



Universidade Federal de São Carlos  
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia  
Departamento de Matemática



## Introdução à Topologia

**Autor:** *Fabio Augusto Camargo*

**Orientador:** *Prof. Dr. Márcio de Jesus Soares*

**Disciplina:** Trabalho de Conclusão do Curso A

**Curso:** Licenciatura em Matemática

**Professores Responsáveis:** Sadao Massago  
Karina Schiabel Silva  
Vera Lúcia Carbone

São Carlos, 31 de julho de 2013.



# Introdução à Topologia

**Autor:** *Fabio Augusto Camargo*

**Orientador:** *Prof. Dr. Márcio de Jesus Soares*

**Disciplina:** Trabalho de Conclusão do Curso A

**Curso:** Licenciatura em Matemática

**Professores Responsáveis:** Sadao Massago  
Karina Schiabel Silva  
Vera Lúcia Carbone

**Instituição:** Universidade Federal de São Carlos  
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia  
Departamento de Matemática

São Carlos, 31 de julho de 2013.



# Resumo

Topologia geral é a base de conhecimento em várias áreas da Matemática. Neste trabalho serão desenvolvidos temas básicos, como: espaços topológicos; base para uma topologia; subespaço topológico; e topologia quociente.



# Sumário

Prefácio	vii
<b>1 Espaços Topológicos</b>	<b>1</b>
1.1 Bases para uma Topologia . . . . .	3
1.2 Topologia da Ordem . . . . .	4
1.3 Produto sobre o Cartesiano $X \times Y$ . . . . .	5
1.4 Subespaços Topológicos . . . . .	5
1.5 Fecho e Interior de um conjunto . . . . .	6
1.6 Funções Contínuas . . . . .	8
1.7 Topologia Quociente . . . . .	9





# Prefácio

O estudo realizado durante esse trabalho é sobre introdução à topologia, com o intuito de ter uma melhor base de conhecimento para a realização do TCC B, que será sobre caracterização das superfícies compactas. O estudo envolve os conceitos básicos da topologia e exemplos significativos para um bom entendimento do conteúdo. A minha curiosidade por superfícies é o que motivou-me a dar continuidade no assunto para o TCC B.



# Capítulo 1

## Espaços Topológicos

O conceito de espaço topológico nasceu do estudo da reta real, espaço euclidiano e funções contínuas aplicadas sobre esses espaços. Definiremos espaço topológico e estudaremos algumas formas de se construir uma topologia sobre um conjunto.

**Definição 1.** Dizemos que uma topologia sobre um conjunto  $X$  é uma coleção  $\tau$  de subconjuntos de  $X$  tendo as seguintes propriedades:

- $\emptyset$  e  $X$  estão na coleção  $\tau$
- A união de elementos de qualquer subcoleção de  $\tau$  está em  $\tau$
- A interseção finita de elementos de qualquer subcoleção de  $\tau$  está em  $\tau$

O conjunto  $X$  nessas condições é chamado de Espaço Topológico. Podemos, de outra forma, representar com um par ordenado  $(X, \tau)$  sendo um conjunto  $X$  e a topologia  $\tau$  nele.

Dado um conjunto  $X$  e uma topologia  $\tau$  sobre  $X$ , dizemos que todo  $U \in \tau$  é um aberto de  $X$ .

Tendo isso em mente, podemos dizer também que um espaço topológico é um conjunto  $X$  junto a uma coleção de abertos de  $X$ , onde  $\emptyset$  e  $X$  são abertos, qualquer união de abertos é aberto, e intersecções finitas de abertos são abertos.

**Exemplo 1.1.** Seja  $X$  um conjunto de quatro elementos.  $X = \{a, b, c, d\}$ , existem várias possíveis topologias no conjunto  $X$ .

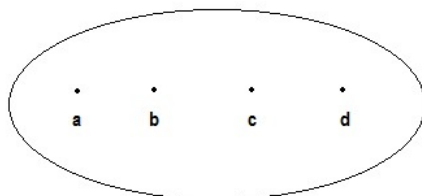


Figura 1.1:  $\tau = \{\emptyset, X\}$ .

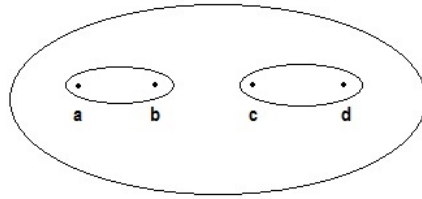


Figura 1.2:  $\tau = \{\emptyset, \{a, b\}, \{c, d\}, X\}$ .

