UMA DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE EULER PARA POLIEDROS CONVEXOS VIA GEOMETRIA ESFÉRICA

Mateus do Nascimento

Universidade Federal de São João del Rei – UFSJ

mateusnascido@yahoo.com.br

Silvio Antônio Bueno Salgado

Universidade Federal de Alfenas – Campus Varginha

silvio.salgado@unifal-mg.edu.br

Apresentaremos uma demonstração do Teorema de Euler para poliedros convexos via Geometria Esférica. Começaremos estudando a necessidade de tal demonstração, haja vista a deficiência no ensino deste problema por parte dos materiais disponíveis para a Educação Básica. Trataremos historicamente o problema começando com Euler tentando provar o resultado por meio de ferramentas geométricas, o que seria impossível, uma vez que o mesmo só foi resolvido quase um século mais tarde por Poincaré com o desenvolvimento da Topologia. Nesse espaço de tempo Leibniz chega a encontrar um manuscrito de Descartes no qual se chegaria ao resultado, o que não foi feito. Acreditamos que os materiais disponíveis para a Educação Básica não trazem uma boa prova deste fato historicamente conhecido, por isso fomos motivados a buscar uma demonstração de fácil entendimento. Apresentaremos a demonstração feita por Adrien-Marie Legendre, por ser esta adequada ao ambiente de Educação Básica. Esta fórmula nos dá uma relação entre o número de faces, de vértices e de arestas de um poliedro convexo. Dessa forma, enxergamos também, que a mesma proposta possa ser aplicada em outros conteúdos, para que seja proporcionado um ensino de qualidade e incentivador da continuidade nos estudos. O artigo pertence ao grupo temático Integração da História da Matemática no ensino frente a novas Tecnologias.
Palavras-chaves: Teorema de Euler. Poliedros. Geometria esférica. Fórmula de Girard

INTRODUÇÃO

Após análise de vários materiais escritos para o ensino de Matemática na Educação básica, especificamente na parte dedicada à aprendizagem do Teorema de Euler para poliedros convexos, notou-se a carência de uma prova consistente e plausível de sua legitimidade.

Em geral, os livros didáticos do Ensino médio abordam este teorema com o nome de Relação de Euler para poliedros e o fazem apenas com a introdução de exemplos, afirmando, logo de imediato, que a mesma é válida para todo poliedro convexo com V vértices, F faces e A arestas.

Alguns livros analisados não comentam porque o número $V - A + F$ é igual a 2, alguns dizem que sempre é igual a dois, o que é um erro se o conceito de poliedro não ficar bem definido. Apenas para uma classe especial de poliedros temos que $V - A + F = 2$.

É costume chamarmos o número $V - A + F$ de característica de Euler-Poincaré do poliedro P denotada por $\chi(P)$. É fácil encontrarmos exemplos de poliedros em que $\chi(P) = -2$ ou $\chi(P) = 0$, por exemplo.

Neste trabalho apresentaremos uma demonstração do Teorema de Euler para poliedros convexos via Geometria Esférica. Tal demonstração foi obtida por A. M. Legendre com base na fórmula de Girard para a soma dos ângulos internos de um $triângulo\ esférico$. Acredita-se que essa demonstração seja de fácil entendimento pelos alunos e professores do Ensino Médio, permitindo um aprendizado sólido e veraz a respeito deste fato matemático.

BREVE HISTÓRICO DO TEOREMA DE EULER

O Teorema de Euler, descoberto em 1758, diz que se um poliedro tem V vértices, A arestas e F faces, então $V - A + F = 2$. O número $V - A + F = 2$ costuma ser chamado de Característica de Euler-Poincaré, denotado por $\chi(P)$.

Com relação a este tema, antes de Euler, há um manuscrito de Descartes, escrito por volta de 1639, que foi encontrado por Leibniz em 1675, onde há resultados que como consequência poderia obter-se a relação $V - A + F = 2$. Mas até onde se sabe, Descartes não o fez.

