DISCUSSÃO DE ARTIGOS ENVOLVENDO PROPRIEDADES DA SEQUÊNCIA DE FIBONACCI APOIADA NA TECNOLOGIA

Francisco Regis Vieira Alves

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará

fregis@ifce.edu.br

Encontramos, na maioria dos livros de História da Matemática (DUNLAP, 2003; EVES, 1969; KRANTZ, 2006; POSAMENTIER & LEHMANN, 2007; RIBENBOIM, 1995; WELLS, 2005), alguma referência aos números que descrevem a sequência recorrente de fibonacci. Vale observar, por outro lado, a investigação proposta em trabalhos (ALVES & BORGES NETO, 2011) relativa às propriedades de descrição de uma sequência de fibonacci no campo dos inteiros. Não obstante, inúmeras outras propriedades podem ser generalizadas com origem nessa sequência (HEIMER, 1967). Deste modo, discutiremos neste trabalho, alguns artigos específicos, publicados entre as décadas de 60 e 90, envolvendo propriedades generalizadas em torno da sequência de fibonacci, com ênfase em suas aplicações computacionais. Neste sentido, indicaremos, a partir da formula generalizada de Binet, discutida em Horadam & Shannon (1988), a construção e análise de curvas no plano, com o auxílio do CAS Maple (HORADAM, 1961; 1988). *Ademais, com ênfase na interpretação geométrica, o problema detalhado em Kimberling (1990), que envolve a descrição de uma infinidade de pontos no plano, constituídos a partir dos números de fibonacci, determina a visualização de famílias de hyperbolas de fibonnaci funções polinomiais em duas variáveis. Em Horadam (1986), encontramos um estudo de hipersuperfícies e superfícies (BICKNELL, 1970) que, com o aparato computacional, admitem um viés interessante de interpretação. Por fim, esperamos evidenciar, neste escrito, a contribuição da tecnologia, na reinterpretação de propriedades e dados matemáticos obtidos num contexto que contava com possibilidades limitadas desta.*

Palavras-chaves: Sequência de Fibonacci,Propriedades,História da Matemática, Tecnologia.

INTRODUÇÃO

Encontramos na literatura especializada um extenso rol de informações (tanto em livros como conteúdos disponibilizados na *internet*) a respeito da emblemática sequencia numérica devida ao matemático italiano Leonardo de Pisa que, segundo Dunlap (2003, p. 35), "nasceu aproximadamente em 1175 e faleceu em 1250".

Tal sequencia é chamada de *Sequencia de Fibonacci*. O termo Fibonacci é a abreviação de filho de Bonaccio, seu pai, como explica Dunlap. Posamentier & Lehmann (2007, p. 22) comentam que "Fibonacci acumulou experiência nos campo da Aritmética e da Álgebra, a partir das viagens que realizou na Europa", entretanto, apesar de ter desenvolvido vários trabalhos nestes campos da Matemática, Leonardo de Pisa é lembrado geralmente em razão do seu problema que descreve "a reprodução dos coelhos imortais" (WELLS, 2005. p. 101). Consideremos a listagem dos elementos.

$$(f_n)_{n\in\square} : (1\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 5\ ;\ 8\ ;\ 13\ ;\ 21\ ;\ 34\ ;\ 55\ ;\ 89\ ;\ 144\ ;\ 233;\ 377....\ ) \text{ (*)}$$

Reparemos que poderíamos considerar também as seguintes sequências: $(f_n)_{n\in\square} : (2\ ;\ 5\ ;\ 7\ ;\ 12\ ;\ 19\ ;\ 31\ ;\ 50\ ;....\ )$, $(f_n)_{n\in\square} : (1\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 7\ ;11\ ;18\ ;\ 29\ ;....$ ou ainda $(f_n)_{n\in\square} : (-1\ ;\ -5\ ;\ -6\ ;\ -11\ ;\ -17;....\ )$, como exemplifica Vorobe´v (1961, p. 11), todavia, apenas no caso de (*) descrevemos os *números de Fibonacci*.

A listagem acima é encontrada em Honsberger (1985, p. 111) descrita apenas para $n \in IN$. Denotamos a *sequencia de Fibonacci* por $(f_n)_{n\in IN}$ que, de acordo com Lima et al (2000, p. 65), trata-se de uma *sequência recorrente*, uma vez que conhecemos sua regra e conhecemos seus primeiros termos, entretanto, com base na forma de obtenção dos termos da *sequencia de Fibonacci*, obtemos $f_2 = f_1 + f_0 \therefore f_0 = f_2 - f_1 = 0$. Termo que nao comparece em (*).

Na literatura especializada (BURTON, 1980; DUNLAP, 2003; ESTRADA et al, 2000; EVES, 1969; 1983; HONSBERGER; 1985; KOSHY, 2007; POSAMENTIER & LEHMANN, 2007; RIBENBOIM, 1995; VOROBE´V, 1961; 1974; WELLS; 2005) encontramos intrigantes propriedades aritméticas, algébricas e geométricas da *sequencia de Fibonacci* que descrevemos em (*). Vale observar que esta recebeu maior interesse por parte dos matemáticos[1] somente após a descrição da *sequência de Lucas*, definida por Edouard Anatole Lucas (1842-1891), "que mantém uma forte relação com os termos desta". (POSAMENTIER & LEHMANN, 2007).

Burton (1980, p. 287) explica que a "*sequencia de Fibonacci* é a primeira *sequencia recorrente"* conhecida num trabalho de Matemática. Acrescenta que o próprio *Fibonacci* ficou atento para a particularidade *recorrente da sequencia*, entretanto, algumas propriedades, consideradas substanciais, foram exploradas somente após a evolução das notações matemáticas empregadas.

De fato, Posamentier & Lehmann (2007, p. 296) sublinham que "em 1843 Jacques Philipe Marie Binet (1786-1856) desenvolveu uma definição explícita para os *números de Fibonacci*", descrita por $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$ para $n \geq 1$. Para qualquer número natural $n \geq 1$, "o número irracional $\sqrt{5}$ parece desaparecer no cálculo do número de Fibonacci", o que soa inesperado, posto que, a expressão acima não se assemelha a um número racional, em todo

[1] Ribenboim (1995, p. 54) recorda-se de que outras sequências do mesmo tipo receberam atenção de figuras como Euler, Fermat e Pell, todavia, foi somente E. A. Lucas que as estudou de modo sistemático.

caso, como de costume, quando a referida fórmula matemática foi nomeada, "controvérsias surgiram em torno de quem de fato a descobriu primeiro." (POSAMENTIER & LEHMANN, 2007, p. 297).

No próximo segmento, discutiremos com maior detalhe algumas propriedades da sequência de Fibonacci.

SEQUÊNCIA GENERALIZADA DE FIBONACCI

Na figura 1 trazemos a lúdica abordagem, peculiar nos livros de História da Matemática, atinente à modelização da produção dos coelhos.

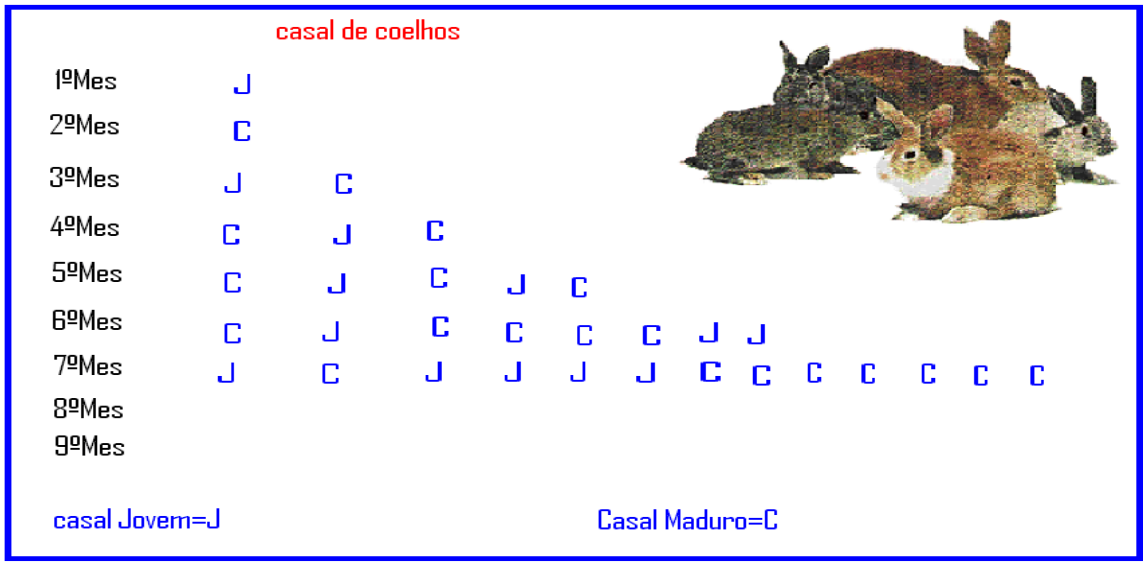


Figura 1. Descrição e modelização da reprodução de coelhos relacionada com a sequência

A partir dos dados numéricos da figura 1, podemos descrever a seguinte listagem:

$$(f_n)_{n\in\square} : (1\,;\,1\,;\,2\,;\,3\,;\,5\,;\,8\,;\,13\,;\,21\,;\,34\,;\,55\,;\,89\,;\,144\,;\,233;\,377....\,)$$

Com base nesta descrição, apresentaremos alguns teoremas e propriedades.

$Teorema_1$: Para todo $n \geq 1$ temos que $f_1 + f_2 + ... + f_n = f_{n+2} - 1$

Demonstração: (indução) Observamos para $n = 1 \therefore f_1 = 1 = 2 - 1 = f_3 - 1 \rightarrow f_1 = f_{1+2} - 1$. Para $n = 2 \therefore f_1 + f_2 = 1 + 1 = 2 = 3 - 1 = f_4 - 1 = f_{2+2} - 1 \rightarrow f_1 + f_2 = f_{2+2} - 1$. Vejamos mais um caso para $n = 3 \therefore f_1 + f_2 + f_3 = 1 + 1 + 2 = 4 = 5 - 1 = f_5 - 1 \rightarrow f_1 + f_2 + f_3 = f_{3+2} - 1$. Vamos supor agora que a propriedade é válida para $r \geq 1$, onde $f_1 + f_2 + ... + f_r = f_{r+2} - 1$ e verificaremos a validez resultado para $n = r + 1 \rightarrow f_1 + f_2 + ... + f_r + f_{r+1} = [f_1 + f_2 + ... + f_r] + f_{r+1} = f_{r+2} - 1 + f_{r+1} = f_{r+1} + f_{r+2} - 1 = f_{r+3} - 1$. Segue o resultado. Vejamos então o comportamento da soma dos quadrados dos termos.