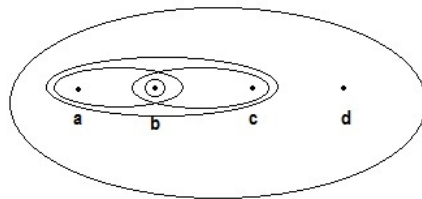


Figura 1.3:  $\tau = \{\emptyset, \{a, b\}, \{b, c\}, \{b\}, \{a, b, c\}\}$ .

Porém existem casos que algumas coleções não são topologias em  $X$ .

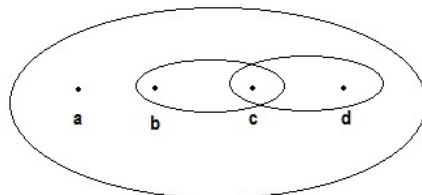


Figura 1.4: Não é uma topologia, pois  $\{c\} \notin \tau$ , em que  $\{c\} = \{b, c\} \cap \{c, d\}$ .

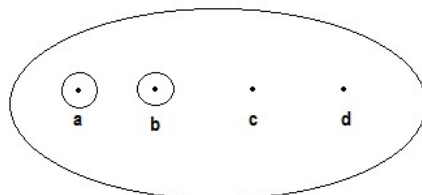


Figura 1.5: Não é uma topologia, pois  $\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\} \notin \tau$ .

Dentre todas as topologias que se pode colocar sobre um conjunto qualquer  $X$ , existem algumas mais comuns e significativas para esse estudo.

**Exemplo 1.2** (Topologia Discreta). Chamamos de *Topologia Discreta*, a topologia em que todos subconjuntos de  $X$  são abertos, ou seja, todo subconjunto  $U \subset X$  temos  $U \in \tau$ .

**Exemplo 1.3** (Topologia Caótica). Chamamos de *Topologia Caótica*, a topologia em que somente  $\emptyset$  e o próprio  $X$  são abertos (estão em  $\tau$ ) Veja Figura 1.1.

**Exemplo 1.4** (Topologia do Complemento Finito). Chamamos de *Topologia do Complemento Finito*, a topologia em que todos subconjuntos  $U \subset X$  tais que,  $X \setminus U$  ou é vazio ou é finito.

Há também a possibilidade de compararmos duas topologias sobre um mesmo conjunto  $X$ . Dizemos que  $\tau'$  é mais fina que  $\tau$ , se  $\tau$  e  $\tau'$  são duas topologias sobre  $X$ , e  $\tau' \supset \tau$ . A grosso modo, comparamos dizendo que uma tem mais abertos que a outra.

## 1.1 Bases para uma Topologia

Como vimos podem existir várias topologias sobre um conjunto. Notamos que é necessário descrever toda a coleção de abertos. Podemos descrever uma coleção de abertos a partir de um coleção menor de abertos, o que iremos chamar de base para uma topologia.

**Definição 2.** Dado um conjunto  $X$ , chamamos de base para uma topologia  $\tau$  sobre  $X$ , uma coleção  $\beta$  de subconjuntos de  $X$  (onde esses subconjuntos são chamados de "elementos básicos") tais que:

- I) Para todo  $x \in X$ , existe pelo menos um elemento básico que o contém.
- II) Se  $x \in B_1 \cap B_2$ , onde  $B_1 \in \beta$  e  $B_2 \in \beta$ , então existe  $B_3 \in \beta$ , com  $B_3 \subset B_1 \cap B_2$  tal que  $x \in B_3$

Da definição, dizemos que  $\tau$  é uma topologia gerada por essa base  $\beta$ . Um subconjunto  $U \subset X$  é aberto em  $X$  se para todo  $x \in U$ , existir  $B_1 \in \beta$  tal que  $x \in B_1$  e  $B_1 \subset U$ .

**Teorema 3** (Base). Seja  $X$  um conjunto, e seja  $\beta$  uma base para a topologia  $\tau$  em  $X$ . Então  $\tau$  é igual a coleção de todas as uniões de elementos básicos de  $\beta$

*Demonstração.* Seja  $U \in \tau$ , temos que para todo  $x \in U$  existe  $B_x \in \beta$  tal que  $x \in B_x$  e  $B_x \subset U$ . Temos que  $U = \cup_{x \in U} B_x$ . Logo  $U$  é uma união de elementos básicos de  $\beta$ .  $\square$

Sejam duas topologias  $\tau$  e  $\tau'$  geradas pelas bases  $\beta$  e  $\beta'$  respectivamente. As seguintes afirmações são equivalentes:

- (I) Para cada  $x \in X$ , e cada elemento básico  $B_x \in \beta$  contendo  $x$ , existe  $B'_x \in \beta'$  tal que  $x \in B'_x \subset B_x$ ;
- (II)  $\tau'$  é mais "fina" que  $\tau$ .

