AS SOLUÇÕES DO 10º PROBLEMA DE APOLÔNIO POR VIÉTE, PONCELET e PLUCKER.

Douglas Gonçalves Leite, Jansley Alves Chaves

UNESP- Rio Claro, Universidade Federal do Rio de Janeiro UFRJ

Douglas_rcunesp@hotmail.com, chavesrizo@gmail.com

Abstract

The Problems of Apollonius are geometric problems that have the characteristic of obtaining the circle that is tangent from other circles or lines or through the points, where is these elements combined in threes. More specifically, this treaty brings ten cases and these cases if unfold in a series of particular cases that do add up more than twenty geometric problems. Here is analyzed the 10th problem of Apollonius that aims at constructing a circle tangent to three other circles. This case you can get up to eight possible solutions as it only depending on the distribution of the circles in the plane. How the history of mathematics is needed to better report the trajectory of the problem of Apollonius, in this work was analyzed other works of the mathematicians how François Viète (1540-1603), Jean Victor Poncelet (1788-1867) and Julius Plucker (1801-1868). Initially was aware to Viète in 1600 published a treatise that called "Apollonius Gallus", in Latin that showed the solutions of the ten problems of Apollonius. In Apollonius Gallus, Viète solved the tenth problem using the concept of the geometric dilation. Already with Jean Victor Poncelet that published a book called "Application d'analyse et de géométrie, qui ont servi main fondement au traité des Proprietes projectives des figures" in 1864 (Vol. 2). In their work Poncelet resolution with the tenth problem of Apollonius, in order to find its solution by means of some properties of radical axis and potency of the points, giving a new approach to how to solve of the most famous problems of Apollonius. However, with Julius Plucker, came the introduction of a new concept, the concept of the geometric inversion, which again went another solution to the same problem. With study the geometry was being developed new solutions to the same problem, involving new and refined concepts mathematics. To solve problems started in Greece, that were analyzed here with three different approaches, each with related to mathematical in his time, and every mathematician with his method, obtaining the same solutions, but in different ways, by means of potency of points or a through dilation and the other by inversion, and all solutions using a ruler and compass, a form originally proposed by Apollonius.

Palavras-Chave: *Problemas de Apolônio, Viéte, Poncelet, Plucker.*

INTRODUÇÃO

Problemas de construções geométricas são conhecidos desde antes dos estudos de Euclides de Alexandria na Grécia antiga, aqui será apresentado um problema proposto por

Apolônio de Perga, geômetra que desenvolveu uma brilhante obra chamada "As Cônicas", a qual lhe traria o título de "O Grande Geômetra" de seu tempo. Dentre suas obras há outra que descreve construções de problemas geométricos com régua e compasso, onde esta receberia o nome de "Os Problemas de Apolônio", problemas que visam construir uma circunferência solução que passe por pontos, seja tangente a retas e outras circunferências. Nos problemas de Apolônio sempre será trabalhado com três elementos, como mostram as combinações na tabela abaixo, onde P significa ponto, R reta e C circunferência:

1º Caso PPP	Uma solução
2º Caso PPR	Duas soluções
3º Caso PRR	Duas soluções
4º Caso RRR	Quatro soluções
5º Caso CPP	Duas soluções
6º Caso CPR	Duas soluções
7º Caso CRR	Quatro soluções
8º Caso CCP	Quatro soluções
9º Caso CCR	Quatro soluções
10º Caso CCC	Oito soluções

Tabela 1: Número de soluções dos problemas de Apolônio.

Aqui não serão trabalhados outros problemas além dos necessários para se obter a solução do 10º problema, então serão relatados exemplos de construções geométricas que se tornaram fundamentais para a compreensão desses casos, assim a partir de agora o 10º problema de Apolônio é referente à construção de uma circunferência tangente a outras três circunferências. Desta forma será relatada uma abordagem simplificada do mesmo problema, apontando uma maneira alternativa de se encontrar a solução do 10º problema, sendo capaz de transferir esse problema com três circunferências dado inicialmente, em um modo mais simplificado e abordá-lo de uma forma diferente para se resolver, sendo que em alguns casos se faz necessário transformar o problema inicial em outro problema geométrico de modo que para uma situação desse tipo, o ideal é já conhecer uma solução desse novo problema. É possível notar que esse trabalho de Apolônio foi muito importante para a matemática, pois atraiu a atenção de diversos matemáticos com o intuito de encontrar suas soluções, sendo soluções essas que exigem muitas relações geométricas e suas propriedades, como serão mostradas mais adiante.

