 0$. Consequentemente α é raiz real do polinômio $p(x) = x^4 - 4x^2 + 1$. De acordo com o Teorema 8.3 α é inteiro ou irracional. Se fosse inteiro seria divisor de 1. Observando que $\sqrt{2 + \sqrt{3}} > 1$, vemos que não é. Portanto $\alpha = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$ é irracional. □

Exemplo 8.6. Se m e k são inteiros positivos tais que $\sqrt[m]{k} \notin \mathbb{Z}$ então $\sqrt[m]{k}$ é irracional. De fato, seja $\alpha = \sqrt[m]{k}$. Elevando essa identidade à potência m vem $\alpha^m = k$, ou $\alpha^m - k = 0$. Consequentemente α é raiz real do polinômio $p(x) = x^m - k$. De acordo com o Teorema 8.3 α é inteiro ou irracional. Como α não é inteiro por hipótese, segue que α é irracional. □

O Teorema 8.3 motiva a seguinte

Definição 8.7. Um número real ξ chama-se *algébrico* quando é raiz de um polinômio $p(x) = c_nx^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1x + c_0$ com coeficientes inteiros e grau $n \geq 1$. Nesse caso o *grau* de ξ é n quando n for o menor inteiro com essa propriedade.

Todo número racional $r = a/b$, com a e b inteiros, é algébrico, pois é raiz de $p(x) = bx - a$. Como $b \neq 0$, esse polinômio tem grau 1. Por outro lado, vimos que também são algébricos os números irracionais $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[5]{5}$, $\sqrt[7]{19}$, $\sqrt{2+\sqrt{3}}$, etc. assim como muitos outros.

Portanto, os números algébricos podem ser racionais ou irracionais. Entretanto, nem todo número irracional é algébrico, conforme as observações da próxima seção.

Existem técnicas mais refinadas para verificar se um dado número real é irracional ou não. Essas técnicas, entretanto, não são muito gerais. Essa dificuldade pode ser exemplificada com o número π. Vimos, na História da Matemática, que muitas aproximações de π como fração de inteiros foram obtidas, como $\pi \approx \frac{355}{113}$, mas nunca se conseguiu uma igualdade. Isso não é mesmo possível, de acordo com o

Teorema 8.8 (Lambert, 1761)**.** *A constante de Arquimedes π é irracional.*

Johann H. Lambert usou frações contínuas para obter esse resultado. Atualmente existem outras demonstrações. Para estudar uma demonstração, confira [44], página 9.

Um pouco mais fácil foi provar que o número de Euler e é irracional:

Teorema 8.9. *O número e é irracional.*

Estudaremos o número e e a demonstração desse teorema no Capítulo 9.

Não se sabe se são racionais ou não certas combinações desses dois números, como $\pi + e$, πe e π^e. Por outro lado, e^π e $\pi + e^\pi$ são irracionais (consulte o verbete *Constante de Gelfond* em [129]).

8.4 Números transcendentes

O Teorema 8.3 nos apresenta a seguinte questão: é todo número irracional raiz de um polinômio $p(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$ com coeficientes inteiros? Esse não é um problema fácil, e foi respondido por Joseph Liouville em 1851. Estudando a forma com que os números irracionais são aproximados por números racionais, determinou condições necessárias para que um número seja raiz de um polinômio com coeficientes inteiros. Com isso encontrou exemplos de números irracionais que não satisfazem essa condição. Um exemplo é

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^{k!}} \tag{8.3}$$

Isso motiva a

Definição 8.10. Um número real chama-se *transcendente* quando não for algébrico.



Figura 8.2. Joseph Liouville foi um matemático francês do Século XIX, tendo sido também político, engenheiro, cientista, professor universitário e astrônomo. Em Matemática trabalhou nas áreas de Análise Complexa, Cálculo Integral e números transcendentes. Em Física-Matemática contribuiu na Teoria de Sturm-Liouville e sistemas Hamiltonianos. Foi professor no Collège de France e em outras instituições de ensino. Mais detalhes sobre o desenho na pág. 250.

Além do exemplo de Liouville dado acima, os números transcendentes mais famosos são a constante de Arquimedes π, o número e e $2^{\sqrt{2}}$. Não é simples verificar que esses números são transcendentes. Para nosso registro enunciamos esses resultados na forma de teoremas.

Teorema 8.11 (Hermite, 1873)**.** *O número e é transcendente.*

O estudante pode obter um roteiro de uma demonstração em [44], página 29.

Teorema 8.12 (Lindemann, 1882)**.** *O número π é transcendente.*

Para estudar uma demonstração, confira [44], página 33 e seguintes.



Figura 8.3. Carl L. F. von Lindemann foi um matemático alemão formado nas mais importantes universidades de seu país. Doutorou-se em Geometria não Euclidiana, e foi orientador de matemáticos ilustres na Universidade de Königsberg. Seu teorema mais conhecido, de 1882, é aquele em que demonstra a transcendência de π.

Em [62], página 490, pode-se estudar uma demonstração do

Teorema 8.13 (Gelfond e Schneider, 1934)**.** *Sejam α e β números algébricos (reais ou complexos). Se $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq 1$ e se β não for racional então α^β é transcendente.*

Exemplos de números transcendentes fornecidos por esse teorema: $2^{\sqrt{n}}$ e $\sqrt{n}^{\sqrt{2}}$ para todo inteiro positivo n tal que $\sqrt{n}$ não é inteiro.



Figura 8.4. Alexander Osipovich Gelfond foi um matemático russo do Século XX, nascido em São Petersburgo. Foi professor da Universidade de Moscou e do Instituto Steklov de Matemática. Contribuiu com a Teoria das Funções Analíticas e equações integrais. Em Teoria dos Números contribuiu em criptografia e obteve o Teorema 8.13 referido neste texto, o que permitiu resolver o Sétimo Problema de Hilbert. Esse teorema também foi provado por Theodor Schneider de forma independente. Mais detalhes sobre a foto na pág. 250.

Não é simples reconhecer números transcendentes, mas sabemos que, de um certo ponto de vista, eles são muito mais numerosos do que os números algébricos, devido ao seguinte resultado de 1874 de Georg Cantor:

Teorema 8.14. *O conjunto dos números algébricos é enumerável, mas o conjunto dos números transcendentes não.*

Um conjunto A se diz *enumerável* quando existe uma função bijetiva $f : \mathbb{N} \mapsto A$. Em outros termos, os elementos de A podem ser "contados". Para obter uma demonstração do Teorema 8.14 consulte [44], páginas 15 e 16.

Nesse campo de estudos existem inúmeras questões não respondidas. Por exemplo, não se sabe se os números π^e, $e\pi$, $e + \pi$ são transcendentes (nem mesmo se são irracionais, como já observamos). Um exemplo interessante é e^π. Considerando que o Teorema 8.13 é válido para α e β complexos, vemos que $e^\pi = (e^{i\pi})^{-i} = (-1)^{-i}$ é transcendente. Esse número é chamado *constante de Gelfond*. Confira o Tema 8.8.3 para mais detalhes.

8.5 Expansões β-ádicas

Seja $\beta > 1$ um inteiro. Sabemos que todo inteiro positivo n tem um única representação no sistema posicional de base β. Resultado similar acontece para números reais $r \in [0,1)$. Lembramos que, dado um inteiro $\beta > 1$, um β-algarismo é um inteiro d tal que $0 \leq d \leq \beta - 1$.

Teorema 8.15. *Seja $\beta > 1$ um inteiro. Todo número real $r \in [0,1)$ se escreve na forma*

$$r = \frac{d_1}{\beta} + \frac{d_2}{\beta^2} + \frac{d_3}{\beta^3} + \cdots = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{d_j}{\beta^j} \tag{8.4}$$

sendo d_j um β-algarismo para todo j. Ainda, os números d_j's são únicos se existirem infinitos j's para os quais $d_j \neq \beta - 1$. Reciprocamente, toda série da forma 8.4 representa um número real do intervalo $[0,1]$, e esse número é < 1 se existir algum $d_j < \beta - 1$.

A representação (8.4) chama-se *expansão β-ádica de r*, e pode ser escrita na forma compacta $(0{,}d_1d_2d_3\ldots)_\beta$. Os números d_j são chamados *β-dígitos* de r. Podemos escrever $r = 0{,}d_1d_2d_3\ldots$ se a base β estiver estabelecida.

Demonstração do Teorema 8.15. Vejamos primeiro a existência da representação (8.4). Seja $r \in [0,1)$ um número real. Seja d_1 o β-algarismo tal que $d_1/\beta \leq r < (d_1+1)/\beta$ (isso significa que repartimos $[0,1)$ em β intervalos $\left[\frac{j}{\beta}, \frac{j+1}{\beta}\right)$, $0 \leq j < \beta$, e localizamos r em um deles). Se $d_1/\beta = r$ terminamos, e a representação é $r = (0{,}d_1) = (0{,}d_1000\ldots)$. Suponhamos $d_1/\beta < r$. Seja d_2 o β-algarismo tal que $d_1/\beta + d_2/\beta^2 \leq r < d_1/\beta + (d_2+1)/\beta^2$ (isso significa que repartimos $\left[\frac{d_1}{\beta}, \frac{d_1+1}{\beta}\right)$ em β intervalos e localizamos r em um deles). Se $d_1/\beta + d_2/\beta^2 = r$, terminamos. Suponhamos $d_1/\beta + d_2/\beta^2 < r$. E assim por diante, definimos β-algarismos d_1, d_2, d_3, ..., d_n, de forma que, para todo $n \geq 1$, temos

$$\frac{d_1}{\beta} + \frac{d_2}{\beta^2} + \cdots + \frac{d_n}{\beta^n} \leq r < \frac{d_1}{\beta} + \frac{d_2}{\beta^2} + \cdots + \frac{d_n+1}{\beta^n}\,.$$

Se $d_1/\beta + d_2/\beta^2 + \ldots d_n/\beta^n = r$ para algum n, terminamos. Caso contrário, obtemos infinitos d_j's. A sequência

$$s_n = \frac{d_1}{\beta} + \frac{d_2}{\beta^2} + \cdots + \frac{d_n}{\beta^n}$$

das somas parciais de $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{d_j}{\beta^j}$ é crescente e limitada superiormente (por r), de modo que $s = \lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{d_j}{\beta^j}$ é um número real $\leq r$.

Queremos provar que $r = s$. Como $s_n \leq r < s_n + 1/\beta^n$, temos $0 \leq r - s_n < 1/\beta^n \Rightarrow 0 \leq r - \lim s_n \leq 0$, portanto $r = s$. Isso demonstra a existência da representação (8.4) para todo número real $r \in [0,1)$.

Vejamos agora a unicidade. Sejam

$$r = 0{,}d_1d_2d_3\ldots \quad \text{e} \quad s = 0{,}c_1c_2c_3\ldots$$

expansões tais que existem infinitos i's para os quais $d_i \neq \beta - 1$ e infinitos i's para os quais $c_i \neq \beta - 1$ (se alguma dessas expansões for finita, acrescentamos infinitos dígitos zeros). Suponhamos que exista algum índice i para o qual $d_i \neq c_i$, e seja j o menor para o qual isso ocorre. Isto é, temos $d_i = c_i$ para todo $1 \leq i < j$ e $d_j \neq c_j$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que

$d_j < c_j$. Como r tem infinitos i's para os quais $d_i \neq \beta - 1$, existe $k > j$ tal que $d_k < \beta - 1$. Então

$$\begin{aligned} r &= 0{,}d_1 d_2 \ldots d_{j-1} d_j \ldots d_k \ldots \\ &< 0{,}d_1 d_2 \ldots d_{j-1} d_j (\beta-1)(\beta-1)\cdots = 0{,}d_1 d_2 \ldots d_{j-1}(d_j+1) \\ &\leq 0{,}c_1 c_2 \ldots c_{j-1} c_j \leq 0{,}c_1 c_2 \ldots c_{j-1} c_j c_{j+1} \cdots = s. \end{aligned} \tag{8.5}$$

Em resumo, se $d_j \neq c_j$ para algum j, então $r \neq s$. Isso implica que se $r = s$ então $d_j = c_j$ para todo $j \geq 1$.

Finalmente, para terminar a demonstração do Teorema 8.15, observamos que a série (8.4) converge. Para ver isso basta compará-la com a série geométrica $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\beta-1}{\beta^j} = 1$. Quanto a provar que (8.4), com a condição dada, representa um número de $[0, 1)$, fica a cargo do estudante (Problema 8.7.2). □

Exemplo 8.16. Vejamos como encontrar a expansão de $r = 3/5$ na base $\beta = 7$. Escrevemos

$$r = (0{,}d_1 d_2 d_3 \ldots)_{sete} = \frac{d_1}{7} + \frac{d_2}{7^2} + \frac{d_3}{7^3} + \ldots$$

sendo d_i um dos algarismos 0, 1, 2, 3, ..., 6 para todo i. Multiplicando essa expressão por 7, temos

$$7r = d_1 + \frac{d_2}{7} + \frac{d_3}{7^2} + \ldots$$

Assim d_1 é a parte inteira de $7r$, e

$$d_1 = \lfloor 7r \rfloor = \left\lfloor 7\frac{3}{5} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{21}{5} \right\rfloor = 4.$$

Seja $r_1 = 7r - d_1$. Temos $r_1 = \frac{21}{5} - 4 = \frac{1}{5}$ e $r_1 = \frac{d_2}{7} + \frac{d_3}{7^2} + \ldots$ Repetindo o mesmo cálculo mas agora para r_1 no lugar de r vem

$$d_2 = \lfloor 7r_1 \rfloor = \left\lfloor 7\frac{1}{5} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{7}{5} \right\rfloor = 1.$$

Seja $r_2 = 7r_1 - d_2 = \frac{7}{5} - 1 = \frac{2}{5}$. Repetindo o cálculo vem

$$d_3 = \lfloor 7r_2 \rfloor = \left\lfloor 7\frac{2}{5} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{14}{5} \right\rfloor = 2.$$

Seja $r_3 = 7r_2 - d_3 = \frac{14}{5} - 2 = \frac{4}{5}$. Temos

$$d_4 = \lfloor 7r_3 \rfloor = \left\lfloor 7\frac{4}{5} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{28}{5} \right\rfloor = 5.$$

Seja $r_4 = 7r_3 - d_4 = \frac{28}{5} - 5 = \frac{3}{5}$. A partir desse ponto os dígitos se repetem. Portanto

$$\frac{3}{5} = (0, \overline{4125})_{sete}\,.$$

Todos os cálculos foram feitos na base dez. Outra forma de obter a expansão de 3/5 na base sete é fazer a divisão continuada de 3 por 5 na base sete (lembrando que 3 e 5 já estão na base sete). Podemos cessar os cálculos na primeira reaparição do dígito 3:

$$\begin{array}{rl|l} 3\ 0 & & 5 \\ \cline{3-3} -\ 2\ 6 & & 0,\ 4\ 1\ 2\ 5\ldots \\ \cline{1-1} \quad 1\ 0 & & \\ \quad -\ 5 & & \\ \cline{1-1} \quad\ \ 2\ 0 & & \\ \quad -\ 1\ 3 & & \\ \cline{1-1} \quad\ \ \ 4\ 0 & & \\ \quad\ -\ 3\ 4 & & \\ \cline{1-1} \quad\ \ \ \ 3 & & \\ \quad\ \ \ \ \ddots & & \end{array}$$

todos os cálculos são feitos na base sete

□

Exemplo 8.17. É dada a fração de inteiros $\frac{3}{8}$ no sistema decimal. Achar sua expansão binária.

1º método. Como $3 = 11_{dois}$ e $8 = 1000_{dois}$, dividimos 11_{dois} por 1000_{dois} na base dois (o que é bem fácil), e obtemos o quociente exato $0{,}011_{dois}$. Logo $\frac{3}{8} = 0{,}011_{dois}$.

2º método. Primeiro achamos a expansão decimal $\frac{3}{8} = 0{,}375$ e depois usamos o seguinte truque:

$$0{,}375 = (0{,}375 \times 2)\frac{1}{2} = (0{,}75)\frac{1}{2} = (0{,}75 \times 2)\frac{1}{2^2} = (1{,}5)\frac{1}{2^2} = (1 + 0{,}5)\frac{1}{2^2} =$$

$$= \frac{1}{2^2} + (0{,}5)\frac{1}{2^2} = \frac{1}{2^2} + (0{,}5 \times 2)\frac{1}{2^3} = \frac{1}{2^2} + 1 \cdot \frac{1}{2^3} =$$

$$= \frac{0}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} = 0{,}011_{dois}$$

e o resultado é o mesmo. Aqui todos os cálculos foram feitos na base dez, pois o que interessa é obter a expressão $\frac{0}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}$. Sempre dá certo, pois ao multiplicar um número < 1 por 2, obtemos ou um número ainda < 1 ou, no máximo, um número < 2. Portanto, os dígitos sempre serão 0 ou 1. □

8.6 Frações contínuas de irracionais

Vimos, na Seção 2.5, o que é uma fração contínua simples (FCS) finita e estudamos o Teorema 2.9 segundo o qual todo número racional se exprime na forma de uma FCS finita, e, reciprocamente, toda FCS finita é um número racional. Estudamos agora, de forma suscinta, a representação de números irracionais através de FCS infinitas. Uma apresentação com mais detalhes pode ser lida em [111]. Conceitos, teoremas e demonstrações mais aprofundados sobre esse tema são apresentados em [77].

Dado $x \in \mathbb{R}$, indicamos por $\lfloor x \rfloor$ o maior inteiro $\leq x$. Esse número tem a seguinte propriedade: $x = \lfloor x \rfloor + s$, em que s é um número real tal que $0 \leq s < 1$. Para fins práticos observamos que, se $x \geq 0$, $\lfloor x \rfloor$ coincide com a parte inteira $[x]$ de x. Por exemplo, $\lfloor \pi \rfloor = [\pi] = 3$. Por outro lado, se $x < 0$ não é inteiro, $\lfloor x \rfloor$ é igual a $[x] - 1$. Por exemplo, $\lfloor -22/7 \rfloor = -4$, e $[-22/7] = -3$.

Seja ξ um número irracional. A forma mais direta de obter sua FCS consiste em considerar sua representação decimal e calcular a sequência $(\xi_n)_{n \geq 0}$ definida recorrentemente por

$$\xi_0 = \xi \quad \text{e} \quad \xi_{n+1} = \frac{1}{\xi_n - \lfloor \xi_n \rfloor},\ n \geq 1. \tag{8.6}$$

Como ξ é irracional, temos sempre $\xi_n - \lfloor \xi_n \rfloor > 0$. A sequência $(a_n)_{n\geq 0}$ dos quocientes parciais da FCS de ξ é então $a_n = \lfloor \xi_n \rfloor$ para todo $n \geq 0$.

Por esse método obtemos um certo número de termos de (a_n), pois temos acesso apenas a uma parte da expansão decimal de ξ. Se ξ for racional, em alguma etapa temos $\xi_n - \lfloor \xi_n \rfloor = 0$, e a FCS é finita. Portanto esse método é essencialmente o mesmo da Seção 2.5. É mais simples ver um exemplo.

Exemplo 8.18. Calculemos a (uma parte da) FCS do número $\pi \approx 3{,}141592653589793238462 6$. Seja π_n a sequência definida como em (8.6). Começamos com $\pi_0 = \pi$, e já temos $a_0 = \lfloor \pi \rfloor = 3$. Calculamos agora

$$\pi_1 = \frac{1}{\pi_0 - a_0} = \frac{1}{\pi - 3} \approx \frac{1}{0{,}141592653589793238 5} \approx 7{,}062513305931045769793,$$

portanto $a_1 = \lfloor \pi_1 \rfloor = 7$. Notemos que

$$\pi = a_0 + \frac{1}{\pi_1} = 3 + \frac{1}{\pi_1}\,.$$

Continuando,

$$\pi_2 = \frac{1}{\pi_1 - a_1} \approx 15{,}996594406685719888923,$$

portanto $a_2 = \lfloor \pi_2 \rfloor = 15$. Temos

$$\pi_1 = a_1 + \frac{1}{\pi_2} \quad \Rightarrow \quad \pi = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\pi_2}} = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{\pi_2}}\,.$$

Prosseguindo,

$$\pi_3 = \frac{1}{\pi_2 - a_2} \approx 1{,}003417231013372603346,$$

portanto $a_3 = \lfloor \pi_3 \rfloor = 1$. Temos

$$\pi_2 = a_2 + \frac{1}{\pi_3} \quad \Rightarrow \quad \pi = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\pi_3}}} = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{\pi_3}}}\,.$$

Agora

$$\pi_4 = \frac{1}{\pi_3 - a_3} \approx 292{,}634591014395472378543,$$

portanto $a_4 = \lfloor \pi_4 \rfloor = 292$. Temos

$$\pi_3 = a_3 + \frac{1}{\pi_4} \quad \Rightarrow \quad \pi = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\pi_4}}}} = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\pi_4}}}}\,.$$

Por último

$$\pi_5 = \frac{1}{\pi_4 - a_4} \approx 1{,}575818089628365698766,$$

portanto $a_5 = \lfloor \pi_5 \rfloor = 1$. Temos

$$\pi_4 = a_4 + \frac{1}{\pi_5} \quad \Rightarrow$$

$$\pi = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cfrac{1}{\pi_5}}}}} = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}}}.$$

Em resumo, chegamos a $\pi \approx [3, 7, 15, 1, 292, 1, \ldots]$.

Não sabemos se a precisão tomada na expansão de π é suficiente para certificar os valores dos termos desse convergente. Podemos aumentar a precisão e comparar. Mais fácil é usar um aplicativo computacional algébrico. O comando cf( ) do Maxima fornece

$$\pi \approx [3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 84, 2, 1, 1, 15, 3, 14, \ldots],$$

com possível erro no último quociente. □

Em outro exemplo, vimos, na Seção 3.7, que a FCS de $\sqrt{2}$ é infinita e periódica, mais exatamente, $\sqrt{2} = [1, 2, 2, 2 \ldots] = [1, \overline{2}]$.

Precisamos assim considerar FCS infinitas. Seja $(a_n)_{n\geq 0}$ uma sequência de números inteiros, com $a_i > 0$ para todo $i > 0$. Para todo inteiro $n \geq 0$, chamamos de *n-ésimo convergente associado a essa sequência* o número

$$c_n = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}} \tag{8.7}$$

Para maior simplicidade, anotamos

$$c_n = [a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n]. \tag{8.8}$$

A FCS infinita associada à sequência $(a_n)_{n\geq 0}$ representa o número $\lim_{n\to\infty} c_n$. Vejamos alguns passos da demonstração.

Definição 8.19. Definimos recursivamente as sequências $(p_n)_{n\geq 0}$ e $(q_n)_{n\geq 0}$ por
$p_0 = a_0 \quad p_1 = a_0 a_1 + 1 \qquad p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \quad$ para todo $n \geq 2$, e
$q_0 = 1 \quad q_1 = a_1 \qquad q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \quad$ para todo $n \geq 2$.

Não é difícil demonstrar as seguintes propriedades:

Proposição 8.20. *Com as notações acima temos:*

$a_0 \leq c_n \leq 1 + a_0$ *para todo* $n \geq 0$*;*

$c_n = p_n/q_n$ *para todo* $n \geq 0$*;*

$q_n \geq n$ *para todo* $n \geq 1$*;*
$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1}$ *para todo* $n \geq 1$*;*
$c_n - c_{n-1} = \frac{(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-1}}$ *para todo* $n \geq 1$*;*
$c_n - c_{n-2} = \frac{a_n (-1)^n}{q_n q_{n-2}}$ *para todo* $n \geq 2$*;*
$c_1 > c_3 > c_5 > \ldots \quad e \quad c_0 < c_2 < c_4 < \ldots$
$c_{2n} < c_{2n+1}$ *para todo* $n \geq 0$.

Chegamos em nosso principal objetivo:

Teorema 8.21. *Seja* $(a_n)_{n\geq 0}$ *uma sequência de números inteiros, com* $a_i > 0$ *para todo* $i > 0$*, e seja* c_n *o* n*-ésimo convergente associado a essa sequência. Então a sequência* $(c_n)_{n\geq 0}$ *é convergente.*

Demonstração. De acordo com a Proposição 8.20 a subsequência $(c_{2n+1})_{n\geq 0}$ é decrescente e limitada inferiormente, e a subsequência $(c_{2n})_{n\geq 0}$ é crescente e limitada superiormente. Portanto existem $\lim c_{2n+1} = \alpha_1$ e $\lim c_{2n} = \alpha_2$. Mostremos que $\alpha_1 = \alpha_2$.

Substituindo n por $2n+1$ na 5ª. relação da Proposição 8.20 e usando a 3ª. relação, temos

$$0 < c_{2n+1} - c_{2n} = \frac{(-1)^{2n}}{q_{2n+1} q_{2n}} = \frac{1}{q_{2n+1} q_{2n}} \leq \frac{1}{(2n+1)(2n)}\ ,\ n \geq 1,$$

portanto $\lim_{n\to\infty}(c_{2n+1} - c_{2n}) = 0$, de modo que $\alpha_1 = \alpha_2$. Isso implica que $(c_n)_{n\geq 0}$ é convergente. □

Definição 8.22. Seja $(a_n)_{n\geq 0}$ uma sequência de números inteiros, com $a_i > 0$ para todo $i > 0$, e seja c_n o n-ésimo convergente associado a essa sequência. O número real $\alpha = \lim c_n$ se diz ser *representado* pela fração contínua infinita simples associada à sequência $(a_n)_{n\geq 0}$, o que é indicado por

$$\alpha = [a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots].$$

Teorema 8.23. *Seja* $(a_n)_{n\geq 0}$ *uma sequência de números inteiros, com* $a_i > 0$ *para todo* $i > 0$*, e seja* c_n *o* n*-ésimo convergente associado a essa sequência. Então* $\alpha = \lim c_n$ *é irracional.*

Demonstração. Para todo $n \geq 0$, usando as notações e os resultados acima, temos $c_{2n} < \alpha < c_{2n+1}$. Logo

$$0 < \alpha - c_{2n} < c_{2n+1} - c_{2n} = \frac{1}{q_{2n+1} q_{2n}}\ .$$

Como $c_{2n} = p_{2n}/q_{2n}$ isso implica

$$0 < \alpha - \frac{p_{2n}}{q_{2n}} < \frac{1}{q_{2n+1} q_{2n}} \quad \Rightarrow \quad 0 < \alpha q_{2n} - p_{2n} < \frac{1}{q_{2n+1}}\ .$$

Suponhamos que α seja racional, e escrevamos $\alpha = a/b$, sendo a e $b > 0$ inteiros. Temos

$$0 < a q_{2n} - b p_{2n} < \frac{b}{q_{2n+1}}\ .$$

Vemos que $a q_{2n} - b p_{2n}$ é um inteiro positivo para todo $n \geq 0$. Mas $q_{2n+1} > 2n+1$, de modo que podemos escolher um n tal que $b/q_{2n+1} < 1$. Então, para esse n, o inteiro $a q_{2n} - b p_{2n}$ é positivo mas < 1, o que é impossível. Segue que α é irracional. □

Teorema 8.24. *Todo número irracional é igual a uma fração contínua infinita simples.*

Demonstração. Seja ξ um número irracional. Seguimos a ideia utilizada no Exemplo 8.18 para o cálculo da fração contínua infinita simples de π. Definimos recursivamente duas sequências $(a_n)_{n\geq 0}$ e $(\xi_n)_{n\geq 0}$ por

$$\xi_0 = \xi, \qquad a_n = \lfloor \xi_n \rfloor \quad \text{e} \quad \xi_{n+1} = \frac{1}{\xi_n - a_n}, \text{ para todo } n \geq 0.$$

Já observamos que, devido a ser ξ irracional, essas sequências estão bem definidas, com $\xi_n - a_n > 0$ para todo $n \geq 0$. Seja então $(c_n)_{n\geq 0}$ a sequência dos convergentes associados a $(a_n)_{n\geq 0}$. Sabemos que existe $\lim c_n$, e queremos provar que esse limite é ξ.

Consideremos as sequências $(p_n)_{n\geq 0}$ e $(q_n)_{n\geq 0}$ definidas por $(a_n)_{n\geq 0}$, como foi feito na Definição 8.19. De acordo com a Proposição 8.20 temos $c_n = p_n/q_n$ para todo $n \geq 0$.

Notemos agora o seguinte:

$$\xi = a_0 + \frac{1}{\xi_1} = [a_0; \xi_1]; \quad \xi = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\xi_2}} = [a_0; a_1, \xi_2],$$

em geral

$$\xi = [a_0; a_1, \ldots, a_n, \xi_{n+1}]$$

para todo $n \geq 0$. Os convergentes de $[a_0; a_1, \ldots, a_n, \xi_{n+1}]$ são da forma $\tilde{p}_{n+1}/\tilde{q}_{n+1} = (\xi_{n+1}p_n + p_{n-1})/(\xi_{n+1}q_n + q_{n-1})$, portanto

$$\begin{aligned} \xi - c_n &= \frac{\xi_{n+1}p_n + p_{n-1}}{\xi_{n+1}q_n + q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} \\ &= \frac{p_{n-1}q_n - p_n q_{n-1}}{(\xi_{n+1}q_n + q_{n-1})q_n} \\ &= \frac{(-1)^n}{(\xi_{n+1}q_n + q_{n-1})q_n}\,. \end{aligned}$$

Como $0 < \xi_{n+1}, q_n$ para todo $n \geq 0$ temos

$$|\xi - c_n| = \frac{1}{(\xi_{n+1}q_n + q_{n-1})q_n} < \frac{1}{q_n q_{n+1}}\,, n \geq 1.$$

Mas $1/q_n q_{n+1} \to 0$, o que implica $c_n \to \xi$. □

Enunciamos sem demonstração os seguintes resultados.

Teorema 8.25. *Todo número irracional é igual a uma única fração contínua infinita simples.*

Isto é, sejam $(a_n)_{n\geq 0}$ e $(b_n)_{n\geq 0}$ sequências de números inteiros, com $a_i > 0$ e $b_i > 0$ para todo $i > 0$, tais que $[a_0, a_1, a_2, \ldots] = [b_0, b_1, b_2, \ldots]$. Então $a_i = b_i$ para todo $i \geq 0$.

Teorema 8.26. *Um número irracional é igual a uma FCS infinita periódica se, e somente se, for algébrico de grau dois.*

Isto é, o número é raiz de um polinômio com coeficientes inteiros de grau dois, e não é raiz de um polinômio com coeficientes inteiros de grau um.

Vimos que, em certo sentido, os convergentes de um número irracional são suas melhores aproximações racionais. Os seguintes resultados esclarecem melhor essa afirmação:

1. (Hurwitz e Markov) Se ξ é irracional e $n \geq 1$, temos $\left|\xi - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}$, sendo $\frac{p}{q}$ pelo menos um dos convergentes c_{n-1}, c_n ou c_{n+1}.

2. Para todo número real α, se $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2q^2}$, então $\frac{p}{q}$ é um convergente de α.

3. Seja ξ um irracional e sejam $c_n = p_n/q_n$ seus convergentes. Se existir uma fração de inteiros a/b, com $b > 0$, mais próxima de ξ do que p_n/q_n para algum $n \geq 1$, então $b > q_n$.

O resultado **3** diz, a grosso modo, que os convergentes são aproximações racionais de ξ com denominadores menores. Para ver demonstrações, consulte [77] e [111].

8.7 Problemas

Problema 8.7.1. Todo número racional com representação finita tem uma segunda representação contendo infinitos dígitos iguais a 9. Por exemplo, $0{,}2743 = 0{,}2742999\ldots$. Prove que, em geral,

$$0{,}b_1b_2\ldots b_{m-1}b_m = 0{,}b_1b_2\ldots b_{m-1}\big(b_m - 1\big)999\ldots$$

sendo cada b_i um algarismo decimal.

Problema 8.7.2. Demonstre: para que a expansão decimal infinita $0{,}d_1d_2d_3\ldots$ seja igual a 1 é necessário que $d_j = 9$ para todo $j \geq 1$. E quanto a expansões β-ádicas?

Problema 8.7.3. Justifique as deduções feitas em (8.5).

Problema 8.7.4. Seja α um número irracional. Seja $\varepsilon > 0$ um número real. Usando a expansão decimal de α, mostre que existe um número racional r tal que $|\alpha - r| < \varepsilon$.

Problema 8.7.5. Demonstre que é irracional o número

$$0{,}1010010001000010000010000001\ldots$$

definido no início da Seção 8.3.

Problema 8.7.6. Sejam $r < s$ e $t < u$ números tais que $s - r = u - t$ e $t - r$ é racional. Prove que os intervalos $[r, s]$ e $[t, u]$ têm a mesma quantidade de números irracionais, no seguinte sentido: existe uma função bijetiva $f : [r, s] \mapsto [t, u]$ tal que $f(x)$ é irracional se e somente se x é irracional, para todo $x \in [r, s]$.

Problema 8.7.7. Mostre que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ é irracional através do Teorema 8.3.

Problema 8.7.8. Mostre que $\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$ é irracional através do Teorema 8.3.

Problema 8.7.9. Sejam a e n inteiros positivos. Demonstre, usando o Teorema 8.3, que $\sqrt[n]{a}$ é irracional ou inteiro. Nesse último caso, a é a potência n-ésima de um inteiro.

Problema 8.7.10. Demonstre, usando o Teorema 8.3, que se p é primo então $\sqrt{p}$ é irracional.

Problema 8.7.11. Veja como você poderia verificar, através do Teorema 8.3, a possível irracionalidade do número $\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$.

Problema 8.7.12. Seja β um inteiro ≥ 2. Dada uma fração de inteiros a/b, encontre condições necessárias e suficientes sobre a e b para que sua expansão β-ádica seja finita.

Problema 8.7.13. Seja β um inteiro ≥ 2. Demonstre que a expansão β-ádica de um número real é finita ou periódica se e somente se o número é racional.

Problema 8.7.14. Encontre as expansões na base oito de **a)** $1/4$; **b)** $1/3$.

Problema 8.7.15. Encontre as expansões decimais e a representação como fração de inteiros (decimais) de **a)** $(0{,}102)_{três}$; **b)** $(0{,}\overline{13})_{quatro}$.

Problema 8.7.16. a) O número decimal $0{,}1 = \frac{1}{10}$ tem expansão finita, como se vê. Mas seu denominador tem o número primo 5 como divisor, e $5 \nmid 2$. Portanto, sua expansão binária é infinita e periódica. Encontre o melhor método de calculá-la. **b)** O número racional $(0{,}1020102)_{três}$ tem expansão finita ternária, mas sua expansão decimal é infinita e periódica. Confira isso. Qual o comprimento do período?

Problema 8.7.17. Calcule alguns dígitos da expansão binária de $\sqrt{2}$.

Problema 8.7.18. Seja $\beta \geq 2$ um inteiro. Encontre a expansão β-ádica dos seguintes números: **a)** $1/(\beta-1)$; **b)** $1/(\beta+1)$.

Problema 8.7.19. Seja $\beta \geq 2$ um inteiro. Prove que

$$\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta^4}+\frac{1}{\beta^9}+\cdots+\frac{1}{\beta^{n^2}}+\ldots$$

é irracional.

Problema 8.7.20. a) Mostre que todo número real x pode ser escrito na forma $x = n+s$, em que n é o inteiro $\lfloor x \rfloor$ e s é um número real tal que $0 \leq s < 1$. Além disso, os números n e s são únicos com essas condições. **b)** Demonstre que se $x \geq 0$ então $\lfloor x \rfloor = [x]$, e se $x < 0$ não é inteiro então $\lfloor x \rfloor = [x]-1$. **c)** Calcule $\lfloor -22/7 \rfloor$ e $[-22/7]$. Escreva $-22/7$ na forma $n+s$ dada acima. **d)** Demonstre que, dados inteiros a e $b \neq 0$, o quociente da divisão euclidiana de a por b é $\lfloor \frac{a}{b} \rfloor$.

Problema 8.7.21. Calcule alguns convergentes da FCS de π, e obtenha aproximações na forma de frações de inteiros com denominadores relativamente pequenos.

Problema 8.7.22. Confirme alguns termos da FCS de π^4:

$$\pi^4 = [97, 2, 2, 3, 1, 16539, 1, 6, 7, 6, 8, \ldots]$$

Calcule o convergente c_4 e descubra como Srinivasa Ramanujan calculou a aproximação de π dada no Problema 6.11.28. Especule por qual motivo foi escolhido o convergente c_4, e não c_5, ou outro com mais termos. A aproximação não seria melhor?

Problema 8.7.23. Não se sabe se $\pi+e$ e πe são números racionais. Prove que pelo menos um deles é irracional.

Problema 8.7.24. a) Demonstre a seguinte versão mais geral do Teorema 8.3. Se $\alpha = a/b$ é uma fração irredutível de inteiros e é raiz do polinômio $p(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$, sendo $n \geq 1$ e c_i um número inteiro para todo $0 \leq i \leq n$, então a é divisor de c_0 e b é divisor de c_n. **b)** Dê exemplos para mostrar que, no enunciado acima, são necessárias as condições: (i) $\alpha = a/b$ é uma fração irredutível; (ii) c_i é um número inteiro para todo $0 \leq i \leq n$. **c)** Explique por que a presente versão implica o Teorema 8.3.

Problema 8.7.25. Usando que $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ e a identidade trigonométrica $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$, demonstre que o número $\xi = \cos 20^\circ$ é irracional.

Problema 8.7.26. Usando a identidade trigonométrica $\operatorname{sen} 3\theta = 3\operatorname{sen}\theta - 4\operatorname{sen}^3\theta$, demonstre que o número $\xi = \operatorname{sen} 10^\circ$ é irracional.

Problema 8.7.27. a) Seja α um número algébrico. Demonstre que: (i) seu oposto $-\alpha$ também é algébrico; (ii) se $\alpha \neq 0$, seu inverso α^{-1} também é algébrico. **b)** Obtenha resultados análogos para números transcendentes.

Problema 8.7.28. Seja ξ um número transcendente. Demonstre que: (i) $m\xi$ é transcendente para todo inteiro m; (ii) ξ^m é transcendente para todo inteiro positivo m.

8.8 Temas para investigação

Tema 8.8.1. Considere os números inteiros 0, 1, 2, 3, ..., 9, 10, 11, 12,... Listando esses dígitos seguidamente, nessa ordem, formamos o número real 0,012345678910111213 .... Investigue as propriedades desse número.

Tema 8.8.2. Investigue para quais inteiros positivos n o número $\log n$ é transcendente.

Tema 8.8.3. Um número complexo se diz algébrico quando é raiz de um polinômio $p(z) = c_n z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \cdots + c_1 z + c_0$, em que c_j é inteiro para todo $0 \leq j \leq n$, e se diz transcendente caso contrário. Seja $\iota = \sqrt{-1}$ a unidade complexa imaginária. **a)** Mostre que ι é algébrico. **b)** Usando a fórmula de Euler $e^{\iota\theta} = \cos\theta + \iota\operatorname{sen}\theta$ verifique as relações $e^{\pi} = (e^{\iota\pi})^{-\iota} = (-1)^{-\iota}$. **c)** Observando que o Teorema 8.13 vale para α e β complexos, justifique por que e^{π} é transcendente. **d)** Encontre outros exemplos similares de números transcendentes. **e)** Um Teorema de F. Lindemann de 1882 afirma que e^{α} é transcendente sempre que $\alpha \neq 0$ é algébrico. Use esse resultado para encontrar exemplos de números x tais que $\ln(x)$ é transcendente.

Tema 8.8.4. Releia a Seção 3.7 e o Tema 3.9.10. **a)** Estudando exemplos de FCS de números da forma $\sqrt{a^2+1}$, em que a é um inteiro positivo, faça uma conjectura. Demonstre sua conjectura. **b)** Faça o mesmo com $\sqrt{a^2-1}$, $\sqrt{a^2+2}$, $\sqrt{a^2-2}$, $\sqrt{a^2+a}$ e $\sqrt{a^2-a}$, em que a é um inteiro positivo. **c)** Investigue $\sqrt{a^2+4}$ e $\sqrt{a^2-4}$. **d)** Que tipo de números são $[a_0, \overline{a}]$, $[a_0, \overline{a, b}]$, $[a_0, a, \overline{b}]$, etc.

Tema 8.8.5. Usando argumentos analíticos (cf. [77], pág. 121), verifica-se que a FCS do número de Neper e é

$$e = [2,1,2,1,1,4,1,1,6,\ldots,1,1,2n,\ldots] = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \ddots}}}}}$$

Calcule alguns convergentes e verifique sua aproximação com e.

Tema 8.8.6. a) A Análise Matemática também considera frações contínuas compostas. W. Brouncker, em 1659, observou a seguinte representação para $4/\pi$, posteriormente demonstrada por L. Euler, em 1775, usando argumentos analíticos:

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \ddots}}}$$

Calcule alguns convergentes e verifique sua aproximação com $4/\pi$. Se você se sentir mais confortável, pode escrever a FC de $\pi/4$ e trabalhar com ela. Confira [77], pág. 120.

b) Uma bela representação de π pode ser estudada em [68]:

$$\pi = 3 + \cfrac{1^2}{6 + \cfrac{3^2}{6 + \cfrac{5^2}{6 + \ddots}}}$$

Calcule alguns convergentes e verifique sua aproximação com π.

Tema 8.8.7. Um número real com expansão decimal infinita se diz *simplesmente normal* quando cada algarismo d aparece na expansão com frequência $1/10$. A grosso modo isso significa que, a cada dez dígitos, d aparece, em média, uma vez. Mais exatamente, seja $N(d,n)$ o número de vezes com que d aparece nos n primeiros dígitos da expansão. Então $\lim_{n\to\infty} \frac{N(d,n)}{n} = \frac{1}{10}$. **a)** Usando a expansão de π com mil casas apresentada em 6.10, calcule a frequência $\frac{N(d,1000)}{1000}$ para cada um dos algarismos decimais, e verifique se está próxima de $1/10$. **b)** Procure na literatura informações sobre números normais.