**Exemplo 1.5.** Se  $\beta$  é uma coleção de todos os intervalos abertos na reta real,  $(a, b) = \{x : a < x < b\}$ , então a topologia gerada por essa base é chamada de topologia usual da reta.

**Definição 4** (Sub-base). Uma sub-base  $\mathcal{S}$  para uma topologia em  $X$  é uma coleção de subconjuntos de  $X$  cuja união é todo o  $X$ . A topologia gerada pela sub-base  $\mathcal{S}$  é definida pela coleção  $\tau$  de todas as uniões de finitas intersecções de elementos de  $\mathcal{S}$

## 1.2 Topologia da Ordem

Se  $X$  um conjunto simplesmente ordenado, existe uma topologia natural sobre  $X$ , definida pela relação de ordem e chamada Topologia da ordem. Suponhamos que o conjunto  $X$  tenha somente uma relação de ordem simples  $<$ . Dado dois elementos  $a$  e  $b$  de  $X$ , em que  $a < b$ , então existem quatro tipos de subconjuntos de  $X$ , chamados de intervalos, determinados por  $a$  e  $b$ :

- $(a, b) = \{x : a < x < b\}$  são chamados intervalos abertos;
- $[a, b] = \{x : a \leq x \leq b\}$  são chamados intervalos fechados;
- $[a, b) = \{x : a \leq x < b\}$  são chamados intervalos meio abertos;
- $(a, b] = \{x : a < x \leq b\}$  são chamados intervalos meio abertos.

Defini-se uma topologia sobre um conjunto  $X$  com uma simples relação de ordem, considerando  $\beta$  uma coleção de todos os conjuntos dos tipos:

- (I) Todos os intervalos abertos  $(a, b)$  em  $X$ ;
- (II) Todos intervalos da forma  $[a_0, b)$  em  $X$ , onde  $a_0$  é o menor elemento de  $X$ , se existir.
- (III) Todos intervalos da forma  $(a, b_0]$ , onde  $b_0$  é o maior elemento de  $X$ , se existir.

Temos que a coleção  $\beta$  é uma base para uma topologia em  $X$ , chamada *Topologia da Ordem*. Assumimos que  $X$  tem mais que um elemento.

**Definição 5.** *Se  $X$  é um conjunto ordenado, e  $a$  é um elemento de  $X$ , então existem quatro tipos de subconjuntos de  $X$  chamados raios, determinados por  $a$ :*

- $(-\infty, a) = \{x : x < a\}$ ;
- $(a, +\infty) = \{x : a < x\}$ ;
- $[a, +\infty) = \{x : a \leq x\}$ ;
- $(-\infty, a] = \{x : x \leq a\}$ .

*Os dois primeiros tipos de conjunto são chamados raios abertos. Eles são abertos na topologia da ordem sobre  $X$  e formam uma sub-base para ela. Pois, se  $a < b$ , temos*

- $(a, b) = (-\infty, b) \cap (a, +\infty)$ ;
- $[a_0, b) = (-\infty, b)$ ;
- $(a, b_0] = (a, +\infty)$ .

### 1.3 Produto sobre o Cartesiano $X \times Y$

É possível através das topologias em  $X$  e em  $Y$ , definirmos uma topologia sobre o produto cartesiano  $X \times Y$ .

Sejam  $X$  e  $Y$  dois espaços topológicos, definimos a *Topologia produto* sobre  $X \times Y$ , sendo a topologia que tem como base uma coleção  $\beta$ , em que os conjuntos são da forma  $U \times V$  tais que  $U \subset \tau_X$  e  $V \subset \tau_Y$ . De fato  $\beta$  é uma base, pois

- (I) se  $X \in \tau_X$  e  $Y \in \tau_Y$ , então  $X \times Y \in \beta$ ;
- (II) e, seja  $(x, y) \in (U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2)$  tais que  $U_1, U_2 \in \tau_X$  e  $V_1, V_2 \in \tau_Y$ . Como  $(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2)$ , e  $(U_1 \cap U_2) = U_3$ , em que  $U_3 \in \tau_X$  e  $(V_1 \cap V_2) = V_3$ , em que  $V_3 \in \tau_Y$ . Logo, existe  $U_3 \times V_3 \in \beta$  que contém  $(x, y)$  tal que  $x \in U_1 \cap U_2$  e  $y \in V_1 \cap V_2$ . Então,  $x \in U_3 = (U_1 \cap U_2) \in \tau_X$  e  $y \in V_3 = (V_1 \cap V_2) \in \tau_Y$ .