Deste modo se originou esse trabalho que descreve como serão apresentadas três formas de resolver o 10º problema, cada forma desenvolvida por um brilhante matemático, dentre quais são: François Viéte, Jean Victor Poncelet e Julius Plucker. Tratemos de compreender à forma de visualizar os problemas e os conceitos que foram necessários para se obter sua solução. Nota-se que são problemas com diversas soluções, os quais o 10º caso traz consigo oito soluções possíveis. Dentre essas soluções foi visto que somente François Viéte conseguiu encontrar todas as respostas, mas que os outros matemáticos encontraram soluções mais simples.

HISTÓRIA DO PROBLEMA E A SOLUÇÕES DO 10º CASO POR FRANÇOIS VIÉTE

Dentre as três construções geométricas que serão apresentadas, ficou ao nosso critério estabelecer as relações de conceitos e soluções as quais são mencionadas com os seus nomes atuais, pois por se tratar de um trabalho de história da matemática evolvendo construções geométricas, não se pode deixar de pensar sobre quando os conceitos em questão foram desenvolvidos, pois se está trabalhando com obras de matemáticos do Séc.XVI e XIX , dessa forma é importante observar e relatar que os "nomes atuais" para alguns conceitos como homotetia, são dados para a nossa época. Sendo assim se compreende que essa é a forma mais clara de descrever construções geométricas desse tipo, deste modo não se pode afirmar que no caso do trabalho de Viéte, o qual o matemático teria conhecimento do conceito de homotetia, ele em algum momento traria esse devido conceito com o nome que se conhece nos dias atuais, dentre outros exemplos presentes nesse trabalho.

Tratando dos problemas que foram propostos por Apolônio de Perga nascido em 292 a.C. os quais receberam o nome de "Os Problemas de Apolônio", os quais tratam de problemas de desenho geométrico, são construções de circunferências que passam por pontos (P), seja tangente a retas (R) e outras circunferências(C). Já se tem conhecimento de problemas de construções geométricas com essa característica desde os estudos de Euclides, em seu livro "Os Elementos", nele foi solucionado o caso de construir uma circunferência que passe por três pontos e mais adiante ele trabalhou com o caso de uma circunferência ser tangente a três retas. Aqui Apolônio amplia sua visão de modo a trabalhar com três elementos para construir suas circunferências.Nosso foco será o 10º problema proposto por Apolônio, que se trata de construir uma circunferência tangente a outras três circunferências. Este caso foi sendo tratado como desafio desde seu surgimento até o séc. XIX chegando a mãos de diversos matemáticos famosos como Arquimedes, Pappus de Alexandria, Adrian Van Rommen, François Viéte, Jean Victor Poncelet Leonhard Euler, Isaac Newton, Julius Plucker dentre outros. Neste momento apresentaremos três soluções de matemáticos de épocas diferentes cada um com suas ferramentas para resolver o mesmo problema geométrico. As Soluções desenvolvidas por François Viéte em 1600 em seu tratado chamado *"Apollonius Gallus",* a solução proposta por Jean Victor Poncelet que foi apresentado em Paris 1862 com o nome de "*Application d'Analyse et de Géometrie, qui ont servi de principal fondement au traité des propriétes projectives des figures" Tomb 2* e o terceiro matemático a apresentar outra abordagem para o mesmo problema foi JuliusPlucker em seus estudos sobre inversão geométrica.

Cada um desses citados acima resolveu o problema de construção geométrica como foi proposto pelos gregos antigos, com régua não numerada e compasso, mas esta não foi à única forma de encontrar as suas resoluções. Com a vinda da geometria analítica possibilitou observar outras características das relações de tangencias entre as três circunferências com mais propriedade, estudos de Isaac Newton foram voltados para esses problemas geométricos, mas com uma abordagem voltada para descrever analiticamente seus respectivos pontos de tangência.

A partir de agora será tratado sobre as diferentes formas abordadas pelos matemáticos, cada um com seu método. No trabalho de Viéte, feito em Latim ele resolveu todos os dez problemas que Apolônio propôs, sendo com régua e compasso, Viéte trabalhou com algumas configurações mais simples não relatando tantas condições de existência, de modo a tratar somente de encontrar as soluções de casos mais gerais sendo considerados casos em que os elementos geométricos estão dispostos separadamente no plano e não entram em condições impossíveis de se obter solução. Com as soluções desses casos, o matemático francês foi desenvolvendo um caderno de construções geométricas que vão se complementando com propriedades geométricas

e lemas aos quais ao longo das resoluções dos dez problemas. Foi utilizada como método a recorrência por Viéte, de modo a tratar de associar o máximo de conceitos e construções já utilizadas em casos anteriores para cair em um caso particular onde já tenha encontrado uma solução, um exemplo disso é o caso em que ele trabalha com uma condição particular do problema RRC (duas retas e uma circunferência) e adapta para uma configuração de outro problema já resolvido. Este exemplo se faz necessário para compreender como era a forma que Viète observava os problemas geométricos e como ele abordava esses casos, sendo assim este é o caso de duas retas e uma circunferência, para este caso Viéte observa uma particularidade bem interessante, sendo capaz de encontrar uma maneira alternativa a qual se comporta como um problema anterior mais simples e já tendo solucionado esse problema, veja nas imagens abaixo:

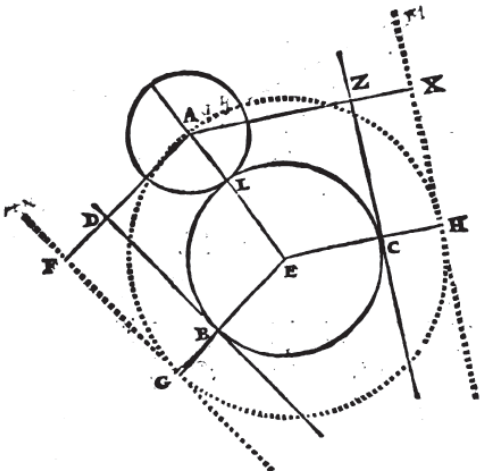


Figura1: Solução de Viéte Caso RRC

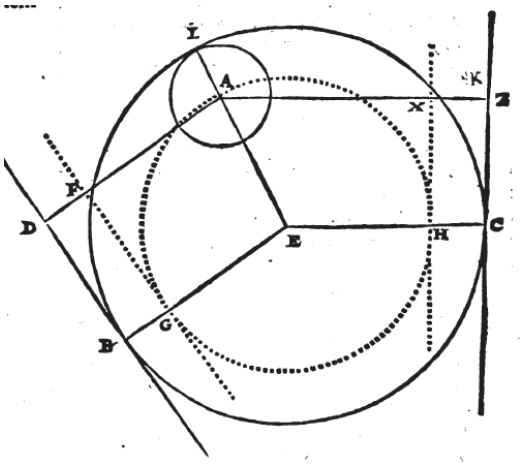


Figura 2: Solução de Viéte Caso RRC

Aqui Viéte usa a circunferência dada de centro A de modo a utilizar somente o ponto de seu centro (um ponto), com isso que constrói uma solução do problema de duas retas e um ponto (RRP), que em seu caderno já havia solucionado. Se tratando de um caso já resolvido em "Apollonius Gallus" ele encontra a solução do segundo problema mencionado e por nossa observação ele usa o que conhecemos hoje como dilatação do raio de uma circunferência e assim dilata o raio do circulo solução do caso RRP, de modo a se tornar tangente as duas retas e a circunferência. O que torna sutil essa solução é notar que as circunferências soluções de cada problema (RRP e RRC) seriam concêntricas e com isso resolvendo o problema de uma maneira mais simples. Notando isso é que se compreende a ideia de construir duas retas paralelas auxiliares cada uma a uma das respectivas retas dadas, de modo que a distância entre as retas dadas e as respectivas retas auxiliares seja igual ao raio da circunferência de centro A, dada no problema inicial. Isso deixa as duas circunferências soluções de cada problema sendo concêntricas. Sendo assim, a solução para o problema de duas retas e um ponto (RRP) será concêntrica a circunferência solução do caso de duas retas e uma circunferência (RRC). No entanto ele trabalha com o conceito que adotamos como dilatação do raio destas circunferências, onde necessariamente ele dilata o raio da circunferência solução do caso RRP, para se tornar tangente no problema RRC. Observa-se que nas figuras 1 e 2 cada circunferência está tangenciando internamente ou externamente a circunferência solução. Com as construções de Viéte, ele resolveu o 10º problema geométrico de Apolônio, de modo semelhante onde a esse não nas construções, mas sim na forma de pensar pois se utiliza de retas e circunferências auxiliares para que se retorne a um caso anterior. Como aqui mostrado o 10º problema, o caso de três circunferências:

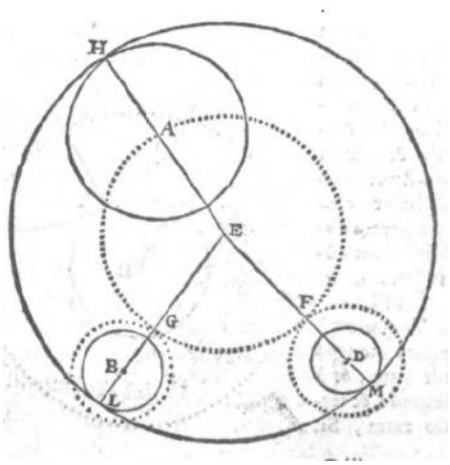


Figura 3: Solução de Viéte caso CCC

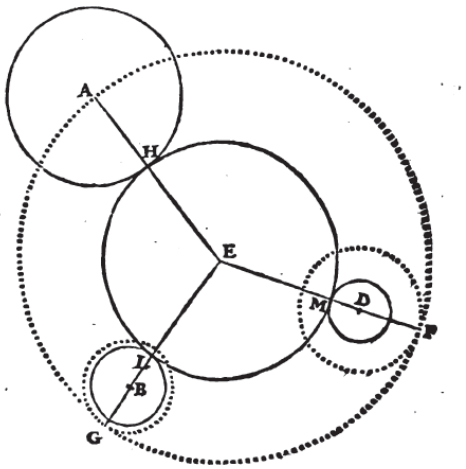


Figura 4: Solução de Viéte caso CCC

Neste problema ele retrocede para o caso de duas circunferências e um ponto (CCP), outro problema proposto por Apolônio, sendo este mais simples de resolver, o qual Viète já encontrou a solução em sua obra. Novamente se observa que foi necessário construir elementos auxiliares, como circunferências, configurando o problema para deixá-lo em uma condição na qual já havia encontrado a solução. A partir disso Viéte constrói as circunferências auxiliares para retornar ao caso de duas circunferências e um ponto, de modo a deixar como ponto o centro de uma das circunferências dadas e trabalhando com a diferença de raios para se encontrar a mesma relação de dilatação da circunferência mencionada no caso anterior, ou seja, se constrói circunferências auxiliares, nas quais serão concêntricas as respectivas circunferências dadas no início do problema e então o raio dessas circunferências auxiliares tem que estar relacionado com o raio da circunferência na qual será utilizado somente seu centro, deste modo quando desenvolver a solução do caso CCP estaremos encontrando o centro de solução do caso CCC, e assim desenvolver a dilatação da circunferência encontrada no problema CCP para ser tangente no caso de CCC, deste modo construir uma configuração em que as duas soluções dos respectivos casos (CCP e CCC) sejam concêntricas, ou seja, de um modo análogo ao descrito anteriormente. É interessante afirmar que em "Apollonius Gallus", Viéte trata de algumas condições particulares, ou melhor, dizendo ele trabalha com algumas configurações mais simples de elementos para encontrar sua solução. Assim fica relatado o método utilizado por François Viéte, um matemático que contribuiu tanto para a matemática e para a filosofia.

Soluções do 10º caso por Jean Victor Poncelet

Dando continuidade às diferentes formas de se encontrar a solução do 10º problema de Apolônio, relataremos agora como Jean Victor Poncelet (1788-1867), matemático francês que deu continuidade aos estudos de Girrad Desargues (1591-1661), trabalhou com geometria por toda a sua vida. É interessante retomar um pouco sobre sua história e afirmar que diversos trabalhos de geometria projetiva que se compreende nos dias atuais são devido aos estudos deste brilhante geômetra. Alguns pesquisadores afirmam que Poncelet fez um trabalho semelhante ao de Euclides, Poncelet não criou toda a geometria projetiva que conhecemos hoje, mas a formalizou de modo semelhante ao trabalho de Euclides em "Os Elementos". É interessante relatar que Poncelet foi um matemático que participou da guerra declarada entre a Rússia e Napoleão, guerra que se tornaria um marco na história da humanidade perdendo somente em repercussão para a primeira e a segunda guerra mundial. Contudo, durante sua batalha, Poncelet

foi preso e ficou detido por dezoito meses, e mesmo preso continuou estudando e desenvolvendo teorias para a geometria que viria a formalizar.

Seus trabalhos criados na cadeia russa de Saratoff durante o período de 1813-1814, só foram publicados em 1862 como tratados. O trabalho de Poncelet que foi necessário para encontrar a solução do problema carrega o título de "*Application d'Analyse et de Géometrie, qui ont servi de principal fondement au traité des propriétes projectives des figures"* (Aplicação e análise da geometria, sendo o principal fundamento nas propriedades de figuras projetivas) como já foi dito anteriormente. Sempre cativado pelos desafios de se resolver problemas geométricos, desta vez ele observou o 10º problema de Apolônio. Poncelet utilizou do conceito de homotetia e potência de ponto, e para garantir suas condições ele se baseia em um teorema de d'Alembert. Em sua obra Poncelet desenvolve a solução do 10° problema, ou seja, ele encontra uma circunferência tangente às três circunferências ao mesmo tempo, de modo a utilizar o conceito de potência de ponto, mas para utilizar este conceito com circunferências ele estabelece uma relação chamada de eixo radical. Quando se trabalha com o conceito de eixo radical, se estabelece uma relação entre duas circunferências onde se obtém uma reta que tenha a mesma relação de potência de pontos entre ambas as circunferências.

Sejam os seguimentos PH, PJ, PK, PM.