A demonstração mais divulgada dessa relação é creditada a Cauchy, porém ela é bastante limitada, uma vez que a mesma serve apenas para $poliedros\ convexos$ e $homeomorfos$ à esfera, conceitos que veremos com detalhes mais adiante.

O teorema de Euler faz parte da matriz curricular da educação básica e é ensinado, geralmente, nas aulas de $Geometria\ Espacial$ no segundo ano do ensino médio. Ele torna-se bastante atraente ao ser ensinado devido a sua simplicidade e facilidade de ilustração através de exemplos palpáveis aos alunos. Considere por exemplo um tetraedro, figura tridimensional, na qual há quatro vértices, seis arestas e quatro faces, ou um cubo, também tridimensional, porém com oito vértices, doze arestas e seis faces, ou ainda, um dodecaedro, também tridimensional, com vinte vértices, trinta arestas e doze faces. Nos três casos, temos: $V - A + F = 2$.

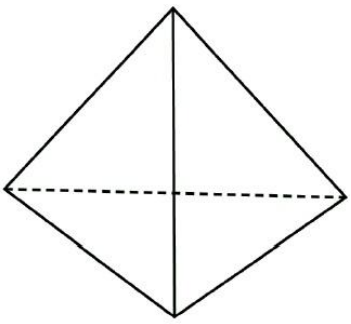


Figura 01: Tetraedro

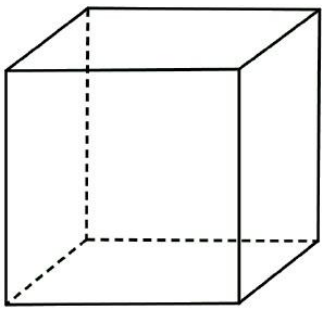


Figura 02: Cubo

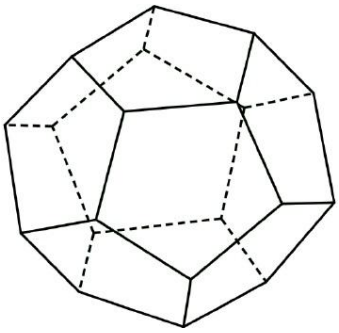


Figura 03: Dodecaedro

Euler enganou-se ao generalizar a fórmula $V - A + F = 2$ para qualquer poliedro, pois não é difícil encontrarmos exemplos em que $V - A + F \neq 2$. A figura 4, logo a seguir, exibe um exemplo onde isso ocorre. Note que $V - A + F = 16 - 32 - 16 = 0 \neq 2$.

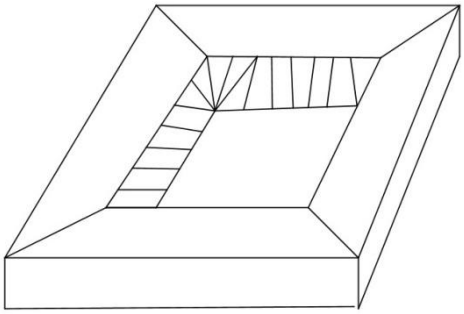


Figura 04

Uma saída para esse impasse é restringir classes de poliedros e investigar, uma por uma, qual é a sua característica, que pode ser bem trabalhoso.

Então nos perguntamos: não há uma maneira mais econômica e concisa de fazermos isto? A resposta é sim.

Segundo Lima, a discussão sobre o teorema de Euler durou mais de um século, sendo encerrada por Poincaré, em 1893 com o desenvolvimento de uma área da Matemática chamada $Topologia\ algébrica$. Poincaré notou que o teorema de Euler não era um problema de Geometria, e sim, de Topologia, percebeu também que o número $V - A + F$ é um $invariante\ topológico$.

Para explicarmos $invariante\ topológico$ precisamos definir $homeomorfismo$. Dizemos que duas figuras, P e Q, são homeomorfas quando existe uma bijeção contínua, $f: P \longrightarrow Q$, cuja a inversa, $f^{-1}: Q \longrightarrow P$, também seja contínua (chamamos f de $homeomorfismo$ de P sobre Q).