**Exemplo 1.6.** Vamos considerar o cartesiano  $(\mathbb{R}, \tau_{usual}) \times (\mathbb{R}, \tau_{usual}) = \mathbb{R}^2$  com topologia produto sobre esse cartesiano. Sejam  $(b_1, c_1)$ ,  $(a_1, c_1)$ ,  $(b_2, c_2)$  e  $(a_2, c_2)$  abertos em  $\mathbb{R}$ , representados na figura sobre o cartesiano  $\mathbb{R}^2$ , notemos que existem abertos que pode ser escrito como o cartesiano de outros dois abertos, por exemplo  $(b_1, c_1) \times (b_2, c_2)$ . Porém nem todo aberto em  $\mathbb{R}^2$  necessariamente é cartesiano de abertos, como podemos ver na figura que  $U = (b_1, c_1) \times (a_2, c_2) \cup (a_1, c_1) \times (b_2, c_2)$  é uma união de abertos.

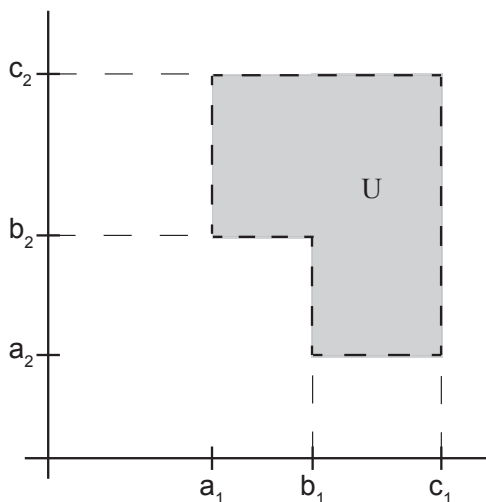


Figura 1.6:  $U = (b_1, c_1) \times (a_2, c_2) \cup (a_1, c_1) \times (b_2, c_2)$

### 1.4 Subespaços Topológicos

**Definição 6.** Seja  $(X, \tau_X)$  um espaço topológico. Seja  $Y$  um subconjunto de  $X$ , dizemos que a coleção  $\tau_Y = \{Y \cap U : U \in \tau_X\}$  é uma topologia sobre  $Y$ . Temos que o par  $(Y, \tau_Y)$  é chamado de subespaço topológico de  $(X, \tau_X)$ .

Provemos que  $\tau_Y$  é de fato uma topologia:

- (I)  $Y \cap \emptyset = \emptyset$ , e  $\emptyset \subset \tau_Y$ ;
- (II)  $\cup_{\alpha \in J} (U_\alpha \cap Y) = (\cup_{\alpha \in J} U_\alpha) \cap Y$ ;
- (III)  $(U_1 \cap Y) \cap (U_2 \cap Y) \cap \dots \cap (U_n \cap Y) = (U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_n) \cap Y$ .

Note que, se  $\beta$  é uma base para a topologia sobre  $X$ , então a coleção  $\beta_Y = \{B \cap Y \mid B \in \beta\}$  é uma base para  $\tau_Y$ .

**Proposição 7.** *Seja  $Y$  um subespaço de  $X$ . Se  $U$  é aberto em  $Y$  e  $Y$  é aberto em  $X$ , então  $U$  é aberto em  $X$ .*

*Demonstração.* Se  $U$  é aberto em  $Y$ , então  $U$  é da forma  $U = V \cap Y$ , para algum  $V$  aberto em  $X$ . Porém temos que  $Y$  é aberto em  $X$ , portanto  $U$  é interseção de abertos de  $X$ . Logo  $U$  é aberto ( $U \in \tau_X$ ).  $\square$

**Definição 8** (Conjuntos Fechados). *Um subconjunto  $A$  de um espaço topológico  $X$ , é dito fechado se e somente se seu complementar é aberto. Ou seja,  $X \setminus A$  é aberto.*

**Exemplo 1.7.** *O conjunto  $[a, b]$  é fechado em  $\mathbb{R}$ , pois  $\mathbb{R} \setminus [a, b] = (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$  que é um aberto de  $X$ .*

Um conjunto pode ser aberto, fechado, aberto e fechado ou nenhum dos dois.

**Exemplo 1.8.** *Seja  $Y = (0, 2) \cup (3, 5) \subset \mathbb{R}$ , e seja  $(Y, \tau_Y)$ , com topologia de subespaço.*

- $(0, 2)$  é aberto e fechado, pois  $Y \setminus (0, 2)$  é aberto também.
- $[1, 2) \cup (3, 5)$  é fechado e não é aberto, pois  $Y \setminus [1, 2) \cup (3, 5) = (0, 1)$
- $(0, 1)$  é aberto e não é fechado.
- $[1, 2) \cup (3, 4)$  não é nem aberto e nem fechado, pois o complementar  $(0, 1) \cup [4, 5)$  também não é nem aberto e nem fechado.

Com esse conceito é possível definir espaços topológicos utilizando a definição de fechados.