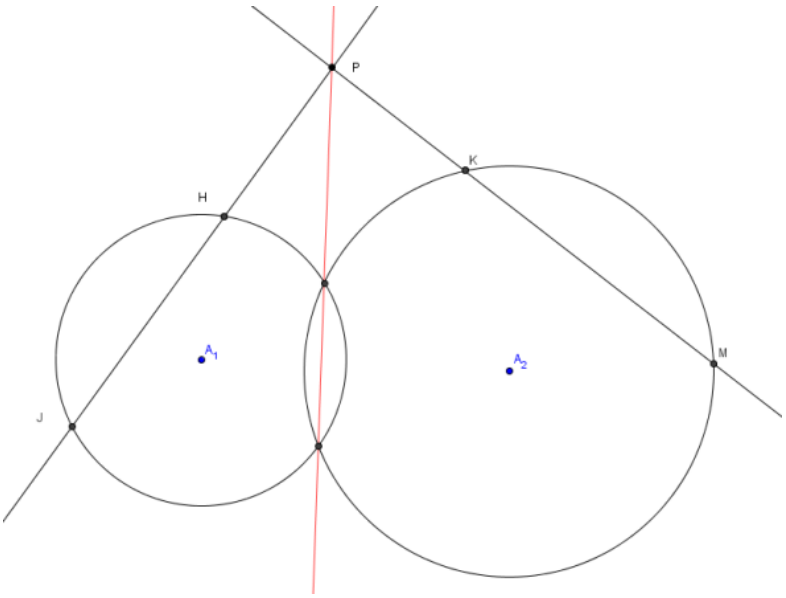


Figura 6: Representação do Eixo Radical

A reta acima apresentada na cor vermelha se trata do eixo radical, que é construída a partir dos dois pontos de interseção das circunferências, de modo que esta reta representa o conjunto de pontos de igual potência entre ambas às circunferências. Com isso se garante a proporção de pontos de forma que se encontra uma potência de pontos com a igualdade PH. PJ=PK. PM. Essas proporções estão garantidas e fáceis de serem demonstradas euclideanamente com as relações de potência de pontos, com os conceitos de semelhança triangular, pois se trata de triângulos formados pelos pontos de interseção das circunferências, sendo estes triângulos semelhantes pela relação AAA (ângulo, ângulo, ângulo), desta forma mantendo a

relação de potência de pontos descrita acima. Além desta relação Poncelet também utiliza de um teorema criado por d'Alembert, Jean le Rond d'Alembert (1717-1783) o qual foi um matemático, físico, filósofo francês, que em seus estudos trouxe diversas contribuições para a matemática, dentre elas, está aquela que Poncelet utilizou para garantir a solução do problema. Por tradução nossa seja o teorema de d'Alembert:

> *"*Sejam dados três círculos quaisquer, se os considerarmos em pares, suas retas tangentes externos prolongados até que eles se cruzem... então com o ponto de interseção de todas as três, estará em *uma linha reta".*

Inicialmente deixemos claro que ao relatar "*retas tangentes extemos prolongados até que eles se cruzem*" (faz referência sobre a construção do centro externo de homotetia), com isso Poncelet associa as três circunferências em três pares, onde por cada um destes pares se obtém um centro de homotetia externo, de modo a construir os três centros de homotetia externos em relação aos três pares de circunferências, estes pontos serão colineares, essa é propriedade que o teorema de d'Alembert garante, esse teorema se torna fundamental na construção das soluções do 10º problema, pois é a partir dessa reta, a reta construída a partir dos centros de homotetia externo, que encontraremos os pontos de tangência de uma circunferência solução com suas circunferências dadas no início do problema. Como segue nas figuras mais abaixo, temos a reta formada pelos pontos O e O', esta é a reta criada a partir dos três centros de homotetia, onde cada ponto de homotetia encontrado a partir da relação de projeção entre duas circunferências. Assim Poncelet constrói outra circunferência com centro em O e que passe pelo centro de outra circunferência de centro Θ, seja esta de centro Θ uma circunferência que intercepte as duas circunferências de centro C' e C'', sendo assim de modo análogo se constrói uma circunferência com o centro em O' e raio até o centro de outra circunferência que intercepte as circunferências de centro C e C'.

Agora será feito a reta representando o eixo radical a partir da intercessão dessas duas circunferências construídas logo acima, aquelas que têm os respectivos centros O e O', de modo a tomar um ponto denotado por α que pertença ao eixo radical e a partir dele construir uma reta tangente à circunferência de centro O e raio OΘ. Obtendo essa distância se constrói uma circunferência de centro em α e raio a distância até o ponto de tangência da circunferência de centro O com a reta que passa por α. Observe que esta circunferência foi construída sob uma reta de eixo radical em relação às três circunferências, sendo assim sua relação de potência de ponto pode ser garantida e demostrada euclideanamente de modo que essa circunferência deve interceptar as três circunferências simultaneamente, de modo a garantir todas as suas relações de potência de ponto entre o eixo radical construído e a reta dos centros de homotetia.

