GEOMETRIA ESPACIAL E PROJEÇÕES EM PERSPECTIVA COM O USO DO COMPUTADOR: UMA PROPOSTA INTERDISCIPLINAR PARA O NONO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Márcio da Silva Dourado
Universidade Federal Fluminense
marciodourado2004@ig.com.br

Humberto José Bortolossi
Universidade Federal Fluminense
hjbortol@vm.uff.br

Tipicamente, o ensino da geometria espacial é praticado com a utilização do livro didático e a lousa como únicas ferramentas. Assim, o aluno de Matemática se vê com a árdua tarefa de estudar objetos tridimensionais a partir de representações bidimensionais que lhe são apresentadas, de forma estática, em uma página de livro ou no quadro-negro. Esta transição (de mão dupla) entre o desenho na folha de papel e o objeto no espaço se configura como um problema relevante no estudo de objetos tridimensionais. De fato, constata-se que tanto alunos quanto professores enfrentam dificuldades na construção e na interpretação de representações bidimensionais de figuras tridimensionais. São muitas as maneiras criadas para se representar bidimensionalmente objetos do espaço. Temos, por exemplo, as projeções em perspectiva (projeções cônicas), as projeções cilíndricas, as projeções isométricas, as projeções ortogonais, as projeções mongeanas, as projeções olho-de-peixe, etc. As projeções em perspectiva merecem destaque, pois elas fornecem um modelo matemático de como o sistema visual humano capta e interpreta imagens. Neste contexto, este artigo tem como objetivo principal apresentar uma proposta em um trabalho conjunto com Arte, em incluir e adequar atividades que exploram projeções em perspectiva em um planejamento onde o assunto não era apresentado anteriormente. Parte dessas atividades foi conduzida através do software Projeções em Perspectiva do Projeto CDME da Universidade Federal Fluminense. Os planos de aula e as atividades propostas foram aplicadas em três turmas de Nono Ano do Ensino Fundamental da Escola Municipal Cacique Cunhãbebe em Angra dos Reis, Rio de Janeiro.
Palavras-chaves: geometria espacial, projeções em perspectiva, ensino e aprendizagem em ambiente interativo.

INTRODUÇÃO

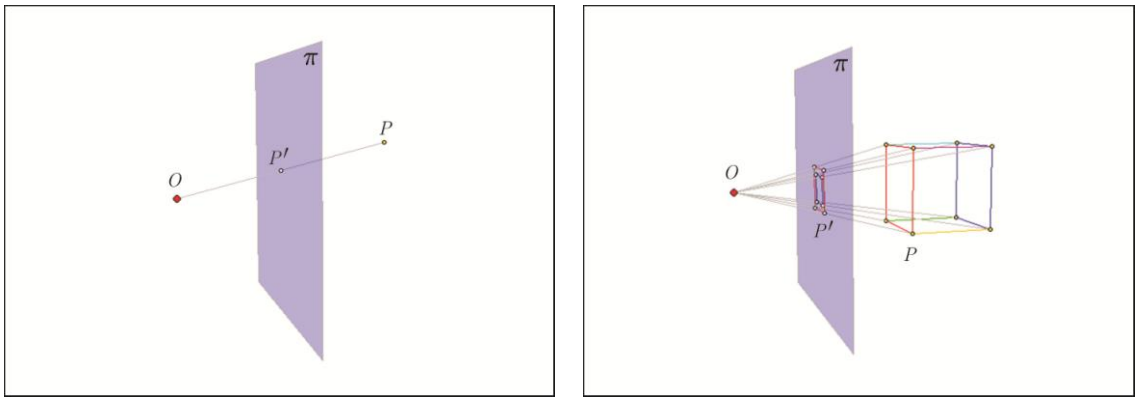
Tipicamente, o ensino da geometria espacial é praticado usando-se o livro didático e a lousa como únicas ferramentas. Desta maneira, o aluno de Matemática se vê com a árdua tarefa de estudar objetos tridimensionais a partir de representações bidimensionais que lhe são apresentadas, de forma estática, em uma página de livro ou no quadro-negro.

Esta transição (de mão dupla) entre o desenho na folha de papel e o objeto no espaço se configura como um problema relevante no estudo de objetos tridimensionais. De fato, constata-se que tanto alunos quanto professores enfrentam dificuldades na construção e na interpretação de representações bidimensionais de figuras tridimensionais (Kaleff, 2003).

Os PCN+ do Ensino Médio reforçam essas recomendações indicando explicitamente que "interpretar e associar objetos sólidos a suas diferentes representações bidimensionais, como projeções, planificações, cortes e desenhos" são habilidades que devem ser desenvolvidas (Brasil, 2002, p. 125). Orientações semelhantes aparecem nos PCN do Ensino Fundamental (Brasil, 1998, p. 122). Segundo ainda os PCN, o trabalho deve centrar-se na realização de

atividades exploratórias, incentivado os alunos a trabalhar com representações do espaço, produzindo-as e interpretando-as.

São muitas as maneiras criadas para se representar bidimensionalmente objetos do espaço. Temos, por exemplo, as projeções em perspectiva (projeções cônicas), as projeções cilíndricas, as projeções isométricas, as projeções ortogonais, as projeções mongeanas, as projeções olho-de-peixe, etc. As projeções em perspectiva merecem destaque, pois elas fornecem um modelo matemático de como o sistema visual humano capta e interpreta imagens. Matematicamente, uma projeção em perspectiva é definida como se segue: dados um plano de projeção π e um ponto O (que determina a posição do observador), a projeção em perspectiva de um ponto P no plano π com relação a O é definido como o ponto de interseção P' do plano π com a reta que passa por O e por P. A Figura 1 (a) ilustra esta definição. Para construir a projeção em perspectiva de objetos mais complicados, basta construir a projeção em perspectiva de cada um dos pontos que constituem o objeto, como ilustra a Figura 1 (b). Note que, nesse modelo, o observador é reduzido a um ponto.



(a) (b)

Figura 1: Modelo matemático para projeções em perspectiva.

Em quais disciplinas "a interpretação e a associação de objetos sólidos as suas diferentes representações bidimensionais" são desenvolvidas no Ensino Fundamental? Em Arte, os alunos do Ensino Fundamental estudam os elementos básicos da teoria das projeções em perspectiva. Contudo, isto é feito, em geral, usando-se apenas a representação bidimensional final, isto é, a projeção do objeto tridimensional no plano de projeção sem usar as relações geométricas existentes no modelo matemático da Figura 1. E em Matemática? O ensino das projeções em perspectiva vem ganhando espaço nos livros didáticos de Matemática: das dez coleções de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) de 2011 aprovadas pelo MEC, quatro delas já trabalham diretamente com projeções em perspectiva: (Carvalho, 2011), (Dante, 2011), (Imenes & Lellis, 2011) e (Jakubovic & Centurio, 2011). Curiosamente, o modelo matemático da Figura 1 também é evitado nesses livros. De qualquer modo, como nos alerta Lellis (2009), ter o conteúdo de projeções em perspectiva em um livro didático não é garantia de que o assunto seja ensinado, pois muitos professores simplesmente omitem esta parte do livro.

O ensino das projeções na escola básica já tem sido considerado e estudado por pesquisadores. No Brasil, por exemplo, a tese de doutorado *Olhar, Saber, Representar: Ensaios sobre A Representação em Perspectiva* de Flores (2003) faz uma excelente discussão sobre as questões da visualização sobre uma ótica histórico-social e indaga como estas considerações se refletem no contexto escolar. Kodama (2006), em sua dissertação de mestrado *O Estudo da*

Perspectiva Cavaleira: Uma Experiência no Ensino Médio investiga a apropriação das regras da perspectiva cavaleira, por alunos do Ensino Médio, a partir de sequências didáticas envolvendo sombras de objetos colocados sobre uma mesa com tampo telado e de um ambiente informático e se tais regras favorecem a resolução de problemas da Geometria Espacial. Os dois autores concordam que um melhor entendimento das regras de representação de figuras tridimensionais pode contribuir para um uso mais proficiente de figuras bidimensionais no ensino e na aprendizagem de Geometria Espacial.