$Teorema_2$: Para todo $n \geq 1$ temos $f_1^2 + f_2^2 + ... + f_n^2 = f_n \cdot f_{n+1}$

Demonstração: (indução) Teremos que $f_1^2 = 1^2 = 1 \cdot 1 = f_1 \cdot f_2$. Para $n = 2 \rightarrow f_1^2 + f_2^2 = 1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 1 \cdot 2 = f_2 \cdot f_3$. Para $n = 3 \rightarrow f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 = 1^2 + 1^2 + 2^2 = 2 \cdot 3 = f_3 \cdot f_4$.

Por indução, vamos admitir a propriedade válida para $r \geq 1$ de modo que $f_1^2 + f_2^2 + ... + f_r^2 = f_r \cdot f_{r+1}$. No próximo passo, vejamos se a propriedade é válida para $n = r+1 \rightarrow [f_1^2 + f_2^2 + ... + f_r^2] + f_{r+1}^2 = f_r \cdot f_{r+1} + f_{r+1}^2 = f_{r+1}(f_r + f_{r+1}) = f_{r+1} \cdot f_{r+2} = f_{(r+1)} \cdot f_{(r+1)+1}$.

O próximo resultado proporciona a aplicação do método de indução sobre dois índices de inteiros positivos.

$Teorema_3$: Sejam $m \geq 1$ e n>1 então $f_{n+m} = f_{n-1} \cdot f_m + f_n \cdot f_{m+1}$

Demonstração: Para cada n>1 fixado, usaremos indução sobre $m \geq 1$. De fato, para $m = 1 \rightarrow f_{n+1} = f_n + f_{n-1} = f_{n-1} \cdot 1 + f_n \cdot 1 = f_{n-1} \cdot f_1 + f_n \cdot f_{1+1}$. Para $m = 2 \rightarrow f_{n+2} = f_{n+1} + f_n = f_n + f_{n+1} =$

$= f_n + (f_n + f_{n-1}) = f_{n-1} + 2f_n = f_{n-1} \cdot f_2 + f_n \cdot f_3$. Segue que $f_{n+2} = f_{n-1} \cdot f_2 + f_n \cdot f_3$.

Para $m = 3 \rightarrow f_{n+3} = f_{n+2} + f_{n+1} = f_{n+1} + f_{n+2} = f_{n+1} + (f_{n+1} + f_n) = f_n + 2 \cdot f_{n+1} =$

$= f_n + 2 \cdot (f_n + f_{n-1}) = f_{n-1} \cdot 2 + 3 \cdot f_n = f_{n-1} \cdot f_3 + f_n \cdot f_{3+1} \therefore f_{n+3} = f_{n-1} \cdot f_3 + f_n \cdot f_{3+1}$. Vale observer ainda para $m = 4 \therefore f_{n+4} = f_{n+3} + f_{n+2} = f_{n+2} + f_{n+3} = f_{n+2} + (f_{n+2} + f_{n+1}) =$

$f_{n+1} + 2 \cdot f_{n+2} = f_{n+1} + 2 \cdot (f_{n+1} + f_n) = 2 \cdot f_n + \cdot f_{n+1} = 2 \cdot f_n + 3 \cdot (f_n + f_{n-1}) = 5 \cdot f_n + 3 \cdot f_{n-1} = 3 \cdot f_{n-1} + 5 \cdot f_n$
$= f_{n-1} \cdot f_4 + f_n \cdot f_{4+1} \therefore f_{n+4} = f_{n-1} \cdot f_4 + f_n \cdot f_{4+1}$

Agora vamos admitir que a fórmula $f_{n+m} = f_{n-1} \cdot f_m + f_n \cdot f_{m+1}$ seja válida para $m = k$ e para $m = k+1$ e demonstração (usando indução que) se verifica a mesma propriedade para $m = k+2$. Deste modo, escrevemos para $m = k \rightarrow f_{n+k} = f_{n-1} \cdot f_k + f_n \cdot f_{k+1}$ e na sequência temos $m = k+1 \rightarrow f_{n+(k+1)} = f_{n-1} \cdot f_{k+1} + f_n \cdot f_{(k+1)+1}$. Agora somamos as equações:

$$\begin{cases} f_{n+k} = f_{n-1} \cdot f_k + f_n \cdot f_{k+1} \\ f_{n+(k+1)} = f_{n-1} \cdot f_{k+1} + f_n \cdot f_{(k+1)+1} \\ \Rightarrow f_{n+k} + f_{n+(k+1)} = f_{n-1} \cdot f_k + f_n \cdot f_{k+1} + f_{n-1} \cdot f_{k+1} + f_n \cdot f_{k+2} = f_{n-1} \cdot (f_k + f_{k+1}) + f_n \cdot (f_{k+1} + f_{k+2}) \end{cases}$$

Segue que: $f_{n+k} + f_{n+(k+1)} = f_{n-1} \cdot (f_k + f_{k+1}) + f_n \cdot (f_{k+1} + f_{k+2}) = f_{n-1} \cdot f_{k+2} + f_n \cdot f_{(k+2)+1}$

Re-escrevendo, estabecemos que $f_{n+(k+2)} = f_{n+k} + f_{n+(k+1)} = f_{n-1} \cdot f_{k+2} + f_n \cdot f_{(k+2)+1} \therefore$

$f_{n+(k+2)} = f_{n-1} \cdot f_{k+2} + f_n \cdot f_{(k+2)+1}$, por indução, segue o resultado.

Agora, tomaremos $m = n$ na expressão $f_{n+m} = f_{n-1} \cdot f_m + f_n \cdot f_{m+1}$, segue que: $f_{n+n} = f_{n-1} \cdot f_n + f_n \cdot f_{n+1} \therefore f_{2n} = f_n(f_{n-1} + f_{n+1})$, assim, a partir desta equação, vemos que f_n divide f_{2n}. Por outro lado, podemos escrever ainda que: $f_{2n} = f_n(f_{n-1} + f_{n+1}) = f_{2n} = (f_{n+1} - f_{n-1})(f_{n+1} + f_{n-1}) = f_{n+1}^2 - f_{n-1}^2$.

Assim, podemos escrever um número de fibonacci como diferença entre dois quadrados de números de fibonacci $f_{2n} = f_{n+1}^2 - f_{n-1}^2$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se fizermos em $f_{n+m} = f_{n-1} \cdot f_m + f_n \cdot f_{m+1}$ $m = n+1$ teremos: $f_{n+n+1} = f_{n-1} \cdot f_{n+1} + f_n \cdot f_{n+1+1} = f_{n-1} \cdot f_{n+1} + f_n \cdot f_{n+2} \therefore f_{2n+1} = f_{n-1} \cdot f_{n+1} + f_n \cdot f_{n+2}$

Agora vamos tomar em $f_{n+m} = f_{n-1}\cdot f_m + f_n \cdot f_{m+1}$ $m = 2n$ escrevemos:

$f_{n+2n} = f_{n-1}\cdot f_{2n} + f_n \cdot f_{2n+1} \therefore f_{3n} = f_{n-1}\cdot\left(f_{n+1}{}^2 - f_{n-1}{}^2\right) + f_n \cdot f_{2n+1} = f_{n-1}\cdot f_{n+1}{}^2 - f_{n-1}{}^3 + f_n \cdot f_{2n+1} =$

$= f_{n-1}\cdot f_{n+1}{}^2 - f_{n-1}{}^3 + f_n \cdot f_{2n+1} = f_{n-1}\cdot f_{n+1}{}^2 - f_{n-1}{}^3 + f_n \cdot\left(f_{n-1}\cdot f_{n+1} + f_n \cdot f_{n+2}\right) =$

$= f_{n-1}\cdot f_{n+1}{}^2 - f_{n-1}{}^3 + f_n \cdot f_{n-1}\cdot f_{n+1} + f_n \cdot f_n \cdot f_{n+2} = f_{n-1}\cdot f_{n+1}{}^2 - f_{n-1}{}^3 + f_n \cdot f_{n-1}\cdot f_{n+1} + f_n{}^2 \cdot (f_n + f_{n+1}) =$

$= f_n{}^3 - f_{n-1}{}^3 + f_{n-1}\cdot f_{n+1}{}^2 + f_n(f_{n-1} + f_n)\cdot f_{n+1} = f_n{}^3 - f_{n-1}{}^3 + f_{n-1}\cdot f_{n+1}{}^2 + f_n \cdot f_{n+1}\cdot f_{n+1} =$

$= f_n{}^3 - f_{n-1}{}^3 + f_{n-1}\cdot f_{n+1}{}^2 + f_n \cdot f_{n+1}{}^2 = f_n{}^3 - f_{n-1}{}^3 + (f_{n-1} + f_n)\cdot f_{n+1}{}^2 = f_n{}^3 - f_{n-1}{}^3 + f_{n+1}\cdot f_{n+1}{}^2 =$

$= f_n{}^3 - f_{n-1}{}^3 + f_{n+1}{}^3 \therefore f_{3n} = f_n{}^3 - f_{n-1}{}^3 + f_{n+1}{}^3$

Segue como conseqüência a seguinte identidade: $f_{3n} = f_{n+1}{}^3 + f_n{}^3 - f_{n-1}{}^3$. Enunciamos na sequencia o seguinte corolário que exibe outras propriedades da sequencia de Fibonacci.