Seja  $X$  um espaço topológico, então temos que:

- $\emptyset$  e  $X$  são fechados.
- A interseção de quaisquer fechados é fechado.
- A união finita de fechados é fechado.

## 1.5 Fecho e Interior de um conjunto

**Definição 9.** *Dado um subconjunto  $B$  de um espaço  $X$ , temos:*

- *O interior de  $B$  é definido como sendo a união de todos os abertos contidos em  $B$ . Denotamos interior de  $B$  como sendo  $\text{Int}B$  ou  $\overset{\circ}{B}$ .*
- *O fecho de  $B$  é definido como sendo a interseção de todos os fechados que contém  $B$ . Denotamos fecho de  $B$  por  $\bar{B}$ .*

*Podemos dizer que o interior de um conjunto é o maior aberto contido nele, e o fecho é o menor fechado que o contém. Note que  $\overset{\circ}{B}$  é aberto, que  $\bar{B}$  é fechado e temos*

$$\overset{\circ}{B} \subset B \subset \bar{B}.$$

*Se  $B$  é aberto então  $\overset{\circ}{B} = B$  e se  $B$  é fechado então  $\bar{B} = B$ .*



**Proposição 10.** *Seja  $A$  um subconjunto de um espaço topológico  $X$ . Suponha que a topologia é dada por uma base  $\beta$ , então  $x \in \bar{A}$  se e somente se todo elemento básico que contém  $x$  intercepta  $A$ .*

*Demonstração.* Suponhamos que existe uma vizinhança básica  $U_x$  de  $x$ ,  $x \in U_x \in \beta$ , tal que  $U_x \cap A = \emptyset$ . Logo  $A \subset U_x^c$ . Como  $U_x^c$  é fechado e  $\bar{A}$  é o menor fechado que contém  $A$ , temos que  $\bar{A} \subset U_x^c$ . Mas  $x \in \bar{A}$  então  $x \in U_x^c$ , o que contradiz que  $x \in U_x$ .

Assuma agora que todo elemento básico que contém  $x$  intercepta  $A$ . Suponha que exista um fechado  $V \supset A$ ,  $x \notin V$ . Então,  $x \in V^c$ , onde  $V^c$  é aberto, e existe um aberto básico  $V_x \in \beta$ , com  $V_x \cap A = \emptyset$ . Como  $V_x \cap A = \emptyset$  então  $V^c \cap A = \emptyset$  o que contradiz o fato de  $x \notin V$ , pois  $x \in V^c \cap A$ ,  $x \in A \subset V$ .  $\square$

**Definição 11.** *Dizemos se um aberto  $U$  que contém  $x \in X$  é “vizinhança” de  $x$ . Logo, a definição de  $\bar{A}$  pode ser da forma:  $x \in \bar{A}$  se, e somente se, toda vizinhança de  $x$  intercepta  $A$ .*

**Definição 12** (Pontos de acumulação). *Dado um subconjunto  $A$  de um espaço topológico  $X$ , seja  $x \in X$ , dizemos que  $x$  é ponto de acumulação de  $A$  se toda vizinha de  $x$  intercepta o conjunto  $A$  em um ponto diferente de  $x$ . Denotamos como  $A'$  o conjunto de todos os pontos de acumulação de  $A$ .*

**Teorema 13.** *Sejam  $A$  um subconjunto de um espaço topológico  $X$  e,  $A'$  o conjunto de todos os pontos de acumulação de  $A$ . Então, vale que  $\bar{A} = A \cup A'$ .*

*Demonstração.* Se  $x \in \bar{A}$ , então  $x \in A$  ou  $x \notin A$ . Para  $x \in A$ ,  $\bar{A} \subset A$ . Portanto,  $\bar{A} \subset A \cup A'$ . Agora, se  $x \notin A$ , vamos mostrar que ele necessariamente está em  $A'$ .

Por hipótese, existe  $U \in \tau_x$  tal que  $x \in U$  e  $U \cap A \neq \emptyset$ , mas nós temos agora que  $x \notin A$ , logo  $U \cap (A - \{x\}) \neq \emptyset$ . Então  $x \in A'$  por definição de ponto de acumulação.  $\square$

**Proposição 14.** *Um subconjunto de um espaço topológico é dito fechado se, e somente se, ele contém todos os seus pontos de acumulação.*

*Demonstração.* Um conjunto  $A$  é fechado se, e somente se,  $A = \bar{A}$ . O teorema anterior mostra que  $A' \subset A$ , pois como  $\bar{A} = A \cup A'$ , então  $A' \subset \bar{A} = A$ .  $\square$

**Definição 15** (Hausdorff). *Seja  $X$  um espaço topológico. Definimos  $X$  como sendo um espaço de Hausdorff, se para todo  $x_1$  e  $x_2$  em  $X$ , existem respectivamente duas vizinhanças  $V_1$  e  $V_2$  disjuntas.*

**Teorema 16.** *Seja  $X$  um espaço de Hausdorff, todo conjunto com finitos pontos de  $X$  é fechado.*

*Demonstração.* Basta mostrar que todo conjunto unitário é fechado, pois usando a definição de espaço topológico sobre fechados, união finita de fechado é fechado.