Neste contexto, apresentamos aqui uma proposta de trabalho interdisciplinar com Arte que inclui e adequa atividades que exploram projeções em perspectiva em um planejamento de aulas onde o assunto não era tratado anteriormente. As atividades são conduzidas através do programa de computador *Projeções em Perspectiva* (<http://www.uff.br/cdme/v3d/>) (Bortolossi, 2013) do Projeto CDME (Conteúdos Digitais para O Ensino e Aprendizagem de Matemática e Estatística) do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal Fluminense. Relatamos também nossa experiência em aplicar as atividades em três turmas de Nono Ano do Ensino Fundamental da Escola Municipal Cacique Cunhãbebe em Angra dos Reis, Rio de Janeiro.

PLANOS DE AULA

Vários autores como Comenius, Locke, Rousseau, Pestalozzi, Froebel, Herbart, Dewey, Poincaré, Montessori e outros (*apud* Waterman & Franco (2009)), "apontam, cada um na sua época, a importância da experimentação e da utilização de materiais manipuláveis" no ambiente escolar. Ainda segundo (Waterman & Franco, 2009), "no processo ensino-aprendizagem o aluno deve realizar experiências com materiais concretos, usando a intuição que desperta a curiosidade e instigam a capacidade de generalizar, projetar, prever e abstrair, vivenciando de forma dinâmica os conteúdos, descobrindo conceitos e interiorizando-os, que servirão como auxiliares no desenvolvimento de seu raciocínio lógico". É sob esta ótica que as aulas foram planejadas e aplicadas, especialmente as três primeiras aulas. Para que a criança construa a capacidade de interpretar e registrar o espaço, é necessária uma longa caminhada. Em nossa proposta, isto é feito em três etapas. Na Etapa 1 são apresentados alguns sólidos geométricos e seus elementos, com o intuito de estabelecer uma nomenclatura que facilitará o posterior registro e interpretação desses objetos em representações bidimensionais (Aulas 1, 2 e 3). Na Etapa 2 são estabelecidas e exercitadas as relações geométricas entre observador, plano de projeção e pontos de fuga (Aulas 4, 5 e 6). Finalmente, na Etapa 3, algumas propriedades de proporcionalidade em projeção em perspectiva são aplicadas com o objetivo de se reproduzir certas ilusões de ótica (Aula 7).

Aula 1 (Matemática): Reconhecimento de Sólidos Geométricos e Seus Elementos

O objetivo desta aula é levar o aluno a reconhecer diferentes sólidos geométricos (cubos, paralelepípedos, pirâmides, cilindros, cones e esfera) e seus elementos (vértices, arestas e faces) no caso de poliedros.

Iniciamos a aula investigando o que os alunos conhecem sobre Geometria Espacial. Para isto, usamos modelos de sólidos em acrílico. Indagamos aos alunos qual a forma desses objetos. Em geral os alunos não sabem diferenciar o que é uma figura plana e uma figura espacial, o que é de se esperar, pois muitos deles podem ter estudado somente geometria plana até então e, por isto, chamam pirâmides de triângulo e cubos de quadrados, por exemplo. Aproveitamos para caracterizar figuras planas e figuras espaciais.

Apresentamos paralelepípedos, cubos, pirâmides, cilindros, cones e esfera e, durante a discussão, associamos estes sólidos a objetos do dia-a-dia com estas formas. Também caracterizamos e discutimos a existência de vértices, arestas e faces nos paralelepípedos, cubos e pirâmides.

Pedimos aos alunos que copiassem o conteúdo apresentado do quadro para o caderno, deixando espaços em branco para os desenhos dos sólidos. Na aula de Arte seguinte (vide Aula 3), os alunos preencheram estes espaços com os respectivos desenhos. Também, propomos os exercícios da Figura 2.

Exercícios

1) Assinale (p) para figura plana e (e) para figura espacial:
   ( ) quadrado
   ( ) cubo
   ( ) paralelogramo
   ( ) triângulo
   ( ) cone
   ( ) círculo
   ( ) pirâmide

2) Dê exemplo de um objeto que lembre
   (a) um cubo:
   (b) um paralelepípedo:
   (c) uma pirâmide:
   (d) um cilindro:
   (e) um cone:
   (f) uma esfera:

3) Determine o número de vértices, arestas e faces dos sólidos
   (a) cubo
   vértices:
   arestas:
   faces:
   (b) paralelepípedo
   vértices:
   arestas:
   faces:
   (c) pirâmide
   vértices:
   arestas:
   faces:

Figura 2: Atividade proposta na Aula 1.

Aula 2 (Matemática): Reconhecimento de Sólidos Geométricos e Seus Elementos

O objetivo desta aula é fazer com que os alunos sejam capazes de construir planificações de cubos, paralelepípedos, pirâmides, cilindros e cones, assim como avaliar se eles fixaram a nomenclatura e conceitos introduzidos na Aula 1.

Corrigimos os exercícios da aula anterior. A seguir, propomos o trabalho abaixo:

- Desenhe em uma cartolina um cubo planificado, corte e monte o cubo (não esqueça as bordas para colar).
- Faça o mesmo para outro sólido sorteado pelo professor.

Durante a execução do trabalho observamos se os alunos absorveram a nomenclatura introduzida na Aula 1 (isto é, observamos se os alunos não estão, por exemplo, trocando

"vértice", "aresta" e "face" por "lado" e "canto"). Isto pode ser feito monitorando os diálogos em que os alunos tiram suas dúvidas e interagem entre si.

Aula 3 (Arte): Introdução aos Elementos da Perspectiva

A aula tem como objetivo que o aluno "aguce seu olhar", ou seja, entenda como se dá a representação de profundidade e perceba onde se localizam, em uma obra de arte, a linha do horizonte, o ponto de fuga e o observador em relação a imagem.

Como motivação, confrontamos obras de arte que utilizam técnicas de perspectiva (por exemplo, *A Última Ceia* de Leonardo da Vinci) e obras de arte que não utilizam estas técnicas claramente (por exemplo, *Recepção Principesca numa Paisagem* do Museu do Louvre), de maneira que o aluno perceba e concretize estas diferenças.

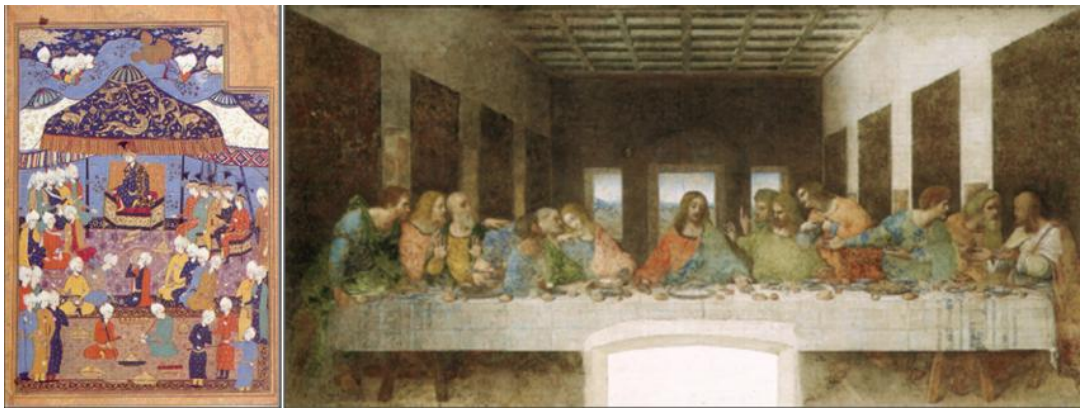


Figura 3: *Recepção Principesca numa Paisagem* do Museu do Louvre e *A Última Ceia* de Leonardo da Vinci.

