UMA PROPOSTA DE ENSINO DA GEOMETRIA NA EDUCAÇÃO BÁSICA USANDO VETORES

José Ribamar Penha Lindoso

João de Deus Mendes da Silva

Centro de Ensino Médio Governador Edison Lobão

Universidade Federal do Maranhão

J.lindoso@hotmail.com

jdmsilva@ufma.br

Abstract

In most Brazilian schools the approach taken in class on the teaching of analytic geometry does not mention the use of vectors, is also omitted from textbooks and, consequently, by mathematics teachers. What little is discussed on the study of vectors is introduced in high school physics teachers. This paper aims to propose an approach of plane analytic geometry in high school, based on the use of vectors and aided by computational resources, such as dynamic geometry software GeoGebra. By requiring a few prerequisites, it is observed that this proposal can be applied in any year of high school, and the sooner we introduce these contents is expected that students have an easier time learning the concepts of analytical geometry, as well as monitor classes in other areas of knowledge, such as physics, for example, where these concepts are widely used, including providing a rich environment for interdisciplinary experiences. Moreover, one can make a historical correction, rescuing a concept highly mathematical area of mathematics, because as we know are introduced in physics in high school. We believe that the use of vectors associated with the use of computational resources as a teaching tool and as a learning resource to facilitate student learning, including providing they enroll in technical courses of universities with better learning conditions.

Words - Tags: Vectors, Analytic Geometry, GeoGebra.

INTRODUÇÃO

O presente trabalho apresenta de forma sucinta uma proposta de ensino da geometria na educação básica usando vetores. O trabalho apresenta atividades educacionais que tem como objetivo principal tratar e apresentar conteúdos da Geometria Analítica, mais precisamente, o estudo do ponto, através de uma abordagem exclusivamente vetorial, inserindo e relacionando seus tópicos com outros abordados, normalmente, no ultimo ano do ensino médio. A abordagem proposta neste trabalho está referendada nos parâmetros curriculares nacionais, pois as atividades apresentadas para as aplicações práticas da geometria analítica são realizadas com auxilio de recursos computacionais, especificamente o software de geometria dinâmica *GeoGebra*. A utilização de um software de geometria dinâmica visa articular o estudo teórico à teoria dos registros de representação de Duval, associando, constantemente, o registro algébrico com o registro figural

(representações geométricas e gráficas). Segundo Duval [3], em matemática, um mesmo conceito pode assumir diversos registros de representação. Esse fato é, para Duval, um dos fenômenos causadores de obstáculos na aprendizagem. Ao lidar com as várias representações de um mesmo objeto matemático, o aluno passa a ter mais segurança na compreensão e na resolução de problemas. A metodologia usada será pautada na resolução de problemas de geometria analítica usando recursos vetoriais e com o auxílio do software GeoGebra.

1. PROBLEMAS PROPOSTOS

A maioria dos problemas propostos foi adaptada de livros do ensino médio. Normalmente são problemas que tratam de uma ideia razoável, porém não são formulados visando à abordagem de vários conteúdos.
Nesta seção, apresentaremos sete problemas que retratam os principais conteúdos da geometria analítica relativos a estudo do ponto [1]. Os problemas propostos deixam claras as vantagens da utilização da metodologia proposta, seja pela simplicidade dos conteúdos utilizados na resolução dos problemas ou mesmo pela concisão das soluções apresentadas em relação às soluções tradicionais da geometria analítica.

1.1. Explorando Conceitos Básicos de Vetores.

Os dois primeiros problemas destinam a abordagem dos conceitos sobre o estudo de vetores, onde o vetor é visto como ente geométrico, um segmento de reta orientado constituído por um par de pontos do plano. Nestes dois problemas o vetor é caracterizado como elemento transportador de pontos, efetuador de rotações e translações. Também usaremos o conceito de produto interno e ortogonalidade entre vetores para mostrar que as diagonais de um quadrado são perpendiculares.

1.1.1. O Problema do Quadrado

Os pontos A= (1,4) e B= (2,1) são dois vértices consecutivos de um quadrado ABCD. Considerando a sequência dos vértices no sentido anti-horário, determine as coordenadas dos vértices C e D. Use os resultados do item anterior e mostre que as diagonais do quadrado são perpendiculares.

Solução1:

Inicialmente, cabe ressaltar que uma solução tradicional, usando as ferramentas usuais da geometria analítica, só seria possível após estudos dos conteúdos sobre ponto e reta (interseção entre retas etc.), além da solução ser muito extensa, como veremos no anexo.