O teorema 3 explicita uma utilidade extremamente poderosa, segundo Honsberger (1985, p. 102), de modo que achamos profícuo destacar uma pequena relação com matrizes e determinantes. Observando a matriz $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_2 & f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix}$ como definiremos mais adiante. Notamos que $Q^2 = QQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{2+1} & f_2 \\ f_2 & f_1 \end{pmatrix}$. De modo semelhante temos $Q^3 = Q^2 Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{3+1} & f_3 \\ f_3 & f_2 \end{pmatrix}$. Mais uma vez calculamos $Q^4 = Q^3 Q = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{4+1} & f_4 \\ f_4 & f_3 \end{pmatrix}$. Por indução matemática, escrevemos $Q^n = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}$. Teremos, pois: $Q^{n+1} = Q^n \cdot Q = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n+1} + f_n & f_{n+1} \\ f_n + f_{n-1} & f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{(n+1)+1} & f_{n+1} \\ f_{n+1} & f_{(n+1)-1} \end{pmatrix}$.

Segue o resultado. Agora, tomamos duas matrizes quadradas, tal que: $\det(A\cdot B) = \det(A)\cdot\det(B)$. E mais uma vez por indução, obtemos a relação $\det(Q\cdot Q) = \det(Q)\cdot\det(Q) \therefore \det(Q^2) = \left[\det(Q)\right]^2$. Ou seja, por indução podemos afirmar que $\det(Q^n) = \left[\det(Q)\right]^n$ para $n \in \mathbb{N}$.

De modo pitoresco, a partir da relação $\det(Q^n) = \left[\det(Q)\right]^n$, obteremos que: $\det(Q^n) = \left[\det(Q)\right]^n \leftrightarrow \det\left(\begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}\right) =$

$= \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]^n \leftrightarrow f_{n+1}\cdot f_{n-1} - f_n{}^2 = (-1)^n$

, ou ainda, escrevemos *umas das mais úteis identidades* (HONSBERGER,1985, p. 107) descrita por $f_{n+1}\cdot f_{n-1} - f_n{}^2 = (-1)^n$ para $n \in \mathbb{N}$.

Honsberger (1985, p. 107) discute ainda a seguinte igualdade $Q^{n+1}\cdot Q^n = Q^{2n+1} \leftrightarrow \begin{pmatrix} f_{n+2} & f_{n+1} \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{2n+2} & f_{2n+1} \\ f_{2n+1} & f_{2n} \end{pmatrix}$. Preservando o comporta-

mento da matriz $Q=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, de modo geral, consideramos o seguinte conjunto $IF:=\left\{\begin{pmatrix}l_1 & l_2\\ l_3 & l_4\end{pmatrix}|\, l_i\in\{0,1\}\right\}$. Por definição, $Q=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\in IF$ e possui propriedades envolvendo a sequência de Fibonacci. Mas podemos verificar, de modo análogo, que $Q'=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\in IF$ e apresenta as relações com a sequência. De fato, $Q'^2=Q'Q'=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_1 & f_2\\ f_2 & f_{2+1}\end{pmatrix}$, $Q'^3=Q'^2Q'=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_2 & f_3\\ f_3 & f_{3+1}\end{pmatrix}$, segue que $Q'^n=\begin{pmatrix}f_n & f_{n+1}\\ f_{n+1} & f_{n+2}\end{pmatrix}$. O trabalho de Heimer (1967) traz intrigantes propriedades desta sequência. Nesse sentido, o autor considera a descrição da mesma no campo dos reais. Para tanto, tomemos $x=0, x=1, F_x=x\therefore x=n+r\,(r<1, n\in IN)$. Daí, podemos descrever $F_r=r, F_{1+r}=1, F_{2+r}=1+r, F_{3+r}=2+r, F_{4+r}=3+2r, ..., F_{n+r}=F_n+F_{n-1}\cdot r\therefore F_x=F_n+F_{n-1}\cdot r$.

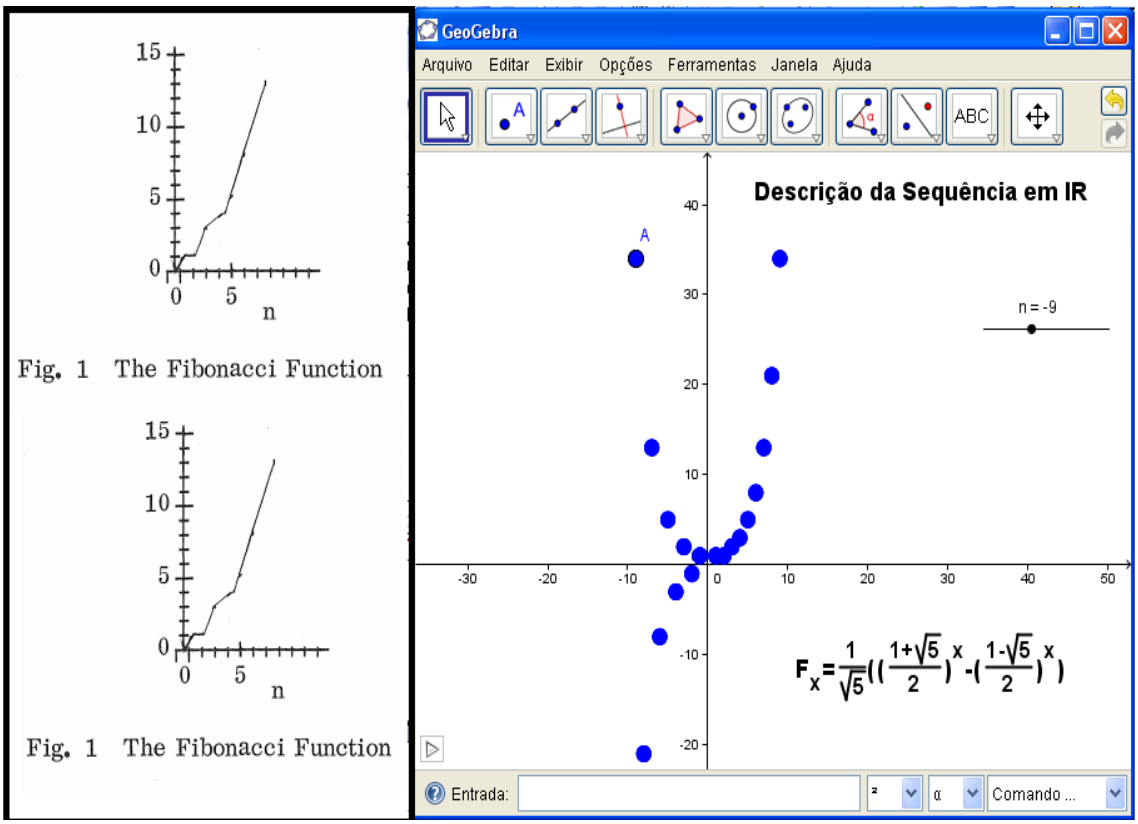


Figura 2. O artigo de Heimer (1967) traz a descrição da função de fibonacci definida no campo dos reais positivos

Reparemos, todavia, que na figura 2, indicamos do lado esquerdo, o desenho discutido por Heimer (1967). Na mesma figura, do lado direito, indicamos o comportamento da mesma sequência em IR. O caráter surpreendente é que para valores IR^- não temos o gráfico de uma função. Na próxima seção, detalharemos essas e outras propriedades assinaladas no gráfico.

A sequência de Fibonacci definida no campo dos inteiros $\left(f_n\right)_{n\in Z}$

Heimer (1967, p. 483) em suas conclusões, sublinha que "o método particular de expressar a função de Fibonacci detém o potencial de uma rica área de descoberta. Possibilidades de verificação e de reformulação de todas as fórmulas de Fibonacci.". Nesse sentido, registramos o trabalho de Alves & Borges Neto (2011) o processo analítico da extensão da sequência em Z. Para tanto, nesse artigo, os autores consideram que $f_0 = 0$ e devem fornecem a justificativa $f_{1+1} = f_1 + f_{1-1}$ p/n=1, segue que $f_2 = f_1 + f_0 \therefore f_0 = f_2 - f_1 = 1-1 = 0$. Podemos, pois, concluir também que $f_{0+1} = f_0 + f_{0-1}$ p/n=1$\therefore f_1 = f_0 + f_{-1} \leftrightarrow f_{-1} = f_1 - f_0 = 1-0 = 1$.

Dando prosseguimento a esta manipulações algébrico-aritméticas, podemos inferir ainda que: $f_{-1+1} = f_{-1} + f_{-1-1}$ p/n=$-1 \therefore f_0 = f_{-1} + f_{-2}$, segue que $f_{-2} = f_0 - f_{-1} = 0-1 = -1$. Prosseguindo, com base em um raciocínio indutivo, eles exibem as seguintes relações $\begin{cases} f_{-3} = 2 = f_{-1} - f_{-2} \\ f_{-4} = -3 = f_{-2} - f_{-3} \\ f_{-5} = 5 = f_{-3} - f_{-4} \\ f_{-6} = -8 = f_{-4} - f_{-5} \\ f_{-7} = 13 \\ ???? \end{cases}$. Mas, agora, podemos relacionar os elementos da seguinte maneira $\begin{cases} f_{-1} = 1 = (-1)^{1+1} \cdot f_1 \text{ p/ n=1} \\ f_{-2} = -1 = (-1)^{2+1} \cdot f_2 \text{ p/ n=2} \\ f_{-3} = 2 = (-1)^{3+1} \cdot f_3 \text{ p/ n=3} \\ f_{-4} = -3 = (-1)^{4+1} \cdot f_4 \text{ p/ n=3} \end{cases} \begin{cases} f_{-5} = 5 = (-1)^{5+1} \cdot f_5 \\ f_{-6} = -8 = (-1)^{6+1} \cdot f_6 \\ f_{-7} = 13 = (-1)^{7+1} \cdot f_7 \\ \ldots \end{cases}$.

Mas assim, conjecturamos a seguinte propriedade $f_{-n} = (-1)^{n+1} \cdot f_n$. Podemos agora comparar os dados numéricos indicados há pouco com o comportamento gráfico-geométrico da figura 2. Do lado direito (IR^+) divisamos o gráfico de uma função, entretanto, para o lado esquerdo (IR^-) não registramos o comportamento de função, no caso em que desejássemos ampliar seus domínios dos naturais para o campo dos reais.