Consideremos  $\{x_0\} \subset X$ . Como  $X$  é de Hausdorff, tomamos um  $x \neq x_0$ , existem duas vizinhanças disjuntas  $U_x$  e  $U_{x_0}$ . Como elas são disjuntas,  $U_x \cap U_{x_0} = \emptyset$ . Logo  $x$  não está no fecho de  $x_0$ , para todo  $x \in X$ , portanto o fecho de  $\{x_0\}$  é o próprio conjunto. Então  $\{x_0\}$  é fechado.  $\square$

**Teorema 17.** *Sejam  $X$  um espaço de Hausdorff e  $A$  um subconjunto de  $X$ . Então  $x$  é ponto de acumulação de  $A$  se e somente se para todo aberto que contém  $x$ , também contém infinitos pontos de  $A$ .*

*Demonstração.* Suponha que todo aberto que contém  $x$ , contém infinitos pontos de  $A$ , temos que ele intercepta  $A$  em pelo menos um ponto diferente de  $x$ . Então  $x$  é ponto de acumulação de  $A$ .

Reciprocamente, suponhamos que  $x$  é ponto de acumulação de  $A$ . Suponha também que toda vizinha  $U$  de  $x$  intercepta  $A$  em um número finito de pontos. Então, é verdade dizer que  $U_x$  intercepta  $A \setminus \{x\}$  em finitos pontos também.

Seja  $\{x_1, x_2 \dots x_n\} = U_x \cap A$ . O conjunto  $X \setminus \{x_1, x_2 \dots x_n\}$  é um aberto de  $X$ , pois  $\{x_1, x_2 \dots x_n\}$  é fechado (união de fechados unitários). Logo, temos que  $U \cap (X \setminus \{x_1, x_2 \dots x_n\})$  é uma vizinhança de  $x$  que intercepta o conjunto  $A \setminus \{x\}$  em um ponto diferente de  $x$ . O que contradiz o fato de ter finitos pontos na interseção.  $\square$

## 1.6 Funções Contínuas

**Definição 18.** *Dados dois espaços topológicos  $X$  e  $Y$ . Definimos como sendo uma função contínua, uma aplicação  $f : X \rightarrow Y$  se para todo aberto  $V$  de  $Y$ , a imagem inversa  $f^{-1}(V)$  é aberta em  $X$ .*

Conforme os exemplos a seguir, notaremos que a continuidade não depende somente da aplicação, mas também dos espaços topológicos.

Por exemplo: Seja  $f : X \rightarrow Y$ , com a topologia discreta em  $X$  e em  $Y$ . Podemos notar que nesse caso não importa qual  $f$  que seja, todo subconjunto é aberto em  $X$  logo, dado  $V$  um aberto em  $Y$ , sua imagem inversa  $f^{-1}(V)$  é aberta em  $X$ . Portanto,  $f$  é contínua.

Agora, pense na função identidade na reta com a topologia usual, porém vamos tomar dois espaços diferentes. Seja  $f : X \rightarrow Y$ , em que  $X$  com topologia usual da reta e  $Y$  com topologia discreta.

Temos  $f : (\mathbb{R}, \tau_{usual}) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau_{discreta})$ , com  $f(x) = x$ . Notemos que dado um conjunto unitário  $\{a\}$  em  $Y$ , ele é aberto em  $Y$ , mas sua imagem inversa,  $f^{-1}(\{a\}) = \{a\}$  não é um aberto em  $X$ .

**Definição 19** (Homeomorfismo). *Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos, seja  $f : X \rightarrow Y$  bijetora. Se  $f$  e a sua inversa  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  forem contínuas, então  $f$  é chamada de homeomorfismo.*

É fácil ver que a condição de  $f^{-1}$  ser contínua, é ver que para cada aberto  $U$  em  $X$  a imagem inversa de  $U$  da aplicação  $f^{-1}$  é a mesma que a imagem de  $U$  da aplicação da própria  $f$ .

Existem diferentes modos de se construir uma função contínua dado dois espaços topológicos. Vejamos alguns.