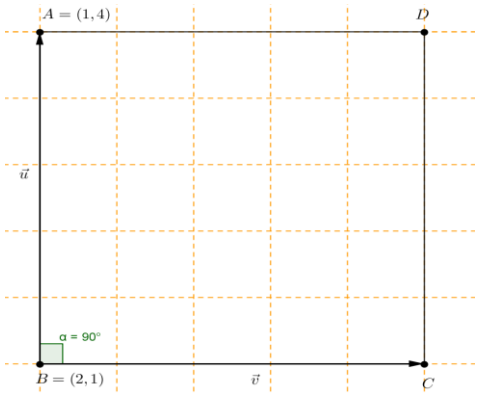


Figura 1 Quadrado

a) Encontramos as coordenadas dos vértices C e D.
Consideremos os vetores $\vec{u} = \overrightarrow{BA} = A - B = (1,4) - (2,1) = (-1,3)$ e $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$.
O vetor $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ é obtido de $\vec{u}$ através de uma rotação de 90° negativos. Então:

$$\vec{v} = (3,1).$$

O ponto C é obtido através do transporte do ponto B pelo vetor $\vec{v}$, isto é:

$$C = B + \vec{v} = (2,1) + (3,1) = (5,2).$$

Por outro lado, $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} = \vec{v}$, isto é:

$$D = C + \vec{u} = (5,2) + (-1,3) = (4,5).$$

Conclusão: C = (5,2) e D = (4,5).

b) Diagonais perpendiculares.
Devemos mostrar que $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$.

$\overrightarrow{AC} = C - A = (5,2) - (1,4) = (4,-2)$; $\overrightarrow{DB} = B - D = (2,1) - (4,5) = (-2,-4)$
$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = (4,-2) \cdot (-2,-4) = -8 + 8 = 0$, logo, $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{DB}$.

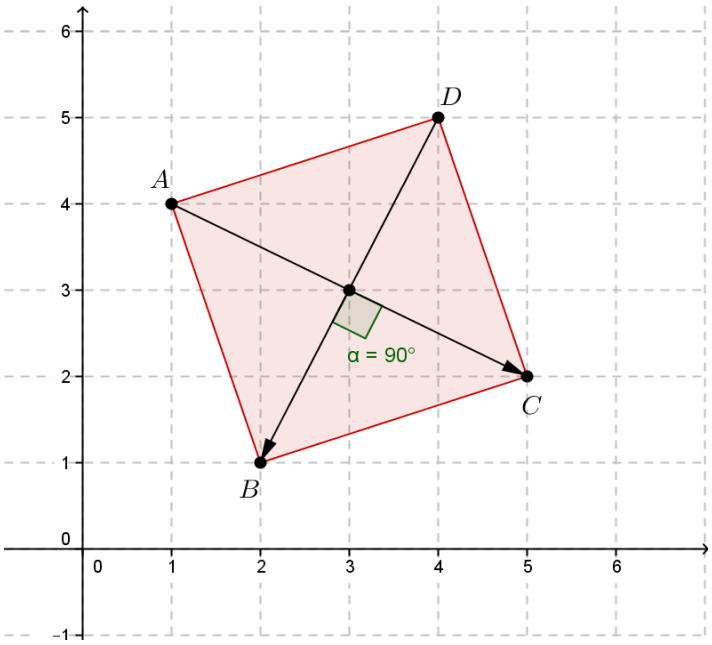


Figura 2 Representação gráfica do quadrado do problema 1

1.1.2 O Problema da Ilha do Tesouro

Esse problema é um clássico da matemática. A versão que apresentaremos foi adaptada do livro a matemática do ensino médio, volume 3, da SBM.

Dois piratas decidem enterrar um tesouro em uma ilha. Escolhem como pontos de referência, uma **árvore** e **duas pedras**. Começando na árvore, medem o número de passos até a primeira pedra. Em seguida, dobram, segundo um ângulo de 90º, à direita e caminham o mesmo número de passos até alcançar um ponto, onde fazem uma marca. Voltam à árvore, medem o número de passos desde a árvore até a segunda pedra, dobram à esquerda, segundo um ângulo de 90º, e caminham o mesmo número de passos até alcançar um ponto, onde fazem outra marca. Finalmente, enterram o tesouro exatamente no ponto médio entre as duas marcas.