Tema 8.8.8. Consideremos a função $f\colon [0,1] \mapsto [0,1]$ definida por $f(x) = 10x - [10x]$. Mostre que f está bem definida. Para todo inteiro $n \geq 2$, indicamos por $f^n(x)$ a composta $(f \circ f \circ \cdots \circ f)(x)$ (f composta n vezes). Dado $x_0 \in [0,1]$, a *órbita* de x_0 é a sequência x_0, $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f^2(x_0)$, $x_3 = f^3(x_0)$, ... Um número $a \in [0,1]$ denomina-se *atrator* de f se existe $x_0 \in [0,1]$ cuja órbita $x_n \to a$. Uma órbita (x_n) denomina-se *periódica* se existe um inteiro $i \geq 0$ tal que $x_i = x_0$. O menor i com essa propriedade chama-se *período* dessa órbita. Uma órbita (x_n) denomina-se *ultimamente periódica* se existem inteiros $i > j > 0$ tal que $x_i = x_j$. Determine quem são os atratores de f, e quem são as órbitas que convergem para eles. Determine as órbitas periódicas e as ultimamente periódicas. Mostre que dados $b \in [0,1]$ e $\varepsilon > 0$ existe $x_0 \in (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ cuja órbita é periódica. Mostre que existem órbitas que "passeiam" por todo o intervalo [0,1], isto é, são densas em [0,1].

Seja $\beta \geq 2$ um inteiro. Estude as órbitas da função $f\colon [0,1] \mapsto [0,1]$ definida por $f(x) = \beta x - [\beta x]$.

Tema 8.8.9. Para saber mais sobre números irracionais e transcendentes uma possibilidade é [99] e [124].

8.9 Atividades para licenciandos e professores

Atividade 8.9.1. Às vezes alguns estudantes calculam uma aproximação para um determinado número usando uma calculadora digital e, ao observar que não aparece um período, concluem que o número é irracional. Imagine uma atividade para lidar com esse engano.

Atividade 8.9.2. No documento [24], capítulo sobre Ensino Fundamental - Anos Finais, pág. 269, diz o legislador: *Para que [os estudantes] aprofundem a noção de número, é importante colocá-los diante de problemas, sobretudo os geométricos, nos quais os números racionais não são suficientes para resolvê-los, de modo que eles reconheçam a necessidade de outros números: os irracionais.*

Que situações didáticas poderiam ser adotadas para conseguir esse objetivo?

Atividade 8.9.3. Converse com colegas sobre o potencial didático das seguintes frases questionadoras, que podem ajudar a diagnosticar a compreensão de estudantes sobre os números reais: (i) qual é o maior número racional $< \sqrt{2}$? (ii) qual é o maior número irracional $< \sqrt{2}$? (iii) a existência dos irracionais é comprovada pelo fato de que, na reta numérica, entre dois pontos com coordenadas racionais, existem infinitos pontos; (iv) a existência dos irracionais é duvidosa por que é impossível cortar uma linha medindo $\sqrt{2}$.

Atividade 8.9.4. Um professor do Ensino Básico ou Médio dificilmente usará cortes de Dedekind ou outro método equivalente para construir os números reais. O que você pensa sobre usar o seguinte argumento: já conhecemos os números racionais, e já vimos que existem números irracionais, como $\sqrt{2}$. O conjunto dos números reais é, então, a união dos racionais e dos irracionais.

Atividade 8.9.5. Ainda sobre o que foi comentado na atividade anterior, veja se é melhor: vimos que na reta numérica existem pontos com coordenada racional e pontos com coordenada irracional, como $\sqrt{2}$. O conjunto dos números reais é, então, constituído pelas coordenadas de todos os pontos da reta numérica.

Capítulo 9

Funções exponenciais e logarítmicas

9.1 Introdução

Apresentamos neste Capítulo as funções exponenciais e logarítmicas, que estão entre as mais importantes da Matemática. Essas funções têm origem muito antiga e surgiram de ideias simples, conforme veremos. Dentre as várias opções que conhecemos para a definição dessas funções, nos orientamos, até certo ponto, pela que é apresentada no volume 1 de [74], página 167 e seguintes, por julgarmos que é a mais adequada como embasamento teórico para professores do ensino médio. Confira também [106], página 184.

9.2 Uma ideia antiga

A ideia de encontrar um método para representar números grandes sempre fez parte do imaginário dos matemáticos. Arquimedes, em sua obra "O contador de grãos de areia", construiu um método capaz de enumerar os grãos de areia que preencheriam uma esfera imaginária com raio igual à distância entre a Terra e o Sol. Outros matemáticos experientes trataram do assunto, como Apolônio de Perga e Papus de Alexandria.

Com a predominância dos sistemas numéricos posicionais, consagrou-se o uso das potências para representar números grandes. Desde a Idade Média se faz uso da potenciação. De acordo com [116], volume II, página 32, na primeira metade do segundo milênio eram consideradas, na Europa, sete operações fundamentais, às vezes nove, a saber: numeração, adição, subtração, duplicação, mediação (divisão por dois), multiplicação, divisão, progressão e radiciação. Nesse contexto progressão significa potenciação.

Já vimos, no Capítulo 7 (por exemplo, problemas 7.6.4 e 7.6.5), a capacidade que têm as potências em representar números grandes, assim como pudemos também observar a rapidez de crescimento de uma sequência como (2^n). Imitando Arquimedes, podemos calcular (confira o Problema 9.9.2) quantos átomos de hidrogênio caberiam no universo conhecido, e encontramos menos do que 10^{110} átomos. Ficamos admirados com a facilidade que as potências têm em representar uma quantidade que para nós é grandiosa.

Problema resolvido 9.1. Tome uma folha de papel, dobre-a ao meio, e dobre ao meio novamente. Volte a dobrar outras 41 vezes. Sobre a espessura do pacote de folhas que resulta dessas operações pode-se dizer que: (a) Não ultrapassa 5 cm. (b) Não ultrapassa 5 m. (c) É aproximadamente igual à distância média entre a Terra e a Lua. (d) nenhuma das anteriores.

Solução. A alternativa correta é (d). De fato, quando se dobra uma folha n vezes, a espessura

do pacote que assim resulta é 2^n vezes a espessura da folha. Tomando-se um pacote de 500 folhas, desses que se compram em papelarias, podemos medir sua espessura: $0,05$ metros. Se 500 folhas têm espessura de $0,05$ metros, 2^{43} folhas têm $2^{43} \cdot 0,05/500 \approx 879\,609\,302$ metros. A distância média da Terra à Lua é, aproximadamente, $384\,400\,000$ metros. □

9.3 Construção da função exponencial

Vimos como a multiplicação potencializa a adição. Dado um número real $a > 0$, as somas sucessivas $a + a$, $a + a + a$, $a + a + a + a$, ... são indicadas por $2a$, $3a$, $4a$, ... A soma de n parcelas iguais a a é anotada por na, para todo número inteiro positivo n.

Também vimos como a multiplicação facilita a exploração e o entendimento dos números, e é muito útil na análise dos mais variados fenômenos. Portanto nada mais justo do que tentarmos potencializar a própria multiplicação, mediante o estudo dos produtos aa, aaa, ... O estudante bem sabe que esses produtos são anotados na forma a^n.

Mais exatamente, se $a > 0$ é um número real e n é um inteiro positivo, definimos

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdots a \text{ (em que o termo } a \text{ comparece } n \text{ vezes).}$$

Uma definição por recorrência pode ser

$$a^1 = a \quad \text{e} \quad a^n = a \cdot a^{n-1} \quad \text{para todo inteiro } n \geq 2.$$

Obtemos assim uma operação que associa a todo número real $a > 0$ e a todo número inteiro positivo n o valor a^n. Essa operação é denominada *potenciação*. O valor a^n chama-se *potência de a elevado a n*. Na expressão a^n, o número a chama-se *base*, e n chama-se *expoente*.

O estudante já conhece a propriedade fundamental das potências:

Proposição 9.2. *Para todo número real $a > 0$ e quaisquer que sejam os inteiros positivos m e n temos $a^m\, a^n = a^{m+n}$.*

Demonstração. De fato, $a^m a^n$ é o produto de $m + n$ fatores iguais a a. Em outros termos,

$$a^m\, a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{m} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n} = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{m+n} = a^{m+n}.$$

□

Deixamos para o estudante a demonstração do

Corolário 9.3. *Para todo número real $a > 0$ e quaisquer que sejam os inteiros positivos m_1, m_2, ..., m_n, temos $a^{m_1} a^{m_2} \cdots a^{m_n} = a^{m_1+m_2+\cdots+m_n}$. Em particular, se $m_1 = m_2 = \cdots = m_n = m$, temos $(a^m)^n = a^{mn}$.*

Notemos que se o número real a se escreve na forma de uma fração $a = b/c$, então $a^n = b^n/c^n$ para todo inteiro positivo n, pois

$$a^n = \left(\frac{b}{c}\right)^n = \frac{b}{c} \cdots \frac{b}{c} = \frac{b \cdots b}{c \cdots c} = \frac{b^n}{c^n}\,.$$

Em particular

$$\left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}$$

para todo número real $a > 0$ e todo inteiro positivo n. Notemos também que se $a > 0$ e $b > 0$ são números reais e n é um inteiro positivo qualquer, então $(ab)^n = ab \cdots ab = a \cdots a\, b \cdots b = a^n b^n$, e se $0 < a < b$ então $0 < a^n < b^n$.

O resultado seguinte compara a expressão exponencial $(1+x)^n$ com a expressão linear $1+nx$. Confira também o Problema 9.9.4.

Lema 9.4 (Desigualdade de Bernoulli)**.** *Para todo número real $x > 0$ e qualquer que seja o inteiro $n \geq 2$ temos $(1+x)^n > 1+nx$ (se $n = 1$ ou $x = 0$ vale a igualdade).*

Demonstração. Da fórmula binomial temos

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}x^{n-1} + x^n.$$

Como $\binom{n}{1} = n$ e como $\binom{n}{i}x^i > 0$ para todo i, segue a desigualdade. □

Proposição 9.5. *Para todo número real $0 < a < 1$ a sequência $(a^n)_{n\geq 1}$ é estritamente decrescente e $\lim_{n\to+\infty} a^n = 0$. Para todo número real $a > 1$ a sequência $(a^n)_{n\geq 1}$ é estritamente crescente e $\lim_{n\to+\infty} a^n = +\infty$.*

Demonstração. Suponhamos primeiro que $0 < a < 1$. Multiplicando por a vem $a^2 < a$. Multiplicando por a novamente vem $a^3 < a^2$. E assim sucessivamente, temos $a^{n+1} < a^n$ para todo $n \geq 1$. Portanto a sequência (a_n) é estritamente decrescente. Seja agora $b = 1/a$. Temos $b > 1$, e podemos escrever $b = 1 + c$ com $c > 0$. Logo $b^n = (1+c)^n \geq 1 + nc$ para todo inteiro positivo n, em virtude da Desigualdade de Bernoulli 9.4. Portanto $b^n > nc$, e $a^n < 1/nc$. Como $\lim 1/nc = 0$, segue que $\lim a^n = 0$.

Suponhamos agora que $a > 1$. Multiplicando por a vem $a^2 > a$. Multiplicando por a novamente vem $a^3 > a^2$. E assim sucessivamente, temos $a^{n+1} > a^n$ para todo $n \geq 1$. Portanto a sequência (a_n) é estritamente crescente. Por outro lado, escrevendo $a = 1 + b$, temos $b > 0$ e $a^n = (1+b)^n \geq 1 + nb$ para todo inteiro positivo n. Como $\lim(1 + nb) = +\infty$ vem $\lim a^n = +\infty$. □

Nossa providência agora é estender a definição de potência para expoentes inteiros quaisquer.

Definição 9.6. Para todo número real $a > 0$ e todo inteiro n definimos a *potência* a^n de *base* a e *expoente* n por

$$a^n = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0; \\ a^n & \text{se } n > 0; \\ \dfrac{1}{a^{-n}} & \text{se } n < 0. \end{cases}$$

Existem motivos para definirmos a^n dessa forma. O principal é que queremos preservar a propriedade fundamental $a^m\, a^n = a^{m+n}$ também para expoentes inteiros ≤ 0. De fato, queremos $a^0\, a^1 = a^{0+1}$, o que implica $a^0\, a = a$, e $a^0 = 1$. Também queremos $a^n\, a^{-n} = a^{n-n} = 1$, o que implica $a^n = 1/a^{-n}$.

As propriedades anteriores têm agora a forma

Proposição 9.7. *(i) Para todo número real $a > 0$ e quaisquer que sejam os inteiros m e n temos $a^m\, a^n = a^{m+n}$ e $(a^m)^n = a^{mn}$. (ii) $(ab)^m = a^m b^m$, quaisquer que sejam os reais positivos a e b e o inteiro m. (iii) Para todo número real $0 < a < 1$ a sequência (a^n), $n \in \mathbb{Z}$, é estritamente decrescente, $\lim_{n\to+\infty} a^n = 0$ e $\lim_{n\to-\infty} a^n = +\infty$. (iv) Para todo número real $a > 1$ a sequência (a^n), $n \in \mathbb{Z}$, é estritamente crescente, $\lim_{n\to+\infty} a^n = +\infty$ e $\lim_{n\to-\infty} a^n = 0$.*

Demonstração. (i) Verificamos primeiro que $a^m\, a^n = a^{m+n}$. Isso já foi feito para $m > 0$ e $n > 0$. Se $m = 0$ temos $a^0 a^n = a^n = a^{0+n}$, analogamente se $n = 0$. Se $m < 0$ e $n < 0$ temos $m + n < 0$ e

$$a^m a^n = \frac{1}{a^{-m}} \frac{1}{a^{-n}} = \frac{1}{a^{-m} a^{-n}} = \frac{1}{a^{-m-n}} = \frac{1}{a^{-(m+n)}} = a^{m+n}.$$

Suponhamos $m > 0$ e $n < 0$. Temos três casos a considerar:

1º caso $m = |n|$. Então $-n = |n|$ e $m + n = 0$. Temos

$$a^m a^n = a^m \frac{1}{a^{-n}} = \frac{a^m}{a^{|n|}} = 1 = a^0 = a^{m+n}.$$

2º caso $m > |n|$. Logo $m + n > 0$. Seja $m = |n| + k$, com $k > 0$. Temos

$$a^m a^n = a^m \frac{1}{a^{-n}} = \frac{a^{|n|+k}}{a^{|n|}} = \frac{a^{|n|} a^k}{a^{|n|}} = a^k = a^{m-|n|} = a^{m+n}.$$

3º caso $m < |n|$. Logo $m + n < 0$. Seja $|n| = m + k$, com $k > 0$. Temos

$$a^m a^n = a^m \frac{1}{a^{-n}} = \frac{a^m}{a^{|n|}} = \frac{a^m}{a^{m+k}} = \frac{a^m}{a^m a^k} = \frac{1}{a^k} = \frac{1}{a^{-m+|n|}} = \frac{1}{a^{-m-n}} = a^{m+n}.$$

Analogamente se $m < 0$ e $n > 0$. Dessa forma consideramos demonstrado que $a^m\, a^n = a^{m+n}$ quaisquer que sejam os inteiros m e n.

Verificamos agora que $(a^m)^n = a^{mn}$. Isso já foi feito para $m > 0$ e $n > 0$. Se $m = 0$ temos $(a^0)^n = 1^n = 1 = a^0 = a^{0n}$, e se $n = 0$ temos $(a^m)^0 = 1 = a^0 = a^{m0}$. Se $m > 0$ e $n < 0$ temos

$$(a^m)^n = \frac{1}{(a^m)^{-n}} = \frac{1}{a^{-mn}} = a^{mn},$$

se $m < 0$ e $n > 0$ temos

$$(a^m)^n = \left(\frac{1}{a^{-m}}\right)^n = \frac{1}{(a^{-m})^n} = \frac{1}{a^{-mn}} = a^{mn},$$

e se $m < 0$ e $n < 0$ temos

$$(a^m)^n = \frac{1}{(a^m)^{-n}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^{-m}}\right)^{-n}} = \frac{1}{\frac{1}{(a^{-m})^{-n}}} = \left(a^{-m}\right)^{-n} = a^{(-m)(-n)} = a^{mn}.$$

Dessa forma consideramos demonstrado que $(a^m)^n = a^{mn}$ quaisquer que sejam os inteiros m e n.

(ii) A cargo do estudante.

(iii) Já foi verificado que $0 < a < 1 \Rightarrow a^n > a^{n+1}$ para todo $n > 0$. Isso vale para $n = 0$, pois $a^0 = 1 > a = a^{0+1}$, e também para $n = -1$, pois $a^{-1} = \frac{1}{a} > 1 = a^0 = a^{-1+1}$. Suponhamos $n < -1$. Então $-n - 1 > 0 \Rightarrow a^{-n-1} > a^{-n-1+1} = a^{-n} \Rightarrow \frac{1}{a^{-n}} > \frac{1}{a^{-n-1}} \Rightarrow a^n > a^{n+1}$. Isso prova que a sequência (a^n), $n \in \mathbb{Z}$, é estritamente decrescente.

Já foi verificado que $0 < a < 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a^n = 0$ e que $a > 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a^n = +\infty$. Logo $0 < a < 1 \Rightarrow \lim_{n\to-\infty} a^n = \lim_{n\to+\infty} a^{-n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a^n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^n = +\infty$, pois $1/a > 1$.

(iv) Suponhamos $a > 1$. Como $0 < 1/a < 1$, seguem de (iii) as afirmações. □

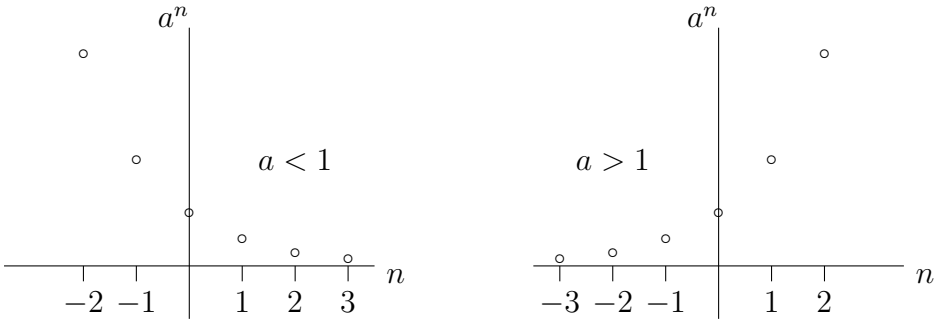


Figura 9.1. Gráficos de funções exponenciais com expoente inteiro.

Como ilustração da Proposição 9.7 vemos na Figura 9.1 parte do gráfico da função $f : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{R}_+$, $f(n) = (1/2)^n$ (à esquerda), e parte do gráfico da função $g : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{R}_+$, $g(n) = 2^n$ (à direita).

Observação 9.8. (i) Sejam $a > 0$ um número real e m e n inteiros. A expressão a^{m^n} é ambígua. Seu valor depende de que potência calculamos primeiro: se primeiro $l = m^n$ e depois a^l, ou se primeiro $t = a^m$ e depois t^n. Por exemplo:

$$\left(2^3\right)^4 = 8^4 = 4096 \quad \text{e} \quad 2^{(3^4)} = 2^{81} = 2417851639229258349412352.$$

Para fixar um procedimento definimos $a^{m^n} = a^{(m^n)}$. Em geral convencionamos que, para efetuar uma potência de potências, o cálculo é feito da direita para a esquerda.

(ii) No estudo que estamos fazendo sobre potências tomamos como base números reais a **positivos**. Isso nos permitirá definir potências a^x para x real qualquer. Se assumíssemos a negativo teríamos problemas, por exemplo, com $(-5)^{1/2}$. Mas nada impede que utilizemos a notação exponencial com base negativa em certos casos. Por exemplo, faz sentido a notação a^n para todo número real $a \neq 0$ e todo inteiro n, pois, se $a < 0$, podemos considerar que $a^n = (-1)^n(-a)^n$. Tampouco queremos $a = 0$ como base, pois preferimos deixar a expressão 0^0 indefinida, e dessa forma podemos eventualmente utilizá-la na teoria de limites de funções, em que ela assume vários significados. Também não definimos a expressão 0^n para inteiros negativos, pois isso implicaria divisão por zero, Mas nada impede de expressarmos $0^n = 0$ para todo inteiro positivo n. Finalmente observamos que, no campo dos números complexos, é possível definir z^α para quaisquer números complexos $z \neq 0$ e α. Confira [130], pág. 59.

Nosso objetivo agora é estender a definição de potência para expoentes racionais. Queremos preservar as propriedades importantes, como $a^r a^s = a^{r+s}$, $(a^r)^s = a^{rs}$ e $(ab)^r = a^r b^r$, quaisquer que sejam os racionais r e s. Em particular, $(a^{1/n})^n = a$, ou seja, queremos que $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$.

Lembremos o Problema Resolvido 4.35, em que se afirma que, para todo número real $a > 0$ e para todo número inteiro $n \geq 2$, existe um único número real positivo b tal que $b^n = a$, denominado *raiz n-ésima de* a, e anotado por $\sqrt[n]{a}$, ou por $\sqrt{a}$ quando $n = 2$. Em resumo, $\sqrt[n]{a}$ é o único número real positivo tal que $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$.

Estabelecendo a notação $\sqrt[1]{a} = a$, consideremos a

Definição 9.9. Seja $a > 0$ um número real. Dado qualquer número racional r, escrevemos $r = m/n$, com m e n e $n > 0$. Definimos a *potência* a^r de *base* a e *expoente* racional r por

$$a^r = \sqrt[n]{a^m}.$$

Para examinar a consistência dessa definição, notemos primeiro que ela preserva a definição anterior para expoentes inteiros. De fato, se r é inteiro, então $n = 1$ e $r = m$, e temos $a^r = a^{m/1} = \sqrt[1]{a^m} = a^m$. Se r não é inteiro, temos $n \geq 2$ (e $a^m > 0$), e existe $\sqrt[n]{a^m}$, pelo que foi observado logo acima. Falta verificar que a expressão $\sqrt[n]{a^m}$ não depende do particular representante de r como fração de inteiros. Observamos primeiro que dado $r = m/n$ sempre podemos supor $n > 0$, pois, se $n < 0$, escrevemos $r = -m/-n$. Usando o Teorema 2.1 (e sua demonstração), sejam $m = tp$ e $n = tq$, sendo $t = \text{mdc}(m, n) > 0$, e p/q é a única fração de inteiros relativamente primos equivalente a m/n. Temos

$$\left(\sqrt[q]{a^p}\right)^n = \left(\sqrt[q]{a^p}\right)^{qt} = \left[\left(\sqrt[q]{a^p}\right)^q\right]^t = (a^p)^t = a^{tp} = a^m.$$

Da definição e da unicidade da raiz n-ésima segue que $\sqrt[q]{a^p} = \sqrt[n]{a^m}$.

Vejamos agora que a^r satisfaz às propriedades usuais das potências.

Proposição 9.10. *(i) Para todo número real $a > 0$ e quaisquer que sejam os racionais r e s temos $a^r\, a^s = a^{r+s}$ e $(a^r)^s = a^{rs}$. (ii) Quaisquer que sejam os números reais positivos a e b e para todo racional r temos $(ab)^r = a^r b^r$. (iii) Para todo número real $0 < a < 1$ e quaisquer que sejam os racionais $r < s$ temos $a^r > a^s$. (iv) Para todo número real $a > 1$ e quaisquer que sejam os racionais $r < s$ temos $a^r < a^s$.*

Demonstração. (i) Sejam $r = m/n$ e $s = p/q$ representações de r e s como frações de inteiros tais que $n > 0$ e $q > 0$. Usando o resultado do Problema 4.8.19 temos

$$a^r\, a^s = a^{m/n}\, a^{p/q} = \sqrt[n]{a^m}\,\sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}}\,\sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq}\, a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}} = a^{(mq+np)/nq} = a^{r+s}$$

e

$$(a^r)^s = (a^r)^{p/q} = \sqrt[q]{(a^r)^p} = \sqrt[q]{a^r \ldots a^r} = \sqrt[q]{a^{r+\cdots+r}} = \sqrt[q]{a^{rp}} = a^{rp/q} = a^{rs}.$$

(ii) Seja $r = m/n$. Temos

$$(ab)^r = (ab)^{m/n} = \sqrt[n]{(ab)^m} = \sqrt[n]{a^m b^m} = \sqrt[n]{a^m}\,\sqrt[n]{b^m} = a^r b^r.$$

(iii) Sejam $r = m/n$ e $s = p/q$ representações de r e s como frações de inteiros tais que $n > 0$ e $q > 0$. Então $r < s \iff mq < np$. Como $0 < a < 1$ temos $a^{mq} > a^{np}$. Portanto

$$a^r = a^{m/n} = a^{mq/nq} = \sqrt[nq]{a^{mq}} > \sqrt[nq]{a^{np}} = a^{np/nq} = a^{p/q} = a^s.$$

(iv) Análogo a (iii). □

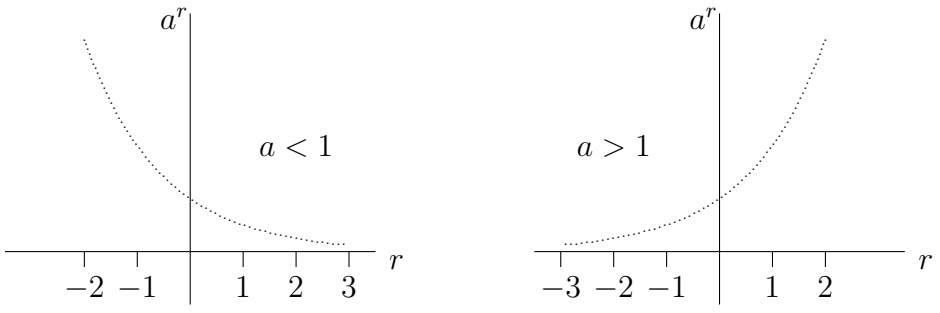


Figura 9.2. Gráficos de funções exponenciais com expoente racional.

Dessa forma, para todo número real $a > 0$, fica definida uma função $f_a : \mathbb{Q} \mapsto \mathbb{R}_+$ por $f_a(r) = a^r$. Como ilustração vemos na Figura 9.2 parte do gráfico da função $f : \mathbb{Q} \mapsto \mathbb{R}_+$, $f(r) = (1/2)^r$ (à esquerda), e parte do gráfico da função $g : \mathbb{Q} \mapsto \mathbb{R}_+$, $g(r) = 2^r$ (à direita).

Para completar a construção da função exponencial com base $a > 0$ precisamos definir o significado de a^x para todo número real x. Por exemplo, o que poderia ser $2^{\sqrt{2}}$? Lembramos que existem sequências de racionais (r_n) tais que $r_n \to \sqrt{2}$, como 1, 1,4, 1,41, 1,414, 1,4142, 1,41421, 1,414213, 1,4142135, 1,41421356, ... Já que 2^r está definido para todo racional r, examinamos esses valores para essa sequência:

$$\begin{aligned} 2^1 &\approx 2 \\ 2^{1,4} &\approx 2{,}639015822 \\ 2^{1,41} &\approx 2{,}657371628 \\ 2^{1,414} &\approx 2{,}664749650 \\ 2^{1,4142} &\approx 2{,}665119089 \\ 2^{1,41421} &\approx 2{,}665137562 \\ 2^{1,414213} &\approx 2{,}665143104 \\ 2^{1,4142135} &\approx 2{,}665144027 \\ 2^{1,41421356} &\approx 2{,}665144138 \end{aligned}$$

Vemos que os valores 2^r parecem convergir para um determinado número. Isso nos dá a esperança de que podemos definir $2^{\sqrt{2}}$ como limite de uma sequência. Mas um detalhe deve ser considerado. Existe uma infinidade de sequências de racionais (r_n) tais que $r_n \to \sqrt{2}$. Será que o limite é sempre o mesmo, qualquer que seja a sequência? Por exemplo, na Seção 3.7 vimos que os convergentes $c_n = [1; 2,2, \ldots, 2]$ (com n $2's$) da fração contínua de $\sqrt{2}$ convergem para $\sqrt{2}$. Tomando $c_9 = [1; 2,2,2,2,2,2,2,2,2] = 3363/2378$ calculamos

$$a^{3363/2378} \approx 2{,}665144258$$

o que sugere que o limite é sempre o mesmo, qualquer que seja a sequência de racionais (r_n) tal que $r_n \to \sqrt{2}$.

Formulamos assim o seguinte programa: (i) dado um número real $a > 0$, para todo número real x definimos $a^x = \lim a^{r_n}$ sendo (r_n) uma sequência de racionais tal que $r_n \to x$; (ii) provamos que essa definição não depende da particular sequência de racionais; (iii) demonstramos as propriedades esperadas, inclusive a propriedade fundamental $a^x a^y = a^{x+y}$.

Esse programa pode ser desenvolvido sem muita dificuldade, mas preferimos proceder de uma forma diferente.

Lembramos a propriedade da completitude, enunciada no Teorema 4.31: "Todo subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ limitado superiormente tem supremo". Recordemos também a Definição 4.30, em que se vê que o supremo de um subconjunto não vazio e limitado superiormente $A \subset \mathbb{R}$ é um número real s que satisfaz às seguintes condições: (i) $a \leq s$ para todo $a \in A$; (ii) se t é um número real tal que $a \leq t$ para todo $a \in A$, então $s \leq t$. A condição (i) diz que s é um limitante superior de A. A condição (ii) diz que s é o menor limitante superior de A. Notemos que a condição (ii) é equivalente à seguinte: (iii) se t é um número real tal que $t < s$, então existe $a \in A$ tal que $t < a$.

O supremo de um subconjunto não vazio e limitado superiormente $A \subset \mathbb{R}$ é único. Observemos também que resultados análogos são válidos para o ínfimo.

Seja então $a > 0$ um número real. Para todo número real x consideremos o conjunto

$$E_{a,x} = \{a^r \mid r \in \mathbb{Q} \text{ e } r < x\}.$$

Notemos que $E_{a,x}$ é não vazio, pois existem racionais $r < x$ e a^r está definido. Ainda, se $a > 1$, então $E_{a,x}$ é limitado superiormente por qualquer a^s tal que s é racional e $x < s$. Se $0 < a < 1$, então $E_{a,x}$ é limitado inferiormente por qualquer a^s tal que s é racional e $x < s$. Consequentemente, em virtude da propriedade da completitude dos números reais, se $a > 1$, $E_{a,x}$ tem supremo, e se $0 < a < 1$, $E_{a,x}$ tem ínfimo. Isso justifica a seguinte

Definição 9.11. Para todo número real $a > 0$ e qualquer que seja o número real x, definimos a *potência* a^x de *base* a e *expoente* x por

$$a^x = \text{ supremo de } E_{a,x} \quad \text{se } a > 1,$$

e

$$1^x = 1,$$

e

$$a^x = \text{ ínfimo de } E_{a,x} \quad \text{se } 0 < a < 1.$$

Observemos primeiro a

Proposição 9.12. *Para todo número real $a > 0$ e qualquer que seja o número real x temos $a^x > 0$.*

Demonstração. Isso é claro se $a = 1$. Se $a > 1$, a^x é o supremo de $E_{a,x}$, que só tem elementos positivos. Portanto $a^x > 0$. Suponhamos $0 < a < 1$. Logo a^x é o ínfimo de $E_{a,x}$. Seja s um número racional tal que $x < s$. Para todo racional $r < x$ temos $r < s$, portanto $a^r > a^s$. Assim a^s é um limitante inferior de $E_{a,x}$. Como a^x é o maior dos limitantes inferiores, segue que $a^s \leq a^x$. Mas $a^s > 0$, portanto $a^x > 0$. □

Dessa forma, para todo número real $a > 0$, fica definida a função $f_a : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_+$ por $f_a(x) = a^x$, denominada *função exponencial de base a*. Provemos que essa função satisfaz às propriedades esperadas. De imediato obtemos a

Proposição 9.13. *A função $f_a : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_+$, $f_a(x) = a^x$, é estritamente crescente se $a > 1$ e estritamente decrescente se $0 < a < 1$. Em particular, se $a \neq 1$, f_a é injetiva.*

Demonstração. Suponhamos primeiro que $a > 1$. Queremos provar que se $x < y$ são números reais então $a^x < a^y$. Sejam s e t números racionais tais que $x < s < t < y$. Para todo número racional r tal que $r < x$ temos $a^r < a^s$. Logo a^s é um limitante superior de $E_{a,x}$. Como a^x é o supremo de $E_{a,x}$, ele é o menor dos limitantes superiores, portanto $a^x \leq a^s$. Por outro lado $t < y \Rightarrow a^t \in E_{a,y} \Rightarrow a^t \leq a^y$, pois a^y é o supremo de $E_{a,y}$. Em resumo temos $a^x \leq a^s < a^t \leq a^y$, ou $a^x < a^y$.

Suponhamos agora $0 < a < 1$. Queremos provar que se $x < y$ são números reais então $a^x > a^y$. Sejam s e t números racionais tais que $x < s < t < y$. Para todo racional r tal que $r < x$ temos $r < s$, logo $a^r > a^s$. Portanto a^s é um limitante inferior de $E_{a,x}$. Como a^x é o ínfimo de $E_{a,x}$, ele é o maior dos limitantes inferiores, e assim $a^x \geq a^s$. Por outro lado $t < y \Rightarrow a^t \in E_{a,y} \Rightarrow a^t \geq a^y$, pois a^y é o ínfimo de $E_{a,y}$. Em resumo temos $a^x \geq a^s > a^t \geq a^y$, ou $a^x > a^y$.

Como toda função estritamente crescente ou estritamente decrescente é injetiva, terminamos. □

Lema 9.14. *Seja $a > 0$ um número real. Então $\left(\frac{1}{a}\right)^x = \frac{1}{a^x}$ qualquer que seja o número real x.*

Demonstração. Isso é claro se $a = 1$. Suponhamos $a > 1$. Então a^x é o supremo de $E_{a,x}$ e, como $1/a < 1$, temos que $\left(\frac{1}{a}\right)^x$ é o ínfimo de $E_{\frac{1}{a},x}$.

Para todo racional $r < x$ temos $a^r \leq a^x$ (pois a^x é o supremo de $E_{a,x}$). Segue que $\frac{1}{a^x} \leq \frac{1}{a^r}$ $\Rightarrow \frac{1}{a^x} \leq \left(\frac{1}{a}\right)^r$ (aqui usamos o Problema 9.9.7). Logo $\frac{1}{a^x}$ é limitante inferior de $E_{\frac{1}{a},x}$, do que segue $\frac{1}{a^x} \leq \left(\frac{1}{a}\right)^x$, pois $\left(\frac{1}{a}\right)^x$ é o maior limitante inferior.

Por outro lado, para todo racional $r < x$ temos $\left(\frac{1}{a}\right)^x \leq \left(\frac{1}{a}\right)^r$, pois $\left(\frac{1}{a}\right)^x$ é o ínfimo de $E_{\frac{1}{a},x}$. Usando novamente o Problema 9.9.7 temos

$$\left(\frac{1}{a}\right)^x \leq \frac{1}{a^r} \quad \Rightarrow \quad a^r \leq \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x} \quad \Rightarrow \quad a^x \leq \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{a}\right)^x \leq \frac{1}{a^x}\,.$$

Portanto $\left(\frac{1}{a}\right)^x = \frac{1}{a^x}$, e a afirmação fica provada quando $a > 1$.

Se $0 < a < 1$, seja $b = 1/a$. Então $b > 1$, e podemos utilizar para b o que já foi demonstrado. Temos

$$\left(\frac{1}{b}\right)^x = \frac{1}{b^x} \quad \Rightarrow \quad a^x = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{a}\right)^x = \frac{1}{a^x},$$

e a afirmação fica provada quando $0 < a < 1$. □

Proposição 9.15. *Seja $a > 0$ um número real. Então $a^x a^y = a^{x+y}$ quaisquer que sejam x e y em $\mathbb{R}$.*

Demonstração. Se $a = 1$ a afirmação é clara. Suponhamos $a > 1$. Seja r um racional tal que $r < x + y$. Existem racionais s e t tais que $r = s + t$, $s < x$ e $t < y$. De fato, seja $\varepsilon = x + y - r$, e seja s um racional tal que $0 < x - s < \varepsilon/2$. Portanto $s - x > -\varepsilon/2$. Definimos $t = r - s$. Então $r = s + t$ e $y - t = y - (r - s) = y - r + s = \varepsilon - x + s > \varepsilon - \varepsilon/2 > 0$. Portanto $t < y$, como queríamos. Temos $a^s \in E_{a,x}$ e $a^t \in E_{a,y}$, logo $a^s \leq a^x$ e $a^t \leq a^y$. Segue que $a^r = a^{s+t} = a^s a^t \leq a^x a^y$. Portanto $a^x a^y$ é um limitante superior de $E_{a,x+y}$. Como a^{x+y} é o menor desses limitantes superiores, vem $a^{x+y} \leq a^x a^y$. Suponhamos $a^{x+y} < a^x a^y$, e provemos que isso leva a uma contradição. Temos $\frac{a^{x+y}}{a^y} < a^x$, portanto $\frac{a^{x+y}}{a^y}$ não é um limitante superior de $E_{a,x}$. Isso implica que existe um racional s tal que $s < x$ e $\frac{a^{x+y}}{a^y} < a^s$. Mas agora $\frac{a^{x+y}}{a^s} < a^y$, o que implica que existe um racional t tal que $t < y$ e $\frac{a^{x+y}}{a^s} < a^t$. Portanto $a^{x+y} < a^s a^t$, ou $a^{x+y} < a^{s+t}$. Mas $s + t < x + y$, e $a^{s+t} < a^{x+y}$. Temos uma contradição, e terminamos a demonstração de que $a^x a^y = a^{x+y}$ para o caso $a > 1$.

Suponhamos $0 < a < 1$. Temos $1/a > 1$. Aplicando o resultado da primeira parte e o Lema 9.14 temos

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{x+y} = \left(\frac{1}{a}\right)^x \left(\frac{1}{a}\right)^y \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{a^{x+y}} = \frac{1}{a^x}\frac{1}{a^y} \quad \Rightarrow \quad a^x a^y = a^{x+y},$$

e terminamos a demonstração da Proposição. □

Demonstramos agora que a função $f_a : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_+$, $f_a(x) = a^x$, é sobrejetiva para todo $a > 0$ e $a \neq 1$. Necessitamos de dois resultados preliminares. O primeiro basicamente verifica que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, e o segundo, que existe a^r com r racional em todo intervalo $I \subset \mathbb{R}_+$.

Lema 9.16. *Seja $a > 0$ um número real. Dado $\varepsilon > 0$, existe um inteiro positivo n tal que $|a^{1/n} - 1| < \varepsilon$.*

Demonstração. Se $a = 1$ a afirmação é clara. Suponhamos $a > 1$. Seja n um inteiro positivo tal que $n > (a-1)/\varepsilon$. Então $a < 1 + n\varepsilon$. Em virtude da Desigualdade de Bernoulli (Lema 9.4) temos $1 + n\varepsilon \leq (1+\varepsilon)^n$, logo $a < (1+\varepsilon)^n \Rightarrow a^{1/n} < 1 + \varepsilon \Rightarrow a^{1/n} - 1 < \varepsilon \Rightarrow |a^{1/n} - 1| < \varepsilon$.

Suponhamos agora $0 < a < 1$. Como $1/a > 1$, existe um inteiro positivo n tal que $|(1/a)^{1/n} - 1| < \varepsilon$. Como $0 < 1/n$ temos $a^{1/n} < a^0 = 1$. Portanto

$$\left|\frac{1}{a^{1/n}} - 1\right| < \varepsilon \Rightarrow |1 - a^{1/n}| < \varepsilon a^{1/n} < \varepsilon \Rightarrow |a^{1/n} - 1| < \varepsilon,$$

o que termina a demonstração. □

Lema 9.17. *Seja $a > 0$ um número real com $a \neq 1$. Se $I \subset \mathbb{R}_+$ é um intervalo com pelo menos dois números, existe um racional r tal que $a^r \in I$.*

Demonstração. Podemos assumir que I é um intervalo aberto. Escrevemos $I = (i, j)$, com $0 < i < j$ reais. Suponhamos primeiro $a > 1$. Em virtude da Proposição 9.7, temos $\lim_{n\to+\infty} a^n = +\infty$. Portanto existe um inteiro m tal que $j < a^m$. Dado $\varepsilon > 0$, pelo Lema 9.16, existe um inteiro positivo n tal que $a^{1/n} - 1 < \varepsilon/a^m$. Notemos agora que, quaisquer que sejam os números racionais r e s tais que $r < s \leq m$ e $s - r \leq 1/n$ temos

$$a^s - a^r = a^r(a^{s-r} - 1) \leq a^m(a^{1/n} - 1) < a^m\varepsilon/a^m = \varepsilon.$$

Consideremos $\varepsilon < j - i$ e a sequência de racionais $r_k = m - k/n$ para $k \geq 0$. Essa sequência é decrescente e não limitada inferiormente. Portanto (a^{r_k}) é decrescente e $\lim_{k\to+\infty} a^{r_k} = 0$. Ainda, essa sequência começa com $a^{r_0} = a^m > j$. Notemos também que $r_{k+1} < r_k \leq m$ e $r_k - r_{k+1} \leq 1/n$, portanto $a^{r_k} - a^{r_{k+1}} < \varepsilon < j - i$. Segue que existe k tal que $a^{r_k} \in I$.