Podemos entender $homeomorfismo$ de maneira intuitiva. Assuma que o poliedro seja feito de borracha infinitamente inflável, e uma vez feito isso, ele se transformará em outra figura. Para ilustrar tal transformação, imagine um tetraedro, feito com esta borracha, sendo inflado, espera-se que ele se transforme em uma esfera, assim como um cubo ou ainda um dodecaedro, ambos pelo mesmo processo, mas se fizermos o mesmo processo com o sólido da figura 4, ele se transformará em figura chamada toro (semelhante à uma câmara de ar de um pneu). De maneira formal, duas figuras se dizem $homeomorfas$ ou $topologicamente\ equivalentes$, se for possível passar de uma para outra por um processo consistindo em esticar, contrair, torcer(sem rasgar ou colar) e fazer cortes, se assim desejar, desde que, nesse último caso, se rejuntem as bordas de cada uma de maneira a não deixar alterações.

Diremos, a partir daqui, através deste processo intuitivo, que poliedros que se transformam em esferas, toros, ou ainda, bitoros, são homeomorfos à esfera, ao toro e ao bitoro, respectivamente.

Nos dias de hoje, é de praxe chamarmos $\chi(P) = V - A + F$ de $característica\ de\ Euler - Poincaré$ do poliedro P e $\chi(P)$ é um $invariante\ topológico$.

Poincaré mostrou que se o poliedro P, com V vértices, A arestas e F faces é homeomorfo ao poliedro P', com V' vértices, A' arestas e F' faces, então, V, A e F são diferentes de V', A' e F', respectivamente, mas $V - A + F = V' - A' + F'$.

Por exemplo, se P é um tetraedro, $\chi(P) = 2$. Logo, todo poliedro homeomorfo ao tetraedro, ou seja, à uma esfera, tem $característica\ Euler - Poincaré$ igual a 2.

Na verdade, o fato supracitado ocorre com todo poliedro convexo P, pois projetando-o a partir de um ponto interior, sobre uma esfera S que contenha P, obtemos um homeomorfismo $f: P \longrightarrow S$.

NOÇÕES DE GEOMETRIA ESFÉRICA

Nesta seção trataremos de conceitos elementares de Geometria Esférica, estes por sua vez, serão utilizados, em seguida, na demonstração do Teorema de Euler para poliedros convexos. A Geometria Esférica foi elaborada, principalmente, por Adrien-Marie Legendre, a fim de ser possível o estudo geométrico em áreas esféricas, onde a Geometria Euclidiana não atende adequadamente e não pode ser usada de forma precisa.

Definição (Superfície esférica) Seja O um ponto e r um número real positivo. A superfície esférica de centro O e raio r é o conjunto de todos os pontos P do espaço, cuja distância a O é igual a r.

Os pontos do espaço cuja distância ao ponto O é menor que r, são interiores, e aqueles cuja distância é maior que r, são chamados de exteriores à superfície esférica, respectivamente. A reunião da superfície esférica com seus pontos interiores denomina-se $esfera$ de centro O e raio r. O segmento que une o centro a qualquer ponto da superfície esférica é denominado $raio\ da\ superfície\ esférica$, já o segmento que une dois pontos distintos da mesma, é denominado $corda$.

Teorema: Um plano é perpendicular a um raio na sua extremidade comum com a superfície esférica se, e somente se, é tangente à mesma.

Demonstração.

Sendo E um plano perpendicular ao raio $\overline{OT}$ em T, vamos mostrar que nenhum outro ponto de E está na superfície esférica.

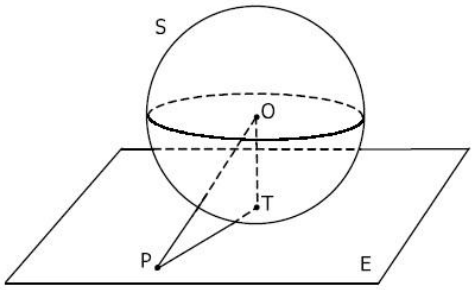


Figura 05: Plano perpendicular ao raio da esfera

Seja P um ponto qualquer de E, P distinto de T. Como E é perpendicular a $\overline{OT}$ temos que ΔOPT é um triângulo retângulo com hipotenusa $\overline{OP}$ e catetos $\overline{OT}$ e $\overline{PT}$. Logo $\overline{OP} > \overline{OT} = r$ e, portanto, P não está na superfície esférica.