Anos mais tarde, os dois piratas voltam à ilha e decidem desenterrar o tesouro, mas, para sua decepção, constatam que a árvore não existe mais (o vento, a chuva e os depredadores a haviam arrancado). Então um dos piratas decide arriscar. Escolhe ao acaso um ponto da ilha e diz: "Vamos imaginar que a árvore estivesse aqui." Repete então os mesmos procedimentos de quando havia enterrado o tesouro: contam os passos até a primeira pedra, dobra à direita, etc., e encontra o tesouro.

Aplicando conhecimentos de vetores vamos mostrar que a localização do tesouro independe da posição da árvore.

Solução:

O software GeoGebra pode ser usado aqui para mostrar aos alunos que a localização do tesouro independe da posição da árvore [1]. Obviamente, não vale como demonstração matemática, mas o software é usado aqui para observar o problema e fazer conjecturas. Só após este ensaio partimos para resolvê-lo.

Vamos resolver o problema com o auxílio de um sistema de coordenadas cartesianas, colocando a origem do sistema na primeira pedra, representada pelo ponto A, de modo que a segunda pedra, representada pelo ponto C, esteja sobre o eixo Ox.

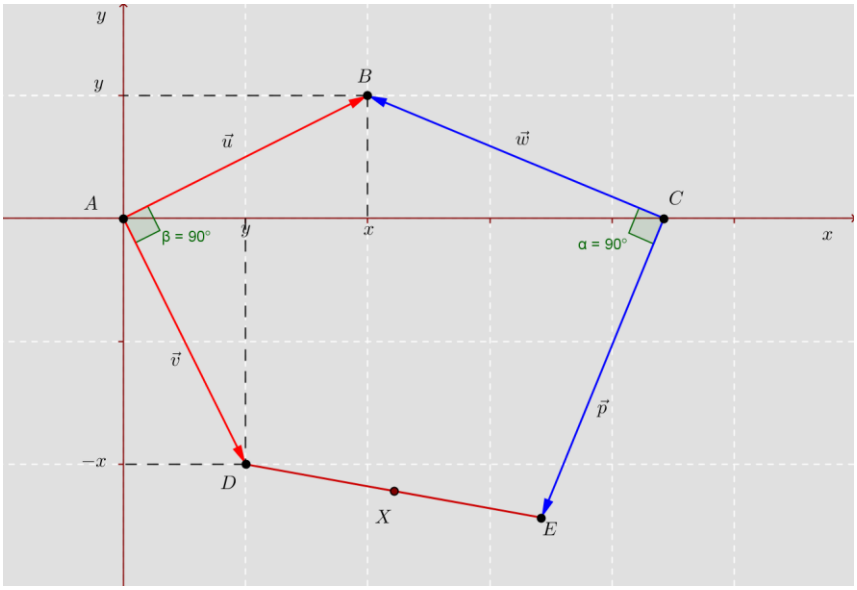


Figura 3 Problema da ilha do tesouro

Seja *k* a distancia do ponto A ao ponto C. Assim, em relação ao sistema cartesiano estabelecido, fica definido que *A = (0, 0), C = (k, 0)* e para a posição da árvore usamos o ponto *B = (x, y)*.

Assim, as coordenadas dos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CB}$ serão:

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = B\text{-}A = (x, y) \text{ e } \vec{w} = \overrightarrow{CB} = B\text{-}C = (x\text{-}k, y).$$

O vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ é obtido de $\overrightarrow{AB}$ através de uma rotação de 90° no sentido horário, então, $\vec{v} = \overrightarrow{AD} = (y, -x)$.

O vetor $\vec{p} = \overrightarrow{CE}$ é obtido de $\overrightarrow{CB}$ através de uma rotação de 90° no sentido anti - horário, logo $\vec{p} = \overrightarrow{CE}$ = *(-y, x-k).*

Como o ponto A é a origem do sistema, tem-se as coordenadas do ponto *D= (y, -x).*

Como $\overrightarrow{CE}$*=E-C,* então *E=C +* $\overrightarrow{CE}$*= (k, zero) + (-y,x-k) = (k-y, x-k).*

Sendo X o ponto médio de DE, suas coordenadas são dadas por:

$$X = (\frac{y+k-y}{2}, \frac{-x+x-k}{2}) = (\frac{k}{2}, -\frac{k}{2}).$$

Portanto, para encontrar o tesouro, bastava o pirata percorrer a metade da distância entre as duas pedras, na direção de A para C e em seguida virar à direita e percorrer a mesma distância, o que comprova que a localização do tesouro independe da posição da árvore.