Suponhamos agora $0 < a < 1$. Consideremos o intervalo $J = (1/j, 1/i) \subset \mathbb{R}_+$. Como $1/a > 1$, existe um racional r tal que $(1/a)^r \in J$. Segue que $a^r \in I$, e terminamos. □

Teorema 9.18. *Para todo número real $a > 0$, com $a \neq 1$, é sobrejetiva a função $f_a : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_+$, $f_a(x) = a^x$.*

Demonstração. Suponhamos primeiro $a > 1$. Seja $y \in \mathbb{R}_+$. Queremos encontrar $x \in \mathbb{R}$ tal que $a^x = y$. Note que $(y-1, y) \cap (0, y)$ é um intervalo de $\mathbb{R}_+$. Portanto, em virtude do Lema 9.17, existe um racional r_1 tal que a^{r_1} está nesse intervalo. Em seguida escolhemos um racional r_2 tal que a^{r_2} está no intervalo $(y - 1/2, y) \cap (a^{r_1}, y)$. E assim sucessivamente, para todo inteiro positivo $n > 1$, escolhidos os racionais r_1, r_2, ..., r_{n-1}, tomamos um racional r_n tal que a^{r_n} está no intervalo $(y - 1/n, y) \cap (a^{r_{n-1}}, y)$. Obtemos uma sequência de racionais (r_n) tal que (a^{r_n}) é crescente e $0 < y - a^{r_n} < 1/n$ para todo inteiro positivo n. Logo $\lim a^{r_n} = y$. Como $a > 1$, a função f_a é estritamente crescente, portanto a sequência (r_n) é também estritamente crescente. Ainda, em virtude da Proposição 9.7, temos $\lim_{n\to+\infty} a^n = +\infty$. Portanto existe um inteiro m tal que $y < a^m$. Então, para todo n temos $a^{r_n} < a^m$, o que implica $r_n < m$. Portanto (r_n) é crescente e limitada superiormente, de modo que existe $x = \lim r_n$. Mas então y é o supremo do conjunto $E_{a,x}$, de modo que $y = a^x$.

Suponhamos agora $0 < a < 1$. Seja $y \in \mathbb{R}_+$. Pelo que foi provado acima, existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $(1/a)^x = 1/y$. Logo $a^x = y$, e terminamos. □

Nosso objetivo agora é provar que, para todo número real $a > 0$, é contínua a função $f_a : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_+$, $f_a(x) = a^x$. Antes lembramos a

Definição 9.19. Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$ e $f : A \mapsto \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que f é contínua em $x \in A$ quando, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $y \in A$ e $|y - x| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon$. Dizemos que f é contínua em A quando for contínua em todo $x \in A$.

Uma forma de demonstrar que f_a é contínua em $\mathbb{R}$ é provar primeiro que ela é contínua em 0. Temos:

Lema 9.20. *Seja $a > 0$ um número real. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$h \in \mathbb{R} \ \text{ e } \ |h| < \delta \ \Rightarrow \ |a^h - 1| < \varepsilon.$$

Demonstração. Se $a = 1$ a afirmação é clara. Suponhamos $a > 1$. Seja $\varepsilon > 0$. Já foi observado no Lema 9.16 que existe um inteiro positivo n tal que $a^{1/n} - 1 < \varepsilon$. Se $0 \leq h < 1/n$ temos $0 < a^h - 1 < a^{1/n} - 1 < \varepsilon \Rightarrow |a^h - 1| < \varepsilon$. Se $-(1/n) < h < 0$ temos $0 < -h < 1/n \Rightarrow |a^{-h} - 1| < \varepsilon \Rightarrow |\frac{1}{a^h} - 1| < \varepsilon \Rightarrow |1 - a^h| < \varepsilon a^h < \varepsilon \Rightarrow |a^h - 1| < \varepsilon$. Tomando $\delta = 1/n$ temos $|h| < \delta \Rightarrow |a^h - 1| < \varepsilon$.

Suponhamos agora $0 < a < 1$. Dado $\varepsilon > 0$, seja $\varepsilon' = \varepsilon a$. Como $1/a > 1$, existe $\delta > 0$ tal que $|h| < \delta \Rightarrow |(1/a)^h - 1| < \varepsilon'$. Podemos assumir que $\delta < 1$. Então $-1 < -\delta < h \Rightarrow a^h < a^{-1}$. Portanto

$$|h| < \delta \Rightarrow \left| \frac{1}{a^h} - 1 \right| < \varepsilon' \Rightarrow |1 - a^h| < \varepsilon' a^h < \varepsilon,$$

o que termina a demonstração. □

Teorema 9.21. *Para todo número real $a > 0$ é contínua a função $f_a : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_+$, $f_a(x) = a^x$.*

Demonstração. Fixemos $x \in \mathbb{R}$. Dado $\varepsilon > 0$, seja $\varepsilon' = \varepsilon / a^x$. Em virtude do Lema 9.20, existe $\delta > 0$ tal que

$$h \in \mathbb{R} \text{ e } |h| < \delta \ \Rightarrow \ |a^h - 1| < \varepsilon'.$$

Então, se $y \in \mathbb{R}$ e $|y - x| < \delta$ temos

$$|a^y - a^x| = |a^{y-x} - 1| a^x < \varepsilon' a^x = \varepsilon.$$

Provamos que f_a é contínua em x para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto f_a é contínua. □

Segue um resultado equivalente:

Teorema 9.22. *Seja $a > 0$ um número real. Se $x \in \mathbb{R}$ e se (r_n) é uma sequência de racionais tais que $r_n \to x$, então $a^{r_n} \to a^x$.*

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$. Como f_a é contínua em x, existe $\delta > 0$ tal que $y \in \mathbb{R}$ e $|y - x| < \delta \Rightarrow |a^y - a^x| < \varepsilon$. Como $r_n \to x$, existe n_0 tal que $n \geq n_0 \Rightarrow |r_n - x| < \delta$. Portanto $n \geq n_0 \Rightarrow |a^{r_n} - a^x| < \varepsilon$, o que prova que $a^{r_n} \to a^x$. □

Usando esse resultado podemos demonstrar mais facilmente algumas propriedades, e escapar da definição de a^x como supremo ou ínfimo. Por exemplo

Teorema 9.23. *Seja $a > 0$ um número real. Então $(a^x)^y = a^{xy}$ quaisquer que sejam $x, y \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. É claro que o resultado vale se $y = 0$. Também vale se $y = m$ for um inteiro positivo. De fato, usando a Proposição 9.15 temos

$$(a^x)^m = a^x a^x \cdots a^x = a^{x+x+\cdots+x} = a^{xm}.$$

Se $y = m$ for um inteiro negativo temos

$$(a^x)^m = \frac{1}{(a^x)^{-m}} = \frac{1}{a^{-xm}} = a^{xm},$$

e o resultado vale para todo y inteiro. Se y for racional, com $y = m/n$, m e $n > 0$ inteiros, então

$$(a^x)^y = (a^x)^{m/n} = \sqrt[n]{(a^x)^m} = \sqrt[n]{a^{xm}} = a^{xm/n} = a^{xy},$$

e o resultado vale para todo y racional. Seja agora y um número real qualquer. Seja (r_n) uma sequência de racionais tais que $r_n \to y$. Então

$$(a^x)^y = \lim (a^x)^{r_n} = \lim a^{xr_n} = a^{xy},$$

como queríamos demonstrar. □

O estudante poderá recordar de seus estudos do Cálculo as definições de $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ e $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L$, $L \in \mathbb{R}$. Usando as propriedades correspondentes para o caso em que o expoente é inteiro, fica fácil provar o

Teorema 9.24. *Seja $a > 0$ um número real. Se $a > 1$ então $\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$. Se $0 < a < 1$ então $\lim_{x\to+\infty} a^x = 0$ e $\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty$.*

Para completar nosso estudo das funções exponenciais, seguem gráficos típicos dessas funções.

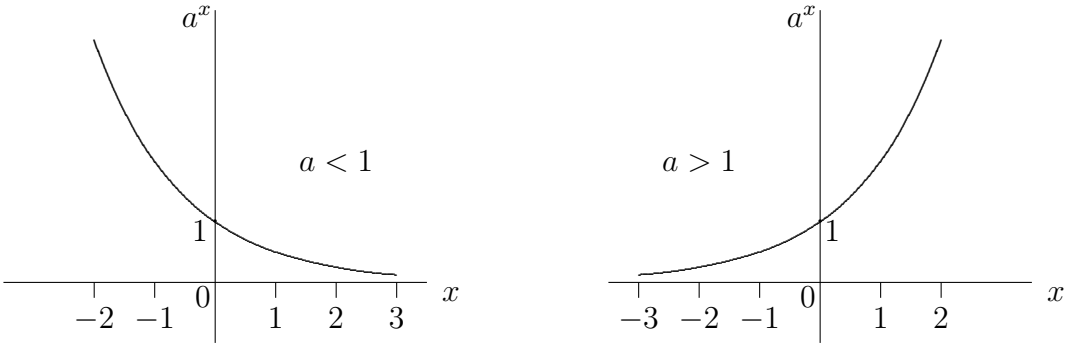


Figura 9.3. Gráficos de funções exponenciais com expoente real.

9.4 O aparecimento do logaritmo

Arquimedes, em sua obra "O contador de grãos de areia", observou uma interessante relação entre as progressões aritméticas (PA) e geométricas (PG). Para ilustrar essa relação consideremos a PA 0, 1, 2, 3, 4, 5, ... e a PG 1, 2, 4, 8, ... alinhadas conforme a tabela a seguir:

$$\begin{array}{cccccccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & \cdots \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 & 64 & 128 & 256 & 512 & 1024 & 2048 & 4096 & \cdots \end{array} \tag{9.1}$$

Podemos fazer umas brincadeiras. Por exemplo, para multiplicar entre si dois números da PG, digamos, 32×128, tomamos os números correspondentes da PA, que são 5 e 7, e somamos. Temos assim $5 + 7 = 12$. Em seguida vemos que a 12 corresponde 4096. Por "coincidência", $32 \times 128 = 4096$. O estudante pode testar outros valores, e pode facilmente explicar por que a brincadeira funciona.

Outras propriedades foram observadas em livros de autoria de vários matemáticos. Em 1484 o matemático francês Nicolas Chuquet publicou sua obra *Triparty en la science des nombres*,

em que observa a seguinte propriedade da tabela (9.1): tomando um número da PG, digamos 16, para calcular $16 \times 16 \times 16$, basta tomar o número correspondente da PA, no caso 4, somar $4 + 4 + 4 = 12$, e tomar o número da PG correspondente a 12, que é 4096. Esse vem a ser $16 \times 16 \times 16$. O estudante pode conferir. Essas propriedades, relatadas por Arquimedes e Chuquet, também foram mencionadas por Christoff Rudolff em 1525 e por Peter Apian em 1527, ambos matemáticos alemães.

Alemão era também Michael Stifel, cuja obra *Arithmetica Integra*, publicada em 1544, era um tratado contendo todo o conhecimento de Álgebra de sua época. Nessa obra Stifel observa as propriedades acima descritas, e acrescenta mais duas propriedades. Para facilitar sua descrição, chamaremos de *expoente* de um termo da PG ao termo correspondente da PA. Assim, na tabela (9.1) acima, o expoente de 8 é 3 e o de 64 é 6. O termo expoente foi cunhado por Stifel, mas em uma obra posterior, de 1553.

Stifel observou que o quociente de dois termos da PG tem expoente igual à diferença dos expoentes dos dois termos. Assim, para calcular 512/64, tomamos seus expoentes 9 e 6, e calculamos $9 - 6 = 3$. Como 3 é expoente de 8, então $512/64 = 8$. Stifel observou também que se um termo da PG tem expoente par, então o expoente da raiz quadrada desse termo é a metade dele. Por exemplo, para calcular $\sqrt{256}$, consideramos o expoente 8. Como $8/2 = 4$ é expoente de 16, então $\sqrt{256} = 16$.

Stifel também considerou tabelas com expoentes negativos, por exemplo

$$\begin{array}{cccccccccccccc} \cdots & -6 & -5 & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots \\ \cdots & \dfrac{1}{64} & \dfrac{1}{32} & \dfrac{1}{16} & \dfrac{1}{8} & \dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{2} & 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 & 64 & \cdots \end{array} \tag{9.2}$$

O estudante poderá observar outras propriedades e calcular, por exemplo, $\sqrt[3]{512}$ ou $\sqrt{1024} \times 16$ usando apenas os expoentes desses números. Mediante as propriedades das potências, o estudante poderá facilmente justificar todas essas afirmações. Justificativas gerais não eram fáceis naquela época, pois nem mesmo havia a notação para potências que utilizamos hoje.

No Século XVI os progressos da astronomia e da navegação trouxeram a necessidade do desenvolvimento do cálculo numérico. As tábuas trigonométricas se faziam muito necessárias. Sem as facilidades que temos hoje proporcionadas pelas máquinas digitais, matemáticos e astrônomos procuravam descobrir uma forma de facilitar os extensos cálculos que precisavam fazer. Uma das ideias adotadas foi utilizar as relações já observadas entre PA's e PG's. Vimos como essas propriedades permitem simplificar cálculos, pois reduzem a multiplicação à adição, a divisão à subtração, a potenciação à multiplicação e a radiciação à divisão.

Dada uma correspondência entre uma PA e uma PG como em (9.2), se um número está na PG, o número da PA que lhe corresponde passa a ser chamado *logaritmo* daquele número. Escolhida uma base $a > 0$ para a PG, uma relação do tipo

$$\begin{array}{cccccccccccccc} \cdots & -6 & -5 & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots \\ \cdots & \dfrac{1}{a^6} & \dfrac{1}{a^5} & \dfrac{1}{a^4} & \dfrac{1}{a^3} & \dfrac{1}{a^2} & \dfrac{1}{a} & a^0 & a^1 & a^2 & a^3 & a^4 & a^5 & a^6 & \cdots \end{array} \tag{9.3}$$

chama-se *táboa de logaritmos de base a*. Dado um número a^n da PG, seu *logaritmo na base a* é n, e o logaritmo de $1/a^n$ é $-n$. Indicamos por $\log_a(a^n)$ o logaritmo de a^n na base a. Portanto $\log_a(a^n) = n$ e $\log_a(1/a^n) = -n$. Como $1/a^n = a^{-n}$, podemos unificar as duas relações escrevendo apenas que $\log_a(a^n) = n$ para todo inteiro n. Nessa notação é costume omitir os parêntesis quando não houver perda de clareza, escrevendo-se, por exemplo, $\log_a a^n = n$.

Notemos que

$$\log_a a^n a^m = \log_a a^{n+m} = n + m = \log_a a^n + \log_a a^m,$$

quaisquer que sejam os inteiros n e m.

Portanto, expressando-nos na linguagem matemática atual, o que fizemos até agora foi definir uma função

$$\log_a : \{\dots, \frac{1}{a^3}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a}, 1, a, a^2, a^3, \dots\} \mapsto \mathbb{Z} \quad \text{por} \quad \log_a a^n = n$$

satisfazendo a propriedade

$$\log_a(wz) = \log_a w + \log_a z,$$

denominada *propriedade fundamental dos logaritmos*.

De tudo o que foi feito fica claro que a função $\log_a$ é inversa da função exponencial $f_a : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{R}_+$, $f_a(n) = a^n$, no sentido de que sua composta é a identidade. Assim

$$\log_a \circ f_a(n) = \log_a(a^n) = n \quad \text{e} \quad f_a \circ \log_a(a^n) = f_a(n) = a^n$$

para todo inteiro n.

Como essa observação constatamos que fica fácil estender a definição de $\log_a$ e obter uma função $\log_a : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$. Isso é o que fazemos detalhadamente na próxima seção.

Terminamos esta seção relatando que os matemáticos e astrônomos do Século XVI perceberam que uma táboa como a (9.1) tinha pouca utilidade, pois é grande a distância entre os termos consecutivos da PG. Para aproximar esses termos é preciso adotar, na táboa (9.3), um valor mais próximo de 1 para a base a, por exemplo, $a = 0{,}0001$. Basicamente foi isso o que foi feito naquela época. O primeiro que publicou uma táboa de logaritmos foi o matemático escocês John Napier, em 1614. Sua obra tinha o título significativo "Descrição da maravilhosa regra dos logaritmos". O matemático e instrumentista científico suiço Jost Bürgi também construiu uma táboa de logaritmos, e a publicou em 1620. Também em 1620 John Speidell publicou uma táboa de logaritmos usando como base o número e. O matemático inglês Henry Briggs se entusiasmou com os logaritmos de J. Napier, e o visitou na Escócia em 1615. Em 1624 publicou sua própria táboa, sendo o primeiro a utilizar a base 10.

Os trabalhos dos inventores dos logaritmos se tornaram rapidamente conhecidos na Europa, e foram produzidas muitas táboas. Em 1620 Edmund Gunther publicou a primeira táboa de logaritmos de funções trigonométricas, e em 1624 apareceu a primeira táboa de Johannes Kepler. O holandês Adriaan Vlacq completou e reeditou a táboa de H. Briggs em 1628, e essa versão foi publicada na China em 1713.



Figura 9.4. John Napier, Lorde de Merchiston, foi um matemático, físico e astrônomo escocês. A ele é atribuída a descoberta dos logaritmos. Seu livro *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* de 1614 continha uma explicação dos logaritmos naturais assim como tabelas para seu uso. Contribuiu ainda com a trigonometria esférica, aperfeiçoou os algoritmos de cálculos aritméticos e melhorou a notação decimal.

9.5 Construção do logaritmo

Lembremos que, dada uma função $f : A \mapsto B$, sua inversa, quando existe, é uma função $g : B \mapsto A$ tal que $g(f(x)) = x$ para todo $x \in A$ e tal que $f(g(y)) = y$ para todo $y \in B$. O Teorema enunciado a seguir resume as propriedades que utilizaremos. Supomos que esses resultados são conhecidos do estudante.

Teorema 9.25. *Uma função $f : A \mapsto B$ tem inversa se e somente se for bijetiva. Se A e B são subconjuntos de $\mathbb{R}$ e se $f : A \mapsto B$ tem inversa e é contínua, então sua inversa $g : B \mapsto A$ também é contínua. Se $f : A \mapsto B$ é crescente ou decrescente, sua inversa, se existir, também é crescente ou decrescente, respectivamente.*

Duas observações úteis. A primeira é que se $f : A \mapsto B$ tem inversa $g : B \mapsto A$, então g tem inversa, que é f, e assim também g é bijetiva. A segunda é que os gráficos de f e de sua inversa g são simétricos em relação à diagonal principal $\Delta = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ do plano cartesiano. De fato, se (x, y) é um ponto do gráfico de f, então $y = f(x)$, logo $x = g(y)$. Portanto $(y, x) = (y, g(y))$ pertence ao gráfico de g. Em resumo

$$(x, y) \text{ pertence ao gráfico de } f \iff (y, x) \text{ pertence ao gráfico de } g.$$

Combinando com os resultados obtidos na Seção 9.3, temos:

Definição 9.26. Para todo número real $a > 0$ tal que $a \neq 1$, a inversa da função exponencial $f_a : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_+$, $f_a(x) = a^x$, é denominada *função logarítmica de base a*, e anotada por $\log_a$. Costuma-se escrever $\log_a x$ em vez de $\log_a(x)$ se não houver perda de clareza.

Teorema 9.27. *A função logarítmica de base a $\log_a : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$ é bijetiva, contínua, estritamente crescente se $a > 1$ e estritamente decrescente se $0 < a < 1$.*

Como $f_a(\log_a(y)) = y$ e $\log_a(f_a(x)) = x$, temos

$$a^{\log_a y} = y \quad \text{e} \quad \log_a a^x = x,$$

quaisquer que sejam $y \in \mathbb{R}_+$ e $x \in \mathbb{R}$. Convém ter em mente a seguinte equivalência:

$$x = \log_a y \iff a^x = y.$$

É imediata a demonstração da propriedade fundamental dos logaritmos:

Teorema 9.28. *Seja $a > 0$ um número real tal que $a \neq 1$. Então, quaisquer que sejam $x, y \in \mathbb{R}_+$, temos*

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y.$$

Demonstração. Sejam $w = \log_a x$ e $z = \log_a y$. Então $a^w = x$ e $a^z = y$. Como $xy = a^w a^z = a^{w+z}$, temos $\log_a(xy) = \log_a(a^{w+z}) = w + z = \log_a x + \log_a y$. □

Duas funções logarítmicas quaisquer diferem por um fator constante, de acordo com o

Teorema 9.29. *(fórmula da mudança de base) Sejam $a > 0$ e $b > 0$ números reais tais que $a \neq 1$ e $b \neq 1$. Então, para todo $x \in \mathbb{R}_+$, temos*

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}.$$

Demonstração. Sejam $w = \log_a x$, $z = \log_b x$ e $t = \log_a b$. Então $a^w = x$, $b^z = x$ e $a^t = b$. Portanto

$$a^w = b^z = (a^t)^z = a^{tz} \quad \Rightarrow \quad w = tz \quad \Rightarrow \quad z = \frac{w}{t},$$

do que segue a fórmula. □

Outras propriedades dos logaritmos podem ser facilmente provadas pelo estudante. Basta utilizar a propriedade correspondente da exponencial.

Teorema 9.30. *Seja $a > 0$ um número real tal que $a \neq 1$. Então*
(i) $\log_a x^y = y \log_a x$ *quaisquer que sejam* $x \in \mathbb{R}_+$ *e* $y \in \mathbb{R}$*;*
(ii) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ *quaisquer que sejam* $x, y \in \mathbb{R}_+$*;*
(iii) $\log_a 1 = 0$*;*
(iv) Se $a > 1$ *então* $\lim_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty$ *e* $\lim_{x\to 0} \log_a x = -\infty$*;*
(v) Se $a < 1$ *então* $\lim_{x\to+\infty} \log_a x = -\infty$ *e* $\lim_{x\to 0} \log_a x = +\infty$*.*

A Figura 9.5 apresenta os gráficos típicos de $\log_a$ para os casos $a < 1$ e $a > 1$.

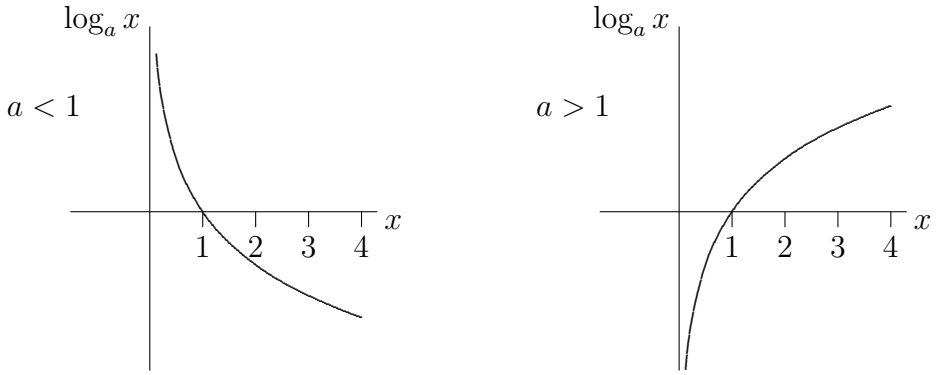


Figura 9.5. Gráficos de funções logarítmicas.

As bases mais utilizadas para a função logarítmica são 10 e e. Para essas bases temos notações especiais:

$$\log = \log_{10} \quad \text{e} \quad \ln = \log_e .$$

Estudamos o número e na última seção desse capítulo.

9.6 Aplicações da exponencial

Vejamos exemplos de aplicações das funções exponenciais. Com eles temos a oportunidade de compreender algumas das situações em que essas funções podem ser utilizadas como modelos de fenômenos naturais.

9.6.1 Um modelo de crescimento populacional

Observou-se em um laboratório que uma população de um certo tipo de bactéria, colocada sob certas condições favoráveis de temperatura e alimentação, dobra, em número de indivíduos, a cada 20 minutos. Pede-se uma função $p(t)$ que dê a quantidade de indivíduos no instante t em minutos conhecendo-se a quantidade p_0 de indivíduos no instante $t = 0$. Uma tal função chama-se *modelo* do fenômeno.

1ª. solução. Uma forma de iniciar esse estudo é considerar que

$$\begin{aligned} p(0) &= p_0 \\ p(20) &= p_0 \times 2 \\ p(40) &= p_0 \times 2^2 \\ p(60) &= p_0 \times 2^3 \end{aligned}$$

o que sugere que $p(n \times 20) = p_0 \times 2^n$ para todo inteiro $n \geq 0$. Se $t \geq 0$ é um instante qualquer, em minutos, escrevemos $t = x \times 20$, e temos

$$p(t) = p_0 \times 2^x = p_0 \times 2^{t/20}.$$

Essa é a função que sugerimos como modelo. Ela obedece à condição dada, pois, para todo $t \geq 0$, temos

$$p(t + 20) = p_0 \times 2^{(t+20)/20} = p_0 \times 2^{(t/20)+1} = 2p_0 \times 2^{t/20} = 2p(t).$$

Portanto, dado um instante t qualquer, 20 minutos depois a população dobra.

2ª. solução. As condições do problema sugerem procurar uma função estritamente crescente e tal que, dado um certo intervalo de tempo δ, em minutos, e dado um instante $t \geq 0$, temos $p(t+\delta) = kp(t)$, em que $k > 0$ não depende de t. O Teorema 9.32 apresentado abaixo nos indica que $p(t)$ é uma função do tipo exponencial. Portanto existem números reais positivos a e b tais que $p(t) = ba^t$. Como $p(0) = p_0$ e $p(0) = ba^0 = b$ vem $b = p_0$ e $p(t) = p_0a^t$. Como $p(20) = 2p_0$ temos $p_0a^{20} = 2p_0 \Rightarrow a^{20} = 2 \Rightarrow a = 2^{1/20}$. Portanto $p(t) = p_0 \times \left(2^{1/20}\right)^t = p_0 \times 2^{t/20}$ para todo $t \geq 0$. Obtivemos a mesma função mas por um caminho diferente.

9.6.2 Pressão atmosférica

A atmosfera terrestre é composta por gases que, embora rarefeitos, exercem um peso sobre qualquer objeto que esteja nela colocado. A pressão atmosférica em um ponto é, em valor absoluto, igual ao pêso de uma coluna de ar da atmosfera com seção unitária e altura igual à distância desse ponto ao nível superior da atmosfera. Evangelista Torricelli inventou um dispositivo que mede a pressão atmosférica por comparação com o peso exercido por uma coluna de mercúrio em um tubo. Blaise Pascal, usando esse invento, constatou que a pressão atmosférica diminui com a altura.

Vemos a seguir uma tabela com valores da pressão atmosférica, medida por comparação com a pressão exercida por uma coluna de mercúrio, com altura medida em centímetros. Os dados da tabela constituem uma amostra média de várias medições. A pressão atmosférica em um ponto sofre variação em torno de um valor médio, pois a atmosfera terrestre não é estática.

Altitude (m) (m)	Pressão Atmosférica cmHg
0	76
200	74, 2
400	72, 4
600	70, 7
800	69, 0
1000	67, 4
1200	65, 8
1400	64, 2
1600	62, 7
1800	61, 2
2000	59, 8
3000	52, 7
4000	47
5000	41
6000	36
10000	21

(9.4)

Nosso objetivo é obter uma função $P(h)$ que forneça a pressão P, medida em centímetros de mercúrio, em relação à altura h, medida em metros. Portanto queremos que $P(0) = 76$, $P(200) = 74,2$, etc., pelo menos aproximadamente. Vejamos duas maneiras de obter essa função.

1ª. solução. Observando os valores da tabela para $h = 0$, 1000, 2000 e 3000, vejamos como varia cada valor $P(h)$ em comparação com o valor anterior:

$$\frac{P(1000)}{P(0)} \approx 0,8868, \quad \frac{P(2000)}{P(1000)} \approx 0,8872, \quad \frac{P(3000)}{P(2000)} \approx 0,8813.$$

Vemos que os valores comparativos se conservam, aproximadamente. A média desses valores é

$$\frac{0,8868 + 0,8872 + 0,8813}{3} \approx 0,8851.$$

Temos portanto o seguinte esquema:

$$\begin{array}{rcl} P(0) & = & 76 \\ P(1000) & \approx & 76 \times 0,8851 \\ P(2000) & \approx & 76 \times 0,8851^2 \\ P(3000) & \approx & 76 \times 0,8851^3 \end{array}$$

Podemos induzir que

$$P(h) = 76 \times 0,8851^n \quad \text{para } h = n \times 1000 \ (n \text{ inteiro } \geq 0).$$

De $h = n \times 1000$ temos $n = h/1000$, do que obtemos a expressão

$$P(h) = 76 \times 0,8851^{h/1000},$$

a qual propomos como modelo para medida da pressão atmosférica. Podemos verificar que essa função corresponde muito bem aos valores da tabela 9.4, por exemplo $P(1200) \approx 65,64$ e $P(10000) \approx 22,42$.

2ª. solução. As condições do problema sugerem que devemos procurar uma função $P(h)$ estritamente decrescente e tal que o quociente $P(h+\delta)/P(h)$ não depende de h. Por exemplo, para $\delta = 1000$ vimos que

$$\frac{P(0 + 1000)}{P(0)} \approx \frac{P(1000 + 1000)}{P(1000)} \approx \frac{P(2000 + 1000)}{P(2000)}\ .$$

O Teorema 9.32 apresentado abaixo indica que $P(h)$ é uma função do tipo exponencial. Portanto existem números reais positivos a e b tais que $P(h) = ba^h$. Como $P(0) = 76$ e $P(0) = ba^0 = b$ vem $b = 76$. Tomando um dos valores da tabela 9.4, por exemplo, $P(1000) = 67,4$, temos $76 \times a^{1000} = 67,4 \Rightarrow a = (67,4/76)^{1/1000} \approx 0,99987992$. Chegamos assim à proposta

$$P(h) = 76 \times 0,99987992^h.$$

Como $0,8851^{1/1000} \approx 0,99987796$, vemos que a função obtida na solução 2 é próxima daquela da solução 1.

Para encerrar nosso estudo sobre a função barométrica $P(h)$ observamos que ela pode ser obtida a partir de propriedades físicas que originam uma equação diferencial. O mesmo se pode dizer do modelo de crescimento populacional.

9.6.3 Caracterização das funções exponenciais

Caracterizações de funções são importantes na construção de modelos. Nesta seção seguimos de perto [74], vol. 1, pág 179 e seguintes.

Definição 9.31. Uma função $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_+$ é denominada *tipo exponencial* se for da forma $f(x) = ba^x$, com a e b números reais positivos.

Teorema 9.32. *Seja $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_+$ uma função estritamente monótona tal que o quociente $f(y+x)/f(y)$ não depende de y, quaisquer que sejam $x, y \in \mathbb{R}$. Então f é do tipo exponencial.*

Demonstração. Sejam x e y números reais positivos quaisquer. Como o quociente $f(y+x)/f(y)$ não depende de y, podemos definir a função $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_+$ por

$$g(x) = \frac{f(y+x)}{f(y)}\,. \tag{9.5}$$

Na fórmula (9.5) escolhemos, por um momento, $y = 0$. Então

$$g(x) = \frac{f(x)}{f(0)}\,. \tag{9.6}$$

Como $f(0) > 0$, nossa primeira constatação é que $g(x)$, assim como $f(x)$, é monótona injetiva. Ainda, em (9.6), podemos trocar x por $x + y$ ou x por y e obter

$$g(x+y) = \frac{f(x+y)}{f(0)} \quad \text{e} \quad g(y) = \frac{f(y)}{f(0)}$$

respectivamente. Combinando essas relações temos

$$g(x)g(y) = \frac{f(y+x)}{f(y)}\,\frac{f(y)}{f(0)} = \frac{f(y+x)}{f(0)} = g(x+y).$$

Portanto a função $g(x)$ satisfaz às condições dadas no Problema 9.9.13, de modo que existe um número real positivo a tal que $g(x) = a^x$. Então $f(x) = f(0)a^x = ba^x$ para $b = f(0) > 0$. Terminamos. □

Problema resolvido 9.33. Um tanque está cheio com 100 litros de água e 30 gramas de sal. No instante $t = 0$ uma torneira é aberta e despeja continuamente água pura no tanque à razão de 20 litros de água por minuto. Ao mesmo tempo e à mesma razão a mistura sai do tanque por um vertedouro. A mistura é mantida homogênea por um dispositivo. Construa uma função $s(t)$ que dê a quantidade de sal presente no tanque no instante $t \geq 0$.

Solução 1 (aproximada) Se em um determinado instante t existe uma quantidade $s(t)$ de sal no tanque, um minuto depois foram retirados $(20/100)s(t)$, logo restam (aproximadamente)

$$s(t+1) = s(t) - \frac{20}{100}s(t) = s(t)\left(1 - \frac{20}{100}\right) = \frac{4}{5}s(t).$$

Portanto

$$s(1) = \frac{4}{5}s(0) = 30\frac{4}{5}; \qquad s(2) = \frac{4}{5}s(1) = 30\left(\frac{4}{5}\right)^2; \qquad s(3) = \frac{4}{5}s(2) = 30\left(\frac{4}{5}\right)^3,$$

em geral

$$s(n) = 30\left(\frac{4}{5}\right)^n .$$

Isso sugere considerarmos como modelo do fenômeno a função

$$s(t) = 30\left(\frac{4}{5}\right)^t , \quad t \geq 0.$$

Solução 2 (aproximada) Dado um instante t e um intervalo de tempo $\delta > 0$, do instante t até o instante $t + \delta$ são retirados $\frac{20}{100}\delta s(t)$ gramas de sal, portanto ficam no tanque

$$s(t+\delta) = s(t) - \frac{20}{100}\delta s(t) \Rightarrow \frac{s(t+\delta)}{s(t)} = 1 - \frac{20}{100}\delta,$$

o que mostra que a razão $s(t + \delta)/s(t)$ não depende de t. Usando o Teorema 9.32 vemos que $s(t)$ é do tipo exponencial, portanto existem números reais positivos a e b tais que $s(t) = ba^t$. Como $s(0) = 30$ vem $b = 30$. Usando a aproximação $s(1) = 30(4/5)$ vem $a = 4/5$. Segue que

$$s(t) = 30\left(\frac{4}{5}\right)^t , \quad t \geq 0.$$

Solução 3 (exata) Da relação

$$s(t+\delta) = s(t) - \frac{20}{100}\delta s(t)$$

considerada acima segue que

$$s(t+\delta) - s(t) = -\frac{20}{100}\delta s(t) \Rightarrow \frac{s(t+\delta) - s(t)}{\delta} = -\frac{1}{5}s(t) .$$

Fazendo $\delta \to 0$ temos

$$s'(t) = -\frac{1}{5}s(t) \Rightarrow \frac{s'(t)}{s(t)} = -\frac{1}{5} \Rightarrow \int \frac{s'(t)}{s(t)}dt = \int -\frac{1}{5}dt \Rightarrow \ln|(s(t)| - \ln|(s(0)| = -\frac{1}{5}(t-0) .$$

Como $s(t) > 0$ para todo $t \geq 0$ finalizamos com

$$\ln\frac{s(t)}{s(0)} = -\frac{1}{5}t \Rightarrow \frac{s(t)}{s(0)} = e^{-t/5} \Rightarrow s(t) = s(0)e^{-t/5} \Rightarrow s(t) = 30e^{-t/5}.$$

Notemos que $e^{-1/5} \approx 0,8187 \approx 0,8 = \frac{4}{5}$.

Solução 4 (aproximada, chamada método da batelada pelos engenheiros) Supomos que no instante $t = 0$ foram colocados 20 litros de água pura no tanque, e, depois de ter sido a mistura homogeneizada, foram despejados do tanque 20 litros. Portanto a quantidade $s(1)$ de sal no tanque passou a ser $s(0) - (20/120)s(0)$, e assim por diante. Portanto em geral temos

$$s(n) = 30\left(\frac{5}{6}\right)^n .$$

Isso sugere considerarmos como modelo do fenômeno a função

$$s(t) = 30\left(\frac{5}{6}\right)^t , \quad t \geq 0 .$$

Note que $\frac{5}{6} \approx 0,83333 \approx e^{-1/5}$, sendo $5/6$ uma aproximação melhor do que $4/5$. □

9.7 Aplicações do logaritmo

Diversas ciências utilizam as escalas logarítmicas para medição de grandezas envolvidas em fenômenos naturais. Examinemos dois exemplos. Outras aplicações dos logaritmos podem ser estudadas nos problemas propostos.

Observamos inicialmente qual é o efeito de se considerar uma escala logarítmica. A função $\log x$ tende a infinito quando x tende a infinito, porém lentamente. Assim, o logaritmo de números grandes é bem pequeno. Por exemplo, $\log 1000000000 = 9$. Confira esse fenômeno no gráfico da função logarítmica decimal desenhado na Figura 9.6, em que os eixos estão na mesma escala.

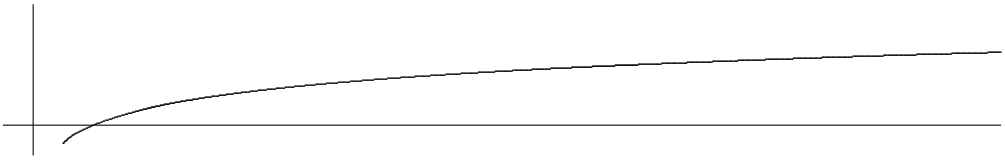


Figura 9.6. Gráfico da função log com eixos na mesma escala.

9.7.1 A escala Richter

A medição da magnitude de um terremoto envolve números muito altos. Um terremoto libera grande quantidade de energia, medida em bilhões de ergs[1]. Para evitar a utilização de números muito grandes é usada uma escala logarítmica de base 10, chamada escala Richter.

Esse método foi proposto por Charles Richter e Beno Gutenberg em 1935. Para estabelecer o valor de um terremoto na escala Richter, primeiramente sua intensidade I é comparada com um valor pré-estabelecido I_0, valor esse de um terremoto de "pequenas proporções". Obtem-se o quociente I/I_0. A magnitude do terremoto na escala Richter é então dada por $R = \log(I/I_0)$.

Uma das maiores medidas já registradas foi a do terremoto ocorrido em Valdívia, no Chile, em 1960, que teve uma magnitude de 9,5 na escala Richter. Outro grande terremoto ocorreu no Alaska, em 1964, que registrou 9,2 na mesma escala. Embora na escala Richter as duas medidas estejam próximas, o primeiro terremoto foi duas vezes mais potente do que o segundo. De fato, se I_1 é a intensidade relativa do terremoto no Chile, e I_2 a do Alaska, temos $\log I_1 = 9,5$ e $\log I_2 = 9,2$. Então $I_1 = 10^{9,5}$ e $I_2 = 10^{9,2}$. Comparando temos $I_1/I_2 \approx 2$.

9.7.2 A escala pH

O valor pH de uma substância é uma medida de sua acidez, determinada pela presença de hidrônios H_3O^+. A concentração $[H_3O^+]$ de hidrônio da água destilada é 10^{-7} mol/l, e é considerada neutra. As concentrações entre 10^{-2} e 10^{-7} estão presentes nas soluções ácidas, e aquelas entre 10^{-7} e 10^{-12} nas substâncias alcalinas.

Para medir a acidez é mais prático considerar uma escala logarítmica. Assim, o pH é definido por $\text{pH} = -\log[H_3O^+]$. Portanto, um pH igual a 7 é considerado neutro, de 2 a 7, ácido, e de 7 a 12, base.

[1] erg é a unidade de energia ou trabalho no sistema CGS, equivalente a 10^{-7} joule.

9.8 Gênese do número e

A constante e, uma das mais importantes da Matemática, aparece de forma natural quando lidamos com fenômenos cuja descrição demanda funções exponenciais e logarítmicas. Vejamos um desses exemplos. Antes observamos que, pelo que sabemos, o número e não foi percebido por John Napier, de modo que não o denominamos aqui de constante de Napier, como às vezes ocorre na literatura. Se quisermos batizá-lo com o nome de algum matemático, julgamos ser melhor usar *constante de Euler*, pois Leonard Euler descobriu muitas de suas propriedades. Por exemplo, usando frações contínuas, foi o primeiro a provar que e é irracional.



Figura 9.7. Foto de pintura de Leonard Paul Euler, matemático suiço que passou a maior parte de sua vida em universidades da Alemanha e da Rússia. Considerado um dos grandes mestres, contribuiu em muitas áreas da Matemática e da Física, como Teoria dos Números, Análise, Equações Diferenciais, Teoria dos Grafos, Geometria, Mecânica, Dinâmica dos Fluidos, Ótica, Astronomia e Teoria da Música.

9.8.1 Crescimento populacional e o número e

Desejamos encontrar uma função $p(t)$ que seja um bom modelo para descrever o crescimento populacional de espécies. Consideremos inicialmente a seguinte relação:

$$p(t+h) - p(t) = \alpha\, h\, p(t) \tag{9.7}$$

imaginando que o aumento da quantidade de indivíduos do instante t até um instante posterior $t+h$ é diretamente proporcional ao tempo h decorrido entre esses instantes e diretamente proporcional à quantidade $p(t)$ de indivíduos existentes no instante t. Estamos indicando por α a constante de proporcionalidade.

Tomando em (9.7) $h = 1$ e, sucessivamente, $t = 0,\ 1,\ 2$, etc, obtemos $p(1) = p(0)(1+\alpha)$, $p(2) = p(1)(1+\alpha) = p(0)(1+\alpha)^2$, em geral, $p(m) = p(0)(1+\alpha)^m$ para todo inteiro $m \geq 0$. Isso nos dá um modelo discreto, em que o domínio da função $p(t)$ é o conjunto dos inteiros ≥ 0.