Introduzimos, ainda usando a história da perspectiva em Arte, o primeiro contato com os elementos fundamentais das projeções em perspectiva, que são pontos de fuga, posição do observador e a linha do horizonte. Fazemos também o aluno observar que linhas paralelas (não paralelas ao plano do quadro) nas obras de arte convergem para um ponto: o ponto de fuga. Comentamos que esta propriedade é fundamental em um desenho em perspectiva. Depois desta parte expositiva, partimos para a parte prática da aula. Dispomos em sala os sólidos geométricos apresentados nas aulas de Matemática anteriores e desafiamos os alunos a desenhá-los em perspectiva, mesmo ainda sem dominar a técnica. Pedimos para eles registrarem o desenho no caderno de Matemática, no espaço em branco reservado na Aula 1. Durante a execução da atividade, circulamos entre as mesas, verificamos o andamento do trabalho e sugerimos correções (provavelmente uma das dificuldades mais frequentes dos alunos será a determinação das inclinações das retas que determinam pontos de fuga).

Aulas 4 e 5 (Matemática): Relações entre Os Elementos da Perspectiva

Estas duas aulas têm como objetivos exercitar visualização espacial, explorar as propriedades matemáticas das projeções em perspectiva e apreciar o uso das projeções em perspectiva em obras de arte e fotografias.

Propomos aos alunos que realizem as oito atividades computacionais existentes no endereço <http://www.uff.br/cdme/v3d/> (todas as atividades estão disponíveis para uso *off-line*, caso a escola não tenha acesso à *Internet*), preenchendo o *Formulário de Acompanhamento do Aluno* (um arquivo do Microsoft Word) que pode ser acessado na página principal através do ícone .

Alertamos os alunos que o preenchimento deste formulário é um quesito muito importante, pois ele será usado para averiguar como foi o desenvolvimento do trabalho.

Apresentamos o programa e desenvolvemos, coletivamente, como exemplo, o primeiro experimento com os alunos. Explicamos que nesta e nas três atividades seguintes os alunos serão desafiados a tentar descobrir qual é a figura geométrica apresentada em vermelho. Explicamos também que nos vários passos destes experimentos, a figura é apresentada com recursos visuais e níveis de interação diferentes.

Esclarecemos aos alunos que no primeiro passo dos quatro primeiros experimentos a figura é estática (isto é, que não se pode interagir com ela). Já no segundo passo a figura no quadro é dinâmica (ou seja, é possível "clicar e arrastar"). O objeto vermelho é sempre o mesmo em todos os passos de cada experimento, mas elementos visuais auxiliares em azul são acrescentados nos dois últimos passos, como se pode observar a seguir na Figura 4 com as imagens apresentadas no Experimento 1.

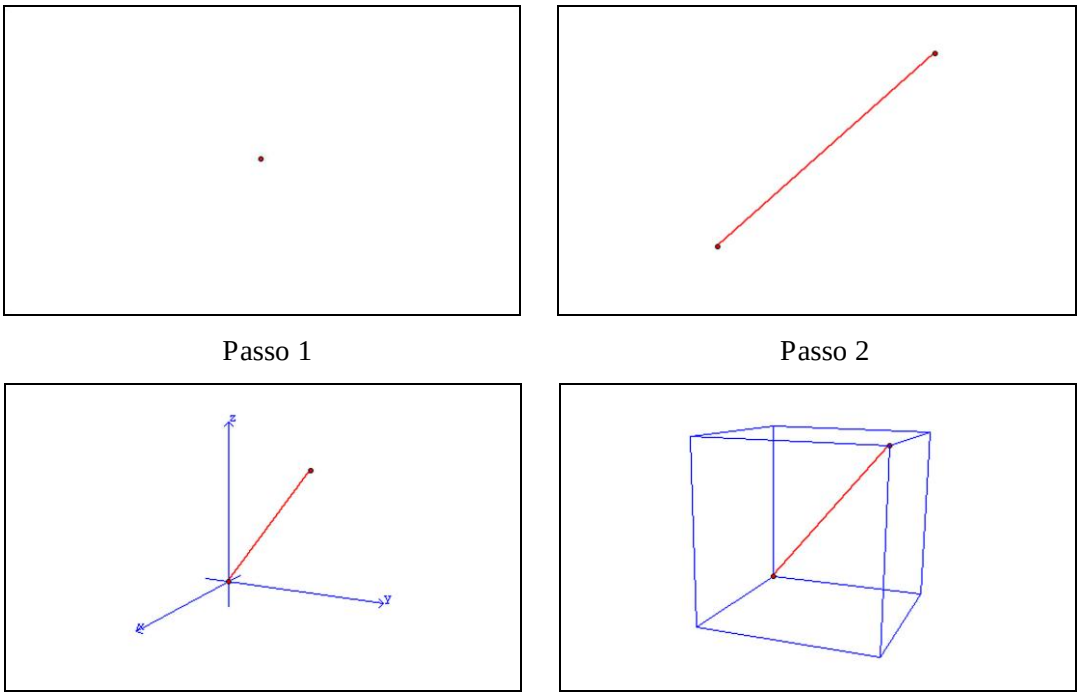


Figura 4: Os quatro primeiros passos do Experimento 1 no *software* Projeções em Perspectiva.

Após resolver o primeiro experimento com os alunos, pedimos que façam os Experimentos 2, 3 e 4 preenchendo o formulário. Acompanhamos de perto observando como eles estavam interagindo com o *software*. Quando necessário, ajudamos.

Discutimos a atividade seguinte, o Interlúdio 1, coletivamente com os alunos, onde apresentamos a definição de projeção em perspectiva (Figura 5). Chamamos a atenção dos alunos para o fato de que a projeção depende das posições do observador O, do plano de projeção e do objeto a ser projetado. Observamos que esta propriedade é explorada também nos Passos 2, 3 e 4. Usamos isto para explicar as situações apresentadas nos Experimentos 1.

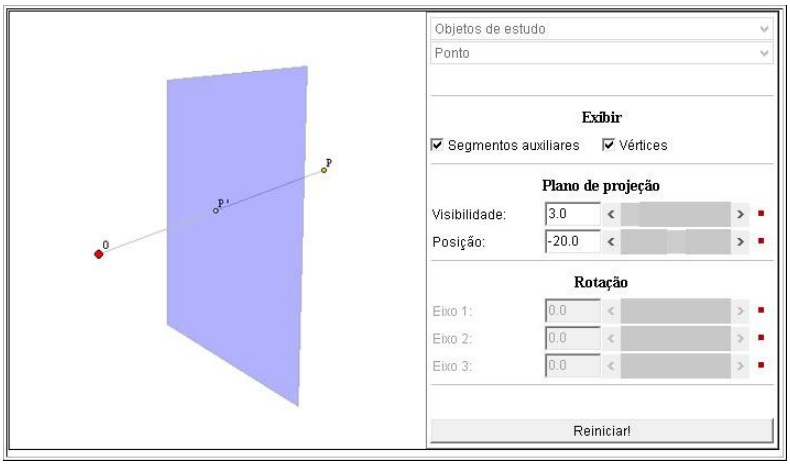


Figura 5: Ilustrando dinamicamente a definição de uma projeção em perspectiva.

Ao conduzirmos o Passo 5 com os alunos, destacamos a importante característica da projeção em perspectiva que está sendo ilustrada nesse passo: a sequência de segmentos paralelos e congruentes (com vértices amarelos) são projetados em segmentos não congruentes (com vértices brancos). Observamos também que quanto mais distante do observador está um segmento com vértices amarelos, menor é o tamanho do segmento projetado.