Ora, podemos demonstrar ainda por *Indução Matemática* que $f_{-n} = (-1)^{n+1} \cdot f_n$, $\forall n \geq 0$. Para tanto, definiremos o conjunto $\wp := \left\{n \in \square \mid f_{-n} = (-1)^{n+1} \cdot f_n\right\}$ ou o conjunto $\wp := \left\{-n \in \square \mid f_{-n} = (-1)^{n+1} \cdot f_n\right\}$ e já verificamos há pouco que $\{1, 2, 3..., 7\} \subset \wp$. Usando a *hipótese indutiva* $n \in \wp$, nos resta verificar que $n+1 \in \wp$. Mas o método de demonstração por indução nos assegura que se pode escrever $f_{-(n-1)} = (-1)^{(n-1)+1} \cdot f_{n-1} = (-1)^n \cdot f_{n-1}$.

Vejamos agora o comportamento de $f_{-(n+1)} = f_{-(n-1)} - f_{-n} = (-1)^n \cdot f_{n-1} - (-1)^{n+1} \cdot f_n = (-1)^n \cdot f_{n-1} + (-1)^n \cdot f_n = (-1)^n \cdot \left(f_{n-1} + f_n\right) = (-1)^n \cdot f_{n+1}$. Por fim, concluímos que $f_{-(n+1)} = (-1)^n \cdot f_{n+1} = (-1)(-1)(-1)^n \cdot f_{n+1} = (-1)^{(n+2)} \cdot f_{n+1}$.

Verificamos formalmente que $f_{-2n} = -f_{2n} \leftrightarrow f_{-(2n+1)} = f_{2n+1}$ para $n \in \square$. Contudo, as relações estabelecidas na fase anterior, sugerem a relação de uma *sequência recursiva* $f_{-(n-1)} - f_{-n} = f_{-(n+1)} \leftrightarrow f_{-(n-1)} = f_{-n} + f_{-(n+1)}$ para $n \in \square$ ou ainda. $f_{-(n-1)} = f_{-n} + f_{-(n+1)}$. Notamos ainda que as relações $f_{-2n} = -f_{2n}$ e $f_{-(2n+1)} = f_{2n+1}$ para $n \in \square$ de algum modo se relacionam. Neste

sentido, vamos admitir provisoriamente que seja válida a seguinte relação $f_{2n+1} = f_{-(2n+1)}$. Mas desde que, a partir da relação de recorrência, escrevemos, substituindo 'n' por '2n', que $f_{-(2n-1)}=f_{-(2n)} + f_{-(2n+1)} \overset{usando}{\underset{hipótese}{\leftrightarrow}} f_{(2n-1)}=f_{-(2n)} + f_{(2n+1)} \therefore f_{(2n-1)} - f_{(2n+1)} = f_{-(2n)}$ (c).

Por outro lado, usando a relação clássica da *sequencia de fibonacci*, consideramos $f_{2n+1} = f_{2n} + f_{2n-1} \therefore f_{2n-1} - f_{2n+1} = -f_{2n}$ (d). Segue que de (c) e de (d) $-f_{2n} = f_{(2n-1)} - f_{(2n+1)} = f_{-(2n)} \leftrightarrow f_{-2n} = -f_{2n}$. De modo análogo, assumimos provisoriamente que $f_{-2n} = -f_{2n}$ e verificamos que $f_{-(2n+1)} = f_{2n+1}$. De fato, substituindo (2n-1) na fórmula $f_{-(n-1)}=f_{-n} + f_{-(n+1)}$, obtém-se que $f_{-(2n-1-1)}=f_{-(2n-1)} + f_{-(2n-1+1)} \therefore f_{-(2n-2)}=f_{-(2n-1)} + f_{-2n}$. Agora, escrevendo $-f_{(2n-2)} + f_{2n} \overset{usando}{\underset{hipótese}{=}} f_{-(2n-2)} - f_{-2n}=f_{-(2n-1)}$. Segue que $f_{-(2n-1)} = f_{2n} - f_{(2n-2)}$, e usando a lei de recorrência clássica, estabelecemos no final que $f_{2n-2} + f_{2n-1} = f_{2n} \therefore f_{2n-1} = f_{2n} - f_{2n-2}$. Consequentemente, inferimos que $f_{2n-1} = f_{2n} - f_{2n-2} = f_{-(2n-1)} \leftrightarrow f_{2n-1} = f_{-(2n-1)}$.

A partir deste raciocínio, evitamos a aplicação do modelo de *Indução Matemática* aos índices de . Reparemos, todavia, que tais relações não modelizam e/ou descrevem o processo de geração de coelhos. Na próxima seção discutiremos outros aspectos relacionados com esta sequência.

Generalização e propriedades

No artigo de Horadam & Shannon (1988) deparamos a descrição de uma sequência recorrente generalizada que guarda próximas relações com a Fibonacci. Nesse sentido, os autores assumem $\{H_n\}_{n\in Z}$ e admitem que $H_{n+2} = H_{n+1} + H_n$, com $H_0 = 2b$ e $H_1 = a + b(a, b \in Z)$. Horadam & Shannon (1988, p. 4) explicam que nos casos em que $a = 1$ e b=0 $\therefore f_n$ (*fibonacci*) e se $a = 0$ e b=1 $\therefore L_n$ (*sequência de Lucas*). Os autores consideram $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\alpha}$ que são as raízes da equação $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ largamente discutida na literatura (DUNLAP, 2003; EVES, 1969; KRANTZ, 2006; POSAMENTIER & LEHMANN, 2007; RIBENBOIM, 1995; WELLS, 2005).

Assinalamos outra maneira de escrever a fórmula de Binet, indicada na introdução, do seguinte modo $f_n = \left(\alpha^n - \beta^n\right)/\sqrt{5}$ (HORADAM, 1961, p. 455) bem como a fórmula equivalente, relacionada com a sequência de Lucas $L_n = \left(\alpha^n + \beta^n\right)$.

Reparemos, com origem na relação indicada $H_{n+2} = H_{n+1} + H_n$, e com as condições $H_1 = p$ e $H_2 = p + q$, onde $p, q \in Z$, exibimos a seguinte sequência generalizada (HORADAM, 1961, p. 456): $(p, p+q, 2p+q, 3p+2q, 5p+3q, 8p+5q, 13p+8q, \ldots)$.

Horadam (1961, p. 456) fornece a seguinte relação generalizada de Binet, descrita por $H_n = \frac{1}{2\sqrt{5}}\left(l \cdot \alpha^n - m \cdot \beta^n\right)$, em que $l = 2(p - q \cdot \beta)$ w m=$2(p - q \cdot \alpha)$. Portanto, poderemos escrever $l + m = 2(2p - q), l - m = 2q\sqrt{5}$.

Em outro artigo de Horadam (1986), deparamos a descrição da sequência de tribonacci. O nome

sugere a construção de uma sequência $(P_n)_{n\in IN}$, pela seguinte relação de recorrência $P_{n+3} = P_{n+2} + P_{n+1} + P_n$, com $P_0 = 0, P_1 = 1, P_2 = 1$. Com base nessas relações iniciais, podemos exibir as seguintes relações da tabela abaixo. Observando a listagem abaixo fornecida por esses autores, é natural questionarmos as possíveis propriedades da sequência de Tribonacci.

Tabela 1: Valores numéricos fornecidos por Horadam (1986) para a sequência tribonacci.

P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}	P_{11}
0	1	1	2	4	7	13	24	44	81	149	274

Fonte: Horadam (1986, p. 223).

Reparemos ainda que, quando tomamos na expressão $P_{n+3} = P_{n+2} + P_{n+1} + P_n = z + y + x$ podemos determinar a equação de uma cúbica descrita por $x^3 + 2y^3 + z^3 + 2x^2y + 2xy^2 - 2yz^2 + x^2z - xz^2 - 2xyz = 1$. A pormenorização envolvida na obtenção dessa equação envolve argumentos sofisticados que não tencionamos discutir aqui, mas, que, podem ser encontrados em Horadam (1982, p. 166). Na figura 3, empregamos o *software Maple* na descrição dos objetos abaixo.

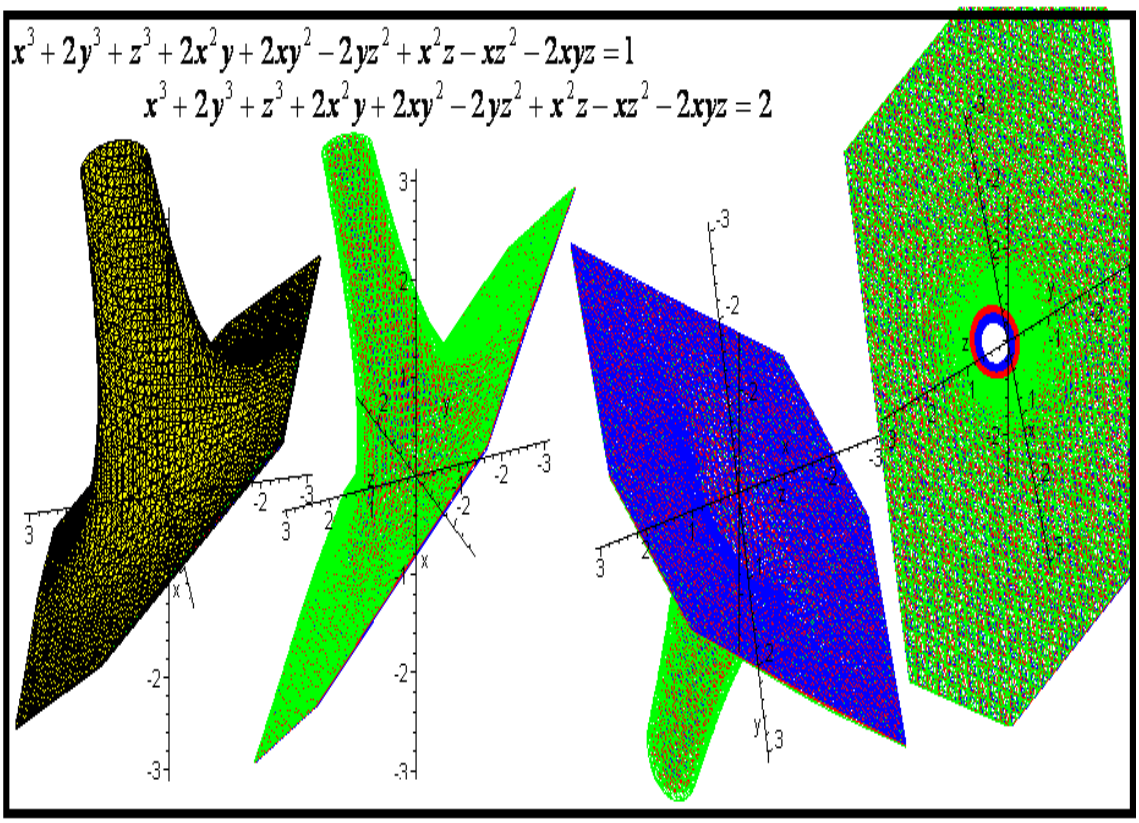


Figura 3. Descrição de superfícies de nível oriundas de relações generalizadas de sequência de fibonacci no espaço IR^3

A partir do seguinte determinante da matriz $\begin{vmatrix} P_{n+2} & P_{n+1} & P_n \\ P_{n+1} & P_n & P_{n-1} \\ P_n & P_{n-1} & P_{n-2} \end{vmatrix} = -1$ podemos obter a

equação anterior $x^3+2y^3+z^3+2x^2y+2xy^2-2yz^2+x^2z-xz^2-2xyz=1$ que define uma superfície de nível no espaço IR^3. Ou ainda no caso geral $x^3+2y^3+z^3+2x^2y+2xy^2-2yz^2+x^2z-xz^2-2xyz=k\left(k\in IR\right)$.