1.2 Explorando Conceitos de Geometria Analítica Plana.

Nos cinco próximos problemas, aplicaremos conhecimentos de geometria analítica na resolução de problemas práticos. Abordaremos os seguintes conhecimentos relativos ao estudo do ponto: distância entre dois pontos; ponto divisor de um segmento de reta; condição de alinhamento de três pontos; coordenadas do ponto divisor de um segmento de reta; área de um retângulo, circuncentro de um triângulo.

1.2.1 Problema do Incêndio na Floresta

Este problema foi adaptado do livro **matemática ciência e aplicações**, volume 3, da Editora Saraiva. As soluções apresentadas são de nossa autoria.

As florestas Brasileiras têm sofrido grandes queimadas nos últimos anos, mais especificamente no verão. Os esforços para diminuir o número de queimadas têm despendido volumosas somas em dinheiro e articulação envolvendo diversos setores da sociedade. No último verão, com o auxilio de fotografias de satélite, foram localizados três focos de incêndio, em uma área descampada, originadas pelo calor excessivo. Para conter o incêndio o corpo de bombeiros precisa instalar uma base de operações num ponto que diste igualmente dos três focos de incêndio para conter o fogo o mais rápido possível. Para realizar o serviço foi construído um sistema de coordenadas retangulares conforme figura a seguir.

1) Olhando a figura abaixo, quais as coordenadas dos focos em relação ao sistema cartesiano retangular proposto?
2) Em que ponto será instalada a base do corpo de bombeiros?
3) Se cada unidade representada no plano cartesiano corresponde a 1 km, qual será a distância da base a cada um dos focos?

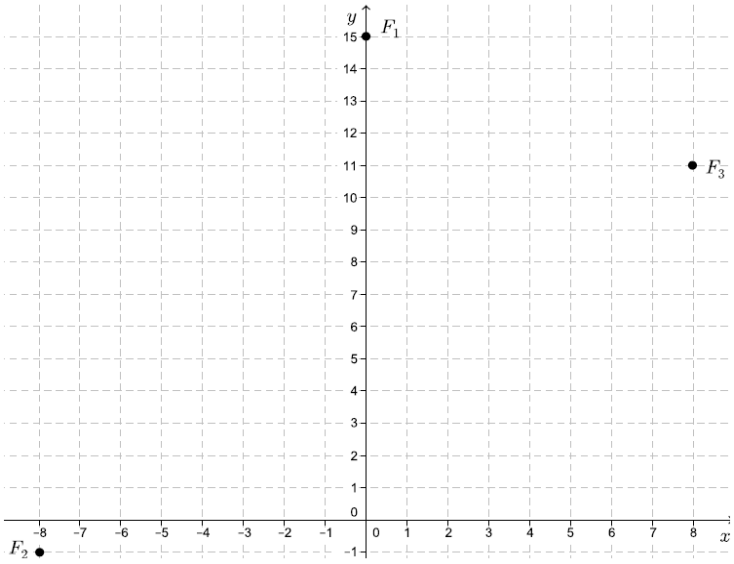


Figura 4 Sistema de coordenadas cartesianas.

Solução Gráfica:

Inicialmente usamos o software GeoGebra para obter uma solução gráfica.

Traçamos as mediatrizes r, s e t dos lados do triângulo. O ponto de interseção das mediatrizes é, como sabemos, equidistante dos vértices do triângulo. Portanto, o ponto I = (0, 5) é o ponto onde a base deve ser instalada.