Mas desejamos obter um modelo contínuo, em que o domínio da função $p(t)$ seja o conjunto dos reais ≥ 0. Para isso consideramos um inteiro $n \geq 2$ e subdividimos o intervalo real $[0,1]$ em n subintervalos iguais. Tomando em (9.7) $h = 1/n$ e, sucessivamente, $t = 0,\ 1/n,\ 2/n,\ ...,\ n/n = 1$, obtemos $p(1/n) = p(0)(1+\alpha/n)$, $p(2/n) = p(0)(1+\alpha/n)^2$, ..., $p(n/n) = p(0)(1+\alpha/n)^n$, ou seja,

$$p(1) = p(0)\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n$$

para todo inteiro $n \geq 0$. Como nos interessa considerar $n \to \infty$, perguntamo-nos se existe $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n$. Veremos no Teorema 9.39 que esse limite é igual a e^α. Portanto

$$p(1) = p(0)e^\alpha.$$

Repetindo a mesma construção no intervalo real $[1,2]$, obtemos

$$p(2) = p(1)e^\alpha = p(0)\left(e^\alpha\right)^2 = p(0)e^{\alpha 2},$$

em geral

$$p(m) = p(0)e^{\alpha m}$$

para todo inteiro $m \geq 0$. Isso sugere que adotemos o modelo contínuo

$$p(t) = p(0)e^{\alpha t}, \quad t \in \mathbb{R},\ t \geq 0.$$

9.8.2 Definição do número e

Os resultados da seção anterior sugerem estudar a sequência $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \geq 1$.

Teorema 9.34. *É convergente a sequência* $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \geq 1$.

Demonstração. Podemos calcular alguns termos de (a_n) e observar que essa sequência deve ser crescente e limitada superiormente por 3. Verifiquemos esses fatos. Pretendemos dessa forma usar o Teorema das Sequências Monótonas 5.23.

Da fórmula binomial temos

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \cdots + \binom{n}{n-1}\frac{1}{n^{n-1}} + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n}.$$

Notemos que

$$\binom{n}{j}\frac{1}{n^j} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-j+1)}{j!}\,\frac{1}{n^j} =$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-j+1)}{n^j}\,\frac{1}{j!} = \frac{n}{n}\,\frac{n-1}{n}\,\frac{n-2}{n}\cdots\frac{n-j+1}{n}\,\frac{1}{j!} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{j-1}{n}\right)\,\frac{1}{j!}$$

para $1 \leq j \leq n$. Portanto

$$a_n = 1+1+\left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{1}{2!}+\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\frac{1}{3!}+\cdots+\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)\frac{1}{n!}.$$

Usamos agora que $1 - \frac{1}{n} < 1 - \frac{1}{n+1}$, $1 - \frac{2}{n} < 1 - \frac{2}{n+1}$, ..., $1 - \frac{n-1}{n} < 1 - \frac{n-1}{n+1}$. Substituindo esses valores na expressão de a_n obtida acima, e em seguida acrescentando mais um termo correspondente a $n+1$, obtemos a expressão de a_{n+1}, conforme segue:

$$a_n < 1 + 1 + \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\frac{1}{2!} + \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\frac{1}{3!} + \cdots +$$

$$+ \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right)\frac{1}{n!} +$$

$$+ \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1 - \frac{n}{n+1}\right)\frac{1}{(n+1)!} = a_{n+1}.$$

Provamos que a sequência (a_n) é estritamente crescente.

Observamos agora que $1 - \frac{1}{n} < 1$, $1 - \frac{2}{n} < 1$, ..., $1 - \frac{n-1}{n} < 1$. Substituindo esses valores na expressão de a_n obtida acima vem

$$a_n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots\frac{1}{n!}$$

para todo inteiro $n \geq 2$.

Consideremos a sequência (s_n) das somas parciais

$$s_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}\,,$$

com $s_1 = 1 + \frac{1}{1!} = 2$, $s_2 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} = \frac{5}{4}$, $s_3 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} = \frac{16}{6}$, etc.

Provemos que $s_n < 3$ para todo inteiro $n \geq 1$. De acordo com os cálculos acima, isso certamente ocorre para $n = 1$, 2 e 3. Suponhamos $n \geq 4$. Sabemos que $2^n < n!$ para todo inteiro $n \geq 4$. Então

$$s_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{n!} < \frac{16}{6} + \frac{1}{2^4}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{67}{24} \approx 2,792 < 3.$$

Como $a_n \leq s_n$ para todo inteiro $n \geq 1$, temos $a_n < 3$ para todo inteiro $n \geq 1$. Isso termina a demonstração de que (a_n) é convergente. □

O Teorema 9.34 justifica a

Definição 9.35. Definimos

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \tag{9.8}$$

Uma propriedade importante de e é

Teorema 9.36.

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots = e.$$

Demonstração. Consideremos a sequência das somas parciais $s_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$. É claro que essa sequência é crescente, pois são somas de termos positivos. Vimos na demonstração do Teorema 9.34 que $s_n < 3$ para todo inteiro $n \geq 1$. Portanto, em virtude do Teorema das Sequências Monótonas 5.23, existe $b = \lim s_n$. Queremos provar que $b = e$. Usando as notações da demonstração do Teorema 9.34 foi visto que $a_n \leq s_n$, portanto $e \leq b$. Ainda, fixemos $p \in \mathbb{Z}_+$. Para todo inteiro $n > p$ temos

$$a_n > 1+1+\left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{1}{2!} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\frac{1}{3!} + \cdots + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{p-1}{n}\right)\frac{1}{p!}.$$

Fazendo $n \to \infty$ (e mantendo p fixo) vem

$$\lim_{n\to\infty} a_n \geq \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{p!}\right),$$

portanto $e \geq s_p$ para todo inteiro positivo p. Fazendo agora $p \to \infty$ temos $\lim_{p\to\infty} e \geq \lim_{p\to\infty} s_p \Rightarrow e \geq b$. Terminamos. □

O Teorema 9.36 tem muitas aplicações importantes, citaremos apenas duas. A primeira é que a sequência (s_n) converge mais rapidamente do que a sequência $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Dessa forma, usando a sequência (s_n), podemos mais confortavelmente fazer o cálculo do valor aproximado de e. Por exemplo,

$$e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{8!} \approx 2,7182$$

com cinco casa exatas. Para registro apresentamos o valor aproximado de e com 20 casas exatas após a vírgula:

$$e \approx 2,71828182845904523536.$$

Outra aplicação do Teorema 9.36 é a seguinte demonstração de que e é irracional:

Teorema 9.37. *e é irracional.*

Demonstração. Suponhamos que e seja racional. Então podemos escrever $e = m/n$ com m e $n > 1$ inteiros. Usando a notação $s_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$ vemos que $n!s_n$ é um inteiro. Também $n!e$ é um inteiro. Portanto $n!(e - s_n)$ é um inteiro. Como (s_n) é crescente e $s_n \to e$, temos $0 < n!(e - s_n)$. O Problema 9.9.26 prova que $e - s_n \leq \frac{1}{n!n}$. Portanto

$$0 < n!(e - s_n) \leq n!\frac{1}{n!n} = \frac{1}{n} < 1.$$

Dessa forma encontramos um inteiro entre 0 e 1, o que não é possível. Segue a afirmação do Teorema. □

Precisaremos do

Lema 9.38.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Uma demonstração desse lema usando desigualdades pode ser estudada em [74], volume 1, páginas 197 e 198. Ou então usamos um resultado do Cálculo, em que $\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$. Em $x = 1$ isso significa que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1.$$

Teorema 9.39. *Para todo x real temos*

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

Demonstração. Se $x = 0$ o resultado é claro. Suponhamos $x \neq 0$. Usando o Lema 9.38 e lembrando que a função ln é contínua, temos

$$\ln \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} n \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right) =$$

$$= x \lim_{n\to\infty} \frac{n}{x} \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right) = x \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}} = x.$$

do que segue o resultado. □

9.9 Problemas

Problema 9.9.1. Imaginemos que o Sol se divida em duas metades, e que cada uma das metades se divida em duas, etc. Quantas operações dessas seriam necessárias para que resultasse uma partícula com aproximadamente o volume de um átomo de hidrogênio? (a) Menos do que 192. (b) Mais do que 2^{60}. (c) Se alguém dividisse o Sol uma vez por segundo, o tempo necessário para que fosse atingido o volume do hidrogênio iria até o fim do Sistema Solar. (d) Entre 2^{30} e 2^{35}. (e) nenhuma das anteriores.

Problema 9.9.2. Imitando a ideia de Arquimedes em sua obra "O contador de grãos de areia", calcule uma cota superior para a quantidade de átomos de hidrogênio que caberiam no universo observável. O raio do átomo de hidrogênio pode ser tomado como $5{,}3 \times 10^{-11}$ metros. Supondo que o universo observável seja uma esfera, podemos considerar para seu raio o valor 14×10^{25} metros.

Problema 9.9.3. Se A é um conjunto e n é um inteiro positivo, indicaremos por $A^n = A \times \cdots \times A$ o produto cartesiano de A por A n vezes. Sejam m e n inteiros positivos. Demonstre que m^n é a quantidade de elementos (n-uplas) de $\{1, 2, 3, \ldots, m\}^n$.

Problema 9.9.4. Usando o Método da Indução Completa demonstre a Desigualdade de Bernoulli $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ para todo inteiro positivo n e todo real $x \geq -1$. Verifique por que motivo não aplicamos aqui a demonstração usada no Lema 9.4.

Problema 9.9.5. Usando apenas a parte (i) da Proposição 9.7 prove que $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$ qualquer que seja o número real $a > 0$ e o inteiro n. Usando apenas a parte (i) da Proposição 9.10 prove que $\frac{1}{a^r} = a^{-r}$ qualquer que seja o número real $a > 0$ e o racional r.

Problema 9.9.6. Escreva detalhadamente as demonstrações das seguintes propriedades, algumas já comentadas no texto. (i) Se $a > 0$ e $b > 0$ são números reais e n é um inteiro positivo então $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$. (ii) Se $0 < a < b$ são números reais e n é um inteiro positivo então $0 < \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$. (iii) Sejam $a > 0$ um número real e m, n e t inteiros tais que $n > 0$ e $t > 0$. Então $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nt]{a^{mt}}$. (iv) Sejam $a > 0$ um número real e m e n inteiros tais que $n > 0$. Então $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$. (v) Se $0 < a$ e $0 < b$ são números reais e n é um inteiro qualquer então $(ab)^n = a^n b^n$. (vi) Se $0 < a$ e $0 < b$ são números reais e r é um racional qualquer então $(ab)^r = a^r b^r$.

Problema 9.9.7. Seja $a > 0$ um número real. Usando apenas a definição de potência com expoente racional, demonstre que $\left(\frac{1}{a}\right)^r = \frac{1}{a^r}$ para todo número racional r.

Problema 9.9.8. Seja $a > 0$ um número real. Verifique que a função $f_a : \mathbb{Q} \mapsto \mathbb{R}_+$, definida por $f(r) = a^r$, não é sobrejetiva.

Problema 9.9.9. **a)** Prove que são equivalentes as condições (ii) e (iii) dadas na caracterização de supremo, página 177. **b)** Estude uma caracterização análoga para o ínfimo. **c)** Demonstre que o supremo, quando existe, é único. O mesmo para o ínfimo.

Problema 9.9.10. Seja $a > 0$ um número real. Considerando $x \in \mathbb{R}$, demonstre que

$$a > 1 \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -\infty} a^x = 0;$$

$$a < 1 \Rightarrow \lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to +\infty} a^x = 0.$$

Problema 9.9.11. Sejam $0 < a$ e $0 < b$ números reais. Prove que $(ab)^x = a^x b^x$ qualquer que seja o número real x.

Problema 9.9.12. Sejam $0 < a < b$ e x números reais. Prove que $x > 0 \Rightarrow a^x < b^x$, e $x = 0 \Rightarrow a^x = b^x$ e $x < 0 \Rightarrow a^x > b^x$. Construa, no mesmo sistema cartesiano, os gráficos de a^x e b^x, com $x \in \mathbb{R}$, nos seguintes casos: (i) $0 < a < 1 < b$; (ii) $0 < a < b < 1$; (iii) $1 < a < b$.

Problema 9.9.13. (unicidade da função exponencial) Seja $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ uma função tal que $f(x + y) = f(x)f(y)$ quaisquer que sejam x e y em $\mathbb{R}$. Suponha que f não é identicamente nula. Prove que: (i) $f(x) \neq 0$ para todo x real. (ii) $f(x) > 0$ para todo x real. (iii) $f(0) = 1$. (iv) $f(-x) = 1/f(x)$ para todo x real. (v) Seja $a = f(1)$; então $f(n) = a^n$ para todo inteiro n. (vi) $f(1/n) = a^{1/n}$ para todo inteiro positivo n. (vii) $f(r) = a^r$ para todo número racional r. (viii) Se f é estritamente monótona, então $f(x) = a^x$ para todo x real. (ix) Se f é contínua, então $f(x) = a^x$ para todo x real.

Problema 9.9.14. Dê as definições de $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$. Demonstre o Teorema 9.30.

Problema 9.9.15. (caracterização das funções logarítmicas) Seja $f : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$ uma função estritamente monótona tal que $f(xy) = f(x) + f(y)$ quaisquer que sejam $x, y \in \mathbb{R}_+$. Então existe um número real $a > 0$ tal que $f = \log_a$.

Problema 9.9.16. Na solução 1 do problema da pressão atmosférica 9.6.2, verifique o que aconteceria se tomássemos os valores $P(0)$, $P(200)$, $P(400)$ e $P(600)$, em vez de $P(1000)$, etc. Obtém-se uma função diferente daquela do texto?

Problema 9.9.17. Supondo que a solução do problema da pressão atmosférica 9.6.2 seja válida para valores negativos de h, calcule a pressão na superfície do Mar Morto, sabendo-se que sua altura é de 422 m.

Problema 9.9.18. Em um certo país a mortalidade infantil foi de 2500 crianças em 1990. Um programa de saúde foi implantado, de modo que, a cada ano, a mortalidade tem sido reduzida de 10% em relação ao ano anterior. Encontre uma função adequada para modelar o fenômeno. Calcule quanto tempo foi ou será necessário para que a mortalidade se reduza a 40% em relação a 1990.

Problema 9.9.19. Considerando-se uma camada de ozônio de espessura T cm, seja I_0 a intensidade de um determinado comprimento de onda de luz do Sol antes de atingir a atmosfera, I a intensidade do mesmo comprimento de onda de luz depois de passar pela camada de ozônio, e β o coeficiente de absorção para esse comprimento de onda. Essas grandezas estão relacionadas pela fórmula $I = I_0 e^{-\beta T}$. **a)** Obtenha uma fórmula que forneça a espessura da camada de ozônio em função das outras grandezas. **b)** Se para um comprimento de onda de $3,055 \times 10^{-8}$ cm se tem $\beta = 2,7$ e $I_0/I = 2,3$, calcule o valor correspondente da espessura da camada de ozônio.

Problema 9.9.20. A fórmula de Ehrenberg $\ln P = \ln 2,4 + 0,0184h$ relaciona o peso P em kilogramas de uma criança com sua altura h em centímetros, e é considerada válida para crianças com idade entre 5 e 13 anos. **a)** Encontre a altura de uma criança com 20 kg. **b)** Encontre o peso de uma criança com 130 cm.

Problema 9.9.21. Se um raio de luz de intensidade k é projetado verticalmente para baixo na água, sua intensidade à profundidade de x metros é $ke^{-1,4x}$. Calcule a que profundidade a intensidade é a metade de seu valor na superfície.

Problema 9.9.22. Algumas das perguntas desse problema se referem à tabela 9.9 abaixo. **a)** Calcule a relação real entre as intensidades dos dois terremotos ocorridos em São Francisco. **b)** Compare as intensidades reais dos terremotos ocorridos em Assam e no Irã. **c)** Se a magnitude de um terremoto tem valor negativo na escala Richter, o que se pode concluir? **d)** Foi proposta a fórmula $\log E = 11,4 + 1,5R$ para relacionar a energia E dissipada em um terremoto (medida em ergs) e a magnitude R da escala Richter. Calcule a energia dissipada no terremoto de Valdívia, no Chile, em 1960. **e)** Se um terremoto tem intensidade 10 vezes maior do que outro, qual a diferença dos valores na escala Richter? **f)** Dois terremotos têm valores R_1 e R_2 na escala Richter de modo que $R_1 - R_2 = 2$. Compare suas intensidades.

Local do terremoto	Data	valor na escala Richter
Lisboa, Portugal	1755	$9,0$(estimado)
São Francisco, USA	1906	$8,0$(estimado)
Assan, Egito	1952	$8,7$
Valdívia, Chile	1960	$9,5$
Anchorage, Alaska	1964	$9,2$
Peru	1970	$7,7$
Cidade do México	1985	$8,0$
Armênia	1989	$6,9$
São Francisco, USA	1989	$6,9$
Iran	1990	$7,3$
Oceano Índico	2004	$9,3$

(9.9)

Problema 9.9.23. a) O café preto é 100 vezes mais ácido do que a água pura. Qual é seu pH? **b)** Usando a tabela 9.10 abaixo, compare a acidez do leite com a do suco de limão. Faça outras comparações. **c)** A concentração de hidrônios do fluido cérebro-espinhal é $4,8 \times 10^{-8}$ mol/l. Qual é seu pH? **d)** O pH do sangue humano fica entre 7,37 e 7,44. Determinar os limites correspondentes para $[H_3O^+]$.

Substância	pH
suco de limão	$2,1$
suco de tomate	$4,1$
leite	$6,6$
Leite de magnésia	10

(9.10)

Problema 9.9.24. Para medir sons é utilizada uma unidade chamada decibéis. Trata-se de uma escala logarítmica definida da seguinte forma. Considera-se a constante $I_0 = 10^{-12}$, medida em watt/m^2, e que corresponde aproximadamente à menor intensidade que o ouvido humano pode captar numa frequência de 1000 Hz. Então a medida em decibéis de um som de intensidade I é $L = 10\log(I/I_0)$. Utiliza-se a abreviação dB para indicar o decibel. **a)** Quantos decibéis mede um som cuja intensidade é 10 vezes maior do que I_0? **b)** A intensidade da voz média humana é 10000 maior do que I_0. Ache sua medida em decibéis. **c)** Um som com intensidade de 1 watt/m^2 provoca efeitos dolorosos no ouvido humano. A quantos decibéis corresponde essa intensidade? **d)** Em um ambiente o nível sonoro é de 85 dB. Calcule o valor da intensidade do som nesse ambiente.

Problema 9.9.25. A magnitude aparente m de uma estrela está relacionada com sua intensidade luminosa aparente I através da fórmula $m = c - 2,5\log I$, sendo c uma constante cujo valor depende da unidade de medida de I. Assim, quanto maior a intensidade menor é o valor

de m. A estrela de maior intensidade luminosa em nossos céus é Sirius, com magnitude $-1,5$. **a)** Mostre que se I_1 e I_2 são as intensidades luminosas de duas estrelas de magnitude m_1 e m_2, respectivamente, então $m_1 - m_2 = 2,5 \log(I_2/I_1)$. Conclua que uma estrela de magnitude m é 2,5 vezes mais brilhante que uma de magnitude $m+1$. **b)** Quantas vezes Sirius é mais brilhante que Betelgeuse, que tem magnitude 0,4? **c)** A olho nu é possível observar estrelas até a magnitude 6. Compare o brilho de uma estrela de magnitude 6 com a de magnitude -1. **d)** A magnitude aparente do Sol é -26,9. Compare a luminosidade aparente do Sol com a da estrela Sirius.

Problema 9.9.26. Usando a notação $s_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$ para todo inteiro positivo n, prove que $0 < e - s_n < \frac{1}{n!n}$. Use esse resultado para encontrar o erro da aproximação $e \approx s_{10}$.

Problema 9.9.27. Seja $m(t)$ a quantidade de massa no instante t de uma amostra de uma substância radioativa. Admitamos que a substância perde massa, de um instante t qualquer a um instante posterior qualquer $t+h$, com valor diretamente proporcional a h e a $m(t)$. Seja α a constante de proporcionalidade. Veja como pode ser obtida a fórmula $m(t) = m(0)e^{-\alpha t}$.

Problema 9.9.28. A desintegração completa de uma substância radiativa pode durar milhões de anos. Por isso é mais prático indicar a meia-vida da substância. A meia-vida $T_{1/2}$ de uma substância radioativa é o intervalo de tempo necessário para que a substância perca metade de sua massa, a contar de um instante inicial. Usando as notações e o resultado do Problema 9.9.27, calcule $T_{1/2}$ em função de α.

Problema 9.9.29. Um paraquedista está caindo em queda livre, e no instante $t = 0$ abre seu paraquedas. Usando leis da Física podemos obter uma expressão para sua velocidade para $t \geq 0$:

$$v(t) = \frac{g}{a}\left(1 - e^{-at}\right) + v(0)e^{-at},$$

sendo $g > 0$ a aceleração da gravidade e $a > 0$ uma constante que inclui o coeficiente de frenagem do paraquedas. Calcule a velocidade limite $v_\infty = \lim_{t\to\infty} v(t)$. Mostre por que a velocidade $v(0)$ pouco afeta o movimento. Faça um gráfico de $v(t)$.

9.10 Temas para investigação

Tema 9.10.1. Faça um estudo sobre a presença das funções exponenciais e logarítmicas na Matemática. Busque belas fórmulas e teoremas em que aparecem essas funções.

Tema 9.10.2. Faça um estudo sobre séries que representam funções exponenciais e logarítmicas.

Tema 9.10.3. Pesquise como os logaritmos são usados para calcular a dimensão de Hausdorff do Triângulo de Sierpinski. Calcule a dimensão de Hausdorff do Conjunto de Cantor descrito no Tema 7.7.2.

Tema 9.10.4. Verifique o acerto da *Lei de Benford* na seguinte situação. Tome as 100 primeiras potências de 2 expressas no sistema decimal: $2^0 = 1$, $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$, $2^5 = 32$,..., 2^{99}, e forme a lista com o primeiro dígito de cada uma:

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 1,\ 3, ..., 6.$$

A Lei de Benford preconiza que a probabilidade de um dígito decimal $1 \leq d \leq 9$ comparecer nessa lista é

$$P(d) = \log(d+1) - \log(d) = \log \frac{d+1}{d}.$$

Considere outras sequências, como $2n$. Alguma explicação? Aprenda mais consultando o verbete *Benford's law* de [129].

Tema 9.10.5. Estude a função $\log(\log x)$, que aparece em uma área da Matemática denominada Complexidade Computacional. Investigue seu domínio, sua imagem, suas propriedades e gráfico.

Tema 9.10.6. A taxa de variação de uma função f em um intervalo $[x, x+h]$ (ou $[x+h, x]$ se $h < 0$) é $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Faça experimentos numéricos para constatar que, para todo x e valores pequenos de h, a taxa de variação de e^x é aproximadamente o próprio valor e^x.

Tema 9.10.7. O gráfico cartesiano de uma função real $f : x \to f(x)$ é o subconjunto de $\mathbb{R}^2$ formado pelos pontos $(x, f(x))$. O gráfico na escala semilogarítmica, por sua vez, é o conjunto $(x, log(f(x))$ para os valores $f(x) > 0$. É preferível usar essa escala quando esses valores forem muito altos. Faça alguns experimentos. Como é o gráfico na escala semilogarítmica de $f(x) = \lambda a^{\gamma x}$? Pesquise também sobre a escala log-log.

9.11 Atividades para licenciandos e professores

Atividade 9.11.1. Revendo nosso estudo sobre funções exponenciais, verifique quais conceitos e técnicas poderiam ser efetivamente trabalhados com estudantes da escola média. Tome como referência os tipos de escola e classes que você conhece. Compare nossa apresentação com as propostas dos diversos autores de livros didáticos para esse segmento escolar.

Atividade 9.11.2. Complete a tabela abaixo (adaptada de [10], página 8):

x	e^x
0 cm	1 cm
3 cm	20 cm
5,1 cm	164 cm (altura de uma pessoa)
15 cm	32,7 km (distância entre São Carlos e Descalvado)
20 cm	
cm	149.500.000 km ± (distância média da Terra ao Sol)
	km (um ano-luz)

Identifique quais são os conteúdos trabalhados com essa tarefa. Descreva os processos cognitivos[2] que podem ser desenvolvidos.

[2]Cognição é o ato ou processo de conhecer, que envolve atenção, percepção, memória, raciocínio, juízo, imaginação, pensamento e linguagem.

Atividade 9.11.3. Os autores de [53] afirmam que é mais fácil ensinar logaritmos começando com a notação $a^{\square}$ (leia-se: "a-caixa") no lugar de $\log_a$. Exemplos:

$2^{\square}(8) = 3$ (leia-se: "2-caixa de 8 igual a 3")

$2^{\square}(16) = 4$

$2^{\square}(\sqrt{2}) = \frac{1}{2}$

$3^{\square}(\frac{1}{9}) = -2$

Sugerem que, depois de estudar exemplos e as propriedades mais básicas, explica-se aos estudantes que existe outra notação mais usual $a^{\square} = \log_a$. Em seguida os exemplos passam a serem escritos na forma $\log_3(81) = 3^{\square}(81) = 4$. Depois dessa experiência adota-se apenas a notação usual. Experimente você mesmo/a.

Atividade 9.11.4. Estude a forma com que os autores [74], cap. 8, seção 9, pág. 191, definem o logaritmo natural ln, usando áreas de faixas sob o gráfico de $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $h(x) = 1/x$ (ramo positivo da hipérbole equilátera).

Atividade 9.11.5. Analise a seguinte atividade que está proposta em [105], pág. 126, para introduzir a ideia de escala logarítmica.

n	descrição	$f(n)$	Faça aqui o gráfico de $f(n)$
1	um grupo de amigos	10	
2	formandos de uma escola	100	
3	estudantes de uma escola	1000	
4	pessoas de pequena cidade	10000	
5	habitantes de uma cidade	100000	
6	habitantes de região urbana	1000000	
7	habitantes de pequeno país	10000000	
8	habitantes de um país	100000000	

Inicialmente podem ser usados gráficos na forma de barras, setores ou cartesiano, mas todos apresentam dificuldades devido aos altos valores. O dilema se resolve pela introdução de uma nova coluna em que são tomados os logaritmos $\log(f(n))$. Em seguida pode ser feito um gráfico com os novos valores. Deve ser indicado no gráfico que se trata de uma escala logarítmica.

Atividade 9.11.6. Muitos textos podem ampliar nosso conhecimento sobre o ensino de funções exponenciais e logarítmicas. Sugestão: [32].

Atividade 9.11.7. Estude detalhadamente as folhas de atividades apresentadas nas páginas seguintes. São parte das atividades propostas em [105] (fizemos simplificações gráficas em relação ao original). Estude os objetivos pedagógicos dessa atividade e descreva situações nas quais você imagina que ela poderia ser aplicada. Confira as atividades completas em [105], pág. 193.

SIMPLIFICANDO CÁLCULOS

I) No tempo em que não havia calculadora não era fácil fazer contas. Vamos tentar!

a) $8192 \mid 256$

b) 4096×128

Nos séculos XVI e XVII o estudo da Trigonometria por parte da Astronomia exigia uma necessidade de precisão em cálculos com números grandes, com 8 ou mais casas decimais. Era preciso multiplicar, dividir, extrair raízes desses números grandes. Como não existiam calculadoras e computadores, isso dava muito trabalho. Em meados do Século XVI, o monge e matemático Michael Stifel, partindo de uma antiga ideia de Arquimedes, começou a usar algumas tabelas numéricas para facilitar cálculos. Vejamos uma dessas tabelas:

1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16384	32768	65536	131072	262144
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Você reconhece essas sequências numéricas?

A sequência da 1ª. linha é uma _____ de razão _____

A sequência da 2ª. linha é uma _____ de razão _____

II) Vamos usar essa relação para fazer umas contas. Observe:

Para calcular $8192 \div 256$ olhamos esses números na 1ª. linha da tabela e procuramos os seus correspondentes na 2ª. linha, que são 13 e 8. Com os números encontrados na 2ª. linha fazemos uma subtração, $13 - 8$, que é igual a 5, e vemos que o correspondente de 5 na 1ª. linha é 32. Com isso temos $8192 \div 256 = 32$.

32			256					8192
5			8					13

↑ ↑ 13−8 ↑

Confere? Vimos antes que $8192 \div 256 = 32$. Será isso uma coincidência? Para fazer uma divisão fizemos uma subtração, não é melhor?

III) Usando a tabela você pode economizar cálculos. Faça as operações propostas usando esse método e depois confira com uma calculadora:

a) $512 \div 64 \to 9 - 6 = 3 \to 8$ $512 \div 64 = 8$	*b*) $1024 \div 16 \to$ $1024 \div 16 =$	*c*) $4096 \div 128 \to$
d) $65536 \div 128 \to$	*e*) $131072 \div 4096 \to$	*f*) $262144 \div 8192 \to$

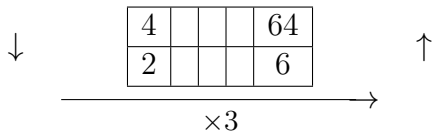
Pense no que você fez com a divisão e faça agora multiplicações:

g) $8 \times 64 \to$	*h*) $32 \times 4096 \to$	*i*) $32768 \times 8 \to$
j) $512 \times 256 \to$	*k*) $8192 \times 16 \to$	*l*) $64 \times 4096 \to$

Substituímos a divisão por uma _____
Substituímos a multiplicação por uma _____

IV) Calcule sem usar calculadora: $4^3 =$_____ $8^4 =$_____

Para calcular 4^3 localizamos 4 na 1ª. linha da tabela de Michael Stifel, e vemos que o número que lhe corresponde na 2ª. linha é 2. Calculamos $2 \times 3 = 6$, e vemos que número da 1ª. linha da tabela correponde a 6, que é 64. Note que $4^3 = 64$.



Da mesma forma, para calcular 8^4, fazemos $8 \to 3 \to 3 \times 4 = 12 \to 4096$. Temos $8^4 = 4096$, é só conferir.

Vamos verificar se o método funciona para outras contas? Depois confira com a calculadora:

a) $16^3 \to 4 \times 3 = 12$ $\to 4096 \quad 16^3 = 4096$	*b*) $8^5 \to$	*c*) $4^6 \to$
d) $32^3 \to$	*e*) $256^2 \to$	*f*) $512^2 \to$

Se na potenciação você multiplicou, na radiciação você deverá _____

g) $\sqrt{256} \to$	*h*) $\sqrt{1024} \to$	*i*) $\sqrt{4096} \to$
j) $\sqrt[3]{512} \to$	*k*) $\sqrt[3]{4096} \to$	*l*) $\sqrt[3]{32768} \to$

Substituímos a potenciação por uma _____
Substituímos a radiciação por uma _____

Perceba que fizemos uma redução de operações e os cálculos se tornaram muito mais rápidos e fáceis. Foi isso o que fizeram os matemáticos com suas tabelas no Século XVI.

V) Por que funciona?

Vamos escrever a tabela de Michael Stifel de outra maneira. Escrevemos os números da primeira linha como potências de 2. Complete a tabela.

1 2^0	2	4	8 2^3	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16384	32768	65536	131072	262144
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Observe, nessa nova tabela, a relação da primeira linha com a segunda: na primeira linha temos sempre 2 elevado ao número correspondente da segunda linha.

Veja agora como explicamos que a divisão vira uma subtração:

$$4096 \div 16 = \frac{4096}{16} = \frac{2^{12}}{2^4} = 2^{12-4} = 2^8 = 256$$

Agora explique você mesmo por que a multiplicação vira adição:

$512 \times 64 =$ _____

$256 \times 128 =$ _____

Também explique você mesmo por que a potenciação vira multiplicação:

$8^4 = (2^3)^4 =$ _____

$32^3 =$ _____

Veja nossa explicação de por que a radiciação vira divisão:

$$\sqrt{1024} = \sqrt{2^{10}} = \left(2^{10}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{10}{2}} = 2^5 = 32$$

Agora explique você mesmo:

$\sqrt{16384} =$ _____

UMA INVENÇÃO INTERESSANTE

Os Matemáticos e os astrônomos perceberam que se trabalhassem com os expoentes dos números, quando escritos em forma de potências, seus cálculos seriam simplificados. Com isso criaram tabelas de duas colunas (ou duas linhas) em que se colocava os termos de uma progressão geométrica de primeiro termo igual a 1 (potências de um certo número) em correspondência com os termos de uma progressão aritmética (na verdade os expoentes dos números). Essas tabelas foram chamadas de *tábuas de logaritmos*.

1 2^0	2 2^1	4 2^2	8 2^3	16 2^4	32 2^5	64 2^6	128 2^7	256 2^8	512 2^9	1024 2^{10}	2048 2^{11}	4096 2^{12}	8192 2^{13}	16384 2^{14}	32768 2^{15}	65536 2^{16}	131072 2^{17}	262144 2^{18}
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Na tabela, o número de baixo chama-se **logaritmo** do número de cima. Assim:

128
↓
7

O logaritmo de 128 é 7, pois $2^7 = 128$.

512
↓
9

O logaritmo de 512 é 9, pois $2^9 = 512$.

8192
↓
13

O logaritmo de 8192 é 13, pois $2^{13} = 8192$.

OBSERVE QUE O LOGARITMO É O EXPOENTE DE UMA POTÊNCIA

Complete a tabela:

	Abreviando		Abreviando
O logaritmo de 2048 é 11	log(2048)=11	O logaritmo de 4096 é	log(4096)=.....
O logaritmo de 256 é	log(256)=.....	O logaritmo de 8 é	
O logaritmo de 32 é		O logaritmo de 16384 é	

Vamos trabalhar com uma PG de razão 3:

1	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683	59049	177147	531441
3^0	3^1	3^2	3^3	3^4	3^5	3^6	3^7	3^8	3^9	3^{10}	3^{11}	3^{12}
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

81
↓
4

O logaritmo de 81 é 4, pois $3^4 = 81$.

2187
↓
7

O logaritmo de 2187 é 7, pois $3^7 = 2187$.

Complete a tabela:

	Abreviando		Abreviando
O logaritmo de 81 é 4	log(81)=4	O logaritmo de 2187 é	log(2187)=.....
O logaritmo de 6561 é	log(6561)=.....	O logaritmo de 177147 é	

Vemos que quando a base das potências é 2 ou 3 muitos números ficam de fora. Por exemplo, nenhuma das tabelas anteriores permite fazer 9571×111275. Por isso, em meados do Século XVII, John Napier, um rico e inteligente lorde escocês que tinha tomado conhecimento das tabelas de Michael Stifel, propôs tabelas de razões menores para abranger uma quantidade maior de números.

Se tivermos uma tabela em que a PG tem razão 1,1 os termos estão mais próximos.

1	1,1	1,21	1,331	1,4641	1,61051	1,771561	1,9487171	2,14358881	2,357947691
$1,1^0$	$1,1^1$	$1,1^2$	$1,1^3$	$1,1^4$	$1,1^5$	$1,1^6$	$1,1^7$	$1,1^8$	$1,1^9$
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

1,331
↓
3

O logaritmo de 1,331 é 3, pois $1,1^3 = 1,331$.

1,771561
↓
6

O logaritmo de 1,771561 é 6, pois $1,1^6 = 1,771561$.

COMO DIFERENCIAR AS TABELAS? Usaremos a seguinte notação:

$$2^7 = 128 \iff \log_2(128) = 7$$

$$3^4 = 81 \iff \log_3(81) = 4$$

Resumo:

Dados números reais positivos a e b, com $a \neq 1$, se $b = a^c$, então o expoente c chama-se **logaritmo** de b na base a. Ou seja,

$$\log_a b = c \iff a^c = b, \text{ com } a \text{ e } b \text{ positivos e } a \neq 1$$

Capítulo 10

Tópicos sobre números reais

10.1 Introdução

Estudamos, nos nove capítulos anteriores deste livro, conceitos e técnicas de Análise Matemática que são necessários para os professores do ensino básico. O principal assunto foi, sem dúvida, a construção de modelos para os números reais. Vimos ainda importantes propriedades dos números racionais e irracionais e suas representações, sequências numéricas convergentes, séries geométricas e funções exponenciais e logarítmicas.

Existem mais assuntos da Matemática da escola básica que necessitam, para seu estudo e compreensão, do aporte de processos infinitos, próprios da Análise Matemática. Por exemplo, por que a área do quadrado de lado a é a^2, para todo real positivo a? O que é o *Princípio de Cavalieri*? O que são, mais exatamente, números construtíveis?

Apresentamos neste Capítulo algumas observações sobre esses e outros assuntos.

10.2 Números construtíveis

Esse é um conceito adotado pelos matemáticos da Antiga Grécia: um número era uma medida de algum ente geométrico, e esses, por sua vez, eram aqueles que podiam ser desenhados com régua não metrizada e compasso.

Com régua não metrizada e compasso é possível, em uma folha de papel, realizar as seguintes operações: (i) desenhar uma reta por dois pontos dados; (ii) transladar segmentos; (iii) construir uma circunferência a partir de seu centro e a medida de seu raio; (iv) encontrar os pontos de interseção de duas retas, duas circunferências ou de uma reta e uma circunferência. Os entes geométricos obtidos por essas operações, assim como suas medidas, eram considerados validados, e denominados *construtíveis*. Começando um desenho com um segmento adotado como unitário, podiam somar, subtrair, multiplicar e dividir, de forma que todos os números racionais positivos eram considerados construtíveis. Com régua e compasso também é possível obter a raiz quadrada, de modo que números como $\sqrt{a}$ e $\sqrt{a+\sqrt[4]{b}}$, com a e b racionais positivos, eram considerados construtíveis. Confira o Capítulo 4.

Esse modelo numérico logo se mostrou limitado, pois os matemáticos não conseguiam obter a raiz cúbica, retificar a circunferência, quadrar o disco e trisseccionar um ângulo qualquer com um número finito daquelas operações. Esses problemas permaneceram em aberto por 2000 anos. A eles se juntou a questão de determinar quais polígonos regulares eram construtíveis. A compreensão mais profunda desse modelo ocorreu com sua algebrização, quando foi transladado para o contexto cartesiano.

Em um sistema cartesiano Oxy, uma reta qualquer é dada pela equação $ax + by + c = 0$, e uma circunferência de centro (a, b) e raio r, por $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$. Se a, b, c e r forem números racionais, as coordenadas dos pontos de interseção dessas curvas são números racionais ou combinações de racionais com suas raízes quadradas. Portanto, iniciando com o segmento unitário, uma operação com régua e compasso obtém pontos com coordenadas na forma $A + B\sqrt{C}$, sendo A, B e C números racionais. Uma segunda operação obtém pontos com coordenadas na forma $D + E\sqrt{F}$, sendo D, E e F obtidos com operações sobre números da forma anterior. Essa propriedade permanece com o prosseguimento das construções. Mais detalhes em [19]. Nesse contexto os números da forma $X + Y\sqrt{Z}$ são ditos serem construtíveis. Temos o

Teorema 10.1. *Todo número construtível é algébrico de grau 2^n para algum inteiro $n \geq 0$.*

Essa propriedade foi demonstrada em 1837 por Pierre L. Wantzel [75]. Ela elimina a construtibilidade de $\sqrt[3]{2}$, pois esse número é algébrico de grau 3 (confira o Problema 10.9.2). Ela também está relacionada com o famoso problema da antiguidade da duplicação do cubo, cuja impossibilidade ficou assim demonstrada. Wantzel também observou com esse teorema que o ângulo (construtível) de 60° não pode ser trissectado com régua e compasso (Johann C. F. Gauss, em 1801, já havia observado isso para o ângulo de 120°).

Por outro lado, se fosse possível quadrar um disco, digamos de raio 1, poderíamos obter um quadrado de área π, portanto de lado $\sqrt{\pi}$, e esse número seria construtível. Então π, como produto de números construtíveis, seria construtível, e assim seria algébrico. Mas o Teorema 8.12 de Carl Lindemann provou em 1882 que π é transcendente, portanto não é algébrico. Em consequência o Teorema 10.1 também responde negativamente à possibilidade de quadrar o disco. Vemos ainda que não é possível retificar uma dada circunferência com régua e compasso, pois o comprimento da circunferência é proporcional a π. Confira o Problema 10.9.3.

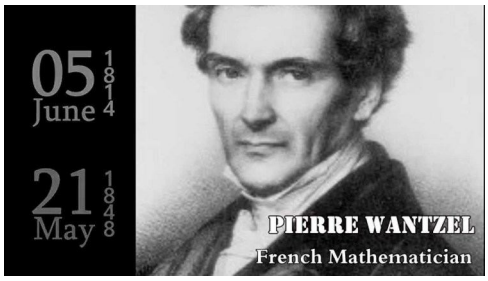


Figura 10.1. Pierre Laurent Wantzel foi um matemático francês conhecido por ter resolvido dois dos famosos problemas da antiguidade: a não construtibilidade de $\sqrt[3]{2}$ (portanto a impossibilidade de duplicar um cubo) e a impossibilidade de trissectar um ângulo arbitrário com régua e compasso. Completou ainda um teorema de Johann C. F. Gauss sobre a construtibilidade de polígonos regulares.

Encerraramos esta seção com algumas informações sobre polígonos regulares construtíveis. Um polígono regular de n lados é construtível quando seu ângulo central o for. A medida desse ângulo é $\frac{2\pi}{n}$ radianos ou $\frac{360°}{n}$.

Os antigos matemáticos gregos sabiam construir polígonos regulares com 3, 4 e 5 lados. Bissectando ângulos, podiam construir com $3 \cdot 2^m$, 2^m e $5 \cdot 2^m$ lados. Outra condição: se $\frac{2\pi}{m}$ e $\frac{2\pi}{n}$ são construtíveis, com $\text{mdc}(m, n) = 1$, então mn é construtível. De fato, sejam ℓ e k inteiros tais que $\ell m + kn = 1$. Então $\frac{2\pi|k|}{m}$ e $\frac{2\pi|\ell|}{n}$ são construtíveis, assim como $\frac{2\pi k}{m} + \frac{2\pi\ell}{n} = \frac{2\pi}{mn}$. Um exemplo imediato é $15 = 3 \cdot 5$, e o pentadecágono é construtível.

Em 1796 F. Gauss construiu o polígono regular de 17 lados. Em 1801 formulou uma condição suficiente. Em 1837 P. Wantzel provou que essa condição era também necessária. Temos o

Teorema 10.2 (Johann C. F. Gauss 1801, Pierre L. Wantzel 1837)**.** *Um polígono regular de n lados é construtível se, e somente se, n é produto de uma potência de 2 e de primos de Fermat diferentes.*

10.3 Algumas constantes matemáticas

Abordamos agora um assunto bem interessante, o das constantes matemáticas. Os verbetes *List of mathematical constants* e *Mathematical constant* de [129] trazem muitas informações.