O mesmo processo matemático pode ser generalizado, quando passamos a considerar a sequência Tetranacci, que definiremos agora por: $Q_{n+4}=Q_{n+3}+Q_{n+2}+Q_{n+1}+Q_n$. Horadam (1986, p. 225) exibe as seguintes relações na tabela 2:

Tabela 2: Valores numéricos fornecidos por Horadam (1986) para a sequência tetranacci.

Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	Q_6	Q_7	Q_8	Q_9	Q_{10}	Q_{11}	Q_{12}
1	1	2	4	8	15	29	56	108	208	401	773

Fonte: Horadam (1986, p. 225).

Vale observar que o processo de obtenção de equações pode ser generalizado, ao considerarmos as relações $Q_{n+4}=Q_{n+3}+Q_{n+2}+Q_{n+1}+Q_n=x+y+z+t$, todavia, o uma matriz de ordem 4×4, definida agora pela sequência tetranacci, determinará um objeto no espaço IR^4, imperceptível aos olhos humanos.

Com base na sequência de fibonacci e da fequência generalizada de fibonacci, registramos na literatura a descrição dos quatérnios de fibonacci e os quatérnios generalizados de fibonacci, com base nas seguintes expressões:

$$\begin{cases} Q_n' = f_n + f_{n+1}\cdot i + f_{n+2}\cdot j + f_{n+3}\cdot k \\ P_n' = H_n + H_{n+1}\cdot i + H_{n+2}\cdot j + H_{n+3}\cdot k \\ com\ \mathrm{j}\cdot\mathrm{k} = -k\cdot j = i, k\cdot i = -i\cdot k = j \end{cases}.$$

Após definirmos as sequências $\left(f_n\right)_{n\in Z}, \left(P_n\right)_{n\in IN}, \left(Q_n\right)_{n\in IN}$. Ocorre, de modo natural o questionamento de definirmos demais sequências numéricas que preservam tais relações e produzem generalidades que se aproximam do comportamento da demais propriedades extraídas da sequência original de fibonacci $\left(f_n\right)_{n\in IN}$.

A resposta é sim. Daí, surgem terminologias que encontramos em vários artigos, do tipo pentanacci, hexanacci, heptanacci, octonacci, etc. No artigo de Bicknell (1970), por exemplo, deparamos os polinômios de fibonacci, simbolizada por $\left(F_n(x)\right)_{n\in IN}$. A autora estabelece as seguintes definições, a partir da introdução de uma variável: $F_1(x)=1, F_2(x)=x$ e $\mathrm{F}_{n+1}(x)=x\cdot F_n(x)+F_{n-1}(x)$.

Vale observar que, nos casos particulares, em que temos $x=1$ e $\mathrm{F_n}(1)=f_n$ que descreve a sequência de fibonacci, como caso particular. De acordo com tal lei recorrência, podemos escrever:

$$\begin{cases} F_1(x)=1 \\ F_2(x)=x \\ F_3(x)=x^2+1 \\ F_4(x)=x^3+2x \\ F_5(x)=x^4+3x^2+1 \\ F_6(x)=x^5+4x^3+3x \\ F_7(x)=x^6+5x^4+6x^2+1 \\ F_8(x)=x^7+6x^5+10x^3+4x \\ F_9(x)=x^8+7x^6+15x^4+10x^2+1 \\ F_{10}(x)=x^9+8x^7+21x^5+20x^3+5x \\ \vdots \end{cases} \quad \therefore \text{ Sequência de polinômios de fibonacci}$$

Na figura 4, evidenciamos o comportamento desta família de funções polinomiais. Divisamos duas vizinhanças abertas no plano, e nelas a família $\left(F_{2n}(x)\right)_{n\in IN}$ tende a convergir no ponto $(0,0)$. Enquanto que família $\left(F_{2n+1}(x)\right)_{n\in IN}$ tende a convergir no ponto $(0,1)$.

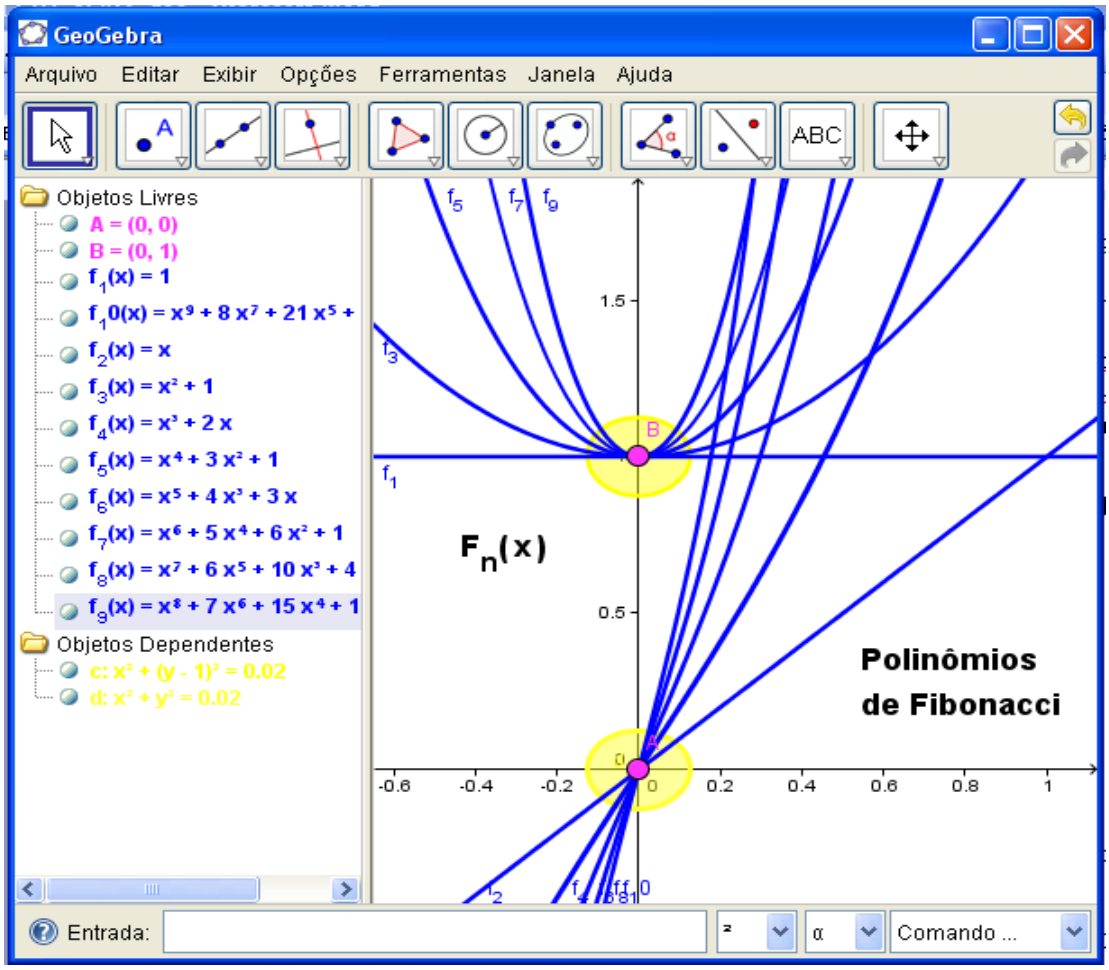


Figura 4. Descrição gráfico-geométrica da sequência polinomial de fibonacci

Alves & Borges Neto (2010) discutem implicações para o ensino de sequência de Lucas. Com o raciocínio semelhante, Bicknell (1970, p. 409) define $\left(L_n(x)\right)$ a sequência polinomial de Lucas, por intermédio das seguintes relações:

$$\begin{cases} L_0(x) = 2 \text{ e } \mathrm{L}_1(x) = x \\ L_{n+1}(x) = x \cdot L_n(x) + L_{n-1}(x) \end{cases}.$$

A autora assina a invariância de propriedades algébricas preservadas. De fato, reparemos que $L_n(x) = F_{n+1}(x) + F_{n-1}(x) = x \cdot F_n(x) + 2 \cdot F_{n-1}(x)$. Trazemos, na figura 5, trazemos a listagem preliminar sugerida por Bicknell (1970). Vale registrar a mudança conceitual relativa as duas ultimas definições. Com efeito, enquanto nas sequências anteriores, descrevemos e definimos pontos no plano IR^2 (ver figura 2). Os últimos objetos denotados por $\left(F_n(x)\right)_{n\in IN}$ e $\left(L_n(x)\right)_{n\in IN}$ descrevemos famílias de funções polinomiais.