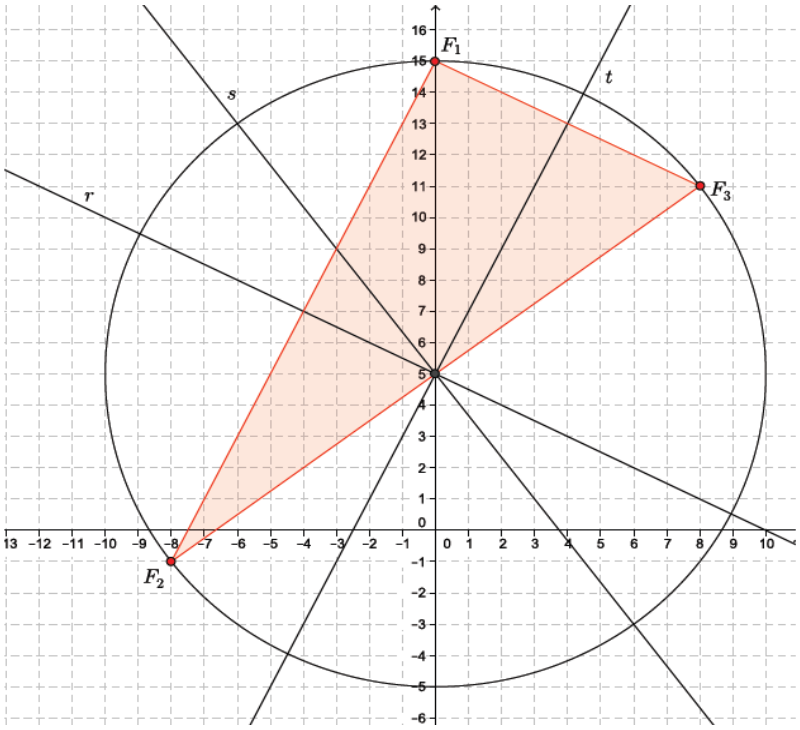


Figura 5 Solução gráfica do problema 3

Solução Analítica:

a) Os focos de incêndio são os pontos: $F_1 = (0,15); F_2 = (-8,-1) e\ F_3 = (8,11)$.

b) Seja X= (a, b) o ponto do plano onde a base deve ser instalada.

Consideremos os vetores $u = \overrightarrow{F_1X} = (a, b\text{-}15)$; $\vec{v} = \overrightarrow{F_2X}$ = *(a+8, b+1)* e $\vec{w} = \overrightarrow{F_3X}$ = *(a-8, b-11)*.

Como o Ponto X é equidistante dos focos, os vetores $\vec{u}, \vec{v}\ e\ \vec{w}$ devem ter o mesmo módulo, isto é:

$$\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = \|\vec{w}\|,$$

Ou de forma equivalente,

$$\|\vec{u}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 = \|\vec{w}\|^2$$

De $\|\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2$, tem-se: $\Rightarrow 16a + 32b = 160$ (I).

De $\|\vec{v}\|^2 = \|\vec{w}\|^2$, tem-se: $\Rightarrow 16a + 3b = 15$(II).

Fazendo (I)-(II), temos: $29b = 145 \Rightarrow b = 5.$

Para $b = 5$, obtemos $a = 0$, logo $X = (0,5)$.

1.2.2 Problema da Rotatória

As casas de um condomínio estão distribuídas ao longo de três grandes avenidas retilíneas: A1, A2, e A3. No plano cartesiano seguinte, que é uma planta do condomínio feita com escala 1: 2000 estão representadas as posições dessas avenidas. No centro há uma rotatória que dá acesso às três avenidas.

Dois irmãos, Fábio e Gabriel, possuem casas nesse condomínio, indicadas, respectivamente, pelos pontos F= (4,0) e G, que distam 100 metros uma da outra. No ponto P= (-3,1) está representada a piscina do condomínio. Sabe-se que a unidade de medida é o centímetro.

a) determine as coordenadas do ponto G.

b) determine a distância real entre a casa de cada um dos irmãos e a piscina.

c) um grande amigo dos irmãos planeja comprar uma casa, na Avenida 3, que diste igualmente da casa dos dois irmãos. Que ponto do plano representará essa casa? A que distância real ela estaria da rotatória?

d) Há uma casa na Avenida 3 cuja representação na planta anterior é um ponto que está alinhado a P e F. Determine as coordenadas desse ponto.

Solução:

a) O problema nos informa que a distância real entre a casa de Gabriel e a casa de Fábio é de 100 metros. Na escala do desenho essa distância corresponde a $d = 100.\frac{1}{2000} = 0{,}05m = 5\ cm.$

A distância d entre a casa de Gabriel e a casa de Fábio é o módulo do vetor $\overrightarrow{GF}$. Como $\overrightarrow{GF} = F - G = (0,y) - (4,0) = (-4,y)$, tem-se:

$\sqrt{(-4)^2 + y^2} = 5 \Leftrightarrow 16 + y^2 = 25 \Leftrightarrow y^2 = 9.$ Como $y > 0$, então, $y = 3.$

Portanto, $G = (0,3)$.

.b) a distância, no desenho, entre a casa de Fábio e a piscina é o comprimento do vetor $\overrightarrow{FP}$. Como $\overrightarrow{FP} = P - F = (-7,1)$, temos:

$$\|\overrightarrow{FP}\| = \sqrt{(-7)^2 + 1^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} = 5.1{,}4 = 7cm.$$

A distância real entre a casa de Fábio e a piscina será:

$$D_F = \frac{d}{E} = 7.2000 = 14000cm = 140\ m.$$

A distância, no desenho, entre a casa de Gabriel e a piscina é o comprimento do vetor $\overrightarrow{GP}$. Como $\overrightarrow{GP} = P - G = (-3{,}1) - (0{,}3) = (-3, -2).$, então:

$$\|\overrightarrow{GP}\| = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{13} = 3{,}6\ cm.$$