Uma forma de explicar o que é uma constante matemática é dizer que é um número distinguido e presente nas mais diversas situações. Outra forma é que esse número é a razão entre duas grandezas gerais.

Uma constante costuma ter um símbolo especial e um nome que a diferencia. Vejamos uma pequena lista.

Constante de Pitágoras $\sqrt{2}$, abordada neste texto no Capítulo 3. Sua definição mais simples é: $\sqrt{2}$ é o número positivo cujo quadrado é 2. Também é a razão entre a diagonal e o lado em qualquer quadrado. Confira a Seção 3.2. Para sua existência e unicidade confira Exemplo 4.32 e Problema Resolvido 4.35. Para sua irracionalidade e aproximações consulte 3.4 e 3.6.

Constante de Aquimedes π, abordada neste texto no Capítulo 6. Seu aparecimento histórico se deu como razão entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro. Na Análise Matemática pode ser definido como o menor zero positivo da função real seno. Essa função, por sua vez, é definida como uma série de potências:

$$\operatorname{sen}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, x^{2n+1}, \text{ para todo } x \text{ real.}$$

A irracionalidade e a transcendência de π são comentadas em 8.3 e 8.4.

Número de Euler e, abordado neste texto no Capítulo 9, mais exatamente, na Seção 9.8. Repetindo nossa Definição 9.35, temos

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

O número e também pode ser definido na forma de série (confira Teorema 9.36):

$$e = \sum_{[n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

A irracionalidade e a transcendência de e são comentadas em 8.3 e 8.4.

Razão áurea φ, comentada no Problema 4.9.2, é a razão entre o lado maior e o lado menor do retângulo áureo. É também denominada divina proporção, proporção áurea, proporção em extrema razão, número de ouro, número áureo, secção áurea. O símbolo φ é uma homenagem ao artista grego Fídias. Seu valor é

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

O número ϕ é irracional e algébrico de grau 2.

Constante de Euler γ, também denominada constante de Euler-Mascheroni. Sua definição é

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$$

e seu valor aproximado é

$$\gamma \approx 0,577\,215\,664\,901\,532\,860\ldots$$

Essa constante ocorre em inúmeros campos da Matemática. Não se sabe se é um número transcendente, e nem mesmo se é irracional. Confira o verbete *Euler's constant* de [129].

Constante de Khinchin K_0. Um número misterioso. Dada uma representação como fração contínua simples infinita $x = [a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots]$ considere a média geométrica $(a_1 a_2 a_3 \cdots a_n)^{1/n}$ de seus n primeiros quocientes a partir de a_1. Então, **para quase todo** x, temos

$$\lim_{n\to\infty} (a_1 a_2 a_3 \cdots a_n)^{1/n} = K_0 \approx 2.685\,452\,001\,065\,306\,445\ldots$$

Salvo números construídos artificialmente para essa finalidade, não se conhece nenhum número específico que obedeça a essa propriedade. Por outro lado, são conhecidos números que não obedecem, como e e os algébricos de grau 2.

10.4 Sobre o conceito de área

Uma *região triangular* é a reunião de um triângulo e de seu interior. Uma *região poligonal* é a reunião de uma quantidade finita de regiões triangulares tais que, se duas dessas regiões se intersectam, a interseção é um lado comum a duas regiões triangulares ou um vértice comum a duas ou mais regiões triangulares.

Na apresentação do conceito de área estudado na escola básica são admitidos os seguintes postulados, explícita ou implicitamente:

A_1 A toda região poligonal corresponde um único número positivo, que é denominado *área* da região.

A_2 Duas regiões triangulares congruentes quaisquer têm a mesma área.

A_3 Se uma região poligonal está contida em outra, então sua área é menor ou igual do que a daquela outra.

A_4 Se duas regiões poligonais não têm ponto interior comum, então a área de sua união é igual à soma das áreas das regiões.

A_5 A área da região quadrada de lado a é a^2.

Usando a área da região quadrada podemos obter a área de uma região triangular qualquer, e, por A_4, temos a área de uma região poligonal qualquer.

Nesse esquema é natural aceitarmos os postulados A_1, A_2, A_3 e A_4, muito embora eles também possam ser construídos. Para ver como fazer isso confira, por exemplo, [85], página 168 e seguintes. Mas não é natural aceitarmos A_5. No lugar dele deveria estar um postulado que determine apenas a unidade de área de forma condizente com a unidade de comprimento considerada no contexto. Desse modo o postulado A_5 deveria ser substituído por

A'_5 A área da região quadrada de lado 1 é 1.

Muitos livros de Matemática Elementar preferem adotar A_5 do que A'_5 para evitar a dificuldade de provar que $A'_5 \Rightarrow A_5$. Vejamos uma demonstração dessa implicação.

Teorema 10.3. $A'_5 \Rightarrow A_5$.

Demonstração. Seguimos a ideia apresentada em [85], página 165 e seguintes. Consideremos um quadrado de lado a. Vejamos primeiro o caso em que $a = 1/n$, sendo n um inteiro positivo. Tomamos um quadrado de lado 1. Dividindo os lados desse quadrado em n partes iguais, podemos reparti-lo em n^2 quadrados menores congruentes, cada um com lado $a = 1/n$. Confira a Figura 10.2.

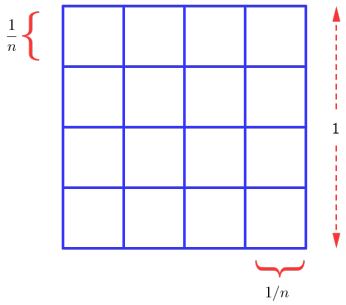


Figura 10.2. Área do quadrado de lado $a = 1/n$.

Usando o postulado A_4 acima temos

$$\text{área do quadrado de lado } 1 = n^2 \times \text{ área do quadrado menor.}$$

Usando agora o Postulado A'_5 temos

$$1 = n^2 \times \text{ área do quadrado menor}$$

$$\Rightarrow \text{área do quadrado menor} = \frac{1}{n^2} = \left(\frac{1}{n}\right)^2 = a^2.$$

A afirmação do Teorema fica provada para esse caso. Suponhamos agora que o lado do quadrado dado é um número racional $a = m/n$. Dividindo seus lados em m partes iguais, podemos reparti-lo em m^2 quadrados menores, cada um com lado $1/n$, portanto com área $1/n^2$, de acordo com o que foi provado acima. Confira a Figura 10.3.

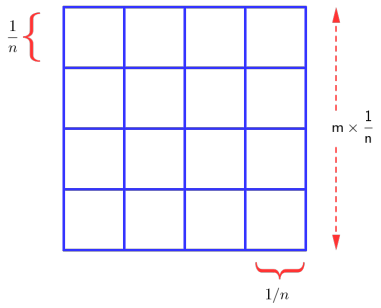


Figura 10.3. Área do quadrado de lado $a = m/n$.

Em consequência a área do quadrado dado $= m^2 \times \frac{1}{n^2} = \left(\frac{m}{n}\right)^2 = a^2$, e fica provado o teorema para esse caso.

Suponhamos agora que o lado do quadrado dado seja um número real positivo a, e seja α sua área. Queremos provar que $\alpha = a^2$. Admitamos $\alpha < a^2$. Logo $\sqrt{\alpha} < a$ e existe um número racional r tal que $\sqrt{\alpha} < r < a$. Construímos um quadrado de lado r contido no quadrado de lado a. Então

$$\text{área do quadrado de lado } r \ \leq \ \text{área do quadrado de lado } a \Rightarrow r^2 \leq \alpha \Rightarrow r \leq \sqrt{\alpha},$$

o que é uma contradição. Portanto $\alpha \geq a^2$.

Admitamos agora $a^2 < \alpha$. Então $a < \sqrt{\alpha}$ e existe um número racional r tal que $a < r < \sqrt{\alpha}$. Construímos um quadrado de lado r contendo o quadrado de lado a. Logo

$$\text{área do quadrado de lado } a \ \leq \ \text{área do quadrado de lado } r \Rightarrow \alpha \leq r^2 \Rightarrow \sqrt{\alpha} \leq r,$$

o que é uma contradição. Portanto $\alpha \leq a^2$. Segue $\alpha = a^2$, e isso termina a demonstração. □

Existem outras formas de demonstrar o Teorema 10.3. Uma delas é usar o resultado do Problema 5.7.38. Também se aplica o Problema 10.9.9. O estudante pode se sentir convidado a usá-los.

10.5 Área de setores parabólicos

Na seção 10.4 vimos como definir área de regiões poligonais, mas não é simples definir medida de uma figura qualquer do plano. Para entender a dificuldade basta considerar figuras fractais, como o triângulo de Sierpinski.

Para as figuras mais comuns da Matemática Elementar, como discos, regiões elípticas, setores parabólicos, etc, utilizamos a definição abaixo, suficiente para essas situações. Uma propriedade que caracteriza essas regiões é que elas contêm regiões poligonais e estão contidas em regiões poligonais.

Definição 10.4. Seja $\mathcal{F}$ um subconjunto do plano, e suponhamos que existe uma região poligonal contida em $\mathcal{F}$ e uma região poligonal que contém $\mathcal{F}$. Seja α o supremo das áreas de todas as regiões poligonais contidas em $\mathcal{F}$, e β o ínfimo das áreas de todas as regiões poligonais que contêm $\mathcal{F}$. Se $\alpha = \beta$, dizemos que esse valor é a área de $\mathcal{F}$.

Dado um subconjunto $\mathcal{F}$ limitado do plano contendo regiões poligonais, sua área pode ser definida como o supremo das áreas dessas regiões. Mas na prática não temos como determinar todas essas regiões para calcular seu supremo. Consideração similar pode ser feita com as regiões poligonais que contêm $\mathcal{F}$. Em geral a área é obtida com sequências, por isso precisamos de aproximações inferiores e superiores. Mais exatamente na prática usamos o

Teorema 10.5. *Seja $\mathcal{F}$ um subconjunto do plano, e suponhamos que exista uma sequência (α_n) de áreas de regiões poligonais contidas em $\mathcal{F}$, e uma sequência (β_n) de áreas de regiões poligonais que contêm $\mathcal{F}$. Se existirem os limites dessas sequências e se forem iguais, então esse valor comum é a área de $\mathcal{F}$.*

Demonstração. O conjunto dos números que são áreas de regiões poligonais contidas em $\mathcal{F}$ é não vazio e limitado superiormente, logo tem supremo α. O conjunto dos números que são áreas de regiões poligonais que contêm $\mathcal{F}$ é não vazio e limitado inferiormente, logo tem ínfimo β. Temos $\alpha_n \leq \alpha \leq \beta \leq \beta_n$ para todo n. Portanto $\lim \alpha_n \leq \alpha \leq \beta \leq \lim \beta_n$. Como $\lim \alpha_n = \lim \beta_n$, todos esses valores são iguais, e, por definição, é a área de $\mathcal{F}$. □

No Capítulo 6, seção 6.5, vimos que, dado um disco $\mathcal{D}$ de raio r, a sequência (α_n) das áreas das regiões poligonais regulares de 2^n lados nele contidas converge para πr^2. No Problema 6.11.10 foi sugerido verificar que a sequência (β_n) das áreas das regiões poligonais regulares de 2^n lados que contêm $\mathcal{D}$ também converge para πr^2. Portanto a definição que havíamos dado de área do disco está de acordo com a Definição 10.4.

Vejamos agora áreas de setores parabólicos, que são regiões delimitadas por uma reta e por um arco de parábola, conforme ilustrado na Figura 10.4, à esquerda. O estudante pode verificar que, para calcular a área de qualquer setor parabólico, é suficiente saber a área de um *triângulo parabólico* (Figura 10.4, à direita).

Consideremos então um triângulo parabólico $\mathcal{T}$ delimitado pelo eixo Ox, pela reta $x = d$, com $d > 0$, e pelo gráfico de $f(x) = ax^2$, com $a > 0$ e $x \geq 0$. Passamos a definir uma sequência (α_n) de áreas de regiões poligonais contidas em $\mathcal{T}$.

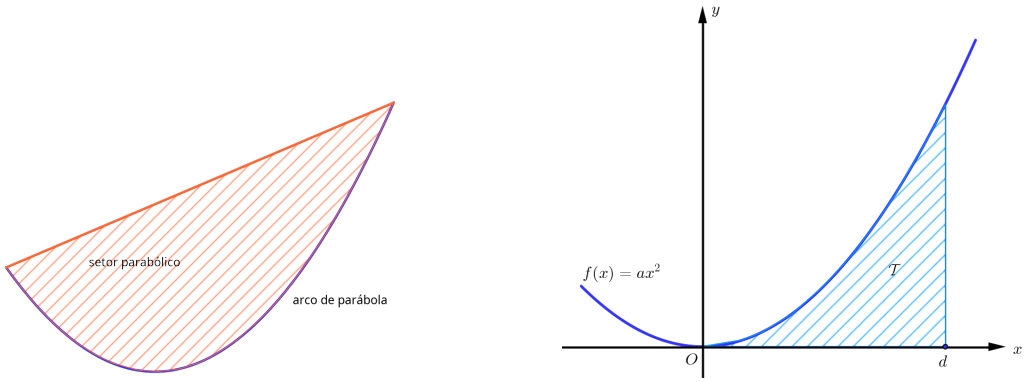


Figura 10.4. Exemplos de setor parabólico e triângulo parabólico.

Seja $n \geq 2$ um inteiro. Dividimos o intervalo $[0, d]$ do eixo Ox em n subintervalos, todos de comprimento d/n. Os extremos desses subintervalos são os pontos de abcissa

$$0, \qquad \frac{d}{n}, \qquad \frac{2d}{n}, \qquad \ldots \qquad \frac{id}{n}, \qquad \ldots \qquad \frac{(n-1)d}{n}, \qquad \frac{nd}{n} = d.$$

Consideremos os retângulos cujas bases são os subintervalos $\left[\frac{id}{n}, \frac{(i+1)d}{n}\right]$, $1 \leq i \leq n-1$, cada um de comprimento $\frac{d}{n}$, e cujas alturas são $f\left(\frac{id}{n}\right) = \frac{ad^2}{n^2} i^2$, $1 \leq i \leq n-1$, conforme está ilustrado na Figura 10.5.

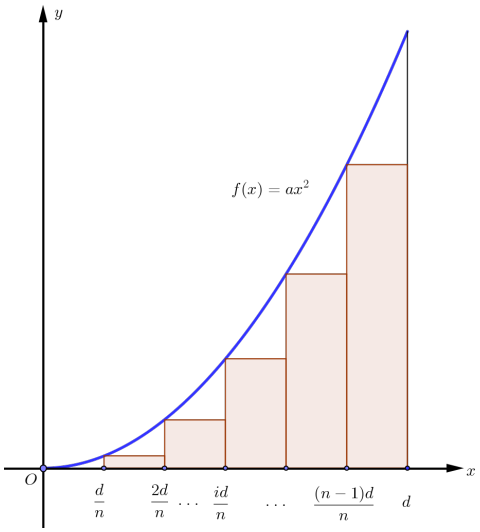


Figura 10.5. Cálculo da área do triângulo parabólico.

Seja α_n a área da região poligonal formada por esses retângulos. Essa região está contida no triângulo parabólico. Lembrando que $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + m^2 = \frac{1}{6}[m(m+1)(2m+1)]$ temos

$$\begin{aligned}
\alpha_n &= \frac{d}{n} f\left(\frac{d}{n}\right) + \frac{d}{n} f\left(\frac{2d}{n}\right) + \cdots + \frac{d}{n} f\left(\frac{(n-1)d}{n}\right) \\
&= \frac{d}{n} a \frac{d^2}{n^2} \left[1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2\right] \\
&= a \frac{d^3}{6n^3} \left[(n-1)n(2n-1)\right],
\end{aligned}$$

portanto

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \frac{ad^3}{6} \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)n(2n-1)}{n^3} = \frac{ad^3}{6} \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right) = \frac{ad^3}{3}.$$

Consideremos agora os retângulos cujas bases são os subintervalos $\left[\frac{(i-1)d}{n}, \frac{id}{n}\right]$ e cujas alturas são $f\left(\frac{id}{n}\right)$, com $1 \leq i \leq n$. Seja β_n a área da região poligonal formada por esses retângulos. Essa região contém o triângulo parabólico. O estudante pode verificar que

$$\lim_{n\to\infty} \beta_n = \frac{ad^3}{3}, \text{ portanto o mesmo que } \lim_{n\to\infty} \alpha_n .$$

Temos então o

Teorema 10.6. *Dado um sistema de coordenadas cartesianas xOy, a área do triângulo parabólico delimitado pelo eixo Ox, pela reta $x = d$, com $d > 0$, e pelo gráfico de $f(x) = ax^2$, com $a > 0$ e $x \geq 0$, é $\dfrac{ad^3}{3}$.*

10.6 Os Teoremas de Cavalieri

Conforme já comentamos, os métodos da Geometria Euclidiana são suficientes para a determinação da área de qualquer região poligonal. Nesse estudo o primeiro obstáculo que encontramos é a área do disco, para o que temos que lançar mão de métodos da Análise Matemática. Para volumes, os obstáculos aparecem mais cedo. Mesmo para um poliedro simples, como a pirâmide, já encontramos dificuldades, e precisamos usar os métodos da Análise Matemática.

Todos nós concordamos que volumes de sólidos, como prismas, pirâmides, cilindros, cones e esferas devem ser estudados no ensino básico. Os textos de Matemática Elementar, para evitar as dificuldades mencionadas, adotam o Princípio de Cavalieri. As dificuldades ficam concentradas em uma única afirmação, que é considerada plausível e assumida sem demonstração. A ideia desse princípio é fácil de entender, mas sua demonstração, em geral, para estudantes do ensino básico, é complicada. Conforme comentamos na página 52, é válido o uso de argumentos plausíveis no ensino da Matemática desde que: *(i)* a demonstração omitida não tenha papel central no assunto; *(ii)* os estudantes tenham atividades prévias que os levam a acreditar no argumento; *(iii)* o professor esteja preparado para suprir o que estiver faltando.

Sim, o Princípio de Cavalieri, geralmente adotado como postulado nos livros de Matemática Elementar, é na verdade um teorema. Vejamos duas versões desse princípio, para áreas e para volumes, e como podem ser demonstradas.

Princípio de Cavalieri para áreas Sejam $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ regiões de um plano, e seja r uma reta desse plano. Suponha que, para toda reta s paralela a r, as interseções de $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ com s sejam vazias ou sejam segmentos tais que a razão entre seus comprimentos é constante. Então a razão entre as áreas de $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ é essa mesma constante.

Princípio de Cavalieri para volumes Sejam $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ sólidos, e seja α um plano. Suponha que, para todo plano β paralelo a α, as interseções de $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ com β sejam vazias ou sejam regiões tais que a razão entre suas áreas é constante. Então a razão entre os volumes de $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ é essa mesma constante.



Figura 10.6. Bonaventura Francesco Cavalieri foi um matemático e frade italiano do Século XV, conhecido por seu *método dos indivisíveis*, precursor do Cálculo Diferencial e Integral (mais exatamente, da vertente denominada Cálculo Infinitesimal). Sua metodologia deu origem aos Princípios de Cavalieri, formato utilizado em nossa atual escola básica para justificar fórmulas de áreas e volumes. Cavalieri também contribuiu com a Ótica e com o estudo do movimento, e introduziu os logaritmos na Itália. Foi contemporâneo de Galileu, com quem se correspondia amiúde.

Esses princípios levam o nome do matemático italiano Bonaventura Francesco Cavalieri, que os chamava de *método dos indivisíveis*, e os divulgou (em versões mais restritas) através de seu famoso livro *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota*, de 1635. Mas, na verdade, esse método é muito anterior a Cavalieri, tendo sido utilizado por geômetras chineses dos primeiros séculos de nossa era e pelos antigos gregos, como Demócrito e Arquimedes.

A ideia inicial da demonstração do Princípio de Cavalieri para áreas é simples. Indicamos por $a(\mathcal{R})$ a área de uma região $\mathcal{R}$ do plano. Estamos fatiando duas regiões $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ do plano, como ilustrado na Figura 10.9.

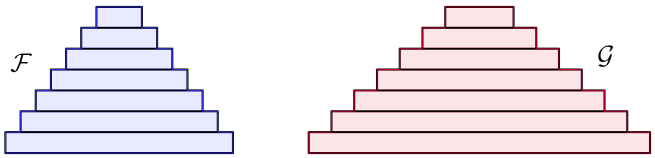


Figura 10.7. Ideia do Princípio de Cavalieri para áreas.

Se as fatias de $\mathcal{F}$ são $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, ..., $\mathcal{F}_n$ e as de $\mathcal{G}$ são $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$, ..., $\mathcal{G}_n$, de modo que $a(\mathcal{F}_i) = ka(\mathcal{G}_i)$ para algum número positivo k e para todo $1 \leq i \leq n$, então

$$a(\mathcal{F}) = a(\mathcal{F}_1) + \cdots + a(\mathcal{F}_n) = ka(\mathcal{G}_1) + \cdots + ka(\mathcal{G}_n) = k\left(a(\mathcal{G}_1) + \cdots + a(\mathcal{G}_n)\right) = ka(\mathcal{G}).$$

Ocorre que, no Princípio de Cavalieri para áreas, as regiões são "fatiadas" por segmentos, que não têm área, mas comprimento. Ainda, a quantidade de segmentos é infinita. Confira ilustração na Figura 10.8.

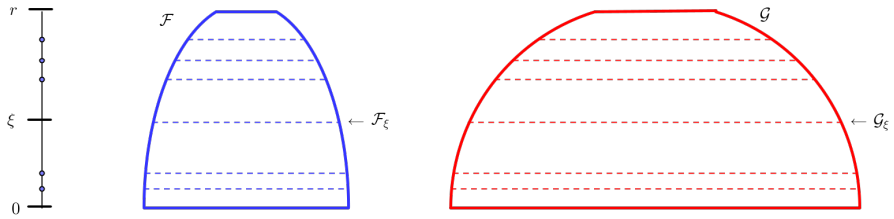


Figura 10.8. Princípio de Cavalieri para áreas.

Se existe um número real positivo r tal que as fatias de $\mathcal{F}$ são os segmentos $\mathcal{F}_\xi$, para $\xi \in [0, r]$, e se as fatias de $\mathcal{G}$ são os segmentos $\mathcal{G}_\xi$, para $\xi \in [0, r]$, de modo que seus comprimentos satisfaçam $c(\mathcal{F}_\xi) = kc(\mathcal{G}_\xi)$ para todo $\xi \in [0, r]$, então

$$\sum_{\xi \in [0,r]} c(\mathcal{F}_\xi) = \sum_{\xi \in [0,r]} kc(\mathcal{G}_\xi).$$

Necessitamos de uma técnica que nos garanta que essas somas infinitas são números, que são as áreas de $\mathcal{F}$ e de $\mathcal{G}$, respectivamente, e que

$$\sum_{\xi\in[0,r]} kc(\mathcal{G}_\xi) = k\sum_{\xi\in[0,r]} c(\mathcal{G}_\xi).$$

Observações análogas podem ser feitas sobre o Princípio de Cavalieri para volumes.

Essa técnica, como sabemos, é fornecida pelo Cálculo Diferencial e Integral. As demonstrações dos dois princípios de Cavalieri constituem uma aplicação direta da teoria de integração de funções reais. Observamos inicialmente que os enunciados desses princípios feitos acima não se preocupam em definir condições sobre as fronteiras das regiões e dos sólidos. Mas sabemos que é necessário impor condições de integrabilidade. Entendemos que isso não é feito nos livros textos do ensino básico, primeiro para não desviar a atenção do estudante, segundo por que, naqueles contextos, os princípios são aplicados para regiões e sólidos muito simples, que satisfazem naturalmente as condições necessárias.

Vejamos então como podemos enunciar os princípios de Cavalieri na forma de teoremas.

Teorema 10.7 (Princípio de Cavalieri para áreas)**.** *Consideremos em um plano um sistema de coordenadas cartesianas Oxy, e seja $\mathcal{R}$ a região delimitada por $y = 0$, $y = b > 0$ e pelos gráficos das funções contínuas $x = f_1(y)$ e $x = f_2(y)$, $0 \le y \le b$, com $f_1(y) \le f_2(y)$ para todo y. Seja $\mathcal{S}$ a região delimitada por $y = 0$, $y = b$ e pelos gráficos das funções contínuas $x = g_1(y)$ e $x = g_2(y)$, $0 \le y \le b$, com $g_1(y) \le g_2(y)$ para todo y. Suponhamos que exista $k > 0$ tal que $f_2(y) - f_1(y) = k\,[g_2(y) - g_1(y)]$ para todo y. Então $a(\mathcal{R}) = ka(\mathcal{S})$.*

Demonstração. Da teoria de integração de funções reais temos:

$$a(\mathcal{R}) = \iint_{\mathcal{R}} dxdy = \int_0^b \left[\int_{f_1(y)}^{f_2(y)} dx\right] dy = \int_0^b [f_2(y) - f_1(y)]\,dy = \int_0^b k\,[g_2(y) - g_1(y)]\,dy =$$

$$= k\int_0^b [g_2(y) - g_1(y)]\,dy = k\int_0^b \left[\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} dx\right] dy = k\iint_{\mathcal{S}} dxdy = ka(\mathcal{S}).$$

□

Indicamos por $v(\mathcal{P})$ o volume de um sólido $\mathcal{P}$.

Teorema 10.8 (Princípio de Cavalieri para volumes)**.** *Consideremos um sistema de coordenadas cartesianas $Oxyz$, e seja $\mathcal{P}$ um sólido finito delimitado por $z = 0$, $z = c > 0$ e por uma quantidade finita de gráficos de funções contínuas do tipo $y = f(x, z)$ e $x = g(y, z)$. Para cada t tal que $0 \le t \le c$, seja $\mathcal{P}_t$ a interseção de $\mathcal{P}$ com o plano $z = t$. Seja $\mathcal{Q}$ outro sólido finito delimitado por $z = 0$, $z = c > 0$ e por uma quantidade finita de gráficos de funções contínuas do tipo $y = f(x, z)$ e $x = g(y, z)$. Para cada t tal que $0 \le t \le c$, seja $\mathcal{Q}_t$ a interseção de $\mathcal{Q}$ com o plano $z = t$. Suponhamos que exista $k > 0$ tal que $a(\mathcal{P}_t) = ka(\mathcal{Q}_t)$ para todo t. Então $v(\mathcal{P}) = kv(\mathcal{Q})$.*

Demonstração. Da teoria de integração de funções reais temos:

$$v(\mathcal{P}) = \iiint_{\mathcal{P}} dxdydz = \int_0^c \left[\iint_{\mathcal{P}_z} dxdy\right] dz = \int_0^c a(\mathcal{P}_z)dz = \int_0^c ka(\mathcal{Q}_z)dz =$$

$$= k\int_0^c a(\mathcal{Q}_z)dz = k\int_0^c \left[\iint_{\mathcal{Q}_z} dxdy\right] dz = k\iiint_{\mathcal{Q}} dxdydz = kv(\mathcal{Q}).$$

□

10.7 Área da elipse e volume do elipsoide

Nesta seção vemos dois exemplos não usuais de aplicação dos princípios de Cavalieri, um para áreas, e outro para volumes.

De acordo com o que estudamos no Capítulo 6, a área do disco de raio r é πr^2. Ali usamos o método geométrico de Arquimedes para definir o número π e provar a fórmula citada. A partir disso podemos, através do Princípio de Cavalieri para áreas, obter a área de qualquer elipse.

Teorema 10.9. *A área da região elíptica de semieixos a e b é πab.*

Demonstração. Consideremos, em um sistema de coordenadas Oxy, a região semielíptica $\mathcal{R}$ dada por $x^2/a^2 + y^2/b^2 \leq 1$ e $y \geq 0$, sendo $b \geq a > 0$. Adotando a notação do Teorema 10.7 temos $f_1(y) = -a\sqrt{1 - y^2/b^2}$ e $f_2(y) = a\sqrt{1 - y^2/b^2}$, para $0 \leq y \leq b$. Consideremos o semidisco $\mathcal{S}$ dado por $x^2 + y^2 \leq b^2$ e $y \geq 0$. Sejam $g_1(y) = -\sqrt{b^2 - y^2}$ e $g_2(y) = \sqrt{b^2 - y^2}$, para $0 \leq y \leq b$. Notemos que

$$f_2(y) - f_1(y) = 2a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} = \frac{2a}{b}\sqrt{b^2 - y^2} = \frac{a}{b}\left[g_2(y) - g_1(y)\right].$$

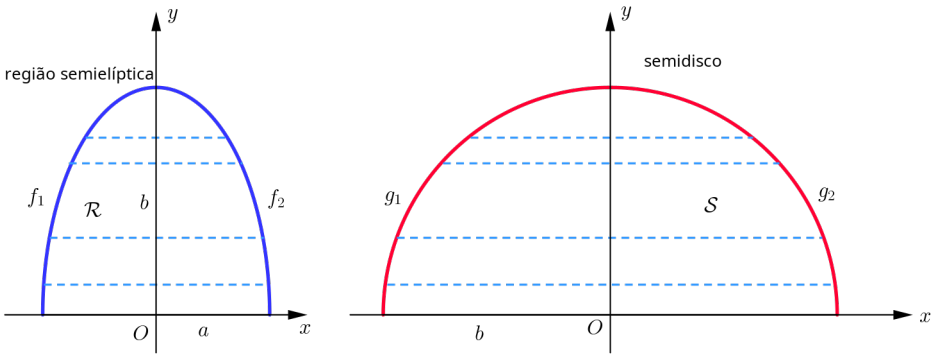


Figura 10.9. Área da região elíptica.

Estamos assim em condições de aplicar o Teorema 10.7, com $k = a/b$. Com isso temos

$$a(\mathcal{R}) = \frac{a}{b}a(\mathcal{S}) = \frac{a}{b}\frac{\pi b^2}{2} = \frac{\pi ab}{2}.$$

Essa é a área da região semielíptica. Duplicando segue o resultado. □

Uma das mais famosas aplicações do Princípio de Cavalieri para volumes é o cálculo do volume da esfera mediante sua comparação com um cilindro menos dois cones. Essa demonstração é apresentada em muitos livros textos para o ensino médio. Com isso sabemos que o volume da esfera de raio r é $(4/3)\pi r^3$. A partir disso podemos calcular o volume de qualquer elipsoide.

Teorema 10.10. *O volume do elipsoide de semieixos a, b e c é $\frac{4}{3}\pi abc$.*

Demonstração. Suponhamos $c \geq b \geq a > 0$, e consideremos o semielipsoide $\mathcal{P}$ definido por (desenho da esquerda da Figura 10.10)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1, \quad z \geq 0.$$

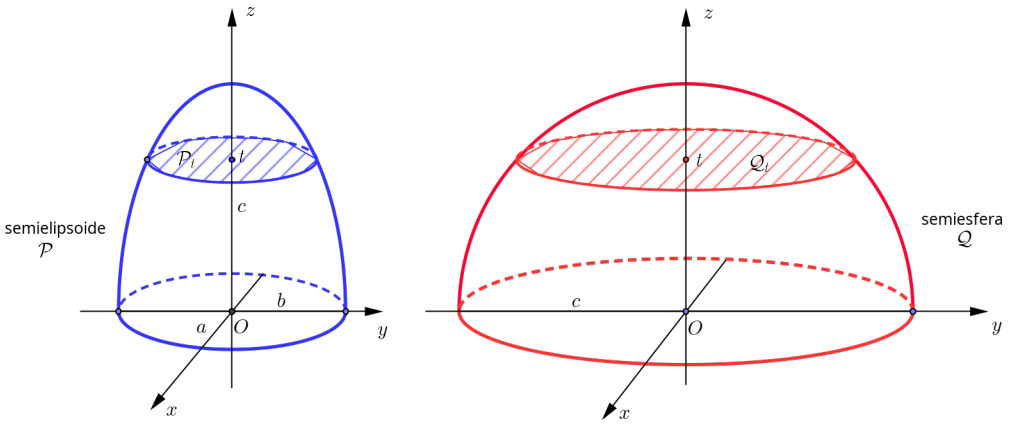


Figura 10.10. Volume do elipsoide.

Notemos que esse sólido é delimitado pelos planos $z = 0$, $z = c$ e pelos gráficos de duas funções contínuas do tipo $y = f(x, z)$ (ou do tipo $x = g(y, z)$). Além disso, para cada t tal que $0 \leq t \leq c$, a interseção $\mathcal{P}_t$ de $\mathcal{P}$ com o plano $z = t$ é dada por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{t^2}{c^2} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 - \frac{t^2}{c^2} = \frac{c^2 - t^2}{c^2}.$$

Seja $d = \sqrt{(c^2 - t^2)/c^2} = (1/c)\sqrt{c^2 - t^2}$. Então $\mathcal{P}_t$ é dado por

$$\frac{x^2}{(ad)^2} + \frac{y^2}{(bd)^2} \leq 1,$$

e, em virtude do Teorema 10.9, sua área é

$$\pi(ad)(bd) = \pi abd^2 = \frac{ab}{c^2}\pi(c^2 - t^2).$$

Consideremos agora a semiesfera $\mathcal{Q}$ definida por (desenho da direita da Figura 10.10)

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq c^2, \quad z \geq 0.$$

É fácil ver que esse sólido é delimitado pelos planos $z = 0$, $z = c$ e pelos gráficos de duas funções contínuas do tipo $y = f(x, z)$ (ou do tipo $x = g(y, z)$). Além disso, para cada t tal que $0 \leq t \leq c$, a interseção $\mathcal{Q}_t$ de $\mathcal{Q}$ com o plano $z = t$ é dada por

$$x^2 + y^2 + t^2 \leq c^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 \leq c^2 - t^2.$$

Seja $r = \sqrt{c^2 - t^2}$. Então $\mathcal{Q}_t$ é dado por

$$x^2 + y^2 \leq r^2$$

e sua área é $\pi r^2 = \pi(c^2 - t^2)$.

Notemos que, para cada t tal que $0 \leq t \leq c$,

$$a(\mathcal{P}_t) = \frac{ab}{c^2}\pi(c^2 - t^2) = \frac{ab}{c^2}a(\mathcal{Q}_t).$$

Estamos assim em condições de aplicar o Teorema 10.8 com $k = ab/c^2$. Temos então

$$v(\mathcal{P}) = kv(\mathcal{Q}) = \frac{ab}{c^2}\frac{1}{2}\frac{4}{3}\pi c^3 = \frac{1}{2}\frac{4}{3}\pi abc.$$

Esse é o volume do semielipsoide. Duplicando segue o resultado desejado. □

10.8 Comprimento da circunferência usando derivadas

Esta seção é um complemento do Capítulo 6. Façamos o que foi prometido na Observação 6.6.

Seja $\mathcal{C}$ uma circunferência de raio r e, para todo $n \geq 3$, seja p_n o perímetro do polígono regular de n lados inscrito em $\mathcal{C}$. Mostremos que (p_n) é crescente. Começamos com um resultado conhecido dos estudantes de Cálculo Diferencial de uma variável.

Lema 10.11. *Se* $0 < x < \pi/2$ *então*

$$\cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1.$$

Demonstração. Na Figura 10.11 a circunferência tem raio 1, $\angle BOC$ mede x (em radianos) e OB é perpendicular a AD e a BC. Portanto $AD = \operatorname{sen} x$ e $BC = \operatorname{tg} x$. Observe que a área do triângulo OBC é $\operatorname{tg}(x)/2$, a área do setor de circunferência OBD é $x/2$ (Teorema 6.21) e a área do triângulo OBD é $\operatorname{sen}(x)/2$. Examinando a figura fica claro que

$$a(\triangle OBD) < a(\text{setor}(OBD)) < a(\triangle OBC) \Rightarrow \frac{\operatorname{sen} x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg} x}{2}\,.$$

Manipulando essa relação obtemos o Lema. □

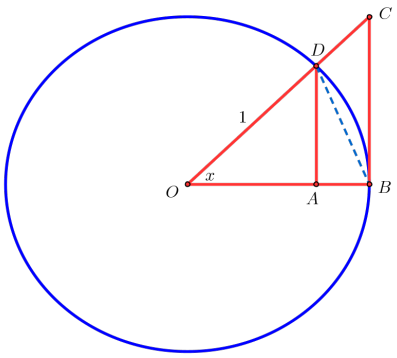


Figura 10.11. Uma desigualdade trigonométrica.

Consideremos um polígono regular de n lados $A_1A_2A_3\ldots A_n$ inscrito em $\mathcal{C}$. Seja ℓ_n o lado do polígono. Na Figura 10.12, $\ell_n = A_1A_2 = A_2A_3 = \ldots$, M é ponto médio de A_1A_2, portanto OM é um apótema do polígono, e $\angle MOA_1$ mede π/n. Temos assim $\ell_n = 2r\operatorname{sen}(\pi/n)$, e o perímetro do polígono é $p_n = n\ell_n = 2rn\operatorname{sen}(\pi/n)$.

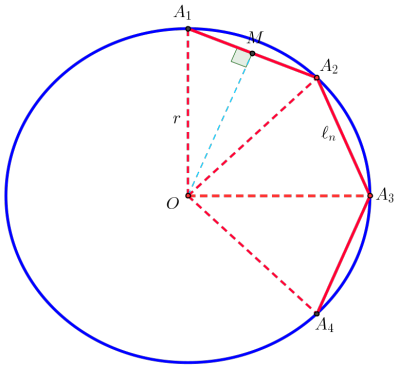


Figura 10.12. Fórmula trigonométrica para o perímetro.

Temos agora a

Proposição 10.12. *Seja $\mathcal{C}$ uma circunferência de raio r. A sequência $(p_n)_{n\geq 3}$ dos perímetros do polígonos regulares de n lados inscritos em $\mathcal{C}$ é crescente, limitada e convergente, e seu limite é $2\pi r$.*

Demonstração. Consideremos a função $f : [0, \pi/2) \mapsto \mathcal{R}$ definida por $f(0) = 1$ e $f(x) = \operatorname{sen}(x)/x$ se $x > 0$. Derivando f em $(0, \pi/2)$ temos $f'(x) = \frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^2}$. Usando o Lema 10.11 vemos que $f'(x) < 0$, e f é decrescente em $(0, \pi/2)$. Assim, para todo $n \geq 3$, temos

$$\begin{aligned} 0 < \frac{\pi}{n+1} < \frac{\pi}{n} < \frac{\pi}{2} \quad &\Rightarrow \quad f\Big(\frac{\pi}{n}\Big) < f\Big(\frac{\pi}{n+1}\Big) \\ &\Rightarrow \quad 2rn \operatorname{sen}\frac{\pi}{n} < 2r(n+1)\operatorname{sen}\frac{\pi}{n+1} \\ &\Rightarrow \quad p_n < p_{n+1}, \end{aligned}$$

portanto a sequência (p_n) é crescente. Usando novamente o Lema 10.11 temos $\operatorname{sen} x < x$ para todo $0 < x < \pi/2$, e isso implica, para todo $n \geq 3$, que

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{n} < \frac{\pi}{n} \Rightarrow n \operatorname{sen}\frac{\pi}{n} < \pi \Rightarrow 2rn \operatorname{sen}\frac{\pi}{n} < 2r\pi \Rightarrow p_n < 2r\pi.$$

Portanto (p_n) é crescente e limitada. Em virtude do Teorema das Sequências Monótonas 5.23, exite $\lim p_n$. Como a subsequência (p_{2^n}) converge para o comprimento $2\pi r$ de $\mathcal{C}$, o mesmo ocorre com a sequência (p_n). Terminamos a demonstração. □

Isso nos permite redefinir comprimento de uma circunferência.

Definição 10.13. O comprimento de uma circunferência é o limite dos perímetros dos polígonos regulares nela inscritos.

O Tema 10.10.5 complementa essas observações.

10.9 Problemas

Problema 10.9.1. Mostre que dados segmentos de medidas a e b, é possível construir, com régua e compasso, um segmento de medida $\sqrt{ab}$.

Problema 10.9.2. a) Explique por que $\sqrt[3]{2}$ é algébrico de grau 3 e, portanto, não é construtível. **b)** Mostre que, dado um cubo de volume v, não é possível construir com régua e compasso um cubo de volume $2v$.

Problema 10.9.3. a) Explique por que não é possível retificar qualquer circunferência. **b)** Explique por que não é possível quadrar qualquer circunferência.

Problema 10.9.4. Mostre que $X = 15 + 8\sqrt{11 + \sqrt{3 + 5\sqrt{7 + 2\sqrt{5}}}}$ é construtível obtendo um sequência $X_0 = 5$, X_1, X_2, ..., X de números da forma $A + B\sqrt{C}$.

Problema 10.9.5. Os números $a > b > 0$ estão em *média e extrema razão* quando $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$. Essa razão é o *número áureo* ϕ. **a)** Mostre que ϕ é a raiz positiva de $\phi^2 - \phi - 1 = 0$, e que $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$. **b)** Demonstre que $1/\phi = (\sqrt{5} - 1)/2$ e $\phi - 1 = 1/\phi = \sqrt{2 - \phi}$. **c)** Mostre que $\phi = [1, 1, 1, 1, ...]$. Calcule os convergentes e observe suas propriedades. **d)** Interprete e demonstre $\phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}}}$. **e)** Se (f_n) é a sequência de Fibonacci, definida na página 92, demonstre que $\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \phi$.

Problema 10.9.6. Explique como pode ser demonstrada a terceira parte do Teorema 10.3 usando o resultado do Problema 5.7.38.

Problema 10.9.7. Usando um dos métodos analíticos vistos, demonstre que a área de um retângulo de dimensões a e b (números reais positivos quaisquer) é ab.