Reciprocamente, seja E um plano tangente à superfície esférica no ponto T. Suponha, por absurdo, que E não seja perpendicular ao raio $\overline{OT}$. Vamos mostrar que essa hipótese nos leva a uma contradição.

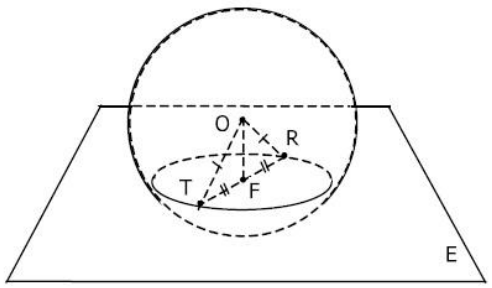


Figura 06: Plano tangente à superfície esférica

Sendo F o pé da perpendicular ao plano E, traçada a partir de O, temos $F \neq T$, pois E não é perpendicular a $\overline{OT}$. Seja R o ponto da reta $\overline{FT}$, tal que, $T - F - R$ e $\overline{FR} = \overline{FT}$. Então, $\Delta OFR \cong \Delta OFT$ (pelo critério LAL de congruência de triângulos), de modo que, $\overline{OR} = \overline{OT} = r$ e, portanto, R está na superfície esférica. Logo E intersecta a superfície esférica em um ponto R distinto de T. Isso é impossível, pois E é um plano tangente.

■

A intersecção de um plano secante à $superfície\ esférica$ de raio r, passando pelo centro O, determina uma circunferência de centro O e raio r. De maneira mais geral, se um plano contém um ponto interior à $superfície\ esférica$, esta interseção é uma circunferência, tal que, seu centro é o pé da perpendicular ao plano secante, traçada a partir do centro da $superfície\ esférica$.

Observação: Em Geometria Esférica e Geometria Euclidiana os conceitos de reta são bastante diferentes. A interseção da $superfície\ esférica$ com um plano, passando pelo centro, é chamada de $circunferência\ máxima$ ou $geodésica$, que é definida como reta em Geometria Esférica. Na figura a seguir, ACA' e ADA' são retas, ambas perpendiculares à reta $BCDE$.

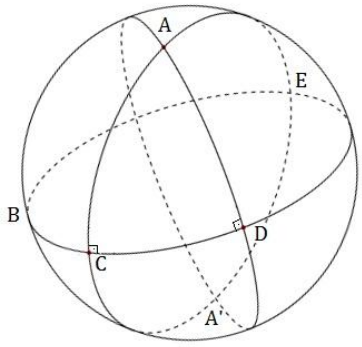


Figura 07: Retas perpendiculares em Geometria Esférica

Ainda na figura acima, considerando as duas retas, ACA' e ADA', e os pólos A e A' dessas retas, temos, na Geometria Euclidiana, que a distância de qualquer reta ao pólo é constante e igual a quatro vezes a distância polar, para todas as retas. Perceba que, na Geometria Esférica, não existem retas paralelas, e esta, por sua vez, tem comprimento finito.

Definição (Segmento de reta na Geometria Esférica) Dados dois pontos sobre a $superfície\ esférica$, o menor comprimento entre eles é dado por um trecho de reta denominado $arco\ de\ circunferência\ máxima$, que é definido como segmento de reta na Geometria Esférica.

Para obtermos a medida desse comprimento, basta sabermos o ângulo central $A\hat{O}B$, já que o comprimento do arco é proporcional à medida do ângulo central correspondente, temos então, que a distância entre A e B é:

$$\frac{2\pi r\alpha}{360} \qquad \text{Eq. (1)}$$

onde r é o raio da superfície esférica e α é o ângulo central dado em graus.