**Exemplo 1.9.** *Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos, se a aplicação  $f : X \rightarrow Y$  “leva” todos elementos de  $X$  em um  $y_0 \in Y$ , então  $f$  é contínua.*

*Demonstração.* Seja  $f(x) = y_0$ , apr todo  $x \in X$ . Se  $V$  é um aberto de  $Y$  temos: se  $y_0 \in V$ , então  $f^{-1}(V) = X$ . Se  $y_0 \notin V$ , então  $f^{-1}(V) = \emptyset$ . Como ambos são abertos em  $X$ , então  $f$  é contínua.  $\square$

**Exemplo 1.10.** *Seja  $A$  um subespaço de  $X$ , então a função chamada de inclusão  $f : A \rightarrow X$  é contínua.*

*Demonstração.* Dado um aberto  $V$  em  $X$ , temos que  $f^{-1}(V) = V \cap A$ , onde  $V \cap A$  é aberto em  $A$  por definição de subespaço.  $\square$

**Exemplo 1.11.** A aplicação  $f : X \rightarrow Y$  é dita contínua se para todo  $x \in X$  e toda vizinhança  $V$  de  $f(x)$  existir uma vizinhança  $U_x$  de  $x$  tal que  $f(U_x) \subset V$ .

*Demonstração.* Seja  $V$  um aberto de  $Y$ , com  $f(x) \in V$ . Então temos que  $x \in f^{-1}(V)$ , logo existe uma vizinhança  $U_x$  tal que  $f(U_x) \subset V$ . Com isso temos que  $f^{-1}(V)$  pode ser escrito como união de abertos, então  $f^{-1}(V)$  é aberto, e  $f$  é contínua.  $\square$

**Lema 20** (Lema da Colagem). *Sejam  $X = A \cup B$ , em que  $A$  e  $B$  são fechados em  $X$ , e  $f : A \rightarrow Y$  e  $g : B \rightarrow Y$  funções contínuas. Se  $f(x) = g(x)$ , para  $x \in (A \cap B)$ , então  $f$  e  $g$  combinam uma função  $h(x)$  contínua  $h : X \rightarrow Y$  definida por:*

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in A \\ g(x), & \text{se } x \in B \end{cases}$$

*Demonstração.* Seja  $V$  um subconjunto fechado de  $Y$ , temos que

$$h^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cup g^{-1}(V),$$

por teoria dos conjuntos. Agora por hipótese  $f$  é contínua, então  $f^{-1}(V)$  é fechado em  $A$ , logo fechado em  $X$ . Do mesmo modo  $g^{-1}(V)$  é fechado em  $X$ , logo a união  $h^{-1}(V)$  também é fechado.  $\square$

## 1.7 Topologia Quociente

**Definição 21.** *Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos e seja  $g : X \rightarrow Y$  uma aplicação sobrejetora. Essa aplicação  $g$  é chamada de aplicação quociente quando um subconjunto  $U \in Y$  é aberto em  $Y$  se, e somente se,  $g^{-1}(U)$  é aberto em  $X$ .*

Existem duas aplicações especiais dentre as quocientes, que são chamadas de:

**Aplicações Abertas:** Seja  $f : X \rightarrow Y$ ,  $f$  é uma aplicação aberta se para todo  $U \in \tau_x$ ,  $f(U) \in \tau_y$ . Ou seja, imagem de um aberto é aberta.

**Aplicações Fechadas.**  $f : X \rightarrow Y$ ,  $f$  é uma aplicação fechada se para todo  $U$  fechado em  $X$ ,  $f(U)$  é fechado em  $Y$ . Ou seja, imagem de um fechado for fechado.

**Proposição 22.** *Seja  $X$  um espaço topológico, e seja  $A$  um conjunto, onde  $p : X \rightarrow A$  é sobrejetora. Então existe somente uma topologia  $\tau_a$  relativa a aplicação  $p$  que a torna uma aplicação quociente. Esta topologia quociente é chamada de topologia induzida por  $p$ .*

*A coleção é definida de modo que os subconjuntos  $U \subset A$  tenham imagem inversa  $p^{-1}(U) \subset \tau_x$ . Essa coleção é uma topologia em  $A$ .*

*Demonstração.* •  $\emptyset$  e  $A$  são abertos, pois  $p^{-1}(\emptyset) = \emptyset$  e  $p^{-1}(A) = X$ , pois  $p$  é sobrejetora.