Problema 10.9.8. Partindo do resultado de que a área do quadrado de lado ℓ é ℓ^2, use recortes de figuras em uma folha de papel para se inspirar e prover demonstrações algébricas/geométricas para as seguintes afirmações: **a)** a área de um retângulo de dimensões a e b (números reais positivos quaisquer) é ab; **b)** a área de qualquer triângulo se obtém calculando a metade do produto de um lado qualquer pela respectiva altura.

Problema 10.9.9. a) Demonstre o seguinte: *Se $f : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$ é uma função crescente tal que $f(nx) = nf(x)$ quaisquer que sejam $x \in \mathbb{R}_+$ e $n \in \mathbb{Z}_+$, então $f(rx) = rf(x)$ quaisquer que sejam $x, r \in \mathbb{R}_+$.* **b)** Suponha que a área do quadrado de lado 1 seja 1. Usando a parte a), prove que a área do retângulo de dimensões a e b é ab. **c)** Suponha que o volume de um cubo de lado 1 seja 1. Usando a parte a), prove que o volume do paralelepípedo reto retângulo de dimensões a, b e c é abc.

Problema 10.9.10. Demonstre que $\lim_{n\to\infty} \beta_n = \frac{ad^3}{3}$, completando assim o Teorema 10.6.

Problema 10.9.11. Calcule a área da região hachurada da Figura 10.13, delimitada pelas curvas $y = 3x^2$ e $y = x^2$ e pelas retas $x = 1$ e $x = 5/2$.

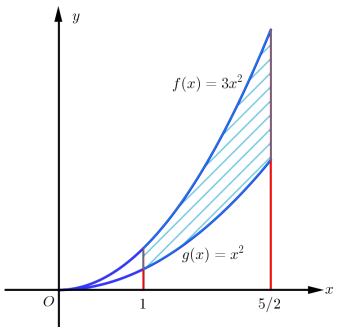


Figura 10.13. Calcule a área.

Problema 10.9.12. Dentre os tratados de Arquimedes que se ocuparam do Cálculo Integral, o mais popular era a *Quadratura da Parábola*. Nele Arquimedes demonstrou o seguinte resultado. Considere o setor parabólico APB tal que AB é paralelo à reta tangente à parábola pelo vértice P, conforme a Figura 10.14. Segundo Arquimedes, a área desse setor é igual a $4/3$ da área do triângulo APB. Demonstre você mesmo esse resultado.

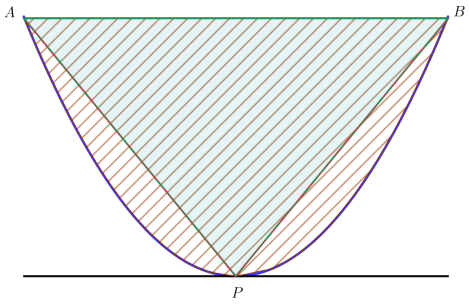


Figura 10.14. Um teorema de Arquimedes.

Problema 10.9.13. Considere conhecida a fórmula do volume do paralelepípedo reto retângulo. Veja como você pode obter e justificar uma fórmula para o volume de: **a)** um paralelepípedo qualquer de altura h; **b)** um cilindro circular reto de altura h, e **c)** um cilindro circular oblíquo de altura h.

10.10 Temas para investigação

Tema 10.10.1. Pesquise o que são números primos de Fermat. Levando em conta as informações da Seção 10.2, faça uma lista de polígonos regulares construtíveis e não construtíveis, justificando cada caso.

Tema 10.10.2. A *Constante Parabólica* P é a razão entre dois elementos de uma parábola qualquer, conforme descrição que segue. Seja $f(x) = ax^2$ a função da parábola em sua forma canônica, com $a > 0$. Seu foco é $F = \left(0, \frac{1}{4a}\right)$, e sua reta diretriz é $y = -\frac{1}{4a}$, pelo ponto $D = \left(0, -\frac{1}{4a}\right)$. A distância entre o foco e essa reta é $d_a = \frac{1}{2a}$. A reta horizontal que passa pelo foco intersecta o gráfico da parábola nos pontos $G_1 = \left(-\frac{1}{2a}, \frac{1}{4a}\right)$ e $G_2 = \left(\frac{1}{2a}, \frac{1}{4a}\right)$. Confira a Figura 10.15.

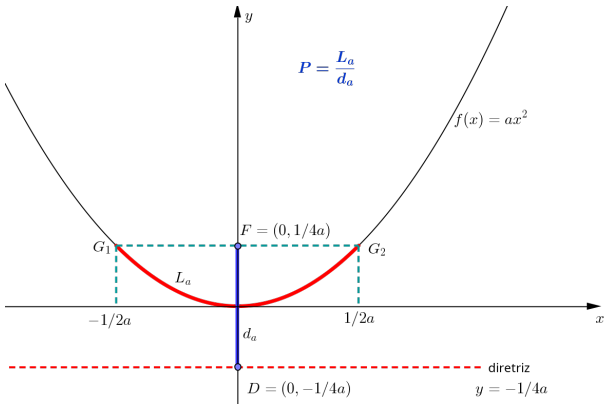


Figura 10.15. Elementos da constante parabólica P.

Seja L_a o comprimento do arco da parábola de G_1 a G_2. Então $P = \frac{L_a}{d_a}$ não depende de a, e assim é uma constante. Verifique. Prove que P é transcendente.

Tema 10.10.3. Faça experimentos numéricos com a constante de Kinchin K_0. Teste as FCS's de π, γ e $\sqrt[3]{2}$. Observe que FCS's que têm regularidades não obedecem esse comportamento (como é o caso das FCS's periódicas). Teste a FCS de e. Use o Maxima e observações feitas em 11.4.

Tema 10.10.4. Considere as figuras poliedrais no espaço que costumam serem abordadas no ensino básico (paralelepípedos, pirâmides, prismas, etc). No momento não é necessário se preocupar com sua definição geral. Construa um sistema axiomático V_i, $1 \leq i \leq 5$, para definir volume dessas figuras. Assuma V_5 estabelecendo que o volume do cubo de lado 1 é 1. **a)** Usando métodos analíticos demonstre que o volume de um cubo de aresta a real positivo é a^3. **b)** Demonstre também que o volume do paralelepípedo reto retângulo de dimensões a, b e c é abc.

Tema 10.10.5. Seguindo as ideias das Seções 10.5 e 10.8, execute as seguintes propostas. **a)** Dada uma circunferência de raio r, use funções trigonométricas para exprimir o perímetro dos polígonos regulares inscritos e circunscritos a ela, e obter assim sequências (p_n) e (P_n) que aproximam seu comprimento por falta e por excesso. Usando a Teoria de Limites de Funções Reais, calcule os limites dessas sequências e faça suas conclusões. **b)** Use a mesma técnica para obter a área do disco.

Tema 10.10.6. **a)** Dado um sistema de coordenadas cartesianas Oxy e dados $a > 0$ e $d > 0$, denominamos *triângulo cúbico* à região delimitada pelo eixo das abcissas, pela reta $x = d$ e pelo gráfico de $y = ax^3$, $x \geq 0$. Encontre a área dessa região usando a mesma técnica da Seção 10.5. Confira a Figura 10.16. **b)** Defina o que pode ser um *setor cúbico*. **c)** Enuncie e demonstre um teorema tipo Arquimedes para esse caso. **d)** Como ficam as generalizações para funções $f(x) = ax^m$, $a > 0$ e $m \geq 2$ inteiro?

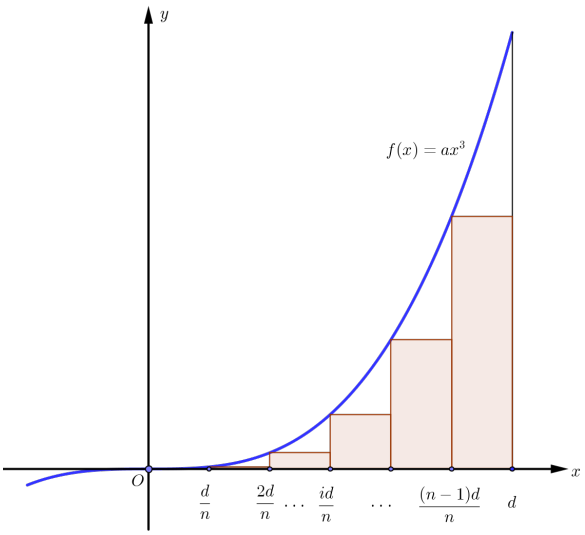


Figura 10.16. Setor cúbico.

10.11 Atividades para licenciandos e professores

Atividade 10.11.1. (INEP- ENC 98, adaptado) Em uma aula sobre área de retângulos, você sugere aos estudantes desenhar retângulos com lados medindo uma quantidade inteira de centímetros a e b. Dividindo a região retangular em quadrados de 1 cm^2, eles percebem claramente que a área é $a \times b$ cm^2. Um estudante então pergunta: e se os lados medirem 3,6 cm e 7,4 cm? Como você lidaria com essa pergunta?

Atividade 10.11.2. Na seção 10.6 comentamos que é válido o uso de argumentos plausíveis no ensino do Princípio de Cavalieri, desde que: *(i) a demonstração omitida não tenha papel central no assunto; (ii) os estudantes tenham atividades prévias que os leva a acreditar no argumento; (iii) o professor esteja preparado para suprir o que estiver faltando.* Imagine atividades prévias que possam facilitar a compreensão dos princípios de Cavalieri (para áreas e volumes).

Atividade 10.11.3. Em [123] o autor relata uma estratégia de um estudante para calcular a área do triângulo parabólico sob a parábola $f(x) = x^2$. Estude essa estratégia, que parece ser uma estranha mistura dos Princípios de Cavalieri no plano e no espaço. Esse método se adapta para áreas de triângulos parabólicos sob a parábola $f(x) = ax^2$? De que forma você, como professor, analisa essa proposta?

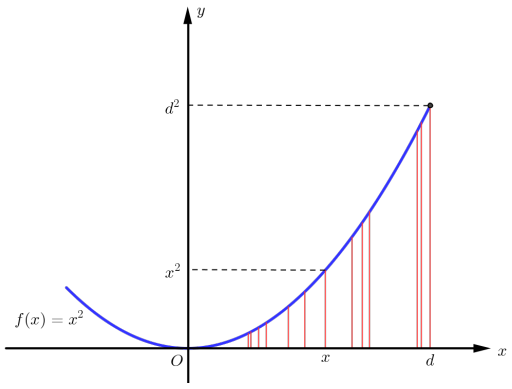


Figura 10.17. Uma ideia diferente para o triângulo parabólico.

a) No triângulo parabólico delimitado pelo eixo Ox, pela reta vertical $x = d > 0$ e pelo gráfico de $f(x) = x^2$ (Figura 10.17), considere todos os segmentos verticais de $(x, 0)$ a (x, x^2), com $0 \leq x \leq d$.
b) O comprimento de cada um desses segmentos é x^2, medida essa igual à área de um quadrado de lado x. Consideremos então todas as regiões quadradas de lado x, com $0 \leq x \leq d$. Confira a Figura 10.18, à esquerda.
c) Empilhando esses quadrados formamos uma pirâmide cuja base é um quadrado de lado d e cuja altura é d ("já que a variável da função cresceu de zero até d"). Confira a Figura 10.18, à direita. Então a área do triângulo parabólico é igual ao volume da pirâmide, portanto igual a $d^3/3$.

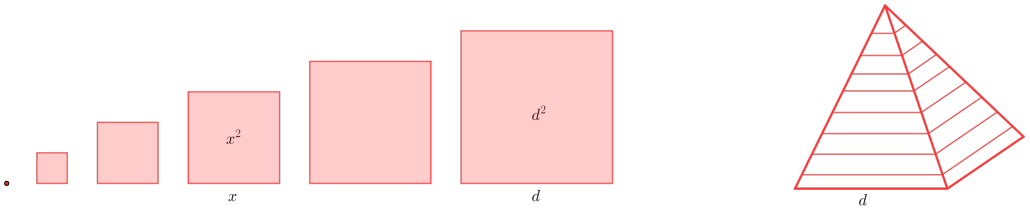


Figura 10.18. Quadrados "equivalentes" aos segmentos e pirâmide.

Atividade 10.11.4. Uma atividade sobre "demonstração sem palavras". **a)** Na Figura 10.19 vemos um retângulo não quadrado, uma forma de recortá-lo e de remontar as peças. Enuncie o teorema que está sendo provado. Considere também alguma demonstração algébrica do resultado.

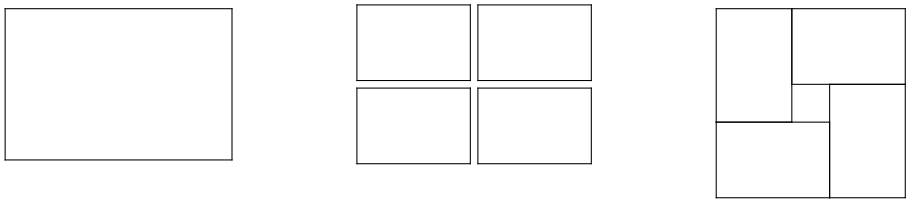


Figura 10.19. O que está sendo provado sobre retângulos?

b) Explore também a sequência de figuras 10.20.

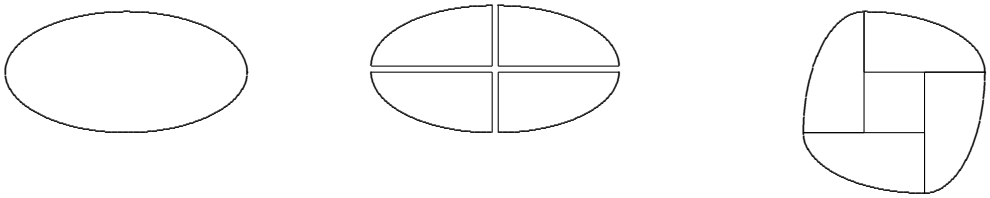


Figura 10.20. O que está sendo provado sobre elipses?

Capítulo 11

Aplicativos computacionais para Análise na Reta

11.1 Introdução

Apresentamos neste Capítulo uma breve orientação sobre o uso dos aplicativos computacionais algébricos, um importante recurso para aprendizagem e investigação em Matemática. Embora este Capítulo esteja no final do texto, ele pode ser lido logo no início, e utilizado para facilitar o estudo de todos os outros capítulos.

Na verdade, nossa orientação se dirige mais especificamente ao aplicativo Maxima. Nós o escolhemos por ser de domínio público e relativamente simples. Mas o estudante pode adaptar os comandos e exemplos aqui expostos para qualquer outro aplicativo.

O **Maxima** é um software matemático e um aplicativo computacional algébrico, básico mas muito bom para estudantes e profissionais de Matemática e outras ciências. Foi construído sobre uma versão de 1982 do Macsyma e lançado também em 1982. É desenvolvido pelo Grupo Macsyma e colaboradores voluntários. É um software livre disponibilizado sob os termos da GNU General Public License (GPL). A interface gráfica mais usada é o wxMaxima. Para mais detalhes consulte a Wikipedia [129] no verbete *Máxima (software)*.

11.2 Pequeno dicionário de comandos do Maxima

Uma breve introdução pode ser lida em [96], Capítulo 12. Repetimos aqui algumas instruções iniciais. Uma linha de comando deve terminar com ; (ponto e vírgula). O comando é executado com as teclas Ctrl+Enter. A resposta é transcrita na linha logo abaixo. Se não precisar da resposta, o comando pode ser encerrado com $ (cifrão). Para fazer comentário coloque-o entre /* e */ o interpretador do Maxima ignora o que está escrito ali.

Exemplo de multiplicação no Maxima:

```
(%i1)  3*7;  /* use a tecla * para indicar multiplicação */
(%o1)  21
```

Destacamos alguns exemplos. Tipicamente, números não inteiros são expressos com 16 casas, contando antes e depois da vírgula (que no Maxima é expressa por ponto).

```
(%i6)  5.0/2;  30/21;  1/3;  1.0/3;  float(1/3);  1/3, numer;
(%o1)  2.5
(%o2)  10/7
(%o3)  1/3
(%o4)  0.333333333333333
(%o5)  0.333333333333333
(%o6)  0.333333333333333
```

É bom também ver como calcular raízes quadradas.

```
(%i5)  sqrt(4);  sqrt(5);  sqrt(5.0);  sqrt(8);  float(sqrt(5));
(%o1)  2
(%o2)  sqrt(5)
(%o3)  2.23606797749979
(%o4)  2^(3/2)
(%o5)  2.23606797749979
```

Seguem exemplos com raízes n-ésimas.

```
(%i5)  nthroot(8,3);  nthroot(9,3);  8^(1/3);  9^(1/3);  9.0^(1/3);
(%o1)  2
(%o2)  nthroot: 9 is not a "third" power
(%o3)  2
(%o4)  9^(1/3)
(%o5)  2.080083823051904
```

De nosso interesse mais próximo é ver que as expressões para o número de Arquimedes π, o número de Euler e e a unidade imaginária i são, respectivamente, %pi, %e %i. O número de ouro $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ pode ser chamado por %phi. Exemplos:

```
(%i7)  %pi;  %i*%i;  float(%pi);  float(%e);  compare(%pˆ%e,%eˆ%pi);  float(%phi);
       fpprec:30$  bfloat(%pi);
(%o1)  π
(%o2)  -1
(%o3)  3.141592653589793
(%o4)  2.718281828459045
(%o5)  <
(%o6)  1.618033988749895
(%o7)  3.14159265358979323846264338328b0
```

Para obter o valor numérico de π com mais casas é necessário primeiro assinalar o valor desejado à variável fpprec e depois usar o comando bfloat( ). O código b0 no final da linha 7 de resposta significa que a vírgula deve ser deslocada 0 casas (portanto aqui nada há a alterar).

Apresentamos a seguir uma pequena lista de comandos que nos são úteis amiúde. Outros comandos podem ser acessados diretamente no menu superior da página inicial da interface do Maxima.

abs(z) (z complexo) retorna o valor absoluto de z.

binomial(a,b) retorna o valor do número binomial $\binom{a}{b}$.

ceiling(x) (x real) retorna o menor inteiro $\geq x$.

cf(x) retorna um certo número de quocientes parciais da fração contínua simples de x, que pode ser um número racional em forma de fração de inteiros ou na forma de expansão decimal, ou ainda uma expressão da forma $\sqrt[n]{a}$, com a e n inteiros positivos. Mais detalhes na Seção 11.4.

divide(a,b) retorna o quociente e o resto da divisão euclidiana de a por $b \neq 0$.

divisors(n) retorna o conjunto dos divisores positivos de n.

divsum(n) retorna a soma dos divisores positivos de n, incluindo 1 e n.

factor(n) retorna a decomposição canônica de n.

fib(n) retorna o termo de ordem $n+1$ da sequência de Fibonacci, começando com fib(0)=0 e fib(1)=1.

floor(x) (x real) retorna o maior inteiro $\leq x$.

gcd(a,b) retorna mdc(a,b). Para mais de dois números, use propriedades.

ifactors(n) retorna a decomposição canônica de n na forma de listas [primo,expoente].

integer_partitions(n) retorna as partições de n como soma de inteiros positivos na forma de conjunto de listas.

integerp(expr) retorna true se expr corresponde a um inteiro, e false do contrário.

inrt(x,n) com x real e n inteiro positivo. Retorna $\left[\sqrt[n]{|x|}\right]$ (parte inteira).

isqrt(x) o mesmo que inrt(x,2).

lcm(a,b,...) retorna mmc$(a,b,...)$.

max(a,b,...,x) retorna max$\{a,b,\ldots,x\}$.

min(a,b,...,x) retorna min$\{a,b,\ldots,x\}$.

mod(a,m) retorna a módulo m, isto é, o resto da divisão euclidiana de a por m.

next_prime(n) retorna o menor primo maior do que n.

num_partitions(n) retorna o número de partições de n inteiro não negativo.

num_partitions(n,list) retorna a lista dos números de partições de 1, 2, 3, ..., n.

power_mod(a,n,m) retorna a^n módulo m, isto é, o resto da divisão euclidiana de a^n por m.

prev_prime(n) retorna o maior primo menor do que n.

primep(n) comando probabilístico. Se retorna false então n é composto. Se $n < 10^{16}$ e se retorna true, então n é primo. Se $n \geq 10^6$ e se retorna true, n é provavelmente primo.

round(x) (x real) retorna a parte inteira de x.

totient(n) retorna o número de inteiros positivos menores ou iguais a n e relativamente primos com n. Essa é a função φ de Euler.

Uma orientação completa sobre os comandos do Maxima pode ser obtida em [2] ou em [80]. Consulte também [4] e [78].

11.3 Exemplos

Começamos com um exemplo sobre o cálculo de expansões decimais de números racionais.
Exemplo 11.1. Usando o Maxima, calcule o comprimento do período de 1/57. Obtenha também o período.

Solução. Como $57 = 3 \cdot 19$, temos $\text{mdc}(57, 10) = 1$. Portanto a expansão decimal de 1/57 é infinita periódica. Uma forma de obter o comprimento do período seria perfazer a divisão $1 \div 57$, mas como vimos no Tema 2.9.6, na pág. 41, podemos obtê-lo antes disso: o comprimento do período é o menor inteiro positivo m tal que $57 \mid 10^m - 1$. Em outros termos, o resto euclidiano da divisão de 10^m por 57 deve ser 1, e m deve ser o menor valor para o qual isso ocorre.

O dicionário de comandos nos informa que mod(10^n,57) retorna o resto da divisão euclidiana de 10^n por 57. Assim precisamos executar esse comando para $n = 1, 2, 3,...$ até encontrar resto 1. Com certeza até $57 - 1 = 56$ isso ocorrerá, pois esse é o valor máximo do comprimento do período.

Para fazer esse cálculo usamos o seguinte comando de fluxo no Maxima:

```
(%i1)  for n from 2 thru 56 do print(n,".....",mod(10^n,57));
(%o1)  1.....10
       2.....43
       3.....31
       4.....25
       ⋮
       18.....1
       ⋮
       56.....43
```

O primeiro da lista que fornece resto 1 é $n = 18$, e esse é o comprimento do período. O estudante certamente poderá melhorar o comando de fluxo para que o sistema retorne apenas o menor valor de n.

Quanto ao período, desconheço algum comando do Maxima que o calcule diretamente. Assim precisamos pedir 1/57.0 e examinar os dígitos. Tentamos primeiro

```
(%i1)  1/57.0;
(%o1)  0.01754385964912281
```

que não apresenta todo o período (lembrando que o Maxima trabalha com 16 casas). Inclusive o último dígito pode ter sido alterado por arredondamento. Fazemos então o seguinte:

```
(%i2)  fpprec:40; bfloat(1/57);
(%o1)  40
(%o2)  1.7543859649122807[0175438596491228 07]01754b-2    /* O destaque é nosso */
```

O código b-2 indica que a vírgula deve ser recuada duas casas. Examinando os dígitos vemos que

$$\frac{1}{57} = 0{,}\overline{017\,543\,859\,649\,122\,807}$$

□

11.4 Frações contínuas simples (FCS)

O comando **cf(x)** retorna um certo número de quocientes parciais da fração contínua simples de x, mas existe limitação sobre o tipo de número x. Ele pode ser um racional na forma de fração de inteiros ou expansão decimal finita ou um irracional da forma $\sqrt{a}$ (ou mesmo na forma $\sqrt[n]{a}$).

O uso desse comando exige cuidados. Vejamos alguns exemplos.

Caso 1. Número racional na forma de fração de inteiros ou expansão decimal finita. O sistema retorna a representação em que $a_n > 1$. Lembramos que nesses casos a fração contínua simples é finita. Exemplos:

```
(%i1)  cf(123/71);
(%o1)  [1,1,2,1,2,1,4]
(%i2)  123/71.0;
(%o2)  1.732394366197183
(%i3)  cf(%);
(%o3)  [1,1,2,1,2,1,4]
```

A expansão $\frac{123}{71.0} = 1,732394366197183$ não está completa, pois o período é 35. Assim se quiser ter certeza use a expansão completa começando com fpprec:72$ bfloat(123/71); Mas o resultado é o mesmo pois a precisão anterior foi suficiente.

Caso 2. Número irracional algébrico da forma $\sqrt{a}$. Lembramos que nesses casos a FCS é infinita e periódica. Exemplos:

```
(%i1)  cf(sqrt(31));
(%o1)  [5,1,1,3,5,3,1,1,10]
```

portanto $\sqrt{31} = [5, \overline{1, 1, 3, 5, 3, 1, 1, 10}]$ (comprimento do período=8).

Se quiser ter certeza mude o valor da variável cflength para 2 ou mais, assim o período se repete:

```
(%i1)  cflength:2$  cf(sqrt(31));
(%o1)  [5,1,1,3,5,3,1,1,10,1,1,3,5,3,1,1,10]
```

Caso 3. Número irracional algébrico de outras formas e números transcendentes. Exemplos:

```
(%i1)  fpprec:30$ bfloat(sqrt(2+sqrt(2)));
(%o1)  1.84775906502257351225636637879b0
(%i2)  cf(%);
(%o2)  [1,1,5,1,1,3,6,1,3,3,10,10,1,1,1,5,2,3,1,1,3,6,1,8,74,2,1,2,4,2,4]
```

Por ser $\sqrt{2+\sqrt{2}}$ um número algébrico de grau 4, sua FCS é infinita não periódica. Portanto

$$\sqrt{2+\sqrt{2}} = [1, 1, 5, 1, 1, 3, 6, 1, 3, 3, 10, 10, 1, 1, 1, 5, 2, 3, 1, 1, 3, 6, 1, 8, 74, 2, 1, 2, 4, 2, 4, \ldots].$$

Um exemplo com número transcendente:

```
(%i1)  fpprec:30$ bfloat(%pi);
(%o1)  3.14159265358979323846264338328b0
(%i2)  cf(%);
(%o2)  [3,7,15,1,292,1,1,1,2,1,3,1,14,2,1,1,2,2,2,2,1,84,2,1,1,15,3,14]
```

Portanto $\pi \approx [3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 84, 2, 1, 1, 15, 3, 14, \ldots]$, lembrando que a FCS de números transcendentes é infinita não periódica.

Pode haver erro nos últimos valores. Para checar isso um jeito é repetir os comandos com maior precisão. Usando fpprec:50 se vê que o último valor é, na verdade, 13. Seguem 1,4,2,6,6,99, etc.

O sistema aceita a expressão $\sqrt[n]{a}$, e a variável cflength funciona diferente, ela determina o número aproximado de quocientes parciais. Exemplo:

```
(%i1)  cflength:30$  cf(2^(1/3));
(%o1)  [1,3,1,5,1,1,4,1,1,8,1,14,1,10,2,1,4,12,2,3,2,1,3,4,1,1,2,14,3,12]
```

Portanto $\sqrt[3]{2} = [1, 3, 1, 5, 1, 1, 4, 1, 1, 8, 1, 14, 1, 10, 2, 1, 4, 12, 2, 3, 2, 1, 3, 4, 1, 1, 2, 14, 3, 12, \ldots]$. Para se certificar dos últimos valores, aumente a variável cflength e compare os resultados.

Observamos ainda que o comando cfdisrep(list) escreve uma lista de números na forma de fração contínua simples, o que permite calcular convergentes. Vejamos um exemplo, em que calculamos o terceiro convergente de $123/71 = [1, 1, 2, 1, 2, 1, 3, 1]$.

```
(%i1)  cfdisrep([1,1,2,1]);
```

$$(\%o1)\quad 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1}}}$$

```
(%i2)  1+1/(1+1/(2+1/1));     /* usando Ctrl+c e Ctrl+v */
```

$$(\%o2)\quad \frac{7}{4}$$

11.5 Mudança de base em expansões β-ádicas

Não existem comandos que façam diretamente mudanças de base em representações de números. Mas os recursos do Maxima podem ser usados para isso de acordo com os exemplos a seguir.

Caso 1. Passagem de números inteiros da base dez para outra base β, sendo $2 \leq \beta \leq 36$. A partir da base dez, a ordem das letras maiúsculas para indicar os algarismos é a do alfabeto inglês. Os valores das letras são: A=10, B=11, ..., Y=34 e Z=35.

O comando padrão é printf(true,"~βr",n)$ em que n é o número inteiro positivo decimal que se deseja transformar e β é a nova base (escrita na base dez). O sinal ~ é o til do teclado. A letra r deve seguir o número da base β escolhida. Se usar ; no lugar de $ o sistema retorna, além da resposta na linha imediatamente abaixo, a mensagem *false*, a qual significa que o comando foi executado.

Exemplos: transformando os números decimais $11 = 1\cdot2^3+0\cdot2^2+1\cdot2^1+1\cdot2^0$ e $35 = 2^5+2+1$ na base dois e $1294 = 35 \cdot 36 + 34$ na base trinta e seis:

```
(%i1) printf(true,"~2r",11)$
1011
(%i2) printf(true,"~2r",35)$
100011
(%i3) printf(true,"~36r",1294)$
ZY
```

Portanto, $(11)_{dez} = (1011)_{dois}$, $(35)_{dez} = (100011)_{dois}$ e $(1294)_{dez} = (ZY)_{trinta-e-seis}$.

Caso 2. Passagem de uma base β, com $2 \leq \beta \leq 9$, para a base dez.

A sequência de comandos é:
load(″eval_string″)$ ibase:$\beta$$ parse_string(″n″);

n é o número escrito na base dez. O comando ibase:β muda o valor dessa variável interna, sendo que seu valor padrão é 10. Isso faz com que os inteiros sejam lidos nessa nova base. Depois que usar esses comandos reinicie o Maxima para anular os dois primeiros comandos (no menu horizontal superior entre em "Maxima"); caso contrário, os comandos seguintes podem ser afetados.

Exemplo: transformar $(52367)_{nove}$ em decimal:

```
(%i2) load(″eval_string″)$ ibase:9$
(%i3) parse_string(″52367″);
(%o3) 34567
```

A resposta é: $(52367)_{nove} = (34567)_{dez}$.

Outras opções são comentadas nos problemas.

Caso 3. Passagem de um número racional positivo $x < 1$ em representação decimal finita para outra base β, com $2 \leq \beta \leq 9$.

Um programa bem simples pode ser o seguinte, em que passamos 0,65 para a base dois usando o 2º método do Exemplo 8.17.

Na entrada definimos $x = 0.65$ e iniciamos mais quatro variáveis: b:2 (base escolhida), y (para receber a resposta), z (variável auxiliar) e n (contador). O limite n<21 é tentativo, e significa que o laço será executado 20 vezes. Sabemos que a expansão de 0,65 na base dois é infinita periódica, e esperamos que o valor 20 seja suficiente para expor o período. Caso contrário deve-se aumentar esse limite.

```
(%i5) x:0.65$ b:2$ y:0$ d:0$ n:1$
(%i6) y:sconcat(y,".")$
(%o7) while n<21 do (x:x*b, d:truncate(x), y:sconcat(y,d), x:x-d, n:n+1)$
(%o8) y;
(%i8) 0.10100110011001100110
```

Portanto $(0{,}65)_{dez} = (0{,}10\overline{1001})_{dois}$.

O comando sconcat(y,d) concatena o dígito atual d ao final da representação de y. Dessa forma, ao finalizar o laço while, temos o retorno de 20 dígitos, aproximadamente. Fazendo experimentos vemos que pode haver erros nos dígitos finais devido aos arredondamentos ocorridos nos cálculos intermediários. Entretanto, se for possível perceber o período, o resultado pode ser verificado por outro método.

Esses comandos não funcionam para base >10, e um programa melhor fica por conta dos aficionados de programação.

11.6 Problemas

Problema 11.6.1. a) No Exemplo 11.1, melhore o comando de fluxo para que o retorno seja apenas o menor n tal que $57 \mid 10^n - 1$. **b)** Ache o comprimento do período de 2017. Esse número é primo?

Solução de a) Usei

```
(%i1)  n:1$ while mod(10^n,57)>1 do n:n+1$ n;
(%o1)  18
```

Solução de b) É 2016. Usei

```
(%i1)  n:1$ while mod(10^n,20167)>1 do n:n+1$ n;
(%o1)  2016
```

De acordo com o Teorema 2.9.7, pág. 41, 2017 é primo. Isso pode também ser verificado pelo Maxima com o comando primep(2017); que retorna true.

Problema 11.6.2. Use o Maxima para conjecturar uma fórmula para a FCS de $\sqrt{a^2+2}$.

Solução. Experimentos para $\sqrt{a^2+2}$:
$\sqrt{2^2+2} = [2, \overline{2, 4}]$
$\sqrt{3^2+2} = [3, \overline{3, 6}]$
$\sqrt{4^2+2} = [4, \overline{4, 8}]$
o que sugere $\sqrt{a^2+2} = [a, \overline{a, 2a}]$.

Problema 11.6.3. Use o Maxima para resolver o Problema 2.7.37 e o Tema 2.9.8.

Solução. Use o comando cfdisrep(list) explicado no final da Seção 11.4.

Problema 11.6.4. Use o Maxima para resolver o Problema 8.7.22.

Solução.

```
(%i1)  fpprec:50$ bfloat(%pi^4);
(%o1)  9.7409091034002437236440332688705111249727585672686b1
(%i2)  cf(%);
(%o2)  [97,2,2,3,1,16539,1,6,7,6,8,6,3,9,1,1,1,18,1,4,1,13,1,2,1,127,1,1,1,4,1,6,1,1,1,10,10,1,1,2,1,2,1,4]
```

Vemos que $c_4 = [97, 2, 2, 3, 1]$. Usando o comando cfdisrep(list) explicado no final da Seção 11.4:

```
(%i1)  cfdisrep([97,2,2,3,1]);
```

(%o1)
$$97 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1}}}}$$

```
(%i2)  97+1/(2+1/(2+1/(3+1/1)));;
(%o2)  2143/22
```

Problema 11.6.5. No 5º exemplo da Seção 11.4 foi obtida um convergente da FCS de π usando fpprec:30. Como pode ser conferida a precisão dos seus últimos quocientes?

Solução. Usando fpprec:50 se vê que o último quociente é 13, e não 14. Temos $\pi \approx [3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 84, 2, 1, 1, 15, 3, \mathbf{13}, 1, 4, 2, 6, 6, 99, 1, 2, 2, 6, 3, 5, 1, 1, 6, 9, \ldots]$

Problema 11.6.6. Use o Maxima para passar os números decimais dados para a base especificada. (i) 1024 para a base dois; (ii) dez grosas mais uma dúzia na base doze; (iii) 43981 na base dezesseis.

Solução. (i) $1024_{dez} = (10000000000)_{dois}$; (ii) uma grosa é $144 = 12^2$, logo o número decimal é 1452. Temos $(1452)_{dez} = (A10)_{doze}$; (iii) $(43981)_{dez} = (ABCD)_{dezesseis}$.

Para os cálculos foi usado o comando printf(true,"~βr",n)$ no Maxima.

Problema 11.6.7. Use o Maxima para passar os seguintes números para a base dez. (i) $(377)_{oito}$; (ii) $(11111111)_{dois}$; (iii) $(3015)_{sete}$.

Solução. $(377)_{oito} = (255)_{dez}$; (ii) $(11111111)_{dois} = (255)_{dez}$; (iii) $(3015)_{sete} = (1041)_{dez}$.

Para resolver usei a sequência de comandos do Maxima:
load("eval_string")$ ibase:$\beta$$ parse_string("n");

Problema 11.6.8. Use o Maxima para obter uma expansão aproximada de $\sqrt{2}$ na base dois. Que recurso você pode usar para perceber até que dígito o resultado é confiável?

Solução. Fiz o seguinte: primeiro obtive uma aproximação decimal de $\sqrt{2}$ com 40 casas.

```
(%i1)fpprec:40$ bfloat(sqrt(2));
(%o1) 1.4142135623730950488016887242096980785 7b0
```

Em seguida introduzi a parte não inteira na variável x, como no texto acima (*Caso 3*):

```
(%i5) x:0.41421356237309504880168872420969807857$ b:2$ y:0$ d:0$ n:1$
(%i6) y:sconcat(y,".")$
(%o7) while n<31 do (x:x*b, d:truncate(x), y:sconcat(y,d), x:x-d, n:n+1)$
(%i8) y;
(%08) 0.01101010000010011110011001 1
```

Observamos que no final da representação aparentemente os dígitos 0011 se repetem, mas sabemos que a expansão é infinita não periódica, pois $\sqrt{2}$ é irracional. Assim esses últimos dígitos não são confiáveis. Uma forma de ver isso é repetir os cálculos com precisão maior e depois comparar os resultados. Repetindo com fpprec:60 e n<51 obtemos

0.011010100000100111100110011001111111001110111 10011 (cálculo com fpprec:60 e n<51)
0.01101010000010011110011001 1 (resultado anterior para comparação)

Vemos assim que o resultado anterior é confiável e podemos escrever:

$$\sqrt{2} \approx (1{,}01101010000010011110011001 1)_{dois}$$

Problema 11.6.9. Use o Maxima para resolver a primeira parte do Tema 9.10.4.

Solução. Precisamos inicialmente de um comando para extrair um dígito de um número expresso no sistema decimal. Perguntando isso para a IA do Google ela sugeriu o comando charat(string(n),m), que retorna o m-ésimo dígito de n, contando da esquerda para a direita. O sistema retorna o dígito como texto. Para usá-lo como número deve-se acoplar o comando eval_string. Testando:

```
(%i1) eval_string(charat(8572),3);
(%o1) 7
```

Definimos a seguir a função $p(n)$ = primeiro dígito de 2^n, e introduzimos os valores em uma lista, a qual chamamos de L:

```
(%i1) for n from 0 thru 99 do p(n):=eval_string(charat(2^n),1);
(%o1) done
(%i2) L:makelist(p(n),n,0,99);
(%o2) [1,2,4,8,1,3,6,1,...,6] /* não transcrevemos a lista completa */
```

Em seguida calculamos quantas vezes o dígito 1 comparece nessa lista, lembrando que a lista é indexada por 1, 2, 3, ..., 100. Assim L[1]=1, L[2]=2, L[3]=4, ..., L[100]=6.

```
(%i1) j:0$  for i from 1 thru 100 do if L[i]=1 then j:j+1$  j;
(%o1) 30
```

Assim a probabilidade do dígito 1 comparecer na lista L é $\frac{30}{100} = 0,3$.

O valor preconizado pela Lei de Benford é $P(1) = \log(1+1) - \log 1 \approx 0,301$, portanto bem próximo do que foi obtido no experimento.

O estudante pode implementar os cálculos para os outros dígitos e conferir o acerto da teoria com o experimento.

Problema 11.6.10. Estude como o Maxima pode ajudar na exploração numérica da constante de Kinchin (Tema 10.10.3).

Solução. Eu segui a seguinte sequência de comandos. O estudante poderá fazer melhor.

Escolhemos experimentar $\sqrt[3]{2}$. Inicialmente calculamos, com precisão fpprec:500, os quocientes parciais de sua FCS, depositando-os em uma lista L.

```
(%i1)  fpprec:500$  bfloat(2^(1/3)$  L:cf(%);
(%o1)  [1, 3, 1, 5, 1, 1, ..., 29, 1, 1, 5, 1, 7] /* não transcrevemos a lista completa */
```

Precisamos agora do comprimento de L. O comando lenght(L) deveria funcionar, mas isso não ocorreu. Com alguns experimentos concluímos que o comprimento de L é 489:

```
(%i3)  L[487]; L[488]; L[489];
(%o1)  5
(%o2)  1
(%o3)  7
```

Em seguida definimos uma nova lista M retirando de L o primeiro termo L[1] (por não fazer parte da definição da constante) e o último termo L[489] (geralmente é um valor aproximado). A lista M tem comprimento 487.

```
(%i1)  M:makelist(L[i],i,2,488);
(%o1)  [3, 1, 5, 1, 1, ..., 29, 1, 1, 5, 1] /* não transcrevemos a lista completa */
```

Agora usamos o comando apply("*",M) para calcular o produto dos elementos de M, e, ao mesmo tempo, calculamos sua média geométrica:

```
(%i1)  bfloat(apply("*",M)^(1/487));
(%o1)  2,67734... /* não transcrevemos o número completo */
```

Vemos que o resultado está próximo de $K_0 \approx 2.685\,452\,001\,065\,306\,445\ldots$ (valor retirado da literatura [129] verbete *Khinchin's constant*). Para obter um valor mais próximo a variável fpprec deve ser aumentada.

11.7 Aplicativos de Inteligência Artificial

Esses aplicativos também podem ser usados para aprendizagem e investigação. Embora tenham sido disponibilizados recentemente para o público, muitas experiências estão sendo desenvolvidas nessas duas direções. Não fazemos aqui um exame aprofundado dessa ferramenta. Procuramos apenas incentivar o estudante a empreender sua própria exploração.

Exemplo 11.2. Perguntamos à IA do Google o seguinte: o que é fração própria?

Obtive a seguinte resposta:

Resposta da IA em agosto de 2025:

"Uma fração própria é aquela em que o numerador (o número de cima) é menor que o denominador (o número de baixo). Isso significa que a fração representa uma quantidade menor que um inteiro."

A IA prossegue dando exemplos de fração própria, imprópria e unitária, com figuras ilustrativas. Como exemplo de fração unitária deu $\frac{8}{8}$, entendimento diferente do que adotamos neste texto (para nós, fração unitária é uma fração de inteiros positivos que tem 1 como numerador). Entretanto, perguntando em separado "o que é fração unitária?", sua resposta coincide com a nossa definição.

Vemos que a resposta da IA não é muito satisfatória, pois a segunda frase nada define (qualquer fração representa uma quantidade menor do que um inteiro). Isso sem contar que a primeira parte da resposta só serve para fração de inteiros positivos.

Exemplo 11.3. Perguntamos à IA do Google o seguinte: raiz quadrada de dois é irracional?

Obtive a seguinte resposta:

Resposta da IA em setembro de 2025:

"Sim, a raiz de dois ($\sqrt{2}$) é um número irracional, o que significa que não pode ser expressa como uma fração exata de dois números inteiros e a sua representação decimal é infinita e não periódica. Esta descoberta é um resultado matemático clássico, conhecido desde a Grécia Antiga, e serve como uma das primeiras evidências da existência de números que não são racionais."