A distância real entre a casa de Gabriel e a piscina, será:

$$D_G = 3{,}6\ .2000 = 7200cm = 72\ m.$$

c) A avenida 3 corresponde à bissetriz dos quadrantes ímpares. Assim, um ponto desse local terá coordenadas iguais. Seja A= (m, m) tal ponto. Devemos ter:

$\|\overrightarrow{FA}\| = \|\overrightarrow{GA}\| \Rightarrow \sqrt{(m-4)^2 + m^2} = \sqrt{m^2 + (m-3)^2} \Rightarrow -8m + 16 = -6m + 9 \Rightarrow m = \frac{7}{2}$

Portanto, o ponto procurado é $A = (\frac{7}{2}, \frac{7}{2})$.

A distância, no desenho, entre o ponto A e a rotatória será:

$$\|OA\| = \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2} = \frac{7}{4}\sqrt{2} = 1{,}75\sqrt{2} = 4{,}9\ cm.$$

A distância real é $4{,}9.2000 = 9800cm = 98m$.

d) Seja *B= (p, p)* o ponto da avenida que está alinhado com os pontos *P= (-3,1) e F= (4,0).*

Sejam os vetores $\vec{u} = \overrightarrow{PB} = (p+3, p-1)$ *e* $\vec{v} = \overrightarrow{PF} = (7, -1)$.

Devemos encontrar $\lambda \epsilon \mathcal{R}$ tal que $u = \lambda v$, isto é, as coordenadas dos vetores devem ser proporcionais.

$$\frac{p+3}{7} = \frac{p-1}{-1} \Rightarrow 7p - 7 = -p - 3 \Rightarrow p = \frac{1}{2}.$$

Portanto, $B = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

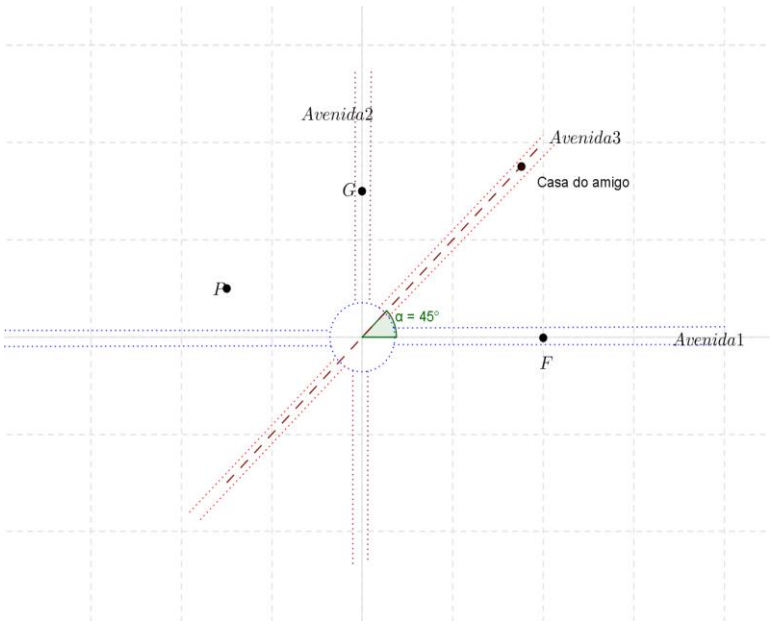


Figura 6 Representação gráfica do problema 4.

1.2.3 Área de um Triângulo

Determine os valores de p para que a área do triângulo de vértices *A = (-1,1), B = (1,4) e C = (p,2)*seja igual a 5.

Solução:

Sejam os vetores *u=AB=(2, 3)* e *v=AC=(p+1,1)*. Logo,

área $(\Delta ABC) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ p+1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}|-1-3p||$

Assim, área $(\Delta ABC) = 9 \Rightarrow \frac{1}{2}|(-1-3p)| = 5 \Rightarrow |-1-3p| = 10 \Rightarrow$

$-1-3p = 10\ ou\ -1-3p = -10$

Resolvendo as duas equações acima, obtemos, $p = -\frac{11}{3}\ ou\ p = 3.$

O problema dado tem duas soluções. Observe os gráficos abaixo.