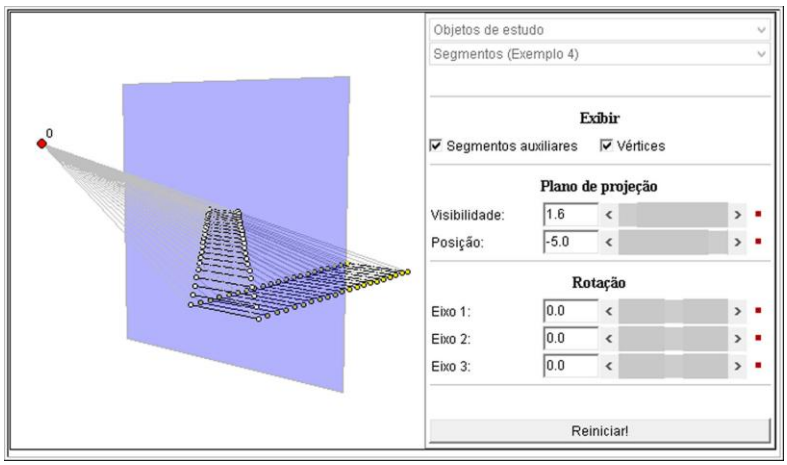


Figura 6: Ilustrando dinamicamente uma propriedade importante das projeções em perspectiva.

No Passo 6, chamamos a atenção de seus alunos para outra propriedade importante que está sendo exemplificada no software: em projeções em perspectiva, um conjunto de retas paralelas que não são paralelas ao plano de projeção são projetadas em segmentos que "convergem" para um ponto, o assim denominado *ponto de fuga* (Figura 7). Neste momento, fizemos as conexões possíveis com a Aula 3 de Arte.

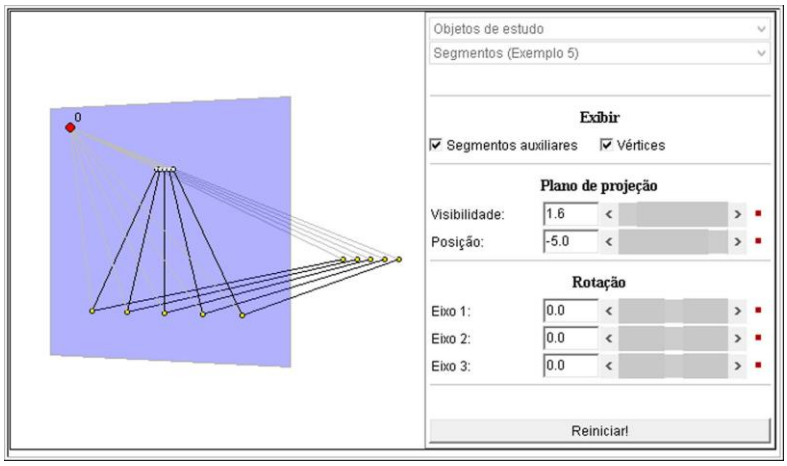


Figura 7: Ilustrando dinamicamente outra propriedade importante das projeções em perspectiva.

No Passo 8 do Interlúdio 1 é possível escolher livremente qual objeto será projetado através dos seletores do programa. As categorias disponíveis são "objetos de estudo", "sólidos platônicos" e "animais". Pedimos para os alunos escolherem objetos diferentes, moverem o ponto do observador e verificarem como as projeções são alteradas.

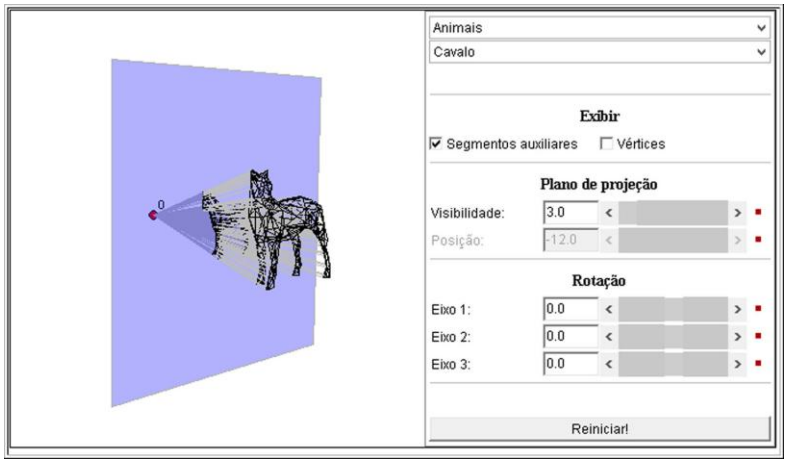


Figura 8: Ajustando dinamicamente a projeção em perspectiva de um modelo 3d de um cavalo.

Convidamos os alunos a assinalarem os pontos de fuga em obras de arte e fotografias que são apresentadas no Experimento 5. Instruímos os alunos a identificarem linhas arquitetônicas paralelas umas a outras (mas não paralelas ao plano da tela) nos cenários tridimensionais que estão sendo representados nas imagens. Em seguida, no *software*, eles devem mover os pontos laranja (clique e arraste) a fim de que as retas laranjas ficassem por cima das projeções das linhas arquitetônicas identificadas. Os alunos perceberão que estas retas laranjas se interceptarão em um determinado ponto – *o ponto de fuga*.

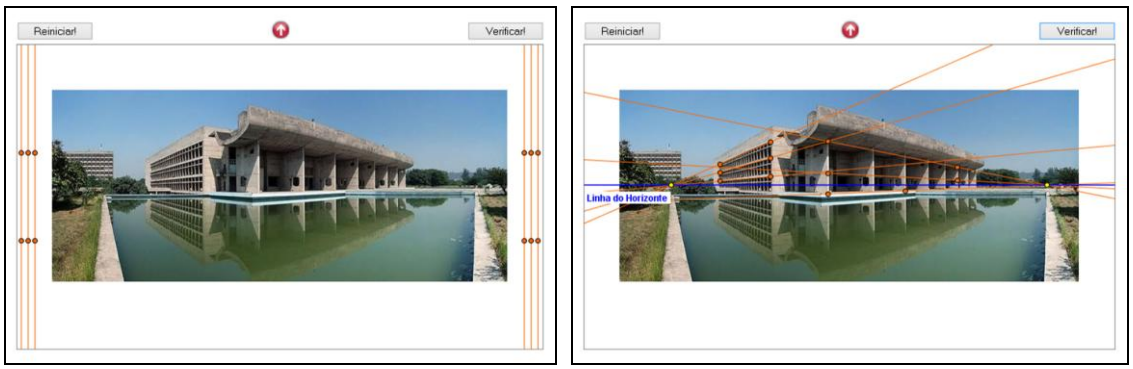


Figura 9: Identificando a linha do horizonte e pontos de fuga em fotografias.

A seguir, no Experimento 6, propomos que o aluno tente identificar as inconsistências da gravura produzida em 1754 pelo inglês William Hogarth (1697-1764). Informamos que Hogarth concebeu esta figura com o propósito de mostrar que, sem o conhecimento da teoria da perspectiva, um pintor pode fazer desenhos absurdos. Corrigimos esta atividade usando o *link* em azul "clique aqui para saber o que encontramos..." (Figura 10).