- $p^{-1}(\cup_{\alpha \in K} U_\alpha) = \cup_{\alpha \in K} p^{-1}(U_\alpha)$ . União qualquer de abertos. (Utilizando teoria dos conjuntos)
- $p^{-1}(\cap_{i=1}^n U_i) = \cap_{i=1}^n p^{-1}(U_i)$ . Interseções finitas de abertos. (Utilizando teoria dos conjuntos)

$\square$

**Exemplo 1.12** (Topologia Quociente). *Seja  $g$  uma aplicação de  $\mathbb{R}$  em um conjunto  $A$*

*de três elementos,  $A = \{a, b, c\}$ , definida por  $g(x) = \begin{cases} a & , \text{ se } x > 0 \\ b & , \text{ se } x < 0 \\ c & , \text{ se } x = 0 \end{cases}$*

*Logo, a topologia em  $A$  induzida por  $g$  possui como abertos os seguintes conjuntos*

$$\emptyset, A, \{a\}, \{b\}, \{a, b\},$$

*pois temos que*

- $g^{-1}(A) = \mathbb{R}$  aberto em  $\mathbb{R}$ .
- $g^{-1}(a) = (0, +\infty)$  aberto em  $\mathbb{R}$ .
- $g^{-1}(b) = (-\infty, 0)$  aberto em  $\mathbb{R}$ .
- $g^{-1}(a, b) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  aberto em  $\mathbb{R}$ .

**Definição 23.** *Seja  $X$  um espaço topológico e seja  $X^*$  uma partição de  $X$ , onde  $X^*$  é formado por conjuntos disjuntos cuja união é todo  $X$ .*

*Seja  $p$ , uma aplicação sobrejetora,  $p : X \rightarrow X^*$  onde  $p$  leva todos os elementos  $x$  de  $X$  nos elementos  $U_x$  de  $X^*$  que os contém. Considerando sobre  $X^*$  a topologia quociente induzida por  $p$ , o par  $(X^*, \tau^*)$  é chamado de espaço quociente.*

**Exemplo 1.13.** *Seja  $X$  o retângulo  $[0, 1] \times [0, 1]$ . Definimos uma partição  $X^*$  de  $X$  da seguinte forma: são todos os conjuntos  $(x, y)$ , em que  $0 < x < 1$  e  $0 < y < 1$ . Podemos ver como conjuntos do tipo:*

- $\{x \times 0, x \times 1\}$  onde  $0 < x < 1$ .
- $\{0 \times y, 1 \times y\}$  onde  $0 < y < 1$ .
- e também o conjunto:  $\{0 \times 0, 0 \times 1, 1 \times 0, 1 \times 1\}$

*Os abertos mais comuns em  $X$  da forma  $p^{-1}(U)$  estão representados na figura 1.7, cada figura representa um aberto de  $X$  que é igual a união das classes de equivalência.*

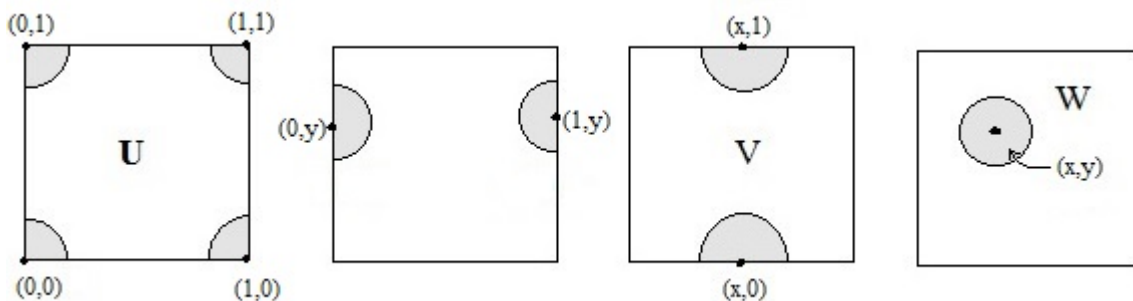


Figura 1.7: Abertos de  $X$

*A imagem de cada um desses conjuntos pela aplicação  $p$  é um aberto de  $X^*$ , como indicado na figura 1.8. A descrição de  $X^*$  é um modo diferente de dizer o que expressamos nas figuras, quando “colamos” os vértices de um retângulo, formando um toro.*

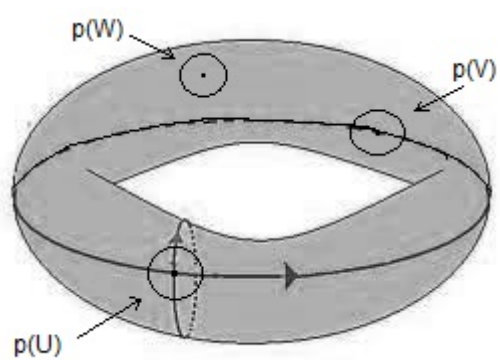


Figura 1.8: Ideia de como seriam a imagem dos abertos de  $X$



# Referências Bibliográficas

- [1] Munkres, J. R., *Topology: a first course*, Prentice Hall Inc., 1975.
- [2] Massey, W. S., *Algebraic topology: an introduction*, Springer-verlag, 1991.
- [3] Lima, E. L., *Elementos de topologia geral*, SBM, 2009.