Definição (Ângulo esférico) O ângulo esférico é a interseção de duas retas e, sua medida, é a mesma do ângulo formado pelas retas tangentes à superfície esférica com vértice no ponto de interseção.

Uma outra forma de definir ângulo esférico, é o ângulo diedral entre os semiplanos que contém as semicircunferências máximas.

Definição (Polígono esférico) A porção da superfície esférica, limitada exclusivamente por segmentos de reta, é chamada polígono esférico.

Neste trabalho, um polígono que nos interessa bastante, é o triângulo esférico, visto que ele é elemento fundamental na demonstração do Teorema de Euler, e é formado pela união de três segmentos geodésicos de uma esfera, onde cada segmento geodésico é o arco de círculo máximo da esfera e não pertencentes a uma mesma circunferência máxima. Na figura a seguir, os pontos A, B e C determinam o triângulo esférico ABC, de lados BC, AC e AB, que doravante chamaremos de a, b e c, respectivamente, e os ângulos internos do triângulo ABC, são: $B\hat{A}C$, $A\hat{B}C$ e $A\hat{C}B$.

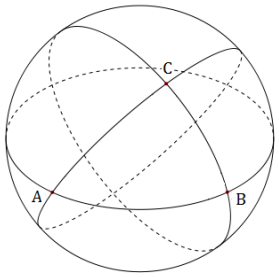


Figura 08: Triângulo Esférico

A Geometria Esférica independe do quinto postulado de Euclides, o qual postula que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é constante e igual a 180°, ao invés disso, temos esta soma variando de 180° a 540°, dependendo do triângulo considerado.

Assim como a soma das medidas dos ângulos internos, em relação à soma das medidas dos lados a, b e c do triângulo esférico, persiste, também, uma faixa de variação de extremos 180° a 360°. Note que isso nos dá a possibilidade de termos um triângulo esférico com três ângulos, medindo cada um, 90°.

O TEOREMA DE EULER

Faremos nesta seção a demonstração do Teorema de Euler para poliedros convexos via Geometria de Legendre. Trata-se da primeira demonstração compreensível a ser publicada deste Teorema. Segundo Lima, trata-se de um assunto simples, claro e de fácil exposição.

A motivação para escolha de tal caminho vem da simplicidade pela qual a demonstração é apresentada, o que a torna atraente e instrutiva.

Para que não haja ambiguidade quanto aos termos que empregaremos, é conveniente relembrar algumas definições.

Definição (Conjunto convexo) Um conjunto C, do plano ou do espaço, diz-se convexo quando qualquer segmento de reta que liga dois pontos de C está inteiramente contido em C.

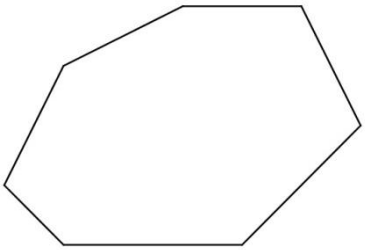


Figura 09: Conjunto convexo no plano

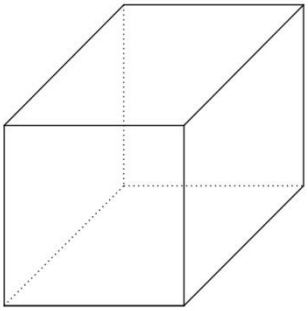


Figura 10: Conjunto convexo no espaço

Definição (Polígono convexo) Um polígono é a parte do plano que se encontra no interior da curva feita por um número finito de segmentos. Estes segmentos são chamados de arestas e os pontos onde elas se encontram chamados de vértices. Diz-se que um polígono é convexo quando ele limita uma figura do plano no sentido da definição de conjunto convexo.

Definição (Poliedro convexo) Um poliedro é uma reunião finita de polígonos convexos, chamados de faces do poliedro. Os lados desses polígonos chamam-se arestas do poliedro e os vértices dos polígonos são também chamados vértices do poliedro. Exige-se ainda, que a interseção de duas faces quaisquer do poliedro, seja uma aresta comum a essas faces, ou um vértice comum, ou seja vazia. Diz-se que um poliedro é convexo quando ele limita um sólido convexo no sentido da definição de conjunto convexo.