A IA fornece mais algumas informações, como a de que a descoberta da irracionalidade da raiz quadrada de dois é atribuída a Hipaso de Metaponto, um matemático grego, e que a demonstração se faz por redução ao absurdo.

A IA também traz três figuras, todas mostrando basicamente o argumento "par ou ímpar" de Aristóteles.

Vemos que a resposta da IA está essencialmente correta, salvo por algumas hesitações linguísticas, como a expressão "fração exata". Perguntando em separado o que seria isso, a resposta é que tem representação decimal finita, o que não condiz com o primeiro texto.

11.8 Problemas

Faça muitas perguntas para sua IA preferida. Lembre-se apenas de que ela é rápida mas não é mais inteligente e nem mais criativa do que você.

Fim. Grato.

Apêndice A

Respostas e sugestões para alguns problemas

Observações: Nem sempre as respostas dadas estão completas. Fique atento ao enunciado do problema para ver se é necessário completar. Em geral não apresentamos argumento algum, o que significa que ficou por conta do estudante. Portanto as respostas devem ser vistas apenas como dicas. Lembramos que, na resolução de um problema, apenas encontrar a resposta correta não é suficiente. O processo de descoberta e uma justificativa adequada são muito importantes, e o estudante deve aprender a descrevê-los. Examine bem os exemplos que demos no texto, eventualmente eles podem servir de inspiração.

Problemas 1.6

1.6.1 b) É um sistema aditivo de base cinco, e os "algarismos" básicos são os vocábulos fee, fie, foe, fum, fot.
1.6.2 a) Dado um número natural qualquer n, podemos dividi-lo por β e escrever $n = q\beta + r$, com $0 \leq r < \beta$. Nessas condições, q e r são únicos.
1.6.3 $(80)_{nove}$, $(66)_{sete}$, $(100)_{sete}$, $(1100)_{dois}$ e $(53B0)_{dezesseis}$.
1.6.6 Considere o número $i!\binom{p}{i}$.
1.6.7 Sugestão: Seja p um primo e considere a seguinte afirmação $A(a)$: para todo número natural a vale $p \mid (a^p - a)$. Depois de demonstrar $A(a)$ para todo $a \geq 0$, considere a negativo.
1.6.8 b) Considere as potências a^1, a^2, a^3, ..., e tome duas delas, digamos a^i e a^j, com $i < j$, que têm o mesmo resto quando divididas por b.
1.6.9 a) Use classes módulo 3. b) Dentre outras ideias, use o Teorema 1.15.
1.6.10 a) Por convenção, os números não começam com 0. b) A soma dos dígitos decimais de um número fornece que informações?
1.6.11 $a2^n + 1$ é um quadrado perfeito $\iff$ (i) se $n = 1$, $a = (m^2 - 1)/2$ para todo inteiro ímpar $m \geq 1$; (ii) se $n \geq 2$, $a = 2^t\left[2^{n+t-2} + 1\right]$ ou $a = 2^t\left[2^{n+t-2} - 1\right]$ para todo inteiro $t \geq 0$.

Problemas 2.7

2.7.1 $\frac{-17}{19}$. Você pode usar um aplicativo computacional algébrico. Os fatores primos comuns ao numerador e denominador são: 37, 61 e 109.
2.7.5 Não é uma fração ordinária, e é o número racional $2/3$.
2.7.11 $\iff 17 \nmid x$
2.7.12 Use o Teorema 1.16.
2.7.14 a) Para m e n positivos, use a definição (2.13). Se $m = 0$ ou $n = 0$, use que $r^0 = 1$ para $r \neq 0$. Se $m < 0$ ou/e $n < 0$, use a definição (2.14).
2.7.15 Para observar a existência, note que os intervalos $[n, n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$, cobrem toda a reta, e, portanto, r está em um deles.
2.7.19 a) $0,1\overline{6}$ b) $0,\overline{4705882352941176}$
2.7.22 $1,\overline{1}$
2.7.23 a) $13/990$ b) $806/2475$
2.7.25 Ache exemplos para todos os casos.

2.7.28 b) $\iff$ $b/\operatorname{mdc}(a,b)$ é da forma $2^\alpha 5^\beta$ para inteiros $\alpha \geq 0$ e $\beta \geq 0$.
2.7.31 b) Um jeito é ver que os intervalos $[1,2]$, $[2,2^2]$, $[2^2,2^3]$, ..., cobrem toda a reta numérica a partir da coordenada 1, então $\frac{1}{\varepsilon}$ está em um desses intervalos. c) Para provar que existe n_0 tal que $|r|^{n_0} < \varepsilon$, considere $a = 1/|r|$, e escreva $a = 1 + h$, com $h > 0$. Da desigualdade de Bernoulli temos $a^n = (1+h)^n \geq 1 + nh$ para todo número natural n. Escolha n_0 tal que $1 + n_0 h > 1/\varepsilon$.
2.7.34 $[9,2,2,1,2] = [9,2,2,1,1,1]$, $[3,7] = [3,6,1]$ e $[-4,1,6] = [-4,1,5,1]$.
2.7.35 $[1,1,1,1,\ldots,1]$ (n termos)
2.7.37 a) $c_0 = [1] = 1$, $c_1 = [1,1] = 2$, $c_2 = [1,1,2] = 5/3$, $c_3 = [1,1,2,1] = 7/4$, $c_4 = [1,1,2,1,2] = 19/11$, $c_5 = [1,1,2,1,2,1] = 26/15$, $c_6 = [1,1,2,1,2,1,3] = 97/56$, $c_7 = [1,1,2,1,2,1,3,1] = 123/71$. Para calcular com o Maxima consulte a Seção 11.4. b) c_4 é uma aproximação com erro $< 10^{-2}$, e c_5 com erro $< 10^{-23}$.
2.7.40 Uma forma é: em uma linha, da esquerda para a direita, primeiro escreva o zero. Em seguida, todos os racionais a/b, com a e b inteiros positivos, tais que $a + b = 2$; depois todos os racionais tais que $a + b = 3$, e assim por diante. Em cada um desses grupos ordene os elementos pela ordem crescente do numerador. Da esquerda para a direita, elimine os repetidos. Ao lado de cada fração, escreva a fração oposta.

Temas para investigação 2.9

2.9.1 $2/97 = 1/49 + 1/4753$ e $9/22 = 1/3 + 1/14 + 1/231$. Para verificar o procedimento, escreva $b = aq + r$, com $0 \leq r < a$. Se $r > 0$, demonstre que $\frac{1}{q+1} < \frac{a}{b} < \frac{1}{q}$. Continue a partir disso.
2.9.3 Dados números racionais a e $b \neq 0$, não inteiros, existem infinitos pares de números racionais q e r tal que $a = bq + r$, com $0 \leq r < |b|$. Argumente e dê exemplos.
2.9.4 Faça uma tabela com primos $p = 3$, 7, ..., 41, informando a expansão de $1/p$ e o comprimento $\ell(p)$ de seu período. As regularidades ficarão à vista.
2.9.5 Primeiro explique por que basta estudar os períodos das frações a/p, com $1 \leq a \leq p-1$, para primos $p \neq 2$ e $p \neq 5$. Examine vários exemplos e observe regularidades.
2.9.6 a) Desenvolva $0{,}\overline{b_1 b_2 \ldots b_\ell}$ como soma infinita dos termos de uma PG para chegar ao formato da fração. Para fazer o contrário, siga o mesmo desenvolvimento, mas do fim para o início. Lembrando que um ou mais dígitos iniciais de $b_1 b_2 \ldots b_\ell$ podem ser nulos. b) Considerando as potências de 10, tome duas delas, digamos 10^i e 10^j, com $i < j$, que tenham o mesmo resto quando divididas por b. c) Suponha $a < b$ e escreva $qb = 10^m - 1$. Então $\frac{a}{b} = \frac{qa}{qb} =$ etc. Use a parte a). d) considere $10^\gamma a/b 2^\alpha 5^\beta$ e use a parte c).
2.9.7 [107] traz uma demonstração.
2.9.8 Usando o Maxima obtivemos $r = [29,2,2,1,5,1,4,1,1,2,1,6,1,10,2,2,3]$.

Atividades 2.10

2.10.1 Sugestão: pergunte a uma IA (e fique atento aos possíveis erros).
2.10.3 Se não tiver acesso a um livro texto antigo, pesquise na internet. Mas cuidado, pois se encontra muita informação descuidada.
2.10.8 a) A regra preconiza que $x = a\frac{m}{b} + c\frac{m}{d}$, sendo $m = \operatorname{mmc}(b,d)$. Para ver que o resultado é o mesmo, use que $\operatorname{mmc}(b,d)\operatorname{mdc}(b,d) = bd$.
2.10.11 A fórmula pode ser $0{,}\overline{b_1 b_2 \ldots b_\ell} = \dfrac{b_1 b_2 \ldots b_\ell}{99\ldots9}$, com ℓ 9's no denominador.

Problemas 3.3

3.3.1 c) O pré-período é 414212 e o período é 962. A representação no sistema decimal não é finita por motivo de que no denominador ocorrem primos $\neq 2$ e $\neq 5$ (no caso, o primo 3).
3.3.2 Primeiro observe que ADC é um triângulo retângulo em D. Depois use uma das conhecidas relações estudadas no ensino médio.
3.3.3 i) Na Figura 3.6 tome $BC = k$. ii) Continue a construção da Figura 3.7, seguindo sempre o mesmo procedimento sugerido.
3.3.4 Faça um desenho dos dois cubos e considere todas as diagonais possíveis.
3.3.6 Calcule o ângulo formado por um lado do novo quadrado com o lado adjacente do quadrado inicial.

Problemas 3.5

3.5.3 Use que se n^2 é múltiplo de 3, então o inteiro n também é.
3.5.4 b) k par não múltiplo de 4.
3.5.5 Suponha que seja. Use a seguir propriedades do $\log_2$.
3.5.6 Use o Teorema Fundamental da Aritmética 1.14.

3.5.7 Escreva $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ como uma fração irredutível a/b e eleve ao quadrado duas vezes. Tome um primo p divisor de a e mostre que ele também é divisor de b. Ou então prove primeiro que $\sqrt{6}$ não é racional e use isso. Existem outras formas de demonstrar.
3.5.8 Um jeito é observar primeiro que $\sqrt{37}$ é irracional. Proceda então por contradição.
3.5.9 Demonstre primeiro que $2<\sqrt{5}<3$. Proceda então como em 3.4.2.
3.5.10 Suponha que $\sqrt{k}$ não seja inteiro. Então existe um inteiro n tal que $n<\sqrt{k}<n+1$. Proceda a seguir como em 3.4.2.
3.5.12 Use que se a^n é par, então a é par.

Problemas 3.8

3.8.1 Depois de demonstrar a afirmação, observe que o polinômio tem grau ímpar. Assim, em virtude do Teorema Fundamental da Álgebra, existe pelo menos um raiz real, de forma que essa raiz é irracional.
3.8.4 Use o Teorema 3.4.
3.8.5 Para ver que $a=m+(\varepsilon/2m)$ é aproximação por excesso, note que $\sqrt{n}\leq\sqrt{n}+\frac{\left(\sqrt{n}-m\right)^2}{2m}=a$. Seja $b=m+(\varepsilon/(2m+1))$. Veja que $b\leq\sqrt{n}\iff m^2+(1-2\sqrt{n})m+n-\sqrt{n}\leq 0$. Estude a variação de sinal do trinômio $f(x)=x^2+(1-2\sqrt{n})x+n-\sqrt{n}$, cujas raízes são $-1+\sqrt{n}$ e $\sqrt{n}$.
3.8.6 Como $408=2^3\cdot 3\cdot 17$, e $17\nmid 60$, a expansão é infinita (e periódica). Note que $\frac{577}{408}=1+\frac{169}{408}$, portanto 1 é a parte inteira. Escreva agora $\frac{169}{408}=\frac{d_1}{60}+\frac{d_2}{60^2}+\frac{d_3}{60^3}+\ldots$ Portanto d_1 é a parte inteira de $60\times\frac{169}{408}$, e assim por diante. Adaptando para a base 60 os resultados explicados no Tema 2.9.6 vemos que o pré-período tem comprimento 2 e o período, 8.
3.8.8 $[1,\overline{1,2}]$
3.8.9 $[4,\overline{8}]$
3.8.10 $(1+\sqrt{5})/2$
3.8.11 $[7,\overline{7}]=(7+\sqrt{53})/2$

Temas para investigação 3.9

3.9.2 Adapte o resultado do teorema 1.15 para esse caso.
3.9.3 b) Examine vários exemplos para perceber qual é a afirmação correta.
3.9.6 a) Imite a demonstração 1 do Teorema 1.8. d) Observe que $10=40/4$ é $\mathcal{A}$-racional.
3.9.7 a) Não é possível. b) É possível, mas depende da unicidade da representação como fração contínua simples. Consulte o Capítulo 8.
3.9.8 Usando a mesma ideia demonstre que, para todo inteiro $k\geq 2$, $\sqrt{k}$ é inteiro ou irracional.
3.9.9 a) Pode ser por um argumento par ou ímpar. e) Uma forma é usar um aplicativo computacional algébrico.
3.9.10 Em todos os itens convém utilizar um aplicativo computacional algébrico.
3.9.11 Examine a relação entre n e j para os quais $a_n=c_j$. Faça uma conjectura.
3.9.12 a) Considere primeiro que os intervalos $[n,n+1)$, para n inteiro, cobrem toda a reta numérica. b) Calcule todas as possibilidades.
3.9.14 Por exemplo, pesquise o que é a constante de conectividade.
3.9.15 A razão áurea, relações no pentágono regular, etc.

Atividades 3.10

3.10.1 Pode ser pesquisado em [23], [42], na Revista do Professor de Matemática n. 2, na internet, etc.
3.10.2 Um bom assunto para ser discutido com os colegas. E quanto ao Ensino Superior, são usados argumentos plausíveis?
3.10.3 Uma possibilidade é fazer trabalhos em grupo sobre esse assunto.
3.10.4 Ao ler histórias antigas sobre Matemática, observe que várias delas são inventadas, inclusive isso costuma ser bem óbvio. Para perceber, basta ficar atento.
3.10.5 No Youtube podemos ver vários vídeos apresentando os mais diversos truques. Examine sua validade, e não dê atenção aos exageros.

Problemas 4.8

4.8.1 Na Figura 4.15 desenhe um quadrado sobre CE para determinar $C-E-D$ tal que $|CD|=\sqrt{2}$. Em seguida verifique que $|EF|=\frac{3}{\sqrt{2}}$.
4.8.2 Demonstre por contradição.
4.8.3 Considere separadamente os casos $x>0$, $x<0$ e $x=0$.

4.8.4 Observe primeiro que $\frac{a_0}{2^n} > a_n$ para todo $n \geq 1$.
4.8.5 a) Use contradição.
4.8.6 Note que todo irracional é $\neq 0$.
4.8.7 b) Não existem.
4.8.8 b) Dados conjuntos infinitos A e B, uma forma de dizer que eles têm a "mesma quantidade" de elementos é mostrar que existe uma aplicação $\varphi : A \to B$ bijetiva.
4.8.9 Para mostrar que existem infinitos, observe que o primeiro resultado pode ser reaplicado tantas vezes quanto for necessário. Ou use que, se $r < s$ são racionais, $r + \frac{s-r}{t}$, para t inteiro ≥ 2, são infinitos racionais entre r e s.
4.8.10 Proceda como no Problema 4.8.9, colocando $\sqrt{2}$ em um local adequado para obter número irracionais.
4.8.11 Use os resultados dos Problemas 4.8.9 e 4.8.10.
4.8.12 O ínfimo é zero, e o supremo é 1.
4.8.13 Seja $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ e considere dois casos: a é racional ou a é irracional.
4.8.14 Primeiro escreva a equação da reta.
4.8.21 Dois triângulos com mesma base e alturas iguais têm áreas iguais.

Temas para investigação 4.9

4.9.1 Para iniciar sua investigação, uma possibilidade é ver o que são $\lambda - \mu$ e $\lambda + 2\mu$.
4.9.2 a) Dizer que os retângulos $ABCD$ e $DFEC$ são semelhantes significa que $AB/BC = EC/CD$. c) Sejam L_n e l_n o maior lado e o menor do n-ésimo retângulo, respectivamente. Observe as relações de recorrência $L_{n+1} = l_n$ e $l_{n+1} = L_n - l_n$. Faça uma tabela desses lados em função de a e b, e procure regularidades. e) Se quiser uma demonstração ao estilo da matemática da Antiga Grécia, observe primeiro que $l_n \to 0$. Para ver isso note que $b < \frac{7}{10}a$, pois $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}618$. Isso implica $l_2 < \frac{7}{10}l_1$, $l_3 < \left(\frac{7}{10}\right)^2 l_1$, em geral, $0 < l_n < \left(\frac{7}{10}\right)^{n-1} l_1$.
4.9.3 Consulte [93], assim como o verbete *Proporção de prata* da Wikipedia.
4.9.4 Medidas de elementos de polígonos regulares em função de seus lados podem ser encontradas em [129], dentre outras fontes possíveis.

Atividades 4.10

4.10.1 A segurança também vem da experiência.
4.10.2 Consulte também artigos de pesquisa sobre esse assunto, como [114].
4.10.3 Penso que pesquisar a história de números importantes, como π, deve despertar muito interesse.
4.10.4 Os cientistas, sem dúvida, usam números irracionais, em suas equações, fórmulas, e em modelos diversos.

Problemas 5.7

5.7.1 Para a recíproca use o Segundo Princípio da Indução Completa.
5.7.2 Pode ser útil usar a sequência $(a_n)_{n \geq k+1}$.
5.7.3 Dá certo tomar $n_0 > 1/\varepsilon - 1$. Como encontrar esse valor?
5.7.4 Se $\varepsilon \geq 3/2$, escolhemos $n_0 = 1$, e se $0 < \varepsilon < 3/2$, escolhemos $n_0 > \sqrt{3/4\varepsilon - 1/2}$.
5.7.5 Se quiser usar a definição é suficiente tomar $n_0 > 1/4\varepsilon$.
5.7.6 Multiplique e divida por $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$.
5.7.7 Pode usar o Teorema da Compressão, ou tomar $n_0 > 2/\varepsilon$.
5.7.9 a) não; b) sim; c) não.
5.7.10 Um jeito de ver é que essa sequência tem subsequências convergindo para valores diferentes.
5.7.11 Considere $0 < \varepsilon < a$.
5.7.12 Use a desigualdade $||x| - |y|| \leq |x - y|$.
5.7.14 Siga o procedimento do Exemplo 5.17. Respostas: a) $3/4$; b) 0; c) $1/2$; d) $7/2$.
5.7.15 A resposta é zero em todos os casos.
5.7.17 Use definições e um pequeno truque.
5.7.18 Respostas: $1/2$; $\sqrt{2}/3$; 0.
5.7.19 A resposta é 49.
5.7.21 a) crescente; b) crescente; c) decrescente; d) crescente; e) decrescente.
5.7.23 Depois de provar que o limite existe, para encontrá-lo use $100a_n = 27 + a_{n-1}$.
5.7.25 Usando o Método da Indução Completa prove que a sequência está bem definida, é crescente, e que $a_n < 2$ para todo $n \geq 1$.
5.7.26 Idem.

5.7.27 (i) Use a desigualdade demonstrada no Teorema 3.4. (ii) Se $a_0 \neq \sqrt{r}$, a identidade $a_{n+1} - \sqrt{r} = \frac{(a_n - \sqrt{r})^2}{2a_n}$ implica $a_n - \sqrt{r} > 0$ e $r/a_n < a_n$ para todo $n \geq 1$. Isso, por sua vez, implica $a_{n+1} < a_n$.
5.7.31 Em a), c), d), g) e h) a sequência é ilimitada. Em b), e) e f) a sequência tem subsequências convergindo para limites diferentes.
5.7.32 a) $+\infty$; b) $+\infty$; c) $+\infty$ se $r > 0$, e $-\infty$ se $r < 0$; d) $+\infty$.
5.7.34 Use que $(1+h)^n > 1 + nh$ para todo número real $h > -1$ e todo inteiro $n > 1$.
5.7.35 α e β são as raízes da equação $x^2 = x + 1$. Supondo que $f_n = A\alpha^n + B\beta^n$, encontre A e B.
5.7.36 Use a fórmula do Problema 5.7.35 $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)$.
5.7.38 Use que em qualquer intervalo aberto não vazio existem números racionais e números irracionais. Confira, por exemplo, os Problemas 4.8.9 e 4.8.10.

Temas para investigação 5.8

5.8.1 Considere separadamente os casos: k é um inteiro positivo; $k = 0$; k é um inteiro negativo.
5.8.2 O determinante dá $f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n$.
5.8.3 Seja m_n a quantidade de maneiras diferentes com as quais se pode cobrir um retângulo $2 \times n$ com os ladrilhos 2×1. Se um ladrilhamento tem n peças, como é o seu final? O que é m_n em relação aos valores anteriores? Estude ladrilhamentos $4 \times n$.
5.8.4 Faça experimentos numéricos. Observe que, se a sequência for convergente, então o limite é $\sqrt[r]{r}$.

Atividades 5.9

5.9.1 Se esqueceu, consulte [24].
5.9.3 Depois de estudar esse capítulo, você considera 0,999... uma sequência? Então a anote na forma (a_n).
5.9.4 A forma **1** chama-se *problema fechado*, e a forma **2**, *problema aberto*. Pesquise esses termos na internet. Procure também *problema investigativo*.

Problemas 6.11

6.11.1 63.
6.11.2 $\approx 40\,078$ km.
6.11.3 107 515 km/h $\approx$ 30 km/s.
6.11.4 Se o lado do quadrado vale ℓ, calcule c_n para todo n.
6.11.5 Use os Lemas 6.2 e 6.3 para ver que a subsequência $(p_{5\cdot 2^n})_{n\geq 0}$ converge. Consulte a Seção 10.8 para responder à última pergunta do problema.
6.11.6 Dado um polígono regular de n lados cincunscrito a $\mathcal{C}$, construa um conveniente polígono regular de $2n$ lados também circunscrito.
6.11.7 Use que em um triângulo qualquer ao maior ângulo se opõe o maior lado. Ou então use trigonometria.
6.11.8 Siga a sugestão usando triângulos semelhantes.
6.11.9 Use os resultados dos Problemas 6.11.6, 6.11.8, 6.11.7 e 5.7.17.
6.11.10 Dado um disco de raio r, sejam L_n o lado do polígono regular de n lados circunscrito e t_n sua área, e sejam ℓ_n e a_n o lado e o apótema do polígono regular de n lados inscrito, e s_n sua área. Usando a relação $\frac{l_n}{L_n} = \frac{a_n}{r}$ demonstre que $t_n - s_n < \frac{2}{r}t_n(r - a_n)$. Como (t_n) é limitada isso implica $t_n - s_n \to 0$. Conclua.
6.11.11 Construa um contraexemplo.
6.11.12 Use a figura e a sugestão do Problema 6.11.8.
6.11.13 a) $2\sqrt{2} < \pi < 4$; b) $3{,}061 < \pi < 3{,}313$; c) $3{,}121 < \pi < 3{,}182$.
6.11.14 (i) πr; (ii) $\frac{\pi}{2}r$; (iii) $\frac{3\pi}{2}r$; (iv) $\frac{\pi}{4}r$.
6.11.15 $\frac{25\pi}{8}$ cm^2.
6.11.16 a) Adapte a justificativa correspondente feita no texto para a definição de comprimento de arco. b) Adapte a demonstração do Teorema 6.15.
6.11.17 Use as fórmulas já conhecidas para as áreas do semidisco e de um quarto de disco.
6.11.18 Ache a, a_k e calcule o limite. Comece determinando uma relação entre L e o raio r dos discos.
6.11.19 $P_{12} = 24(2 - \sqrt{3})$ e $p_{12} = 6(\sqrt{6} - \sqrt{2})$.
6.11.22 Desenhe uma figura mostrando l_n e l_{2n}, e use duas vezes o Teorema de Pitágoras.
6.11.23 Usando a fórmula do Problema 6.11.22 para $r = 1$, mostre que $a_n = 2^{n-1}l_{2^n} = (1/2)2^n l_{2^n} = (1/2)p_{2^n}$ para todo $n \geq 2$, e assim $a_n \to \pi$.
6.11.24 $\pi \approx 3{,}16$.
6.11.25 $\pi \approx 3{,}125$.
6.11.26 $\pi \approx 3{,}14153$ com 5 casas exatas.

6.11.27 $\sqrt{2}+\sqrt{3}-\pi \approx 0{,}0046 < 0{,}005 = 5/1000$.
6.11.28 A fórmula de S. Ramanujan fornece $\pi \approx 3{,}14159265359$ com 9 casas exatas.
6.11.29 b) $\pi \approx 3{,}1111$.
6.11.30 a) duas casas exatas; b) quatro casas exatas; c) quatro casas exatas; d) oito casas exatas; e) dez casas exatas.
6.11.33 a) Comece com $\frac{P_{2n}-p_{2n}}{P_n-p_n}$ e multiplique o numerados e o denominador por $P_{2n}+p_{2n}$. b) Use os resultados dos problemas 6.11.7 e 6.11.8 e tome $\varepsilon_n = l_{2n}/r$. c) Comece tomando n_0 tal que $n \geq n_0 \Rightarrow \varepsilon_n < 4-\sqrt{10}$.

Temas para investigação 6.12

6.12.1 Tente projetar sobre a reta uma pequena parte da circunferência.
6.12.2 Sugestão de assuntos a serem pesquisados: (i) O Método de Monte Carlo; (ii) probabilidade geométrica; (iii) o experimento da agulha de Buffon.
6.12.3 b) Pesquise (ou reveja) como são definidas as integrais de funções no curso de Cálculo 1.
6.12.4 Observe que a base do triângulo vai da coordenada $-\pi r$ a πr, assim sua área é πr^2.
6.12.5 Sim, tem. Descubra quais são as fórmulas.
6.12.6 A investigação é mais factível se for restrita aos polígonos com 2^n lados.
6.12.7 Comece os cálculos com $n = 4$.
6.12.8 Pesquise na internet.
6.12.9 Pesquise na internet.

Atividades 6.13

6.13.1 Confira também [24], assim como cadernos de atividades adotados em alguns estados.
6.13.2 As circunferências de objetos em forma de discos podem ser repassadas para uma folha de escrever, e sua área medida (com aproximação) mediante retângulos.
6.13.3 Para medir volumes de pequenas esferas podem ser usados cilindros graduados de laboratório (provetas ou béqueres) com escalas volumétricas. Para medir diâmetros, paquímetros podem ser necessários.
6.13.6 Em [60], página 604, o autor atribui ao poeta e místico Ramon Llull, que diz ter vivido no Século XIII e ter sido famoso, a afirmação de que, se tomarmos uma circunferência, os quadrados inscrito e circunscrito e o quadrado "do meio" (cujo lado é a média aritmética dos lados dos outros dois), então o perímetro do quadrado do meio é igual ao comprimento da circunferência, e a área do quadrado do meio é igual à área do disco. Explique por que essas afirmações não são verdadeiras. Investigue o que ocorre se forem usadas outros tipos de médias.

Problemas 7.6

7.6.1 Foram economizadas 2401 medidas de grãos. A soma é 2807.
7.6.2 A soma é 2800.
7.6.3 Demonstre primeiro a identidade, e depois a use para demonstrar a fórmula 7.3 para $r \neq 1$.
7.6.4 Vale a afirmação iv).
7.6.5 Pesquise qual a produção atual de trigo no mundo. Um dado que pode ser adotado é que um grão de trigo pesa, em média, $1/23000$ kg. Não seria possível para o rei atender o pedido do sábio.
7.6.6 a) Diverge; b) $1715/342$; c) $e/(e-1)$; d) $25/12$; e) 6; f) $-15/4$; g) $55/9063$; h) 162.
7.6.7 a) Diverge; b) $16/27$; c) $343/960$.
7.6.8 Use a sequência das somas parciais.
7.6.10 $2{,}82 \times 10^{12}$ desintegrações por grama. É a soma da série geométrica de primeiro termo $3{,}5 \times 10^6$ e razão $\frac{999876}{10^6}$.
7.6.11 $1{,}25 \times 10^7$ roentgens.
7.6.12 500 calorias; 21,85 minutos.
7.6.13 A soma das áreas é $\sqrt{3}\,\ell^2/12$, e dos perímetros 3ℓ.
7.6.14 Converge.
7.6.15 $(1/(1+r^2),\ r/(1+r^2))$.
7.6.16 Examine subsequências da sequência das somas parciais.
7.6.17 Considere a subsequência $s_1,\ s_3,\ s_7,\ \ldots,\ s_{2^m-1},\ \ldots$ Note que $s_1 = 1$, $s_3 < 1+\frac{2}{2^2}$, $s_7 < 1+\frac{2}{2^2}+\frac{4}{4^2} = 1+\frac{2}{2^2}+\left(\frac{2}{2^2}\right)^2$, etc.
7.6.18 Examine a sequência das somas parciais e use a identidade $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.
7.6.19 Seja s_n a sequência das somas parciais. Reencontre s_{n-1} dentro de s_n.
7.6.20 A subsequência referida é ilimitada, logo s_n não converge.

7.6.21 Siga a ideia da demonstração do Teste da Comparação 7.15.
7.6.23 a) Converge. Compare $n!$ com 2^n. b) Converge. c) Converge. d) Diverge, por comparação com a série harmônica. e) Diverge. f) Converge.
7.6.24 Manipule a fração e encontre duas séries já vistas.
7.6.25 Lembre-se, do Problema 7.6.16, que essa série é divergente.
7.6.26 Manipule as sequências das somas parciais das três séries.
7.6.27 Se a série geométrica for convergente, mostre que o Teorema 7.14 implica que $(1-r)S = a$.

Temas para investigação 7.7

7.7.1 a) $q_n = 3 \cdot 4^{n-1}$, $\ell_n = 1/3^{n-1}$, $p_n = 3(4/3)^{n-1}$. b) O limite é $2\sqrt{3}/5$.
7.7.2 a) $m_n = 2^{n-1}\frac{1}{3^n}$; b) $m = 1$. d) $\mathcal{C}$ contém também números irracionais.
7.7.3 Por exemplo, consulte na Wikipedia o verbete *Problema de Basileia*.

Atividades 7.8

7.8.1 Explique por que a proposta do gerente não é boa para o hotel e a substitua por uma melhor.

Problemas 8.7

8.7.1 Simplifique $0{,}b_1b_2\ldots b_{m-1}\big(b_m-1\big)999\ldots$ usando a fórmula da série geométrica.
8.7.2 Se existir um $d_j < 9$, então $0{,}d_1d_2d_3\cdots < 0{,}999\cdots = 1$.
8.7.3 Em uma das etapas, simplifique $0{,}d_1d_2\ldots d_{j-1}d_j(\beta-1)(\beta-1)\ldots$ usando a fórmula da série geométrica.
8.7.4 Tome $\frac{1}{10^n} < \varepsilon$ e considere n dígitos de α.
8.7.5 Use contradição.
8.7.6 Defina $f(x) = x+$ um deslocamente adequado.
8.7.7 Eleve $\alpha = \sqrt{2}+\sqrt{3}$ ao quadrado duas vezes.
8.7.11 É inteiro.
8.7.12 Comece com $\operatorname{mdc}(a,b) = 1$; nesse caso a condição é: todo fator primo de b também divide β.
8.7.13 Similar à demonstração do Teorema 2.5.
8.7.14 a) Notando que $\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$, temos de imediato $\frac{1}{4} = (0{,}2)_{oito}$. b) $\frac{1}{3} = (0{,}\overline{25})_{oito}$.
8.7.15 a) $(0{,}102)_{três} = \frac{11}{27} = 0{,}\overline{407}$; b) $(0{,}\overline{13})_{quatro} = \frac{7}{15} = (0{,}4\overline{6})_{dez}$.
8.7.16 a) $(0{,}1)_{dez} = (0{,}\overline{00011})_{dois}$. b) 243.
8.7.17 Usando o 2º método do Exemplo 8.17 obtive $\sqrt{10_{dois}} \approx 1{,}0110101000001$.
8.7.18 a) $(0{,}\overline{1})_\beta$; b) $(0{,}\overline{0(\beta-1)})_\beta$.
8.7.19 Use contradição.
8.7.20 d) Use a unicidade estabelecida em a).
8.7.22 Para obter a fração contínua, use a técnica do Exemplo 8.18. Temos $c_4 = \frac{2143}{22}$.
8.7.23 A soma $x_1 + x_2$ e o produto x_1x_2 são coeficientes de uma função quadrática cujos zeros são x_1 e x_2.
8.7.24 **a)** Acompanhe, em parte, a demonstração do Teorema 8.3.
8.7.25 Mostre que ξ é raiz do polinômio $p(x) = 8x^3 - 6x - 1$, e depois use o resultado do Problema 8.7.24.
8.7.26 Mostre primeiro que ξ é raiz do polinômio $p(x) = 8x^3 - 6x + 1$.
8.7.27 Use a definição de número algébrico.
8.7.28 Use contradição e a definição de número algébrico.

Temas para investigação 8.8

8.8.1 Esse número chama-se *constante de Champernowne na base dez*. Para ver que não é racional, use contradição. Pesquise na internet outras propriedades.
8.8.2 $\iff n \neq 10^k$, $k \geq 0$ inteiro.
8.8.3 d) Um exemplo: $e^{n\pi/2}$ é transcendente para todo n ímpar.
8.8.4 a) Experimentos numéricos sugerem que $\sqrt{a^2+1} = [a, \overline{2a}]$. Sabendo que o limite existe, usando a técnica explicada na Seção 3.7, isso pode ser comprovado. d) Para ver o que é $\xi = [a_0, a, \overline{b}]$ use a FCS auxiliar $\mu = [0, \overline{b}]$.
8.8.5 Um exemplo: $c_5 = \frac{87}{32} \approx 2,71875$. Comparando com $e \approx 2{,}718281828459045$ temos precisão de quatro casas.
8.8.6 a) $c_4 = \frac{315}{263} \approx 1,19$. Comparando com $\frac{4}{\pi} \approx 1{,}27323954473516268615107010698$ temos precisão de uma casa. b) $c_3 = \frac{1321}{420} \approx 3,1452$. Comparando com $\pi \approx 3.141592653589793$ temos precisão de três casas.
8.8.7 a) Para o algarismo zero calculei 0,092. b) Consulte em [129] o verbete *Normal Number*, em inglês.

Atividades 8.9

8.9.1 O professor deve ter "em mãos" alguns números inteiros p para os quais o comprimento do período de $1/p$ ultrapassa o número de dígitos do visor da calculadora. Existe um truque que permite calcular o período usando uma calculadora, consulte [33].
8.9.2 Um exemplo mais imediato é o cálculo da diagonal de um quadrado, o qual necessita de $\sqrt{2}$.
8.9.3 (i) e (ii) Não existem, explique por que. (iii) O argumento é falho, explique por que. (iv) Os irracionais correspondem a uma ideia abstrata, que não tem correspondência exata com o mundo físico.
8.9.4 Parece que essa frase é muito usada, e pode servir em certas situações. Mas, do ponto de vista lógico, não é correta, pois não diz o que são os irracionais, só diz algo que não são.
8.9.5 Essa frase está melhor, pois diz o que são os números reais, tomando a reta numérica como contexto.

Problemas 9.9

9.9.1 A resposta correta é (a).
9.9.2 10^{110}.
9.9.3 Use o Método da Indução Completa sobre n.
9.9.5 Comece com $1 = a^0 = \ldots$
9.9.6 Use a parte da unicidade do Problema Resolvido 4.35. (ii) Use que $0 < u < v \Rightarrow u^n < v^n$.
9.9.7 Prove primeiro que $\sqrt[n]{1/x} = 1/\sqrt[n]{x}$.
9.9.8 Use que $\mathbb{Q}$ é enumerável, e $\mathbb{R}_+$ não.
9.9.11 A propriedade já foi verificada no texto para x racional. Se x é real, uma forma de fazer é tomar uma sequência de racionais convergindo para ele.
9.9.12 Use que a função $x \mapsto (b/a)^x$ é crescente, o Lema 9.14 e o Problema 9.9.11.
9.9.13 (i) Escreva $f(y) = f(y-x)f(x)$. (viii) Se f é estritamente crescente, $a > 1$. Se x é real e $f(x) < a^x$, use o Lema 9.17 e tome r racional tal que $f(x) < a^r < a^x$.
9.9.14 Seja $A \subset \mathbb{R}$ e a um ponto de aderência de A. Seja $f : A \mapsto \mathbb{R}$. Dizemos que $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ quando, dado M real, existe $\delta > 0$ tal que $|x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > M$. Dizemos que $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ quando, dado M real, existe $\delta > 0$ tal que $|x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < M$.
9.9.15 Suponha f estritamente crescente. Note que $f(1) = 0$. Seja $b = f(2) > 0$. Seja $g(x) = f(x)/b$. Prove que $g(x) = \log_2 x$. Se $a = 2^{1/b}$ então $a^{f(x)} = x$.
9.9.16 $P(h) = 76 \times 0,9761921220^{h/200} \approx 76 \times 0,886^{h/1000}$.
9.9.18 $\approx 8,7$.
9.9.19 $\approx 0,308$.
9.9.20 a) $\approx 115,2$ cm; b) $\approx 26,2$ kg.
9.9.21 $\approx 0,495$.
9.9.22 a) 12; b) 25; c) $4,45 \times 10^{25}$ ergs; e) 1; f) 100.
9.9.23 a) 5; b) $10^{4,5}$; c) 7,32; d) entre 36×10^{-9} e 42×10^{-9}.
9.9.26 Calcule $\lim_{m\to\infty}(s_m - s_n)$. Essa desigualdade permite obter uma cota para o erro da aproximação $e \approx s_n$.

Temas para investigação 9.10

9.10.1 Sobre funções exponenciais, consulte o verbete *Exponential function* da Wikipedia. Para obter fórmulas e outros resultados sobre logaritmos, consulte o verbete *Logaritmo* de [129] (o artigo em inglês é mais completo).
9.10.2 Mesmas sugestões do Tema anterior.
9.10.3 Consulte o verbete *Triângulo de Sierpinski* em [129], assim como [6].
9.10.4 Use um aplicativo computacional algébrico. Para o Maxima, confira 11.6.9.
9.10.5 Em qualquer base o domínio é $(1, +\infty)$ e a imagem é $\mathbb{R}$. Quando é crescente ou decrescente?
9.10.6 Use o Maxima para fazer experimentos numéricos. Qual é a explicação?
9.10.7 O gráfico na escala semilogarítmica de $f(x) = \lambda a^{\gamma x}$ é o gráfico da reta $Y = (\gamma \log a)X + \log(\lambda)$. Sobre a escala log-log consulte o verbete *log-log plot* de [129].

Atividades 9.11

9.11.1 Leia as matérias de funções exponenciais e logarítmicas em livros didáticos e compare suas sequências didáticas com as nossas.
9.11.2 Um objetivo é a percepção do rápido crescimento da função e^x.
9.11.3 Experimente a sugestão.
9.11.4 O método referido traz uma maneira de introduzir o número e diferente da que foi usada no texto.
9.11.5 Siga a sugestão e faça novos gráficos (barras, setores e cartesiano).

9.11.6 Aprende-se muito lendo artigos, dissertações e livros que tratam as matérias de Matemática sob o ponto de vista pedagógico.

9.11.7 Resolva as folhas de atividade e observe as estratégias que foram usadas.

Problemas 10.9

10.9.1 Use a mesma ideia do Problema 3.3.2.

10.9.2 a) Já sabemos que $\sqrt[3]{2}$ é raiz de x^3-2, e é irracional. Portanto $\sqrt[3]{2}$ é algébrico de grau ≤ 3 e não é algébrico de grau 1. Mostre que $\sqrt[3]{2}$ não é algébrico de grau 2. b) Dado um cubo de volume v, seu lado está dado (e pode ser tomado como segmento unitário).

10.9.3 Dada uma circunferência de raio r, já temos um segmento de medida r (que pode ser tomado como segmento unitário).

10.9.4 $X_1 = 7 + 2\sqrt{X_0}$, etc.

10.9.5 a) Manipule $\phi = \frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$. b) Manipule $\phi = (1+\sqrt{5})/2$. c) Um jeito é calcular diretamente a FCS de $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ usando o esquema feito para $\sqrt{2}$ na Seção 3.7. Outro jeito é observar que $[1,1,1,1,\ldots]$ é infinita e periódica, logo a sequência dos convergentes tem limite τ (Teorema 8.26). Mostre que $\tau = 1 + 1/\tau$, e conclua que $\tau = \phi$. d) A expressão é o limite de uma sequência. Mostre que ela é convergente e calcule seu limite. e) A parte c) pode ajudar, ou o Problema 5.7.35.

10.9.6 Use também a parte a) de 5.7.20.

10.9.7 Acho que o método mais fácil é usar o resultado do Problema 5.7.38, partes a) e b).

10.9.8 a) Recorte duas cópias do retângulo e junte-as com dois quadrados para formar um quadrado maior. b) Lide primeiro com triângulos retângulos. Depois tome um triângulo qualquer e considere os três casos gerados pela posição do pé da altura.

10.9.9 a) Considere primeiro o caso $r = m/n$ racional. Para o caso real proceda por contradição: se $f(rx) < rf(x)$, seja t um racional tal que $f(rx)/f(x) < t < r$. b) Seja $A(a,b)$ a área do retângulo de dimensões a e b. Fixando a variável b, use a parte a) na função $a \to A(a,b)$. Faça o mesmo com a outra variável, e conclua. c) Seja $V(a,b,c)$ o volume do paralelepípedo reto retângulo de dimensões a, b e c. Proceda como na parte b).