Em seguida com essa circunferência que acabou de ser construída, novamente se desenvolve a relação de eixo radical, a qual na imagem abaixo (figura 7) será a reta que passa pelos pontos M, N, P, de modo que no ponto em que essa reta cortar a reta que passa por O e O', teremos um ponto de igual potência em relação à circunferência de centro C'', então a partir desse ponto que está na reta OO' se constrói uma reta que como segue a imagem abaixo, é a reta que passa por P e T', reta essa que será tangente à circunferência C'', sendo que o ponto de tangencia é T', um ponto de tangencia da circunferência solução, a partir disso será encontrando seu primeiro ponto de contato. Agora a partir de C'', se cria uma reta C''T' de modo que, quando essa reta tocar a reta eixo radical, aquele construído a partir da interseção das circunferências de centro O e O', se têm o centro da circunferência solução que se deseja encontrar.

Então por meio de homotetia e eixo radical Jean Victor Poncelet resolveu o problema geométrico proposto por Apolônio. Poncelet construiu os três pontos de eixo externo, de modo a garantir pelo teorema de d'Alembert que esses três pontos são colineares, assim se obtém uma reta de igual potência de pontos entre as três circunferências, em seguida se constrói uma

circunferência que passe por C' e C" com o centro em Θ, sendo assim agora se têm uma circunferência de centro em Θ e raio ΘB. De modo análogo se constrói uma circunferência de centro em O' e se raio saindo de O' chegando até o centro da outra circunferência encontrada que intercepte o outro par de circunferências como mostra a figura abaixo de modo já descrito anteriormente. Com essa construção se encontra a interseção dessas duas novas circunferências encontrando assim um eixo radical de igual potência em relação às três circunferências simultaneamente, desta forma tomando um ponto no eixo radical e construindo uma reta tangente que passe por esse ponto do eixo radical e seja tangente a uma das circunferências que acabaram de ser desenvolvidas, assim se cria uma nova circunferência que tenha o centro o ponto escolhido α, no eixo radical e de raio até o ponto de tangencia. Como essa circunferência será secante às três circunferências ao mesmo tempo, então se construir novamente o eixo radical com a circunferência que seja secante às três circunferências com uma das circunferências encontraremos a reta de igual potência entre elas, assim quando esse novo eixo radical cortar a reta criada com os centros de homotetia (reta OO') teremos o ponto de igual potência e por ele se constrói uma reta tangente à circunferência dada no problema inicial a qual criou o mesmo eixo radical. Desta forma se encontra o ponto de tangência entre ela com uma circunferência solução do problema, de modo análogo se desenvolve com as outras duas circunferências achando assim os pontos de tangência entre as três circunferências dadas no problema e então teremos o caso de construir uma circunferência que passe por três pontos, se tornando mais fácil de encontrar a solução do problema final. Construído esses pontos de tangencia, estaremos encontrando os pontos de tangencia da circunferência solução do problema de Apolônio. Como se nota nas figuras abaixo:

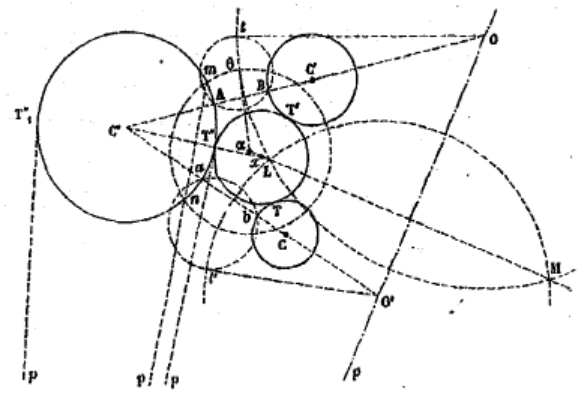


Figura 7: Solução 1 Poncelet caso CCC

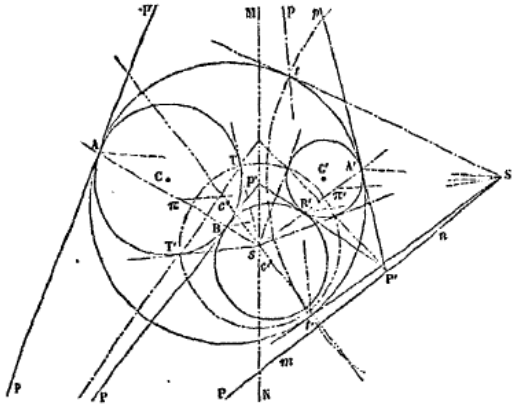


Figura 8: Solução 2 Poncelet caso CCC

Poncelet desenvolveu a solução do 10º problema de Apolônio com a relação de homotetia e potência de pontos, se observarem, Poncelet não mudou muito em conceitos para este problema se comparada à forma que Viéte construiu. Viéte também utilizou de homotetia e potência de pontos, mas com uma construção totalmente diferente ao que Poncelet desenvolveu.