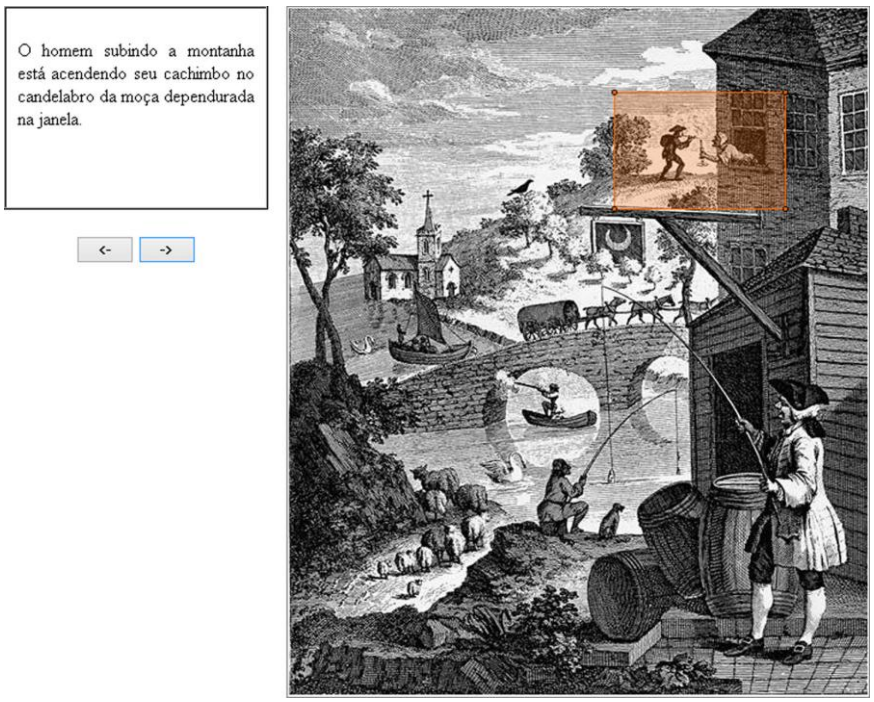


Figura 10: Encontrando inconsistências na gravura de 1753 produzida pelo inglês William Hogarth.

Propomos no Experimento 8 que os alunos tentem identificar nos vários desenhos se é realmente impossível construir um objeto real cuja imagem seja igual a da figura apresentada de forma estática (Figura 11). No passo seguinte, convide o aluno a clicar e arrastar, movendo o objeto para desvendar o segredo de cada desenho.

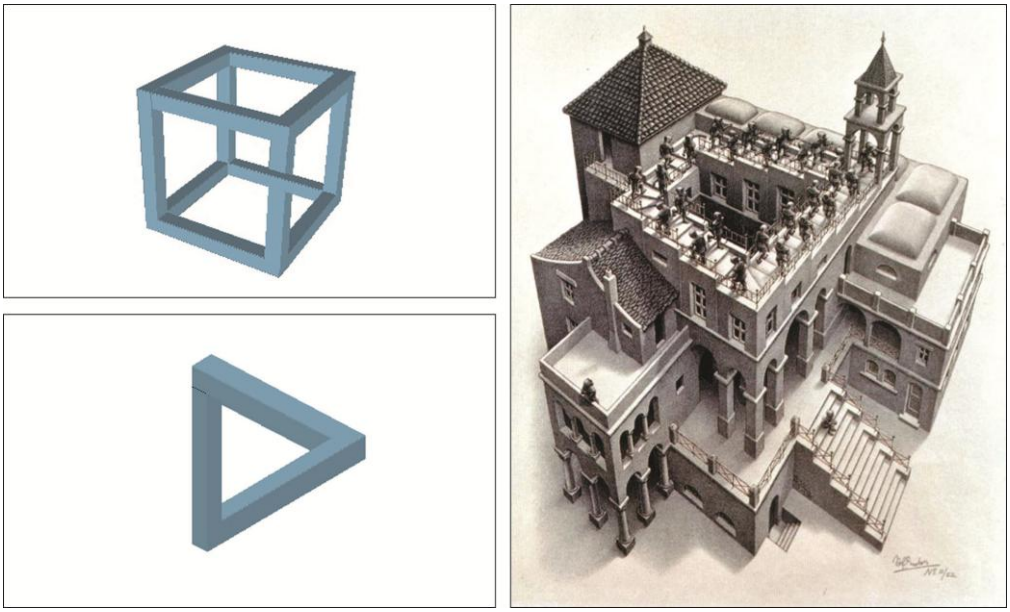


Figura 11: Desvendando os segredos dos desenhos de Escher.

Aula 6 (Arte): Pontos de Fuga

A aula tem o objetivo de fixar as características e usos dos pontos de fuga como também fixar o método para localizá-los em uma obra de arte ou fotografia.

Usamos um *datashow* para apresentar imagens de obras de arte e fotografias para os alunos. Nestas imagens, localizamos linhas arquitetônicas paralelas umas a outras (mas não paralelas ao plano da tela) nos cenários tridimensionais que estão sendo representados e, com a ajuda dos alunos, sobrepomos barbantes sobre estas linhas, mostrando que elas se interceptam em um ponto, o ponto de fuga (Figura 12).



Figura 12: Aluno sobrepondo um barbante sobre uma obra de arte para tentar encontrar seus pontos de fuga.

Em uma foto de um corredor, como na Figura 13, destacamos a existência de algumas colunas alinhadas, mostramos como as colunas que estão mais próximas do observador aparecem

maiores na imagem e conforme se afastam diminuem cada vez mais. Discutimos que, quando se sabe que os objetos têm a mesma medida, mas se vê uma imagem no qual esses objetos aparecem de tamanhos diferentes, tem-se automaticamente a percepção que alguns desses objetos estão mais longe do que outros.



Figura 13: Foto de um corredor da Escola Municipal Cacique Cunhãbebe.

Aula 7 (Matemática): Proporções, Perspectiva e Ilusões de Ótica

Esta aula tem o objetivo de explorar as propriedades matemáticas das projeções em perspectiva, aplicando-as para criar ilusões de ótica em fotografias.

Propomos para os alunos o desafio de calcular a distância que uma pessoa deveria ficar do fotógrafo para que, na fotografia, ela parecesse bem menor (digamos, como uma boneca de 60 cm) se comparado com outra pessoa a sua frente na foto. Para motivá-los mais ainda, exponha, utilizando um *datashow* ou outro equipamento (retroprojetor, televisão, ...), fotos onde este tipo de ilusão é utilizada (Figura 14).



Figura 14: Criando uma ilusão de ótica através da perspectiva.

Esclarecemos aos alunos que eles não podem utilizar dados do posicionamento do aluno de trás, pois se parte do pressuposto que não se sabe a que distância este deveria ficar do observador. Também chamamos a atenção que o fenômeno da ilusão de ótica está relacionado com

a perspectiva, no sentido mais elementar. Partimos de uma foto e resolvemos um problema proposto para servir de exemplo. Na foto da Figura 14, a questão ficou:

> Determine a distância que uma pessoa de 1,60 m de altura deve ficar da maquina fotográfica (observador) para parecer ser uma boneca de 60 cm de altura na mão de outra pessoa a sua frente (conforme a foto da Figura 14). Sabe-se que a distância entre a máquina fotográfica e a pessoa da frente é de 3 m, a altura desta pessoa é de 1,75 m e esta altura na foto aparece projetada com tamanho 2,8cm.

Para resolver este problema, aplicamos semelhança de triângulos três vezes. Inicialmente, calculamos a distância *d* entre o observador (máquina fotográfica) e o plano de projeção. Antes de prosseguir, cabe aqui uma melhor explicação do que é esta distância *d*. Esta medida nas máquinas analógicas antigas sem lentes (as assim denominadas máquinas estenopeicas ou *pinhole*) é a distância entre o orifício da máquina (por onde entra a luz) e o filme (colocado no fundo da máquina), conforme Figura 15. Sendo assim, nestas câmeras, esta distância é fácil de observar e até de medir concretamente. Note que a imagem do objeto aparece invertida no filme. Por este motivo, para fins de estudo, é costume considerar um plano de projeção virtual que é simétrico ao plano do fundo da máquina com relação ao orifício. Assim, a distância entre o plano de projeção virtual e o orifício também é igual a *d*.