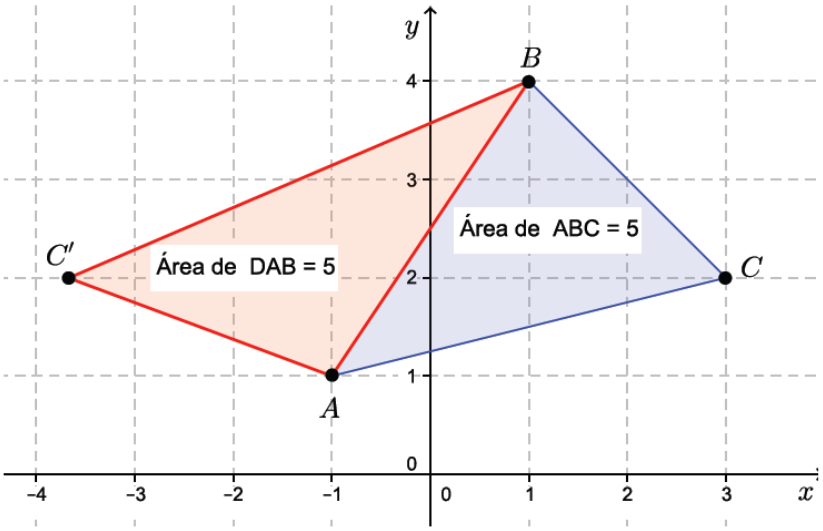


Figura 7 Representação gráfica do problema 5.

Observação: a solução tradicional envolve um determinante de terceira ordem.

1.2.4 Alinhamento de Três Pontos

Basta mostrar que os vetores determinados são múltiplos um do outro. Usando as ferramentas usuais da geometria analítica esta condição é estabelecida por um determinante de terceira ordem.

Mostre que os pontos *A= (-2, -3), B= (-1, -1), C= (1/2, 2)* e *D= (1,3)* estão alinhados.

Solução:

Sejam os vetores *u=AB, v=(BC)* e *w=(CD)*. Devemos mostra que existem escalares reais γ e μ tais que:

BC = γ*(AB)* e *CD* = μ*(AB)*

Como *AB= (1,2)*; *BC= (3/2, 3)* e *CD= (1/2, 1)*, devemos ter:

(3/2, 3)= γ*(1,2)* e *(1/2,1)=* μ*(1,2)*

$$\Rightarrow (\frac{3}{2},3) = (\lambda, 2\lambda)\ e\ (\frac{1}{2},1) = (\mu, 2\mu) \Rightarrow \lambda = \frac{3}{2}\ e\ \mu = \frac{1}{2}.$$

Portanto os pontos dados estão alinhados.

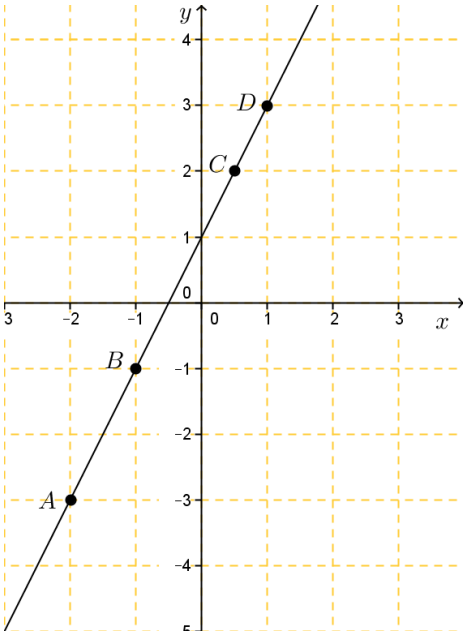


Figura 8 Alinhamento de três pontos.

1.2.5 Problema do terreno retangular

Este problema foi adaptado do livro a matemática do ensino médio, volume 3, da SBM**.**

Na solução deste problema usaremos a proposição que caracteriza o perpendicularismo entre vetores. Utilizaremos os conceitos de ponto divisor de um segmento de reta, vetores colineares, módulo de um vetor e área de um paralelogramo.

A figura a seguir feita na escala 1:100, representa a área de um terreno retangular que deve ser dividido em três lotes de áreas iguais para construção de três pequenas lojas. Estabelecido um sistema de coordenadas retangulares foram marcados os pontos A = (1,5), B = (2,2) e C = (11 y). Qual o valor de y ? Quais as coordenadas do vértice D? Quais as coordenadas dos pontos E, F, G e H que dividem o terreno dado em 3 lotes iguais? Determine a área total do terreno e a área de cada lote.



Figura 9: Terreno retangular.

Solução:

Observemos inicialmente que na escala 1:100 cada cm no desenho corresponde a 100cm reais, ou seja, cada centímetro no desenho corresponde a 1 metro de medida real.

a) Determinação de y e das coordenadas do ponto D.