Na figura 5, apresentamos uma lista particular, descrita no artigo de Bicknell (1970, p. 417), sem nenhum amparo computacional. Vale comparar as figuras 4 e 5 e divisar propriedades semelhantes. Mais uma vez, a família $\left(L_{2n}(x)\right)_{n\in IN}$ tende a convergir no ponto $(0,0)$. Enquanto que família $\left(L_{2n+1}(x)\right)_{n\in IN}$ tende a convergir no ponto $(0,2)$. Seus elementos se afastam, na medida em que nos afastamos dessas vizinhanças. Destacamos duas vizinhanças centradas nesses pontos e nelas observamos o caráter da aproximação ou convergência dessas duas subfamílias.

$$\begin{aligned}
\mathrm{L}_1(\mathrm{x}) &= \mathrm{x} \\
\mathrm{L}_2(\mathrm{x}) &= \mathrm{x}^2 + 2 \\
\mathrm{L}_3(\mathrm{x}) &= \mathrm{x}^2 + 3\mathrm{x} \\
\mathrm{L}_4(\mathrm{x}) &= \mathrm{x}^4 + 4\mathrm{x}^2 + 2 \\
\mathrm{L}_5(\mathrm{x}) &= \mathrm{x}^5 + 5\mathrm{x}^3 + 5\mathrm{x} \\
\mathrm{L}_6(\mathrm{x}) &= \mathrm{x}^6 + 6\mathrm{x}^4 + 9\mathrm{x}^2 + 2 \\
\mathrm{L}_7(\mathrm{x}) &= \mathrm{x}^7 + 7\mathrm{x}^5 + 14\mathrm{x}^3 + 7\mathrm{x} \\
\mathrm{L}_8(\mathrm{x}) &= \mathrm{x}^8 + 8\mathrm{x}^6 + 20\mathrm{x}^4 + 16\mathrm{x}^2 + 2 \\
\mathrm{L}_9(\mathrm{x}) &= \mathrm{x}^9 + 9\mathrm{x}^7 + 27\mathrm{x}^5 + 30\mathrm{x}^3 + 9\mathrm{x} \\
\mathrm{L}_{10}(\mathrm{x}) &= \mathrm{x}^{10} + 10\mathrm{x}^8 + 35\mathrm{x}^6 + 50\mathrm{x}^4 + 25\mathrm{x}^2 + 2 \ .
\end{aligned}$$

Figura 5. Descrição algébrica da sequência polinomial de Lucas

A descrição da sequência polinomial de Lucas por Bicknell (1970) permite uma interpretação gráfico-geométrica. Na figura 6, por intermédio de comandos básicos do *software*, divisamos seu comportamento. Cabe indagar as propriedades matemáticas invariantes e que podem relacionar a sequência numérica com a polinomial que apresentamos.

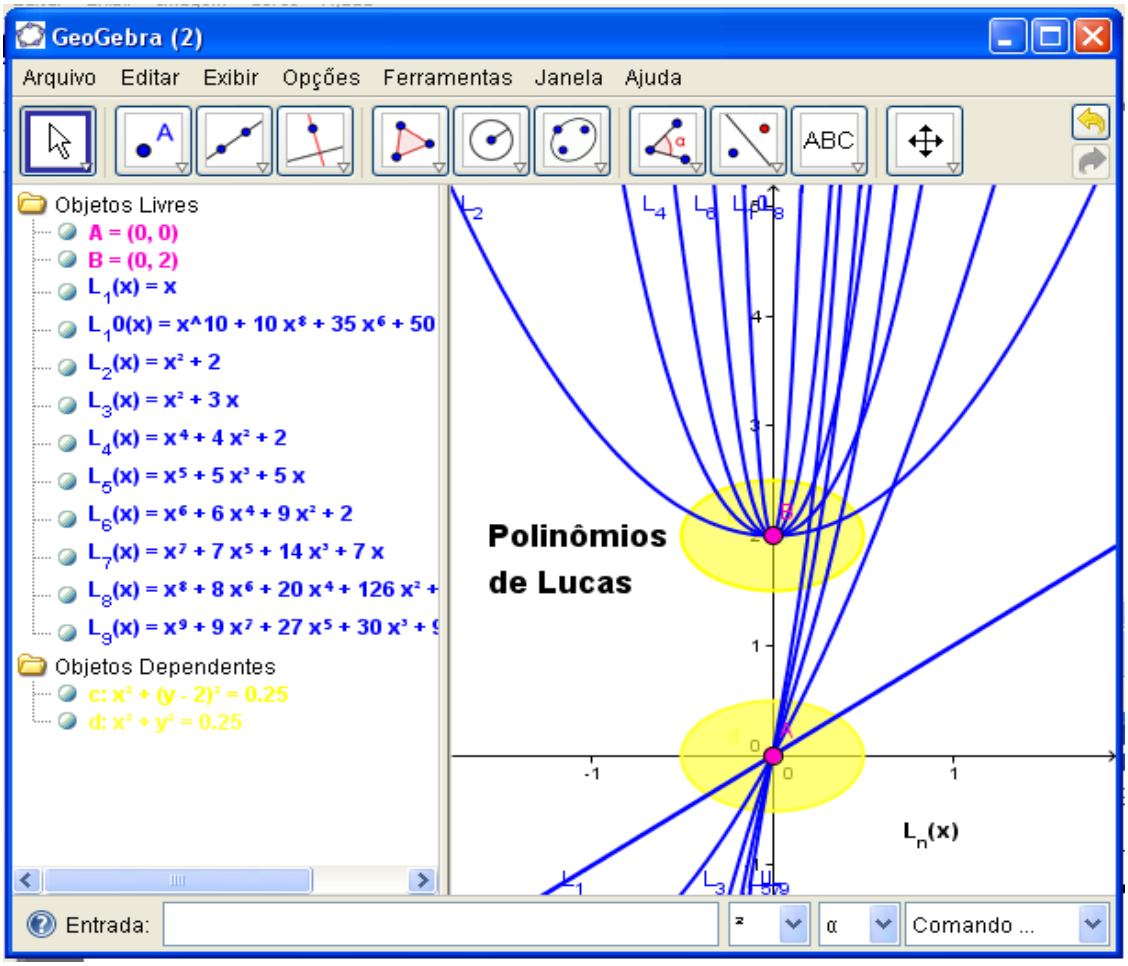
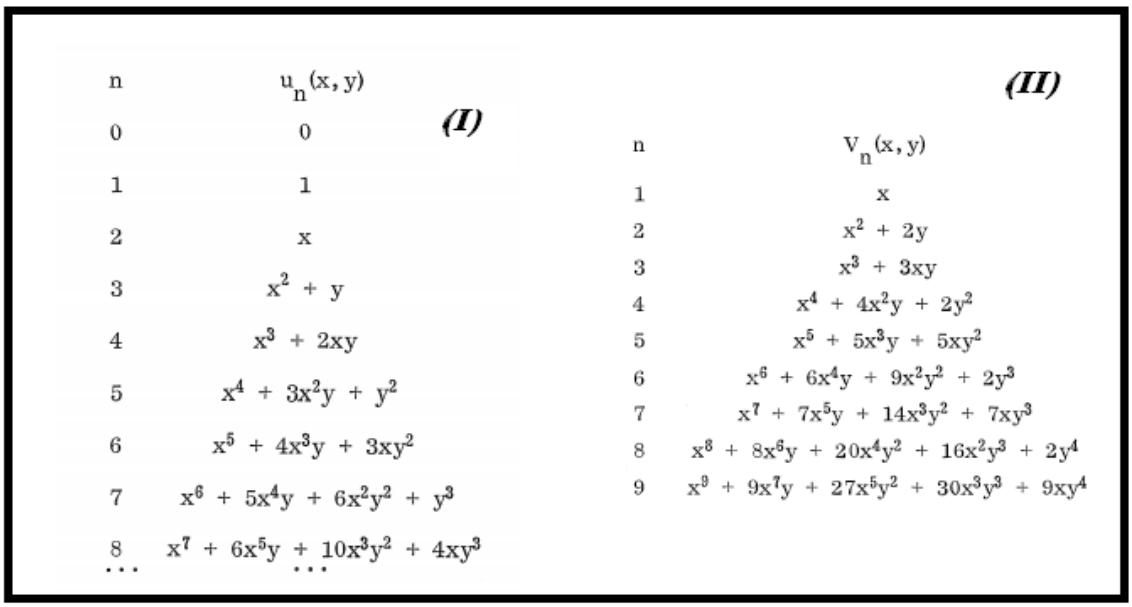


Figura 6. Descrição gráfico-geométrica da sequência polinomial de lucas

Hoggat & Long (1974, p. 113) definem ainda as seguintes relações de recursão: $\begin{cases} u_0(x,y)=0 \text{ e } u_1(x,y)=1 \\ u_{n+2}(x,y)=x\cdot u_{n+1}(x,y)+y\cdot u_n(x,y) \end{cases}$. A partir destas relações, esses autores produzem a listagem que mostramos na figura 7. Há época, esses autores não dispunham de tecnologia que os permitisse visualizar e explorar as propriedades particulares dos seguintes elementos: $u_4(x,y)=x^3+2xy$, $u_5(x,y)=x^4+3x^2y+y^2$, $u_6(x,y)=x^5+4x^3y+3x^2$, $u_7(x,y)=x^6+5x^4y+6x^2y^2+y^3$ e $u_8(x,y)=x^7+6x^5y+10x^3y^2+4xy^3$.

Com base em um procedimento semelhante, Hoggat & Gergum (1974, p. 95) descrevem as seguintes relações de recursão $\begin{cases} v_0(x,y)=0 \text{ e } v_1(x,y)=1 \\ v_{n+2}(x,y)=x\cdot v_{n+1}(x,y)+y\cdot v_n(x,y) \end{cases}$. Em seguida, exibem alguns dos primeiros termos da sequência $\left(v_n(x,y)\right)_{n\in IN}$. Na figura 7-I, apresentamos os membros iniciais enfatizados no artigo de Hoggat & Long (1974). Enquanto que na figura 7-II mostramos os membros iniciais determinados por Hoggat & Gergum (1974) em seu escrito. Vale observar que, com o amparo da tecnologia (*CAS Maple*), os membros listados na figura 7 podem ser interpretados como superfícies descritas no espaço IR^3, bem como, com o recurso no *software Geogebra*, os descrevemos ainda como curvas de nível no espaço IR^2 (ver fig. 9).



n	$u_n(x,y)$
0	0
1	1
2	x
3	$x^2 + y$
4	$x^3 + 2xy$
5	$x^4 + 3x^2y + y^2$
6	$x^5 + 4x^3y + 3xy^2$
7	$x^6 + 5x^4y + 6x^2y^2 + y^3$
8	$x^7 + 6x^5y + 10x^3y^2 + 4xy^3$
...	...