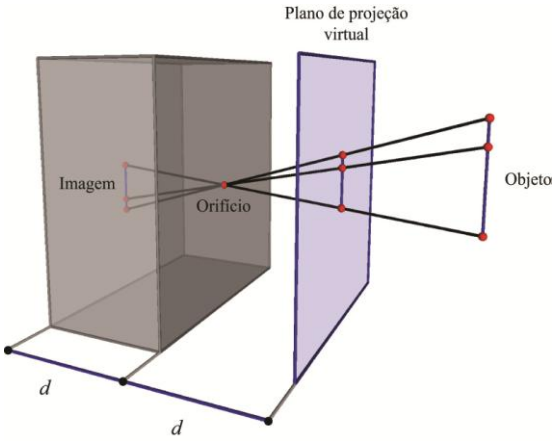
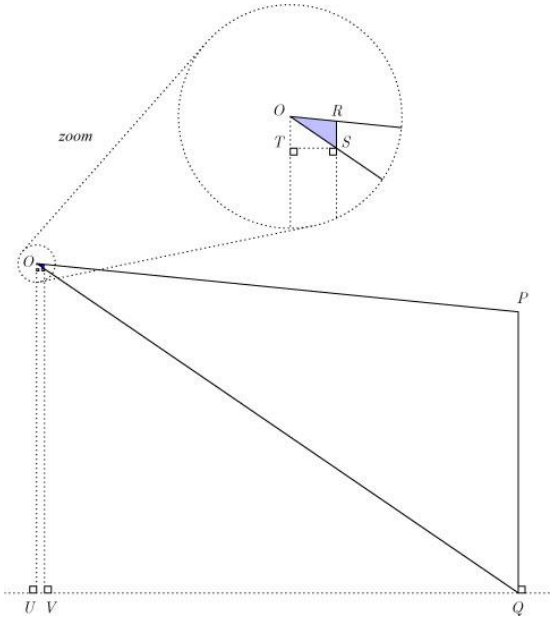


Figura 15: Modelo de câmera *pinhole*.

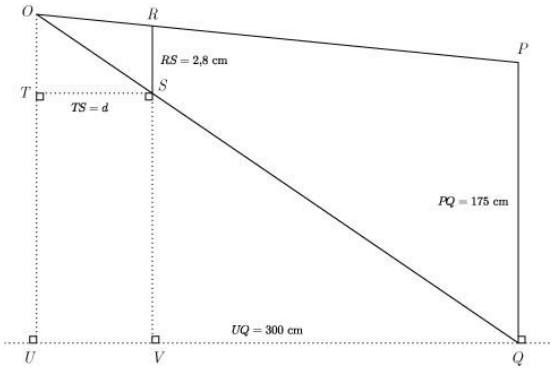
Câmeras com lentes têm uma Física mais complicada. Para estas situações (e também para as homotetias presentes no *zoom* digital das câmeras digitais), adotaremos um modelo mais simples no qual a distância entre o plano de projeção virtual e a lente (a distância *d* que nos interessa e que mostraremos como calcular a seguir) não é mais igual a distância entre a lente e o filme (ou o sensor no caso de câmeras digitais e celulares).

Voltando ao problema, considere a figura a seguir, onde *UQ* é a distância do observador *O* à pessoa sendo fotografada; *PQ* é a altura da pessoa sendo fotografada; *RS* é a medida da altura da projeção da pessoa na fotografia, isto é, no plano de projeção e *TS* = *d* é a distância do observador *O* ao plano de projeção. Assim,

$$\Delta OPQ \sim \Delta ORS \Rightarrow TS/UQ = RS/PQ \Rightarrow d/300 = 2{,}8/175 \Rightarrow d = 4{,}8 \text{ cm}.$$

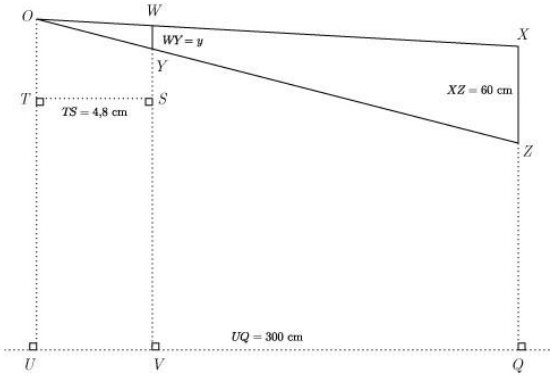


Observação: caso os alunos tenham dificuldades em entender este diagrama com o *zoom*, é possível usar um diagrama mais simplificado, como o apresentado a seguir, não esquecendo de avisá-los de que se trata de um desenho fora de escala e, portanto, distorcido. Neste diagrama, as medidas importantes são *UQ*, *PQ*, *RS* e *TS*. Se estas medidas são mantidas, nem mesmo a distância *OU* (a "altura" da posição do observador) é importante.



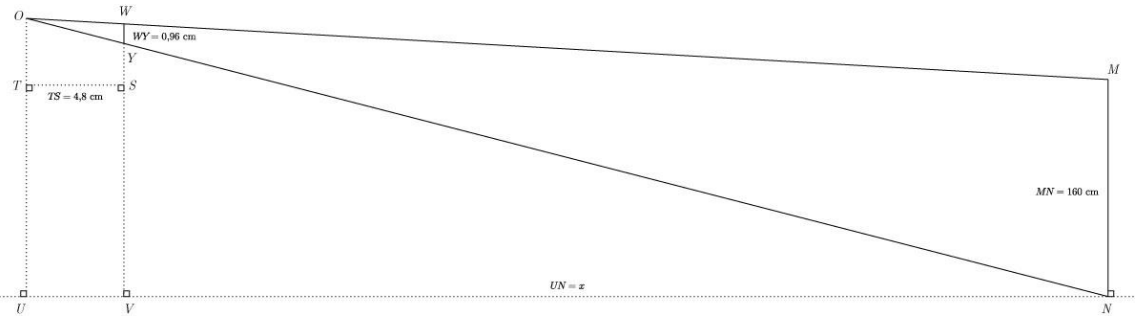
Agora, calculamos a medida *y* que a imagem da pessoa de trás deve ter na foto, para parecer uma boneca de 60 cm na mão da pessoa da frente usando novamente semelhança de triângulos (note que o diagrama está distorcido):

$$\Delta OWY \sim \Delta OXZ \Rightarrow TS/WY = UQ/XZ \Rightarrow 4{,}8/y = 300/60 \Rightarrow y = 0{,}96 \text{ cm}.$$



Finalmente, calculamos a distância *x* que a pessoa de trás deve ficar da máquina fotográfica para parecer a boneca (note que o diagrama está distorcido):

$$\Delta OWY \sim \Delta OMN \Rightarrow TS/WY = UN/MN \Rightarrow 4{,}8/0{,}96 = x/160 \Rightarrow x = 800 \text{ cm}.$$



Desta maneira, a pessoa que está atrás deve ficar a 8 m da máquina fotográfica para parecer uma boneca de 60 cm na mão da pessoa da frente.

Dividimos os alunos em grupos (de quatro ou cinco pessoas, por exemplo) e instruímos a recriarem o problema partindo de uma foto deles mesmos, reproduzindo a ilusão de ótica como a do exemplo.

Observação: dificilmente, na realidade, o fotógrafo e os dois alunos estarão alinhados em um mesmo plano como pressuposto nas Figuras propostas. Neste sentido, nosso modelo é uma simplificação da situação real e, por este motivo, os resultados obtidos serão aproximados.

Observação: ao invés de três regras de três, bastaria, de fato, aplicar apenas uma única regra de três para resolver o problema proposto $300/60 = x/160 \Rightarrow x = 800$ cm. Isto ocorre porque a situação apresenta no problema envolve composições de homotetias que, por sua vez, é também uma homotetia. Contudo, esta justificativa (e, por conseguinte, o uso de apenas uma regra de três) não está acessível a um aluno do 9º ano do Ensino Fundamental.