10.9.10 Use o mesmo esquema desenvolvido no Teorema 10.6 para lidar com $\lim_{n\to\infty} \alpha_n$.

10.9.11 A área é 9,75.

10.9.12 Admita que a parábola é o gráfico de $f(x) = ax^2$ e use o resultado do Teorema 10.6.

10.9.13 Em todos os casos construa um paralelepípedo reto retângulo de altura h e área da base igual à área da base do sólido considerado. Verifique as condições do Princípio de Cavalieri.

Temas para investigação 10.10

10.10.1 Pesquise em [129] os verbetes *Fermat number* e *Constructible polygon*.

10.10.2 Para calcular L_a consulte um livro de Cálculo 1. Para provar que P é transcendente confira o Tema 8.8.3 parte e). Mais informações no verbete *Universal parabolic constant* de [129].

10.10.3 Consulte o verbete *Khinchin's constant* de [129]. Veja também o Problema 11.6.10.

10.10.4 Use o método do Teorema 10.3 ou use o resultado do Problema 5.7.38.

10.10.5 a) $p_n = 2rn \operatorname{sen}\frac{\pi}{n}$ e $P_n = 2rn \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}$. b) $s_n = rn \operatorname{sen}\frac{\pi}{n}\sqrt{r^2 - \ell_n^2/4}$ e $S_n = nr^2 \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}$.

10.10.6 a) $ad^4/4$. Use a fórmula $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + m^3 = [(m(m+1)]^2/4$.

Atividades 10.11

10.11.1 Uma ideia: desenhar o retângulo em uma folha milimetrada, distinguindo o retângulo 3×7. A contagem dos quadradinhos de 1 mm pode ser comparada com os termos do produto $(3+0,6)(7+0,4) = 3\times 7 + 3\times 0,4 + 7\times 0,6 + 0,6\times 0,4$. Outra ideia é transformar os valores em mm e adotar essa medida como unidade.

10.11.2 Para volumes podem ser tomados sólidos diferentes de mesma altura (para os quais se pode aplicar o Princípio de Cavalieri). Esses sólidos podem então serem preenchidos, camada por camada, com algum elemento como água ou areia. Para áreas podem ser feitos desenhos no Geogebra e segmentos colineares podem ser medidos.

10.11.4 Nos dois casos examine o perímetro e a área da primeira e da terceira figuras.

Apêndice B

Créditos das figuras

Observação: As figuras não referidas foram construídas pelo autor com o uso do programa gráfico vetorial Inkscape, ou com o Pictex ou o Tikz, ou ainda com o Geogebra.

Capa e Apresentação

Figura da capa externa Construída pelo autor com o Inkscape.

Figura da capa interna Clip Art Inkscape `http://www.openclipart.org/` Autor: Kattekrab. Domínio público. Consultado em outubro de 2010.

Capítulo 2: Os números racionais

Figura 2.7: Gravura de Simon Stevin, de autoria de pintor holandês do Século XVII, depositada na Coleção da Universidade de Leyden. Imagem disponibilizada no endereço `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Simon-stevin.jpeg` Domínio público. Consultado em 19 de julho de 2025.

Figura 2.8: Foto de monumento a Fibonacci, ou Leonardo de Pisa, de autoria de Giovanni Paganucci, em 1863, no Camposanto di Pisa, Itália. Licenciada por Hans-Peter Postel no endereço `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Leonardo_da_Pisa.jpg` sob Creative Commons Attribution 2.5 Generic license. Consultado em 26 de junho de 2025.

Figura 2.9: Foto de pintura de autoria de Christian Albrecht Jensen retratando Johann Carl Friedrich Gauss. Disponibilizada em `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Carl_Friedrich_Gauss_1840_by_Jensen.jpg` sob domínio público. Consultado em 21 de janeiro de 2017.

Capítulo 3: A constante de Pitágoras

Figura 3.1: Fotografia legendada do anverso da tableta YBC 7289 da Coleção Babilônica de Yale (YPM BC 021354). Disponibilizada em `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:YBC-7289-OBV-labeled.jpg` sob licença Creative Commons. Consultado em 18 de agosto de 2025.

Figura 3.3: Foto, de autoria de Zeichner, de busto de Pitágoras depositado no Museu Capitolino, cópia romana de original grego. Disponibilizada em `https://commons.wikimedia.`

org/wiki/File:Kapitolinischer_Pythagoras.jpg sob a licença GNU Free Documentation. Consultado em 20 de agosto de 2025.

Capítulo 4: Modelos para os números reais

Figura 4.12: Desenho de Eudoxo de Cnido, de autoria não referida, disponibilizado em https://eo.wikipedia.org/wiki/Dosiero:Eudoxus_of_Cnidus.png, possivelmente de domínio público, a ser confirmado. Consultado em 30 de setembro de 2025.

Figura 4.16: Foto de Julius Wilhelm Richard Dedekind, de autor não informado. Disponibilizada em https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Dedekind.jpeg Domínio público. Consultado em 1 de outubro de 2025.

Capítulo 6: A constante de Arquimedes π

Figura 6.1: Pintura de autoria de Domenico Fetti, de 1620, retratando Arquimedes, depositada em *Staatliche Kunstsammlungen Dresden*. Disponibilizada em https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Domenico-Fetti_Archimedes_1620.jpg sob domínio público. Consultado em 22 de novembro de 2025.

Figura 6.13: Desenho de François Viéte, de autor não referido. Disponibilizado em https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Francois_Viete.jpeg sob domínio público. Consultado em 25 de novembro de 2025.

Capítulo 7: A série geométrica

Figura 7.3: Desenho de Zeno, de autoria não referida, disponibilizado em https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Portretbuste_van_Zeno_van_Elea_Paradigmata_graphices_variorum_artificum_(serietitel),_RP-P-1907-4495.jpg Domínio público. Consultado em 3 de janeiro de 2026.

Capítulo 8: Tópicos sobre números irracionais

Figura 8.2: Desenho de Joseph Liouville, de autoria não referida, disponibilizado em https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Joseph_liouville.jpeg Domínio público. Consultado em 24 de outubro de 2025.

Figura 8.3: Foto de Carl Louis Ferdinand von Lindemann, de autoria não referida, disponibilizado em https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Carl_Louis_Ferdinand_von_Lindemann.jpg Domínio público. Consultado em 14 de fevereiro de 2026.

Figura 8.4: Foto de Desenho de Alexander Osipovich Gelfond, de autoria não referida, disponibilizado em https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Gelfond/ Direitos autorais não referidos. Consultado em 24 de outubro de 2025.

Capítulo 9: Funções exponenciais e logarítmicas

Figura 9.4: Retrato de John Napier, de autoria não referida, disponibilizado em https://commons.wikimedia.org/wiki/File:John_Napier.jpg Domínio Público. Consultado em 13 de fevereiro de 2026.

Figura 9.7: Foto de quadro de Leonard Paul Euler, do artista Jakob Emanuel Handmann, do Museum of Science and Technology in Munich, Alemanha. Disponibilizado em `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Leonhard_Euler_2.jpg` Domínio Público. Consultado em 16 de abril de 2025.

Capítulo 10: Tópicos sobre números reais

Figura 10.1: Selo comemorativo de Pierre Laurent Wantzel, disponibilizado em `https://alchetron.com/Pierre-Wantzel` Direitos autorais não referidos. Consultado em 13 de fevereiro de 2026.

Figura 10.6: Desenho de Bonaventura Francesco Cavalieri, de autor desconhecido, disponibilizado em `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Bonaventura_Cavalieri.jpg` Domínio Público. Consultado em 16 de fevereiro de 2026.

Referências Bibliográficas

[1] Aaboe, A. *Episódios da História Antiga da Matemática.* Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1984.

[2] Abreu, J. B. et alii. *Manual do Maxima em português.* `http://www.professores.im-uff.mat.br/hjbortol/disciplinas/2006.2/esp00000/arquivos/maxima_pt.pdf` Consultado em junho de 2025.

[3] Alvares, E. R. *O comprimento do período de dízimas a/b não depende do numerador.* Revista do Professor de Matemática, nº 61, 3º quadrimestre de 2006, págs. 17-21.

[4] Andrade, L. N. *Maxima: um programa para as aulas de Matemática.* João Pessoa: UFPB, 2015. `https://mat.ufpb.br/~lenimar/maxprofmat.pdf` Consultado em junho de 2025.

[5] Anton, H. *Cálculo, um novo horizonte.* Porto Alegre: Bookman, 2000.

[6] Arsie, K. C. *Dimensão Espacial.* Universidade Federal do Paraná. `https://docs.ufpr.br/~ewkaras/ic/karla08.pdf` Consultado em junho de 2026.

[7] Association mathématique du Quebec, *Concurs de l'Association mathématique du Quebec.* `http://www.schoolnet.ca/vp-pv/amq/`

[8] Ávila, G. *Análise Matemática para Licenciatura.* 3ª. edição. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda, 2006.

[9] Ávila, G. *Introdução à Análise Matemática.* 2ª. edição. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda, 2003.

[10] Ávila, G. *Números muito grandes.* Revista do Professor de Matemática, nº 25, 1º semestre de 1994, págs. 1-9.

[11] Ávila, G. *Eudoxo, Dedekind, números reais e ensino de Matemática.* Revista do Professor de Matemática, nº 7, 2º semestre de 1985, págs. 5-10.

[12] Bailey, D. H., Borwein, P. B. e Plouffe, S. *On The Rapid Computation of Various Polylogarithmic Constants.* Mathematics of Computation, v. 66, n. 218, 1997, 903-913.

[13] Baldin, Y. Y. e Furuya, Y. K. S. *Geometra Analítica para todos, e atividades com Octave e Geogebra.* São Carlos: EdUFSCar, 2012.

[14] Barbeau, E. J., Klamkin, S. e Moser, W. O. J. *Five Hundred Mathematical Challenges.* Washington: The Mathematical Association of America, 1995.

[15] Barbosa, J. L. M. *Geometria Euclidiana Plana.* Décima Edição. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

[16] Bastos, W. D. e Silva, A. F. *A área do círculo.* Revista do Professor de Matemática, nº 40, 2º quadrimestre de 1999, págs. 46-48.

[17] Batschelet, E. *Introdução à Matemática para Biocientistas.* Tradução de da Silva, V. M. A. P. Rio de Janeiro: Editora Interciência e Editora da Universidade de São Paulo, 1978.

[18] Beigel, R. *Irrationality Without Number Theory.* Am. Math. Monthly, 98, 1991, 332-335.

[19] Bold B. *Famous Problems of Geometry and How to Solve Them.* New York: Dover Publications, INC, 1969.

[20] Bortolossi, H. J. e Martins, C. O. L. F. *A Decomposição de números racionais positivos em frações egípcias: Os Teoremas de Fibonacci/Sylvester e Erdös/Stein e um correspondente Applet JavaScript.* Revista do Professor de Matemática OnLine v.10, n.4, 2022, 530-540.

[21] Borwein, J. M. e Borwein, P. B. *Pi and the AGM. A Study in Analytic Number Theory and Computational Complexity.* Canadian Mathematical Society. Series of Monographs and Advanced Texts, v. 4. New York: Wiley-Interscience Publication, 1987.

[22] Borwein, J. M. Borwein, P. B. e Bailey, D. H. *Ramanujan, Modular Equations, and Approximations to Pi or How to Compute One Billion Digits of Pi.* Amer. Math. Monthly, v. 96, n. 3, 1989, 201-219.

[23] Boyer, C. B. *História da Matemática.* Tradução de Gomide, E. F. São Paulo: Editora Edgard Blücher LTDA, 1974.

[24] Brasil-MEC. *Base Nacional Comum Curricular.* Brasil: Ministério da Educação, 2025. `https://basenacionalcomum.mec.gov.br/` Consultado em agosto de 2025.

[25] Carneiro, J. P. Q. *Um processo finito para a raiz quadrada.* Revista do Professor de Matemática, nº 34, 2º quadrimestre de 1997, págs. 36-44.

[26] Carneiro, J. P. Q. *As dízimas periódicas e a calculadora.* Revista do Professor de Matemática, nº 52, 3º quadrimestre de 2003, págs. 3-7.

[27] Carvalho, J. P. *Um problema de Fibonacci.* Revista do Professor de Matemática, nº 17, 2º semestre de 1990, págs. 4-9.

[28] Collette, J. P. *Histoire des mathématiques.* Ottawa: Editions du renouveau Pedagogique INC, 1973.

[29] CONMETRO. *Resolução nº 12/88.* `http://www.inmetro.gov.br/` Consultado em janeiro de 2008.

[30] Cooke, R. *The History of Mathematics.* New York: John Wiley & Sons, 1997.

[31] Costa, A. M. *Frações contínuas: Abordagem histórica, aplicações e proposta didática no Ensino Básico.* Dissertação de Mestrado. Campina Grande: UFCG, 2023.

[32] Costa, E. A. et alii, *Uma proposta para o ensino de funções exponenciais e logarítmicas de acordo com a BNCC: mediada pelo GeoGebra e resolução de problemas.* Revista do Professor de Matemática OnLine v.10, n.5, 2022, 646-662.

[33] Dias, J. R. *Dízimas periódicas ... e a calculadora.* Revista do Professor de Matemática, nº 14, 1º número de 1989, págs. 37-39.

[34] Dolce, O. e Pompeo, J. N. *Geometria Espacial, posição e métrica.* São Paulo: Atual Editora, 1995.

[35] Domingues, H. H. *Fundamentos de Aritmética.* São Paulo: Atual Editora, 1998.

[36] Domingues, H. H. *O pequeno teorema de Fermat e as dízimas periódicas.* Revista do Professor de Matemática, nº 52, 3º quadrimestre de 2003, págs. 8-16.

[37] Ebbinghaus, H.-D. *et alii. Numbers.* New York: Springer Verlag, 1991.

[38] Edwards, C. H. *The Historical Development of the Calculus.* New York: Springer Verlag, 1979.

[39] Edwards, H. M. *Fermat's Last Theorem, a Genetic Introduction to Algebraic Number Theory.* New York: Springer Verlag, 1977.

[40] Einhardt, I. F. B. *Aplicações das Funções Exponenciais e Logarítmicas Usando o Aplicativo MalMath.* Dissertação de Mestrado. Rio Grande, Rio Grande do Sul: FURG, 2016.

[41] *Encyclopaedia Britannica do Brasil Publicações Ltda.* Enciclopedia mirador internacional. Antonio Houaiss (Ed.). São Paulo: Encyclopaedia Britannica do Brasil Publicações Ltda, 1976.

[42] Eves, H. *Introdução à História da Matemática.* Tradução de Domingues, H. H. Campinas: Editora UNICAMP, 2004.

[43] Exame Nacional de Desempenho de Estudantes (ENADE) `http://www.inep.gov.br/superior/enade/` Consultado em março de 2008.

[44] Figueiredo, D. G. *Números Irracionais e Transcendentes.* Terceira Edição. Coleção Fundamentos da Matemática Elementar. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2002.

[45] Fowler, D. H. *The Mathematics of Plato's Academy. A new reconstruction.* Oxford: Clarendon Press, 1990.

[46] Franks, R. L. e Marzec, R. P. *A theorem on mean-value iterations.* Proc. Amer.Math. Soc., 30, 1971, págs. 324-326.

[47] Gauss, C. F., *Disquisitiones Arithmeticae.* New York: Springer Verlag, 1986.

[48] Goldstine, H. H. *A History of Numerical Analysis.* New York: Springer Verlag, 1977.

[49] Gomes, O. R. *Professor, vê se tem lógica?* Revista do Professor de Matemática, nº 68, 1º quadrimestre de 2009, pág. 13.

[50] Graham, R. L. Knuth, D. E. e Patashnik, O. *Concrete Mathematics.* Addison-Wesley, 1990.

[51] Grant, M. A. *Approximating square roots.* The Mathematical Gazette, 66, 1982, 230-231.

[52] Guidorizzi, H. L. *Um Curso de Cálculo.* volumes 1, 3 e 4, 5ª. edição. Rio de Janeiro: LTC Editora, 2004.

[53] Hammack R. e Lyons D. *A simple way to teach logarithms.* The Mathematics Teacher, vol. 88, n. 5, maio de 1995, 374 e 375.

[54] Havil, J. *Gamma: exploring Euler's constant.* Princeton: Princeton University Press, 2001.

[55] Heath, T. L. *A Manual of Greek Mathematics.* New York: Dover Publications, 1963.

[56] Hiratsuka, P. I. *Fazendo uma divisão de frações significativa.* Revista do Professor de Matemática, nº 30, 1º quadrimestre de 1996, págs. 23-25.

[57] Hitotsumatsu, S. (editor supervisor). *Mathematics for Elementary School.* Tokio: Gakkoh Tosho, não datado.

[58] Honsberger, R. (ed.) *Mathematical Gems.* vol. I, II e III. Mathematical Association of America, 1973.

[59] Ifrah, G. *Os Números, história de uma grande invenção.* Tradução de Senra, S. M. F. 3ª. edição. São Paulo: Editora Globo, 1989.

[60] Jacobs, H. R. *Geometry.* Third Edition. New York: W. H. Freeman Company, 2003.

[61] Karpinski, L. C. *The History of Mathematics.* New York: Russel & Russel, 1965.

[62] Keng, H. L. *Introduction to Number Theory.* New York: Springer Verlag, 1982.

[63] Kline, M. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times.* Oxford: Ed. Oxford University, 1972.

[64] Knorr, W. R. *The Method of Indivisibles in Ancient Geometry.* In Calinger, R. (ed.) Vita Mathematica, Mathematical Association of America, 1996.

[65] Landau, E. *Foundations of Analysis.* New York: Chelsea Publishing Company, 1966.

[66] Lang, S. *Analysis I.* Reading, Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, 1968.

[67] Lang, S. *Undergraduate Algebra.* New York: Springer Verlag, 1987.

[68] Lange, L. J. *An Elegant Continued Fraction for* π. Amer. Math. Monthly, v. 106, 1999, 456-458.

[69] Liberman, M. P. *Divisão de números racionais escritos na forma de fração.* Revista do Professor de Matemática, nº 3, 2º semestre de 1983, págs. 40-42.

[70] Lima, E. L. *Por que* $(-1)(-1) = 1$*?* Revista do Professor de Matemática, Vol. 1, nº 1, 1982, págs. 6-7, e nº 3, 2º semestre de 1983, págs. 39-40.

[71] Lima, E. L. *Logaritmos.* Coleção Fundamentos da Matemática Elementar. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1985.

[72] Lima, E. L. *Áreas e Volumes.* Coleção Fundamentos da Matemática Elementar. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1985.

[73] Lima, E. L. *Curso de Análise.* Volume 1. 11ª. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2004.

[74] Lima, E. L. *et alii. A Matemática do Ensino Médio.* Volumes 1, 2 e 3. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1996.

[75] Lützen, J. *Why was Wantzel overlooked for a century? The changing importance of an impossibility result.* Historia Mathematica 36 (2009) 374-394.

[76] Maor, E. *e: The Story of a Number.* Princeton: Princeton University Press, 1994.

[77] Martinez, F. B. *et alii. Teoria dos Números.* Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2024.

[78] Massago, S. *Tutorial de Maxima no formato WxMaxima.* `https://www.dm.ufscar.br/profs/sadao/maxima/index.php` Consultado em junho de 2025.

[79] The Mathematics Teacher. Reston, National Council of Teachers of Mathematics. Seção *Calendar Problems* de vários fascículos.

[80] *Maxima.* `http://maxima.sourceforge.net` *Maxima Manual.* Versão 5.17.1. `https://maths.cnam.fr/Membres/wilk/MathMax/help/Maxima/maxima.html` Consultado em junho de 2025.

[81] Mega, E. e Watanabe, R. *Olimpíadas Brasileiras de Matemática 1ª. a 8ª.* São Paulo: Editora Núcleo e Sociedade Brasileira de Matemática, 1988.

[82] Miel, G. *Of Calculations Past and Present: The Archimedean Algorithm.* Amer. Math. Monthly, v. 90, n. 1, 1983, págs. 17-35.

[83] Mignotte, M. *Mathematics for Computer Algebra.* New York: Springer Verlag, 1992.

[84] Moise, E. E. *The Number Systems of Elementary Mathematics.* Reading, Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, 1966.

[85] Moise, E. E. *Elementary Geometry from an advanced standpoint.* Reading, Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, 1963.

[86] Monteiro, L. H. J. *Elementos de Álgebra.* Coleção Elementos de Matemática. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Universidade de São Paulo e Ao Livro Técnico, 1969.

[87] Nara, T. (editor supervisor). *Mathematics for Elementary School.* Tokio: Gakkoh Tosho, não datado.

[88] Neugebauer, O. e Sachs, A. J. (eds.) *Mathematical Cuneiforms Texts.* New Haven: American Oriental Society, 1946, American Oriental Series, vol. 29.

[89] Niblo, G.A. *Mathematical Spectrum.* `http://www.maths.soton.ac.uk/~gan/MA111/slides/sld049.htm` Consultado em junho de 2005.

[90] Olds, C. D. *Continued Fractions.* Nova York: Randon House, 1963.

[91] Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) `http://www.obmep.org.br` Consultado em março de 2008.

[92] Oliveira, C. R. *Caos: um exemplo.* São Carlos: Departamento de Matemática da UFSCar, 2007.

[93] Oliveira, J. L. *O retângulo de prata, a razão de prata e sua relação com a sequência de Pell.* Revista do Professor de Matemática OnLine v.10, n.2, 2022, 163-181.

[94] Palis, G. R. *Comprimento da Circunferência no Ensino Elementar.* Revista do Professor de Matemática, nº 14, 1989, 29-37.

[95] Paterlini, R. R. *O que é o Método Genético para o ensino da Matemática.* `http://www2.dm.ufscar.br/Hp_2001/hp400/hp400.html` Consultado em janeiro de 2008.

[96] Paterlini, R. R. *Aritmética dos números inteiros.* Disponível em `https://www.dm.ufscar.br/~ptlini/arit_int_paterlini_3a_edicao_24_jan_2025_Hy_v_beta.pdf` Consultado em janeiro de 2026.

[97] Paterlini, R. R. *Sócrates e Mênon.* `http://www2.dm.ufscar.br/hp/hp157/hp157001/hp157001.html` Consultado em agosto de 2004.

[98] Piñero, G. *Ziguratos de quadrados.* Revista do Professor de Matemática, nº 44, 3º quadrimestre de 2000, págs. 15-19.

[99] Pinto, R. e Costa, L. *A irracionalidade e transcendência de certos logaritmos.* Revista do Professor de Matemática OnLine v.6, n.1, 2018, 68-75.

[100] Pisa, Programa Internacional de Avaliação de Alunos. `http://www.inep.gov.br/internacional/pisa/Novo/oquee.htm` Consultado em janeiro de 2008.

[101] Resnick, R. e Halliday, D. *Física.* Tradução de Cavallari, E. e Afini, B. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico S. A. e Editora Universidade de são Paulo, 1967.

[102] Revista do Professor de Matemática. São Paulo, Sociedade Brasileira de Matemática. Seção *Problemas* de diversos números. Seção *Cartas* de diversos números.

[103] Ripoll, C. C. et alii. Frações no Ensino Fundamental - Vol. 1. Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada & Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas, 2016. Disponível em: `https://portaldaobmep.impa.br/uploads/msg/d0ujl55pfbc4s.pdf` Consultado em agosto de 2025.

[104] Rosen, K. H. *Elementary Number Theory and its Applications.* Reading, Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, 1984.

[105] Rossi, P. R. S. *Logaritmos no ensino médio: construindo uma aprendizagem significativa.* Dissertação de Mestrado. São Carlos: UFSCar, 2010. `https://repositorio.ufscar.br/server/api/core/bitstreams/b23754eb-aae0-4e83-b330-a6c2a8daae96/content` Consultado em junho de 2026.

[106] Rudin, W. *Princípios de Análise Matemática.* Tradução de Brito, E. R. H. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico S. A. e Editora Universidade de Brasília, 1971.

[107] Sampaio, J. C. V. *Dízimas periódicas e o teorema de Etiénne Midy.* XI Bienal de Matemática UFSCar. São Carlos: Sociedade Brasileira de Matemática, 2024. `https://www.dm.ufscar.br/profs/sampaio/MC_T7_joao_sampaio-texto-xibienal-corrigido.pdf` Consultado em julho de 2025.

[108] Sampaio, J. C. V. *Decompondo frações da forma 2/n, n ímpar, como soma de duas frações unitárias distintas, de todas as formas possíveis.* Revista do Professor de Matemática OnLine v.13, n.2, 2025, 185-192.

[109] Sampaio, J. C. V. *Cálculo Diferencial e Integral I.* São Paulo, Ed. Livraria da Física, 2022.

[110] Santos, A. L., Wagner, E. e Agostino, R. F. W. *Olimpíadas de Matemática do Estado do Rio de Janeiro.* São Paulo: Atual Editora e Sociedade Brasileira de Matemática, 1995.

[111] Santos, J. P. O. *Introdução à Teoria dos Números.* Coleção Matemática Universitária, Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1998.

[112] Sebah, P. e Gourdon, X. *Pythagoras constant:* $\sqrt{2}$. `http://numbers.computation.free.fr/Constants/constants.html`. Consultado em 19 de agosto de 2004.

[113] Sierpinski, W. *250 Problems in Elementary Number Theory.* New York: American Elsevier Publishing Company, 1970.

[114] Silva, B. A. e Penteado, C. B. *Fundamentos dos números reais: concepções de professores e viabilidade de início do estudo da densidade no ensino médio.* Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v. 11, n. 2, 2009, 351-371.

[115] Sloane, N. J. A. *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences.* `https://oeis.org/` Consultado em abril de 2025.

[116] Smith, D. E. *History of Mathematics.* volumes I e II. New York: Dover Publications, 1958.

[117] Sprows, D. J. *Irrationals and the Fundamental Theorem of Arithmetic.* Amer. Math. Monthly, 96, 1989, 732, 1989.

[118] Stillwell, J. *Mathematics and Its History.* New York: Springer-Verlag, 1987.

[119] Stillwell, J. *Elements of Algebra.* New York: Springer-Verlag, 1994.

[120] Stillwell, J. *Numbers and Geometry.* New York: Springer-Verlag, 1998.

[121] Struik, D. J. *A Concise History of Mathematics.* 3ª. edição. New York: Dover Publications, 1967.

[122] Toeplitz, O. *The Calculus, a Genetic Approach.* Chicago: The University Press, 1963.

[123] Venâncio, Y. *Mente libertada, um cálculo intuitivo.* Revista do Professor de Matemática, 5º9, 2006, 46-47.

[124] Vieira, L. *et alii. Introdução aos números transcendentes e aos números de Liouville.* Revista do Professor de Matemática OnLine v.7, n.1, 2019, 77-94.

[125] Waerden, B. L. van der. *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations.* Berlin: Springer Verlag, 1983.

[126] Waterhouse, W. C. *Why Square Roots are Irrational.* Amer. Math. Monthly, 96, 1986, 213-214.

[127] Weisstein, Eric W. *MathWorld–A Wolfram Web Resource.* Itens consultados: *Cube Root; Delian Constant; Self-Avoiding Walk Connective Constant.* Endereço geral: `https://mathworld.wolfram.com/` Consultas no período 2024-2025.

[128] Wendroff, B. *First Principles of Numerical Analysis: An Undergraduate Text.* Reading, Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, 1969.

[129] Wikipedia. Informações e figuras. Verbetes consultados: *Aleksander Gelfond; Apéry's constant; Archimedes; Benford's law; Bonaventura Cavalieri; Cantor set; Carl Friedrich Gauss; Cavalieri's principle; Connective constant; Constante de Champernowne; Constante de Gelfond; Constructible polygon; Continued fraction; Conversão de base numérica; Cube root; David Hilbert; Eudoxus of Cnidus; Euler's constant; Exponential function; Ferdinand von Lindemann; Fermat number; Fraction; Hipaso de Metaponto; John Napier; Joseph Liouville; Khinchin's constant; Leonardo Fibonacci; List of mathematical constants; Log-log plot; Logarithm; Logaritmo; Mathematical constant; Maxima (software); Normal number; nth root; Pentágono; Pi; Pierre Laurent Wantzel; Pitágoras; Polígono regular; Por mil; Problema de Basileia; Problemas de Hilbert; Proporção áurea; Regular polygon; Richard Dedekind; Roman currency; Scientific notation; Simon Stevin; Simple continued fraction; Square root algorithms; Square root of 2; Terra; Theodor Schneider; Triângulo de Sierpinski; Universal parabolic constant; Zeno of Elea.* Endereço geral: `https://en.wikipedia.org/wiki/` Consultas nos períodos 2007-2008 e 2025-2026.

[130] Zani, S. L. *Funções de Uma Variável Complexa.* `https://sites.icmc.usp.br/szani/complexa.pdf`. Consultado em 31 de janeiro de 2026.

Índice de nomes próprios

Academia de Platão, 45, 74
Ahmes (c. 1680-1620 a.C.), 120, 135, 146
Al-Kashi, G. J. (1390-1450), 120
Antiga Grécia, 46, 47, 49, 111, 113, 242
Apian, P. (1495-1552), 183
Apolônio de Perga (c. 262-190 a.C.), 171
Aristóteles (384-322 a.C.), 49, 237
Arquimedes (287-212 a.C.), 84, 111, 113, 116–118, 120, 129, 136, 157, 171, 182, 209, 215, 222, 250
Arquitas (c. 410-350 a.C.), 74

Bürgi, J. (1552-1632), 184
Beldamandi, P., 136
Benford, F. A. (1883-1948), 199
Bernoulli, N. (1687-1759), 108, 173
Briggs, H. (1561-1630), 184
Brouncker, W. (1620-1684), 169

Cantor, G. (1845-1918), 150, 158, 199
Cavalieri, B. C. (1598-1647), 215, 251
Cavalieri, B. F. (1598-1647), 215
Ceulen, L. (1540-1610), 120
Ch'ung-chih, T. (429-501), 120
Champernowne, D. G. (1912-2000), 245
Chuquet, N. (1445-1488), 182
Cnido, Anatólia, 74

De Moivre, A. (1667-1754), 108
Dedekind, R. (1831-1916), 78, 79, 250
Demócrito (c. 410 a.C.), 215
Diofanto (c. 250), 120

Edwards, H. M. (1936-2020), vi
Eratóstenes (c. 230 a.C.), 126
Escola
  Alexandrina, 45
  Pitagórica, 45, 47, 73
Euclides (c. 300 a.C.), 135
Eudoxo (c. 408-355 a.C.), 74, 77, 78, 84, 250
Euler, L. P. (1707-1783), 132, 157, 169, 192, 209, 229, 251

Fídias (c. 480-430 a.C.), 209
Fermat, P. (1601?-1665), vi, 15, 17
Fibonacci, ou Leonardo de Pisa (1170-1250), 39–41, 92, 107, 108, 221, 229, 249

Galilei, G. V. B. (1564-1642), 215
Gauss, J. C. F. (1777-1855), 41, 42, 79, 208, 249
Gelfond, A. O. (1906-1968), 158, 250
Gutenberg, B. (1889-1960), 191

Hermite, C. (1822-1901), 158
Hilbert, D. (1862-1943), 158
Hipaso de Metaponto (c. 530-c. 450 a.C.), 237
Hipócrates (c. 440 a.C.), 128
Hui, L. (c. 220-280), 120, 129
Hurwitz, A. (1859-1919), 166
Huygens, C. (1629-1695), 42, 118

Jensen, C. A. (1792–1870), 249

Kepler, J. (1571-1630), 184
Khinchin, A. Y. (1894-1959), 210
Koch, H. V. (1870-1924), 150
Kochansky, A. (c. 1685), 129

Lambert, J. H. (1728-1777), 157
Leclerc, G-L (Conde de Buffon) (1707-1788), 244
Leibnitz, G. W. (1646-1716), 121
Lindemann, C. L. F. (1852-1939), 113, 117, 158, 208, 250
Liouville, J. (1809-1882), 157, 250
Llull, R. (c. 1232-1316), 244

Machin, J. (1680-1751), 121
Markov, A. A. (1856-1922), 166
Mênon, 47
Mesopotâmia, 45
Miyoshi, K., 121
Museu de Alexandria, 126

Nakayama, K., 121
Napier, J. (1550-1617), 184, 192, 250
Neugebauer, O. (1899-1990), 45, 129

Os Elementos, 135

Paganucci, G. (1827-1889), 249
Papus de Alexandria (c. 300), 171
Parmênides (5º século a.C.), 144
Pascal, B. (1623-1662), 187
Peano, G. (1858-1932), 13
Pitágoras (c. 570-495 a.C.), 45, 47, 65, 209, 249
Platão (427-347 a.C.), 45, 47, 49, 74, 129

Ramanujan, S. A. (1887-1920), 130, 167

Rhind, A. H. (1833-1863), 40
Richter, C. F. (1900-1985), 191
Rudolff, C. (1499-1545), 183

Santaló, L. A. (1911-2001), 63
Schneider, T. (1911-1988), 158
Shanks, W. (1812-1882), 121
Sierpinski, W. (1882-1969), 199
Snell, W. (1580-1626), 118
Sócrates (469-399 a.C.), 47, 49, 144
Stevin, S. (c. 1548-1620), 34, 35, 249
Stifel, M. (1487-1567), 183, 202–204
Sumérios, 45, 249
Susa, 45, 120

Tales de Mileto (c. 624-546 a.C.), 47, 72, 74, 75
Teodoro de Cirene (c. 450 a.C.), 49
Toeplitz, O. (1881-1940), v
Torricelli, E. (1608-1647), 187

UFSCar, v, vi, 2

Viéte, F. (1540-1603), 120, 250
Vlacq, A. (1600-1667), 184

Wallis, J. (1616-1703), 120
Wantzel, P. L. (1814-1848), 62, 208, 251

Yang Hui (1238-1298), 40

Zeno de Eléia (c. 490-430 a.C.), 144, 250

Índice de assuntos

$(d_n d_{n-1} \ldots d_2 d_1 d_0)_{dez}$, 4
0^0, 10
$AB + CD$, 67
$AB < CD$, 66
$AB \cong CD$, 66
$[x]$ parte inteira de x, 161
$\frac{a}{b}$ ou a/b, 19
$\lfloor x \rfloor$ maior inteiro $\leq x$, 161
log, ln, 186
$\log_a$, 185
$\mathbb{N}$, 10
$\mathbb{N}^*$, 10
$\mathbb{Q}$, 22
$\mathbb{R}_+$, 83
$\mathbb{R}_-$, 83
$\mathbb{Z}^*$, 11
$\mathbb{Z}_+$, 11
$\mathbb{Z}_-$, 11
$\sqrt{2}$, 45
    aproximação, 53
    como constante, 46
    construção, 47
    e Aristóteles, 49
    e os sumérios, 45, 48, 56, 61
    e Platão, 47
    gênese, 45
    não racionalidade, 49
    na Antiga Grécia, 46
    na reta numérica, 47
$\sqrt[3]{2}$, 62
$\sqrt[n]{a}$, 84
$|AB|$ comprimento de segmento, 66
$|a|$, 84
a^{m^n}, 9
a^{m^n} convenção, 9
$b \mid a$, 14
$b \nmid a$, 14
$\mathbb{R}$, 78

a reta numérica
    segmento unitário, 66
adição, 11
    associativa, 6
    comutativa, 6
    nomenclatura, 6
    soma ou total, 6
    termo ou parcela, 6
algarismos
    binários, 5
    decimais, 3
    duodecimais, 5
algoritmo da divisão continuada, 28
algoritmo de Arquimedes, 119
aplicativos
    IA, 237
    Maxima, 227
aproximação
    erro, 54
    por médias, 54, 56
    por tentativa, 53
área
    definição, 212
    elipse, 217
    parábola, 214
    postulados, 210
    quadrado, 210

circunferência
    arco de, 121
    comprimento, 115, 219
    fórmula do comprimento, 116
    retificação, 113
compatibilidade entre a ordem e a adição, 25
conjunto
    ínfimo, 81, 177
    ilimitado, 81
    limitado, 81
    limitado inferiormente, 13, 81
    limitado superiormente, 13, 81
    mínimo, 13, 78, 81
    máximo, 13, 78, 81
    supremo, 81, 177
constante
    de Arquimedes, 111
    de conectividade, 241
    de Delos, 64
    de Pitágoras, 45, 46
constante de
    Euler, 192
corpo ordenado completo, 84
cortes de Dedekind, 78

dígito, 4, 5
desigualdade de Bernoulli, 173

diferença, 6, 12
disco
  área, 117
  área de setor, 124
  fórmula da área, 117
  semidisco, 125
  setor, 124
distributiva, 7, 12
divide, 14
divisão, 11
divisor, 14

ensino da Matemática
  argumento plausível, 214
  através de problemas, v
  método genético, v
erro
  absoluto, 34
  de aproximação, 54
  relativo, 34
escala pH, 191
escala Richter, 191

fator, 14
FCS: fração contínua simples, 161
fração
  de inteiros, 19
  de racionais, 24
  decimal, 34
  denominador, 20
  equivalentes, 21
  geratriz, 43
  honesta, 52, 62
  inversa, 24
  irredutível, 25
  numerador, 20
  ordinária, 19
  potenciação, 24
  unitária, 39, 40
fração contínua, 32
  convergente, 34, 42, 63
  de $\sqrt{2}$, 59
  de $\sqrt[3]{2}$, 62
  de racional, 33
  finita simples, 32
  notação, 32
  quocientes parciais, 32
  unicidade, 33
função φ de Euler, 229
funções
  exponenciais, 171, 172, 178
  logarítmicas, 171, 182, 185
  trigonométricas, 125

grau de número algébrico, 156

inteiro
  associativa/adição, 12
  associativa/multiplicação, 12
  distributiva, 12
  leis de cancelamento, 12
  negativo, 11
  oposto, 11
  positivo, 11

Lei da Integridade, 10, 36
Lei da Tricotomia, 6, 25, 36
Leis de cancelamento
  adição, 7
  multiplicação, 7
  subtração, 7
limitante inferior, 13, 81
limitante superior, 13, 81
limites de sequências, 93

máximo divisor comum, 14
método de descida, 50
mínimo múltiplo comum, 14
modelo
  crescimento populacional, 186
  pressão atmosférica, 187
multiplicação, 11
  associatividade, 7
  compatibilidade/ordem, 7
  comutatividade, 7
  distributiva/adição, 7
  distributiva/subtração, 7
múltiplo, 14

número
  algébrico, 156
  composto, 14
  construtível, 46, 207, 208
  inteiro, 11
  irracional, 79, 153
  natural, 10
  oposto, 11
  positivo, 10
  primo, 14
  racional, 19
  trancendente, 157
  um, 1
número π
  definição, 116
  existência, 115
  irracionalidade, 157
  reconhecimento, 111
  transcendência, 158
  valor, 120, 126
número e
  definição, 194
  gênese, 192
  irracionalidade, 157, 195
  transcendência, 158
número irracional
  fração contínua, 161
  reconhecimento, 155, 156
número natural

adição, 5
antecessor, 1
conjunto, 1
divisão, 8
gênese, 1
multiplicação, 7
operações fundamentais, 5
ordem, 6
potenciação, 9
subtração, 6
sucessor, 1
número racional
adição, 23
aproximação, 34
dígito, 28
divisão, 24
equivalentes, 21, 23
expansão composta, 29
expansão decimal, 25, 27
expansão finita, 29
expansão periódica, 29
expansão simples, 29
fração contínua, 32
gênese, 19
multiplicação, 23
ordem, 21, 23
parte inteira, 28
parte não inteira, 28
período, 29
positivo, 19
potenciação, 24
pré-período, 29
propriedades, 24
representação compacta, 27
subtração, 23
número real
enumerabilidade, 158
expansão β-ádica, 159
expansão decimal, 153
modelos, 65
números
comensuráveis, 70
negativos, 11

ordem, 12
compatibilidade/adição, 6
compatibilidade/subtração, 7
Lei da Tricotomia, 6
transitiva, 6

Pequeno Teorema de Fermat, 15, 17
porcentagem, 35
potenciação
conceito, 9
convenção, 9
nomenclatura, 9
propriedades, 9
Primeiro Princípio da Indução Completa, 14
Princípio
da continuidade da reta, 67
da não limitação da reta, 67
de Eudoxo, 84
Indução, 13
Menor Número Natural, 6, 13
Princípios de Cavalieri, 214
progressão aritmética, 91
progressão geométrica, 91, 135
propriedade
associativa, 10, 24
comutativa, 10, 12, 24, 25
da completitude, 84
distributiva, 10, 25
transitiva, 25

quadrado perfeito, 15
quadratura, 116

radiano, 124
razão áurea, 53
relativamente primos, 14
retângulo áureo, 89
reta numérica, 26, 66
coordenada, 66
origem, 66
semirreta negativa, 66
semirreta positiva, 66

segmentos
comprimento, 66
Hipótese da comensurabilidade, 69
razão entre, 70
Segundo Princípio da Indução Completa, 14
semicircunferência, 123
comprimento, 123
sequência, 91
constante, 92
convergente, 93, 94
definição, 92
divergente, 94, 102
Fibonacci, 39, 92
ilimitada, 101
limitada, 101
limites, 93
monótona, 101
propriedades, 96
somas parciais, 139
tende para mais infinito, 103
sequência de Fibonacci, 229
série
convergente, 145
divergente, 145
geométrica, 135
termo geral, 145
série geométrica
aplicações, 142
convergente, 139
definição, 136
definição, 139

divergente, 139
fórmula, 140
séries numéricas, 145
sistema de numeração
aditivo, 2
base qualquer, 4
binário, 4, 5
decimal, 3
duodecimal, 5
hindu, 3
posicional, 3
sexagesimal, 45
sistema decimal
representação compacta, 4
representação expandida, 4
subsequência, 104
subtração, 11

Teorema
Compressão, 100
da Proporcionalidade de Tales, 72, 75
de Gelfond-Schneider, 158
do algoritmo da divisão, 14
Fundamental da Aritmética, 15
Sequências Monótonas, 101
Teste da Comparação para séries, 146

unidade, 1

valor absoluto, 12, 84
volume
cubo, 223
elipsóide, 218
paralelepípedo, 223