Solução 10º caso Julius Plucker

Continuando com os meios de resolução desse problema, partiremos para a forma que Julius Plucker encontrou para resolver o 10º problema. Julius Plucker (1801-1868) foi um matemático, físico alemão que estudou a geometria projetiva e ajudou a desenvolver novos conceitos para a matemática, como o conceito de inversão geométrica, o qual se trabalha com a projeção de elementos como ponto, reta e circunferência. De modo a descrever algumas condições e características desse novo conceito, relatemos melhor do que se trata a inversão:

Conceito de Inversão de Plucker aplicado ao problema de Apolônio

Inversão é uma transformação geométrica que garante características que a partir de um ponto A, ponto do plano chamado de *centro de inversão* com r sendo um número real positivo, recebe o nome de *raio de inversão*.
A inversão de centro A e raio *r* leva cada ponto X≠A do plano a outro ponto X' tal que $AX.\ AX' = r^2$. Com essa relação de proporção garantida é possível afirmar que a inversão da forma $I_{(A,r)}(X)$ Inversão de X no circulo de inversão A de raio *r*, além disso, se pode compreender que $I_{(A,r)}(O) = O_\infty$, como sendo um ponto do infinito. Atribui-se o nome de *Círculo de Inversão* ao círculo de centro A e raio r.
Aqui faremos um esclarecimento sobre as propriedades que Julius Plucker apontou em seus estudos sobre inversão geométrica.
As principais características listadas como sendo a inversão uma involução, ou seja, $I_{(A,r)}(X) = X' \Leftrightarrow I_{(A,r)}(X') = X$, mostrando que inversão se trada de uma aplicação bijetiva. Os pontos do círculo de inversão são levados em si mesmos pela inversão, se X é um ponto externo ao círculo de inversão, sua imagem será interna a ele, um modo de construir inversão com régua e compasso é da seguinte maneira: Seja o ponto X' construído assim: Se T_1X, T_2X são retas tangentes ao círculo de inversão, onde T1 e T2 são os pontos de tangencia da reta que passa por X e tangente a circunferência de centro A e raio r, agora se encontra $X' = T_1T_2 \cap OX$. Se β uma circunferência contendo o ponto A, sua imagem será uma reta que não passa por A e será paralela a tangente de β. A relação de *inverso* é da seguinte maneira, se uma reta não passa pelo ponto A, sua imagem será uma circunferência que passa por A. Uma reta passando pelo ponto A é levada em si mesma. Se β é uma circunferência não contendo o ponto A, sua imagem será uma circunferência que não passa pelo ponto A. Se duas curvas se intersectam em um ponto H e fazem um ângulo α entre elas, seus inversos também farão um ângulo α no ponto H' (inverso de H).
Com isso Plucker adota uma forma interessante de se trabalham com as três circunferências do problema que acaba facilitando sua resolução, ele utiliza da inversão construída abaixo:

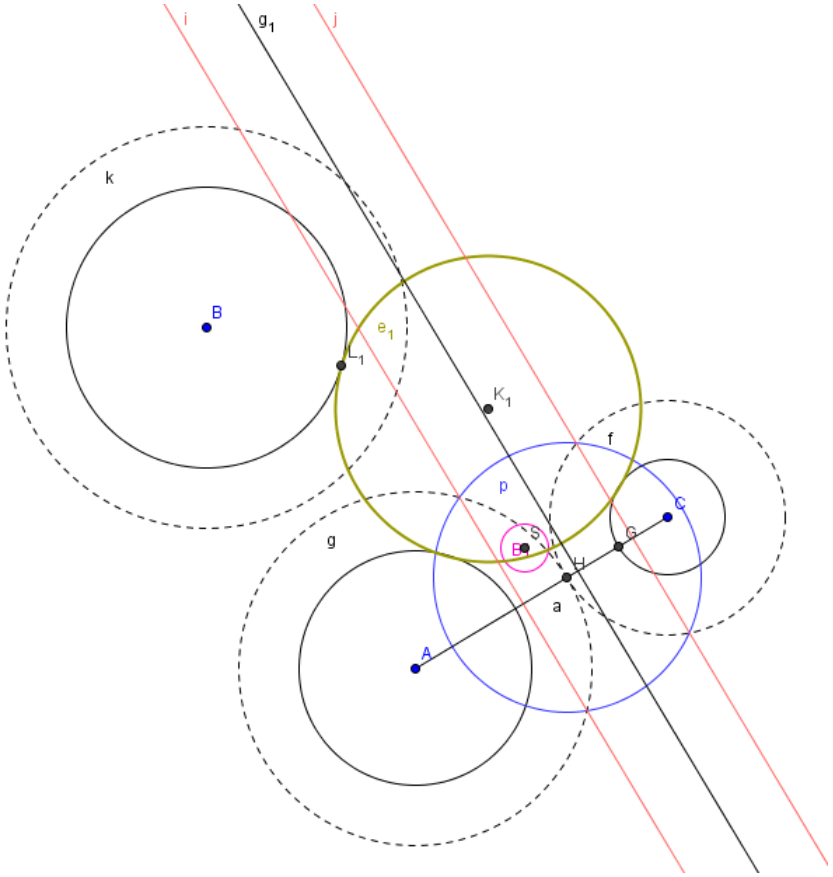


Figura 9: Solução Plucker caso CCC.

Plucker resolve o 10º problema da seguinte forma: Sejam três circunferências $A(o_1, r_1), B(o_2, r_2)\, e\, C(o_{3,}\, r_3)$. Acrescentamos aos raios das três circunferências um Δ tal que $A(o_1, r_1 + \Delta), B(o_2, r_2 + \Delta)\, e\, C(o_{3,}\, r_3 + \Delta)$ e $C(o_3, r_3 + \Delta) \cap A(o_{1,}\, r_1 + \Delta) = \{H\}$ por H construímos o círculo de inversão P. Tal que: $I_{(H,r)}(B) \to S$; $I_{(H,r)}(A) \to i$; $I_{(H,r)}(C) \to j$. Assim se constrói a reta g1 equidistante de $i\, e\, j$. Note que agora graças a inversão pode-se trabalhar com o problema geométrico de construir uma circunferência que tangencie duas retas e outra circunferência, no qual seu centro estará na reta g1, sendo assim se obtem o ponto $K1'$ centro da circunferência $E1'(K1', m)$ tangente as *i*, *j* *e* centro em g1, agora se trabalha com a ideia de "*voltar a inversão*" para que se encontre uma circunferência tangente as respectivas circunferências utilizadas no inicio. Assim $I_{(H,r)}(K1') \to K1$. Circunferência cujo centro K1 é o ponto procurado, ou seja, é o centro da circunferência solução do 10º Problema de Apolônio.

Sejam por construções geométricas que se complementam, seja por homotetia, seja por inversão. Estes problemas geométricos são de enorme contribuição para os estudos de geometria. Aqui com o conceito de inversão de Plucker se teve a percepção de inverter duas das três circunferências para transformá-las em retas e a terceira circunferência em uma circunferência interna ao circulo de inversão, de modo a trabalhar a partir de agora com outro problema proposto por Apolônio, o caso de uma circunferência tangente a duas retas e uma circunferência,

assim quando ele encontra a solução desse segundo caso, ele constrói a inversão em relação ao circulo de inversão chegando à circunferência tangente às três retas.

Deixamos aqui expostos três métodos de resolver um problema de construção geométrica que teve seu início na "Idade Aurea" da matemática grega, até chegar ao auge da matemática europeia. Permeando diversos conceitos geométricos, o maior resultado encontrado nesse trabalho é o de descrever com alguma precisão as formas utilizadas para resolver problemas de construções geométricas, onde suas demonstrações contribuem ainda mais para o entendimento de tais resoluções, assim seja com dilatação, homotetia ou inversão, esses problemas são interessantes de se trabalhar para que, por meio deles se encontre e relacione a maior quantidade de conceitos matemáticos envolvidos.

Referências

BOYER, Carl B. MERZBACH, Uta C. **História da Matemática** - Tradução da 3ª Edição Americana, editora Blucher, 2012

COURANT.R. and ROBBINS.H. **O que é Matemática?** – Tradução edição 2000 , editora Ciência Moderna

Descartes.R. Discurso do método. Tradução Enrico Corvisieri, digitado pelo grupo Membros do grupo de discussão Acrópolis.

DOMINGUES, Higyno H. Introdução à história da matemática. Editora Unicamp

DOWNS. M. (1971). **Geometria Moderna**. Tradução Parte II Editora Universidade de Brasília.

OTERO, Mario H**. Três momentos de uma Construction Geométrica**. Revista brasileira de história da matemática. Vol 6. Nº 12. 2006

PONCELET. J. V. **Application d'Analyse et de Géometrie, qui ont servi de principal fondement au traité des propriétes projectives des figure Tomb 2.** 1864.

VIÉTE. F. **Apollonius Gallus**. 1600.

Copyright © 2013 Douglas Gonçalves Leite, Jansley Alves Chaves. Os autores concedem licença não exclusiva, aos organizadores do VI HTEM, para publicar este documento no CD de trabalhos completos do evento. Qualquer outro uso é proibido sem o consentimento dos autores.