RELATO DE PRÁTICA

Perspectiva é um assunto que desperta grande interesse dos alunos. Muitas vezes eles perguntam ao professor de Arte, mesmo fora das aulas, como dar o efeito de profundidade em um desenho, como representar uma pessoa no fundo ou na frente de outra. Mas, ainda nos últimos anos do ensino fundamental, os alunos encontram dificuldades no momento de representar objetos em perspectiva, mesmo os mais simples. É isto que podemos observar nos trabalhos de Arte produzidos pelas turmas na atividade da Aula 3: em geral, percebe-se que a maioria dos estudantes não consegue colocar no desenho a noção de profundidade.

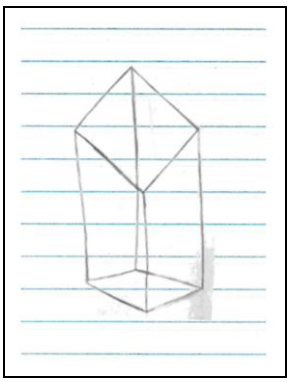


Figura 16: Tentativa de um aluno em desenhar um paralelepípedo reto.

Para entender corretamente projeções em perspectiva, precisamos entender bem a sua definição geométrica. Neste intuito, introduzimos o uso do computador que oferece a possibilidade de representações dinâmicas, interativas e sempre precisas. Além disso, o bom uso deste recurso em sala de aula, em geral, traz uma motivação a mais para os alunos. Como nos alerta Gravina (1998), "na interatividade que está-se pensando, o sistema oferece suporte às concretizações e ações mentais do aluno; isto se materializa na representação dos objetos matemáticos na tela do computador e na possibilidade de manipular estes objetos via sua representação".

Em nossa escola, a existência de um laboratório de informática recém-inaugurado facilitou nosso trabalho, mas em escolas em que não há esta realidade, as atividades podem ser aplicadas como exercícios extraclasses, isto é, para que sejam realizadas fora do tempo de sala de aula (em casa se o aluno tiver um computador ou com outras alternativas como uma *lan house*). O uso de um *datashow* também é uma alternativa, caso a escola possua um: as atividades são projetadas em sala de aula e os alunos, sob a orientação do professor, respondem aos questionamentos propostos.

As oito atividades computacionais desenvolvidas nas Aulas 4 e 5 estão divididas em três categorias. A primeira procura motivar os alunos provocando-os através da análise de algumas ambiguidades inerentes às projeções em perspectiva. A segunda parte das atividades é o Interlúdio: ele explora a definição das projeções em perspectiva. A terceira, por sua vez, relaciona o uso das projeções em perspectiva à Arte.

Pessoas diferentes podem interpretar uma mesma figura de maneiras diferentes. Por exemplo, na figura do Passo 1 do Experimento 1, alguns alunos disseram que o objeto apresentado era um ponto, outros um círculo, outros uma pequena esfera. O problema é que interpretar um objeto tridimensional, olhando-o de uma posição fixa (o que acontece com figuras desenhadas na página de um livro e em fotografias), pode gerar dúvidas. Mesmo se pudermos visualizar um objeto tridimensional de várias posições diferentes, como no Passo 2 do Experimento 1, identificá-lo pode ainda ser uma tarefa difícil. Por exemplo, alguns alunos podem não perceber que o segmento de reta apresentado estava no espaço, imaginando que ele está no plano, apenas variando de tamanho. Sendo assim, o uso de elementos visuais adicionais, como os eixos coordenados no Passo 3 e o paralelepípedo do Passo 4, são muito convenientes.

Em nossa experiência com as turmas, alguns alunos, quando chegaram no Experimento 4, já perceberam no Passo 1 a intenção da atividade e responderam que o desenho apresentava um cubo contido em outro cubo. No passo seguinte deste experimento, a discussão foi generalizada e, com isto, atingimos nosso objetivo de que o aluno percebesse a possibilidade de ambiguidades inerentes às projeções em perspectiva.

Durante a discussão do Interlúdio 1, foi chamada a atenção para a existência de triângulos semelhantes existentes na projeção de um segmento de reta paralelo ao plano de projeção (Figura 17). Trabalhar esta propriedade matemática das projeções em perspectiva prepara o aluno para o entendimento da atividade proposta na Aula 7, onde exploramos o uso das projeções em perspectiva em truques de fotografias.

Os alunos estavam compenetrados e se divertindo muito nas atividades finais (depois do Interlúdio 1) mas, infelizmente, alguns computadores já tinham apresentado problemas, não abrindo as atividades, não deixando interagir ou travando totalmente. Como os dois tempos da Aula 4 estavam acabando, os alunos foram então orientados a terminarem o que era possível. Cabe considerar que uma das dificuldades para o uso da informática nas escolas é a baixa qualidade do material distribuído e a falta de profissionais especializados para a manutenção dos laboratórios. Assim, é sempre importante ter alternativas caso algo inesperadamente não funcione. Na Aula 5, optamos em não usarmos o laboratório de informática e, sim, um *datashow*. As atividades dos Experimentos 5 e 6 que já tinham sido iniciadas e até terminadas

por alguns alunos na aula anterior, foram projetadas em sala de aula e os alunos responderam verbalmente às questões do Formulário de Acompanhamento do Aluno e, de maneira informal, finalizando o que tinha sido iniciado na Aula 4. Os alunos viram o que pode acontecer com a mudança de posição do observador e divertiram-se muito com as ilusões de ótica do Experimento 7.

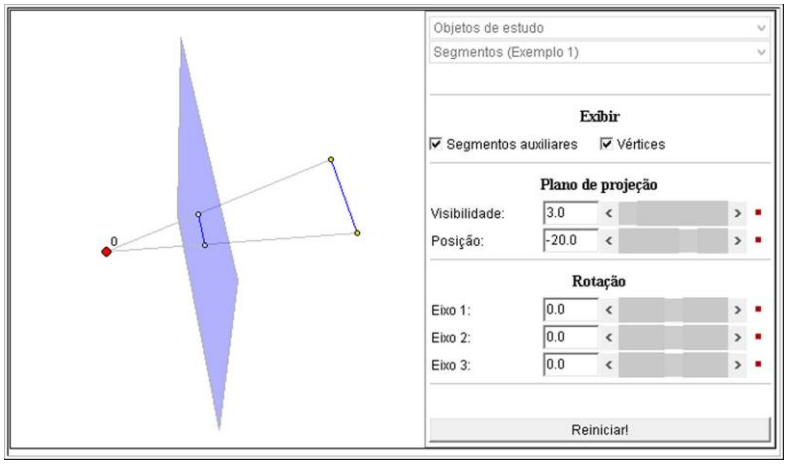


Figura 17: Triângulos semelhantes em uma configuração especial: o segmento de reta (objeto a ser projetado) é paralelo ao plano de projeção.

O que os alunos fizeram virtualmente no Experimento 5 da Aula 5, eles puderam reproduzir concretamente na aula seguinte de Arte. Na Figura 18 a seguir, usando uma régua, um aluno mostra a posição de retas que convergem para um ponto de fuga em uma imagem de obra de arte. É a localização destas retas que vão dar ao aluno a capacidade de compreender como o artista produz o efeito de profundidade no plano.



Figura 18: Aluno localizando pontos de fuga em uma obra de arte.

Com todo este preparo, os alunos acabam percebendo que o posicionamento do observador, o uso de pontos de fuga, as sobreposições e o distanciamento das pessoas podem fazer uma imagem parecer diferente do que é na realidade. A atividade proposta na Aula 7 vem reforçar ainda mais estas propriedades e, ao mesmo tempo, apresentar uma aplicação de semelhança de triângulos. Os alunos foram divididos em grupos de até 5 pessoas e instruídos a recriarem

a ilusão de ótica do exemplo apresentado partindo de uma foto deles mesmos. Todos os alunos preferiram seguir uma foto da Internet onde uma pessoa se posicionava a frente da outra e parecia segurar um boneco. Para isto, eles se dirigiram à quadra e foram tirar fotos. A Figura 19 apresenta o trabalho de um grupo de alunos e a Figura 20 a solução dada por outro grupo de alunos para o problema proposto.