(I)

(II)

n	$V_n(x,y)$
1	x
2	$x^2 + 2y$
3	$x^3 + 3xy$
4	$x^4 + 4x^2y + 2y^2$
5	$x^5 + 5x^3y + 5xy^2$
6	$x^6 + 6x^4y + 9x^2y^2 + 2y^3$
7	$x^7 + 7x^5y + 14x^3y^2 + 7xy^3$
8	$x^8 + 8x^6y + 20x^4y^2 + 16x^2y^3 + 2y^4$
9	$x^9 + 9x^7y + 27x^5y^2 + 30x^3y^3 + 9xy^4$

Figura 7. Hoggat & Long (1974) e Hoggat & Bergum (1974) descrevem relações de recursão em duas variáveis

De modo similar ao que mostramos na figura 4. Divisamos uma região do plano relativa, a qual, os elementos convergem e uma região no plano (respectivamente do espaço) no qual seus membros tendem a se afastar. Vamos comparar, pois, as figuras 8, 9 e 10.

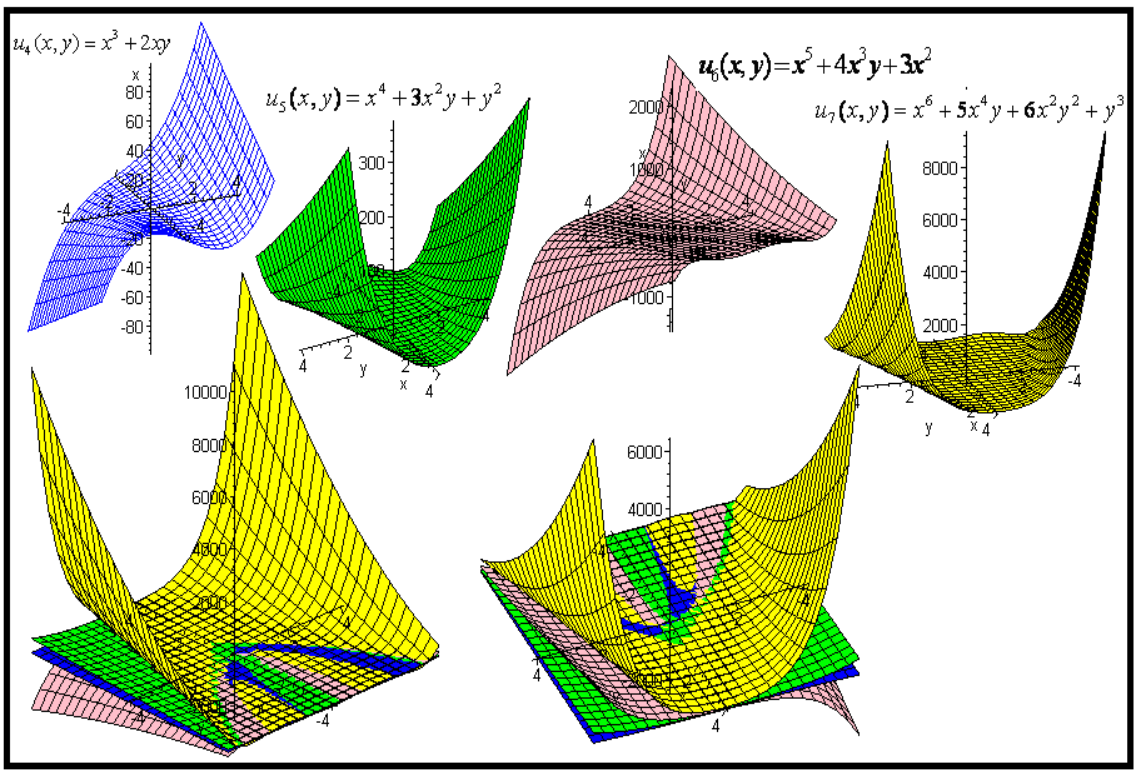


Figura 8. Descrição gráfico-geométrica de alguns membros da família definida por recursividade por Hoggat & Long (1974) como superfícies no espaço IR^3

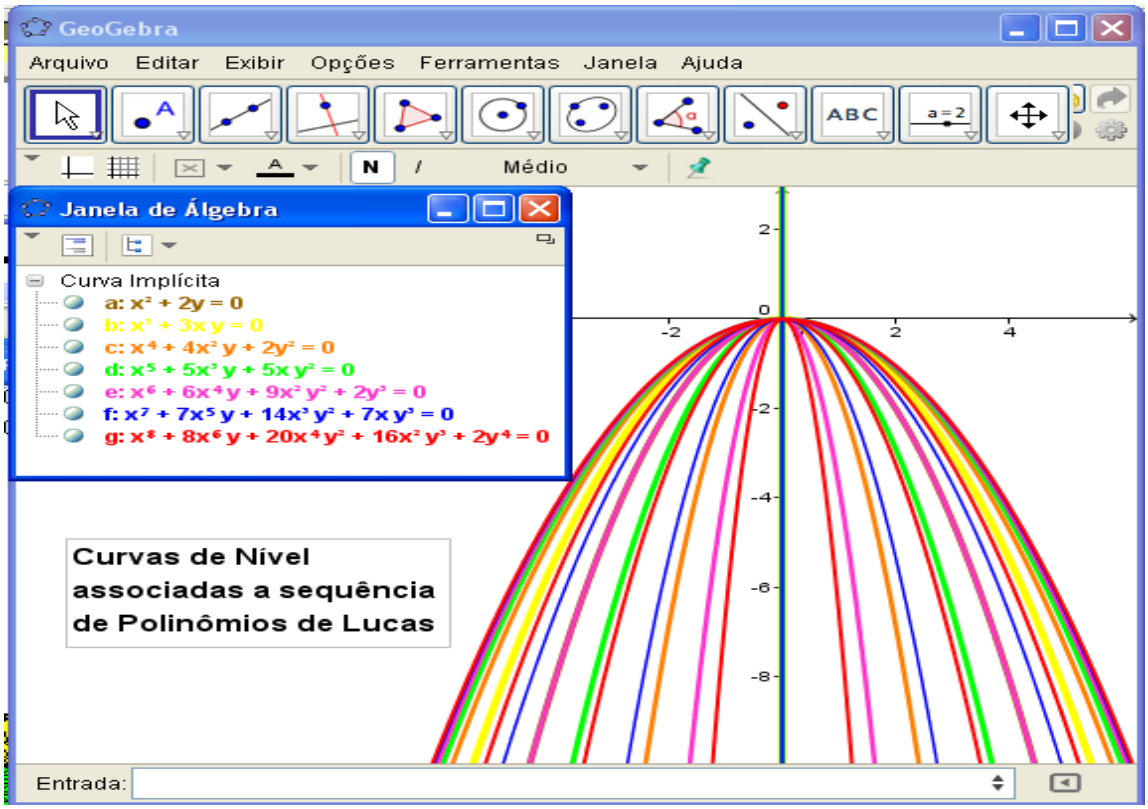


Figura 9. Descrição gráfico-geométrica da família definida por recursividade por Hoggat & Bergun (1974) como curvas de nível no plano

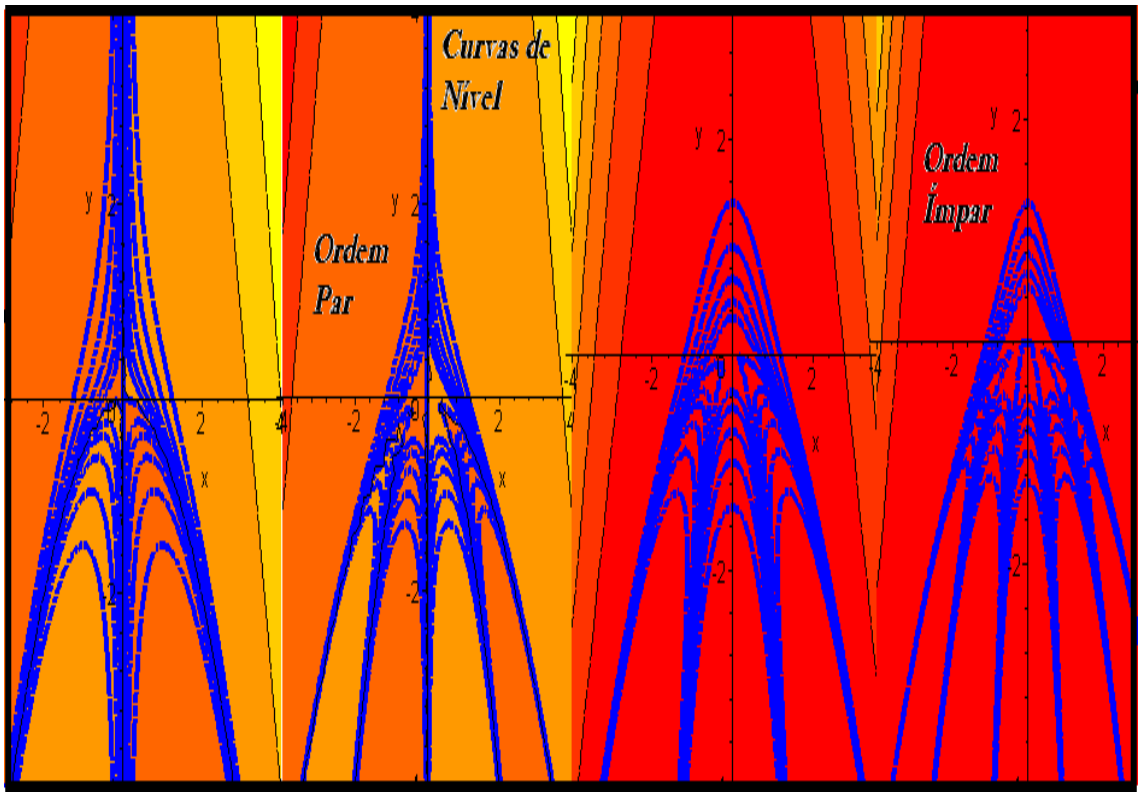


Figura 10. Padrão das curvas de nível evidenciado com o uso do *CAS Maple*

Na figura 10, registramos o padrão recorrente do comportamento da família de funções $\left(u_{2n}(x,y)\right)_{n\in IN}$ e da família $\left(u_{2n+1}(x,y)\right)_{n\in IN}$ quando visualizamos, com o auxílio do CAS Maple, o comportamento de suas curvas de nível. Patenteamos que as cores quentes (próximas do vermelho) indicam uma variação de cada função, se aproximando da origem. Do contrário, cores que tendem a variar para a cor amarela, indicam um comportamento de afastamento da origem. Tais padrões qualitativos são notados, graças ao uso da tecnologia.