Seja P um poliedro convexo, com V vértices, A arestas e F faces. Convenientemente, suporemos que todas as faces de P são triângulos, não alterando o número $V - A + F$. De fato, se a face não for um triângulo, basta traçarmos diagonais até que a mesma fique decomposta em apenas triângulos, isso traz comodidade na demonstração, uma vez que, ao traçar uma diagonal, não alteramos o número V de vértices, o que aumenta são as faces e as arestas, no entanto, ambas em mesma quantidade, mantendo assim, a relação $V - A + F$, constante.

Consideremos uma esfera E, de raio r, cujo centro O é um ponto situado no interior do poliedro P. Se projetarmos P radialmente sobre E, obtemos uma decomposição de E em $triângulos\ esféricos$, de modo parecido com P, porém cada face passa a ter um formato abaulado. Com essa transformação, E fica recoberta por F triângulos esféricos, com um total de A lados e V vértices.

A interseção de E com qualquer plano L é um círculo ou um ponto, quando L for tangente à E. Chamamos esta interseção de $círculo\ máximo$, quando L passa pelo centro O de E.

A projeção radial de um segmento de reta $\overline{AB}$ é um arco de círculo máximo $\widehat{ab}$ sobre a esfera E, exceto quando, A, B e O pertencem a uma mesma reta.

Teorema (Fórmula de Girard) Se os ângulos α, β e γ de um $triângulo\ esférico$ forem medidos em radianos, então,

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{a}{r^2} \qquad \text{Eq. (2)}$$

onde a é a área do triângulo esférico, pertencente à esfera de raio r.

A demonstração desse resultado pode ser encontrada no livro Meu Professor de Matemática e outras histórias.

Teorema (Euler) Para todo poliedro convexo, vale a relação $V - A + F = 2$, onde V é o número de vértices, A é o número de arestas e F é o número de faces do poliedro.

Demonstração.

Para demonstrar o teorema de Euler, Legendre fundamentou-se no teorema de Girard.

Retornando à esfera, a qual ficou decomposta em F {\it triângulos esféricos}, com um total de A lados e V vértices, para cada um desses $triângulos\ esféricos$ vale o teorema de Girard, ou seja,

$$s_t = \pi + \frac{a_t}{r^2} \qquad \text{Eq. (3)}$$

onde s_t é a soma dos ângulos internos e a_té a área do triângulo esférico t.

Temos um total de F faces, nas quais vale a relação acima, de modo que,

$$s_{t_1} + s_{t_2} + \cdots + s_{t_n} = \pi_{F_1} + \frac{a_{t_1}}{r^2} + \pi_{F_2} + \frac{a_{t_2}}{r^2} + \cdots + \pi_{F_n} + \frac{a_{t_n}}{r^2} \qquad \text{Eq. (4)}$$

onde s_{t_i} é a soma dos ângulos internos, F_i é a face e a_{t_i} é a área de cada $triângulo\ esférico$ respectivamente.

Reescrevendo Eq. (4), teremos:

$$\sum_{i=1}^{n} s_{t_i} = \pi(F_1 + F_2 + \cdots + F_n) + \frac{\sum_{i=1}^{n} a_{t_i}}{r^2} \qquad \text{Eq. (5)}$$

ou seja,

$$\sum_{i=1}^{n} s_{t_i} = \pi F + \frac{\sum_{i=1}^{n} a_{t_i}}{r^2} \qquad \text{Eq. (6)}$$