Figura 19: Grupo de alunos criando uma ilusão de ótica através do uso da perspectiva.

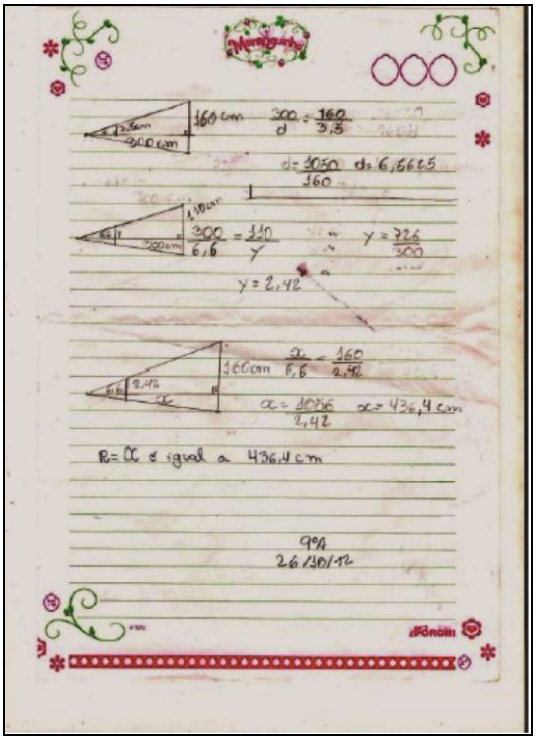


Figura 19: Grupo de alunos criando uma ilusão de ótica através do uso da perspectiva.

Os alunos tiveram um desempenho excelente na realização desta última tarefa: apenas um dos grupos formados nas três turmas não conseguiu terminar o último trabalho, todos os outros receberam o conceito A (quando todos os objetivos são atingidos) ou o conceito B (quando os objetivos são atingidos satisfatoriamente). Foi grande a repercussão do trabalho, pois muitos alunos criaram por conta própria outras situações de ilusão de ótica e até postaram algumas

fotos em redes sociais. Também, no inicio deste ano letivo de 2013, alguns alunos visitaram a escola (eles agora estão no Ensino Médio) e novamente comentaram sobre o trabalho. Isto mostra que a atividade foi significativa e prazerosa para os alunos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Acreditamos que os alunos conseguiram, com as atividades desenvolvidas, perceber as propriedades fundamentais das projeções em perspectiva (ou seja, que quanto mais longe um objeto está do observador, menor será a sua projeção e que retas paralelas são projetadas em segmentos que convergem para um ponto – o ponto de fuga). Um episódio que parece comprovar claramente este fato foi um passeio realizado com os alunos ao centro do Rio de Janeiro: ao chegar ao Arco do Telles para conhecer os casarios do Rio Antigo com o professor de História, os alunos identificaram os vários elementos das projeções em perspectiva na forma com que observavam o casario antigo que estava de ambos os lados do arco, isto é, eles reconheceram o ponto de fuga, a linha do horizonte e as linhas convergentes que definiam a percepção do tamanho dos objetos em relação a sua distância do observador. Para registrar tal momento, os alunos tiraram uma fotografia para mostrar à professora de Arte, Camila Nagem.

Do ponto de vista da professora de Arte, a parceria com Matemática foi importante para tornar a aprendizagem do conceito de perspectiva mais significativa. O trabalho conjunto também trouxe elementos como a nomenclatura dos sólidos geométricos e o aprofundamento da discussão sobre as propriedades matemáticas das projeções em perspectiva, o que facilitou o trabalho em Arte. Nas palavras da professora Camila: "A possibilidade de conhecer o processo criativo de artistas renascentistas e a importância do conhecimento da Matemática na construção de suas obras, promoveu ainda mais a aproximação entre Arte e Matemática. Aproximação esta fundamental para o pensamento do homem renascentista e que atualmente vem sendo esquecida. Reconhecer em situações cotidianas o uso e a aplicação da perspectiva é despertar no aluno uma nova forma de *olhar*".

Este ano, o trabalho interdisciplinar com projeções em perspectiva já está no planejamento de Matemática e Arte, e deve contar com a participação do professor de História. Estamos considerando, da mesma maneira, a possibilidade de incluir o professor de Ciências para trabalhar com os aspectos físicos existentes nas câmeras *pinhole*.

Referências

Bortolossi, H. J. (2013). *Projeções em Perspectiva. Conteúdos Digitais para O Ensino e A Aprendizagem de Matemática e Estatística*. Universidade Federal Fluminense. Disponível em: <http://www.uff.br/cdme/v3d/>. Acesso em: 12 de fevereiro de 2013.

Brasil. Ministério da Educação (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática (Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental)*. Brasília: ME.

Brasil. Ministério da Educação (1999). *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática (Ensino Médio: Bases Legais)*. Brasília: MEC.

Brasil. Ministério da Educação (2002). *PCN+ Ensino Médio: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais: Ciências da Natureza, Matemática e Suas Tecnologias*. Brasília: MEC.

Carvalho, A. L. T.; Reis, L. F. (2011). *Aplicando A Matemática. Sexto Ano*. Casa Publicadora Brasileira.

Dante, L. R. (2011). *Tudo é Matemática*. Oitavo ano. Editora Ática.

Dourado, M. S (2013). Geometria Espacial e Projeções em Perspectiva: Um Relato de Prática no Nono Ano do Ensino Fundamental. Dissertação de Mestrado, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal Fluminense, 2013.

Flores, C. R. (2003). *Olhar, Saber, Representar: Ensaios Sobre A Representação em Perspectiva*. Tese de doutorado, Centro de Ciências da Educação, Universidade Federal de Santa Catarina.

Gravina, M. A.; Santarosa, L. M. A. (1998). *Aprendizagem da Matemática em Ambientes Informatizados*. IV Congresso RIBIE, Brasília Disponível em: <http://www.geogebra.im-uff.mat.br/biblioteca/117.zip>. Acesso em: 19 de janeiro de 2013.

Imenes, L. M.; Lellis, M. (2011). *Matemática. Oitavo e Nono Anos*. Editora Moderna.

Jakubovic, J.; Centurio, N, M. R. (2011). Matemática na Medida Certa. Sétimo Ano. Editora Scipione.

Kaleff, A. M. M. R. (2003). *Vendo e Entendendo Poliedros: Do Desenho ao Cálculo do Volume Através de Quebra-Cabeças Geométricos e Outros Materiais Concretos*. Niterói: Editora da Universidade Federal Fluminense.

Kodmama, Y. O (2006). *Estudo da Perspectiva Cavaleira: Uma Experiência no Ensino Médio.* Dissertação de mestrado, PUC/SP.

Lellis, M. (2009). *Desenho em Perspectiva no Ensino Fundamental – Considerações Sobre Uma Experiência*. Seminários de Ensino de Matemática (SEMA), Primeiro Semestre de 2009 (Ano II), Programa de Pós-Graduação da Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo. Disponível em: <http://www.nilsonmachado.net/sema20090602.pdf>. Acesso em: 19 de dezembro de 2012.

Waterman, I.; Franco, V. S. (2008/2009). *Geometria Projetiva no Laboratório de Ensino de Matemática*. Artigo produzido durante o Programa de Desenvolvimento Educacional do Estado do Paraná (PDE), Universidade de Maringá.

Copyright © 2013 Márcio Silva Dourado e Humberto José Bortolossi. Os autores concedem licença não exclusiva, aos organizadores do VI HTEM, para publicar este documento no CD de trabalhos completos do evento. Qualquer outro uso é proibido sem o consentimento dos autores.