Para concluir, vamos considerar a seguinte listagem: $\left(\sqrt{5}-1, 3-\sqrt{5}, 2\sqrt{5}-4, 7-3\sqrt{5}, 5\sqrt{5}-11, 18-8\sqrt{5}, \ldots\right)$. Tal sequência recebe o nome de sequência da razão áurea (PRUIT, 1967, p. 175). Podemos esperar que a mesma esteja relacionada, de modo íntimo, com a sequência de fibonacci?

Em respondendo de modo positivo a tal questionamento, Pruit (1967) exibe a seguinte relação $g_n = \dfrac{\left(\sqrt{5}-1\right)^n}{2^{n-1}}$. Com base nessa formulação, se torna fácil obter que $g_n = g_{n-2} - g_{n-1}$. Com afeito, escrevemos, pois, que:

$$g_{n-2} - g_{n-1} = \frac{\left(\sqrt{5}-1\right)^{n-2}}{2^{n-3}} - \frac{\left(\sqrt{5}-1\right)^{n-1}}{2^{n-2}} = \frac{2^2\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)^{n-2}}{2^{n-1}} - \frac{2\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)^{n-1}}{2^{n-1}} = \frac{2(\sqrt{5}-1)^{n-2}\left[2-\sqrt{5}+1\right]}{2^{n-1}}$$

$$= \frac{2(\sqrt{5}-1)^{n-2}(3-\sqrt{5})}{2^{n-1}} = \frac{2(\sqrt{5}-1)^{n-2}\dfrac{(\sqrt{5}-1)^2}{2}}{2^{n-1}} = \frac{\left(\sqrt{5}-1\right)^n}{2^{n-1}} = g_n$$

Pruit (1967, p. 176) também se interessa pela extensão dessa sequência . Assim, declara a seguinte propriedade $g_n = (-1)^{n-1}\cdot a_n\sqrt{5} - b_n$, onde $a_n, b_n \in Z^+$. Vamos usar indução sobre $n \in IN$ e notar que:

$$g_{n+1} = g_n \cdot \left(\frac{\sqrt{5}-1}{1}\right) = \left((-1)^{n-1}\cdot a_n\sqrt{5} - b_n\right)\left(\frac{\sqrt{5}-1}{1}\right) = \frac{(-1)^{n-1}}{2}\left[5a_n - \sqrt{5}b_n - \sqrt{5}a_n + b_n\right] =$$

$$(-1)^n\left[\frac{(a_n+b_n)}{2}\sqrt{5} - \frac{(5a_n+b_n)}{2}\right] = (-1)^n\left[\underbrace{\frac{(a_n+b_n)}{2}}_{a_{n+1}}\sqrt{5} - \underbrace{\frac{(5a_n+b_n)}{2}}_{b_{n+1}}\right]$$

. Reparemos, todavia, que os elementos $a_{n+1} := \dfrac{(a_n+b_n)}{2}$ cumprem a seguinte condição $a_{n-1} + a_n = a_{n-1} + \dfrac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2} = \dfrac{3a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$ e também que $a_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2} = \dfrac{\dfrac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2} + \dfrac{5a_{n-1}+b_{n-1}}{2}}{2} = \dfrac{3a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$. Portanto, devemos ter que $a_{n-1} + a_n = \dfrac{3a_{n-1}+b_{n-1}}{2} = a_{n+1} \leftrightarrow a_n = f_n$ é um número de fibonacci.

Ou seja, os únicos inteiros que gozam da propriedade indicada por Pruit (1967) em $g_n = (-1)^{n-1}\cdot a_n\sqrt{5} - b_n$ são os números da sequência de Fibonacci.

Considerações finais

Nesse trabalho buscamos resgatar algumas propriedades e caracteres interessantes registrados na literatura científica entre as décadas de 60 e 90 e nos compêndios de História da Matemática, concernentes à sequência de fibonacci. Tal escolha foi determinante no sentido de atribuir outras possibilidades de interpretação e significação de objetos e qualidades que colocamos em destaque, apoiadas na visualização, graças à tecnologia.

Nesse sentido, com o *CAS Maple* e o *software Geogebra*, evidenciamos determinadas características inerentes as sequencias fibonacci extendida $(f_n)_{n\in Z}$, sequência de Lucas $(L_n)_{n\in Z}$, $(P_n)_{n\in IN}$ sequência de tribonacci, $(Q_n)_{n\in IN}$ sequência tetranacci, e outras, pouco discutidas na literatura, embora envolvam propriedades acessíveis para qualquer aluno de graduação.

Vale observar, ainda, a diversidade de propriedades e curiosidades apontadas pelos autores de livros de História da Matemática e de Matemática consultados nesse trabalho. Algumas dessas propriedades e teoremas foram enunciados e demonstrados na seção inicial, todavia, tais teoremas dão indícios de várias generalidades e que podemos extrair dessa sequência emblemática.

Referências

Alves, Francisco. R. V. & Borges Neto, Hermínio. A existência da sequência de fibonacci no campo dos inteiros: uma atividade de investigação apoiada nos pressupostos da sequência fedathi. Boletim Gepem, nº 59, pp. 135-140, 2011. Disponível em: < http://www.ufrrj.br/SEER/index.php?journal=gepem&page=article&op=view&path%5B%5D=647&path%5B%5D=581>

Alves, Francisco. R. V. & Borges Neto, Hermínio. Sequências de fibonacci e de Lucas: umaa aplicação da sequência fedathi. In: *Anais do IV HTEM*, pp. 1-10, 2010.

Bicknell, Marjorie. A primer for the Fibonacci Numbers. *The Fibonacci Quartely*. v. 8. nº 4, pp.407-421. 1970. Disponível em: < http://www.fq.math.ca/5-5.html>.

Burton, David. *Elementary Number Theory*. London: Allyn and Bacon Inc. 1980.

Estrada et al. *História da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta, 2000.

Eves, Howard. An introduction do the History of Mathematics. third edition. Holt, Rinehart & Winstron: London. 1969.

Eves, Howard. *Great Moments in Mathematics: before 1650*. New York: Mathematical Association of America, 1983.

Heimer, Richard. A general Fibonacci function. *The Fibonacci Quartely*. v. 5. nº 5, pp.481-484. 1967. Disponível em: < http://www.fq.math.ca/5-5.html>.

Hoggat, Verner & Long, Calvin. T. Divisibility Properties of Generalized Fibonacci Polynomials. *The Fibonacci Quartely*. v. 12. nº 2, pp.113-121. 1974. Disponível em: < http://www.fq.math.ca/Scanned/12-2/hoggatt1.pdf >.

Hoggat, Verner & Bergum, Gerald. E. Irreductibility and generalized Lucas Polynomials. *The Fibonacci Quartely*. v. 12. nº 1, pp.67-71. 1974. Disponível em: < http://www.fq.math.ca/Scanned/12-1/bergum.pdf >.

Horadam, A. F. A Generalized Fibonacci sequence. *American Mathematical Montly*. 68, Nº 5, may. pp. 455-459, 1961.

Horadam, A. F. A. Geometry of generalized Simpson formula. *The Fibonacci Quartely*. v. 28. nº 1, pp.3-14. 1988. Disponível em: <http://www.fq.math.ca/Scanned/20-2/horadam2.pdf>.

Horadam, A. F. & Shannon, A. G. Fibonacci and Lucas Curves. *The Fibonacci Quartely*. v. 2. nº 2, pp.164-168. 1982. Disponível em: < http://www.fq.math.ca/26-1.html>.

Horadam, A. F. Hypersuperfícies associated with simpson formula analogues. *The Fibonacci Quartely*. v. 24. nº 3, pp.221-227. 1986. Disponível em: < http://www.fq.math.ca/24-3.html >

Honsberger, Ross. Mathematical Gems III. In: *The Dolciane Mathematical Exposition*, New York: The Mathematical Association of America, 1985.

Kimberling, Clark. Fibonacci Hyperbolas. *The Fibonacci Quartely*. v. 28. nº 1, pp.22-28. 1990. Disponível em: < http://www.fq.math.ca/28-1.html>.

Koshy, Thomas. *Elementary Number Theory with application*. Boston: Elsevier. 2007.

Krantz, Steven. *An episodic History of Mathematics*. London: Springer. 2006. 483f.

Posamentier, Alfred. S. & Lehmann, Ingmar. *The fabulous fibonacci numbers*. New York Prometeus Book. 2007.

Pruit, Robert. Fibonnaci and Lucas numbers in the sequence of golden numbers. *The Fibonacci Quartely*. v. 5. nº 2, pp.221-227. 1967. Disponível em: < http://www.fq.math.ca/24-3.html >

Ribenboim, Paulo. *The new book of prime number records*. New York: Springer. 1995.

Vorobe´v, N. N. *Fibonacci Numbers*. New York: Pergamon Press, 1961.

Vorobe´v, N. N. *Números de Fibonacci*: *Leciones Populares de Matemática*. Moscou: Editora MIR, 1974.

Wells, David. *Prime Numbers: the mysterious figures in the Math*. New Jersey: John Wiley and Sons. Inc. 2005.

Copyright © 2013 Francisco Regis Vieira Alves. O autor concede licença não exclusiva, aos organizadores do VI HTEM, para publicar este documento no CD de trabalhos completos do evento. Qualquer outro uso é proibido sem o consentimento do autor.