Mas, $\sum_{i=1}^{n} s_{t_i} = 2\pi V$, uma vez que a soma dos ângulos em torno de cada vértice é 2π (volta completa). Sabemos também que $\sum_{i=1}^{n} a_{t_i}$= área de todos os triângulos esféricos = área da superfície esférica E = $4\pi r^2$. Portanto, podemos reescrever (6) e teremos:

$$2\pi V = \pi F + \frac{4\pi r^2}{r^2} \qquad \text{Eq. (7)}$$

ou seja,

$$2\pi V = \pi F + 4\pi \qquad \text{Eq. (8)}$$

ou ainda,

$$2V = F + 4 \qquad \text{Eq. (9)}$$

que é o mesmo que,

$$2V - F = 4 \qquad \text{Eq. (10)}$$

Como o triângulo têm três lados, e toda aresta é lado de dois triângulos simultaneamente. Logo, $3F = 2A$, que pode ser reescrito como $F + 2F = 2A$, de modo que:

$$F = 2A - 2F \qquad \text{Eq. (11)}$$

Substituindo Eq. (11) em Eq. (10) obteremos:

$$2V - (2A - 2F) = 4 \qquad \text{Eq. (12)}$$

onde,

$$2V - 2A + 2F = 4 \qquad \text{Eq. (13)}$$

finalmente, dividindo toda a equação anterior por 2, finalmente, temos:

$$V - A + F = 2$$

■

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os saberes geométricos estão presentes na vida cotidiana dos alunos e seus familiares, não se restringindo a um campo de conhecimentos unicamente escolar. Os deslocamentos realizados em viagens e na própria cidade em que residimos, as brincadeiras e as atividades profissionais, produzem saberes matemáticos, como os geométricos.

A Geometria é parte integrante do nosso mundo e do currículo das escolas, é fundamental para o desenvolvimento do raciocínio, já que possui expressão gráfica das formas e relações matemáticas.

O ensino da Geometria Espacial na Educação Básica é feito com base na memorização de fórmulas e em uma infinidade de aplicações repetitivas. Há a ilusão que, deste modo, o aluno esteja aprendendo, quando na verdade, ele está apenas memorizando uma sequência de operações pré-definidas.

Acredita-se, então, que o ensino da Geometria tenha uma base insuficiente, precisando ser melhorado, para que o educando aprenda e dê significado ao que foi aprendido, sendo capaz de fazer críticas e de argumentar sobre o referido assunto.

Há a necessidade de inserir no cotidiano escolar elementos da cultura e da vida dos alunos, para enriquecer a prática pedagógica, centrando no estudo e no ambiente que os cerca, fazendo uso das noções e dos conhecimentos geométricos. O estudo da Geometria se torna importante ao facilitar as percepções espaciais dos estudantes, contribuindo para uma melhor apreciação das construções e dos trabalhos artísticos, dos seres humanos e da natureza.

A transição do plano para o espaço traz dificuldades aos alunos, uma vez que, no plano, a visualização é fácil e rápida, e no espaço torna-se mais difícil apresentar figuras com fatos abstratos. Não é impossível, porém, é inviável para todo conteúdo a ser explorado.

Neste trabalho abordamos a demonstração de uma parte da ementa de Geometria Espacial, acreditando que algo parecido possa ser feito no restante do conteúdo, haja vista a complexidade existente nas relações entre figuras espaciais.

Vale lembrar que a Geometria, tal qual a conhecemos hoje, levou mais de 2000 anos para ser formulada corretamente. Devemos ter habilidade no seu manuseio.

Tais fatos precisam de alternativas rigorosas ao serem ensinados, e não, meros exemplos exaustivos.

Da mesma forma que apresentamos, neste trabalho, a demonstração do Teorema de Euler via Geometria Esférica de Legendre, enxergamos a necessidade de alternativas para outros conteúdos da Educação Básica.

Referências

LIMA, Elon Lages. Meu Professor de Matemática e outras histórias. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. A Matemática do Ensino Médio - volume 2. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

EVES, Howard. Introdução à história da matemática. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 1995.

Copyright © 2013 <Mateus do Nascimento e Silvio Antônio Bueno Salgado>. O(s) autor(es) concede(m) licença não exclusiva, aos organizadores do VI HTEM, para publicar este documento no caderno de resumos do evento. Qualquer outro uso é proibido sem o consentimento do(s) autor(es).