Consideremos o vetor $u = BA = A-B = (1,5) - (2,2) = (-1,3)$

Seja $v = BX$ o vetor obtido de u por uma rotação de $90°$ negativos, logo $v = (3,1)$.

O vetor *w = BC = C-B = (11-2, y-2) = (9, y-2)* é múltiplo do vetor *v = BX= (3,1)*. Assim existe um escalar *k*, real, tal que:

BC=k (BX) $\Rightarrow$ *(9, y-2) = k(3,1)* $\Leftrightarrow k = 3 \text{ e } y = 5$. Assim, *C= (11,5).*

O vetor *u* transporta o ponto C até o ponto D, isto é, *D = u+C= (-1,3) + (11,5) = (10,8).*

b) Cálculo das coordenadas dos pontos E, F, G e H.

Para calcular as coordenadas dos pontos E, F, G e H, utilizaremos as coordenadas do ponto divisor de um segmento de reta.

O ponto E divide BC em dois segmentos BE e EC na razão 1:2. Logo:

$$E = (x, y) = \left(\frac{x_1 + kx_2}{1+k}, \frac{y_1 + ky_2}{1+k}\right) \Rightarrow E = (x, y) = \left(\frac{2 + \frac{1}{2}.11}{1+\frac{1}{2}}, \frac{2+\frac{1}{2}5}{1+\frac{1}{2}}\right) = (5, 3).$$

O ponto F divide EC em dois segmentos EF e FC na razão 1.

$$F = (x_m, y_m) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) \Rightarrow (x_m, y_m) = \left(\frac{5+11}{2}, \frac{3+5}{2}\right) = (8,4).$$

De modo análogo encontramos *G = (4,6)* e *H = (7,7).*

c) Cálculo da área do terreno e cálculo da área de cada loja.

A área total do terreno é dada por:

$$S = \|BA\| \cdot \|BC\| = \sqrt{10} \cdot \sqrt{90} = 30m^2.$$

A área de cada lote será:

$$S_l = \|BA\| \cdot \|BE\| = \sqrt{10} \cdot \sqrt{10} = 10m^2.$$

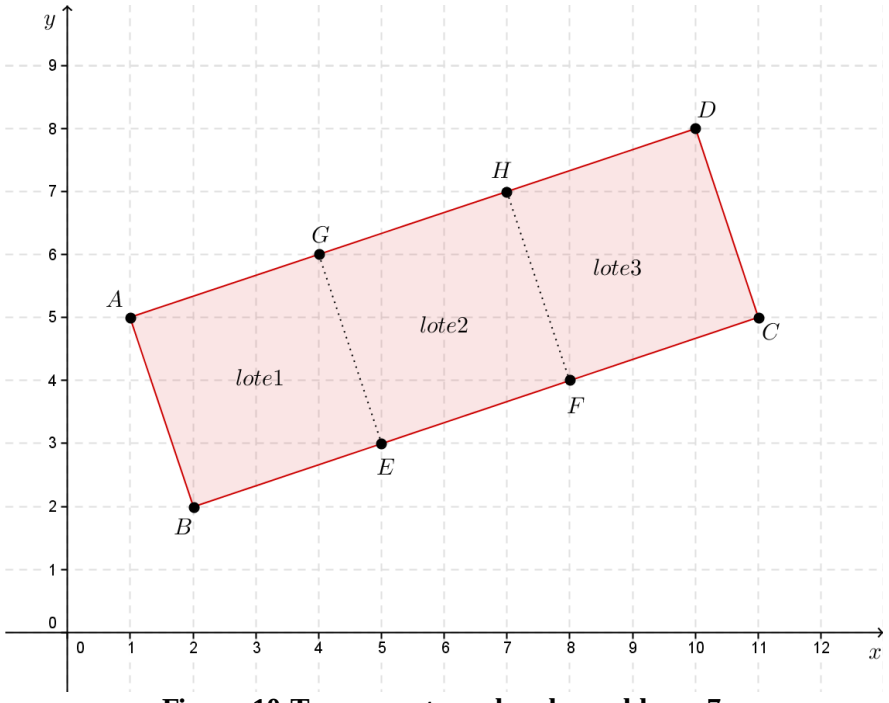


Figura 10 Terreno retangular do problema 7.

2. DEDUÇÕES DE FÓRMULAS DA GEOMETRIA ANALÍTICA USANDO VETORES

A geometria analítica tradicional apresenta ferramentas para o cálculo de distâncias, ponto divisor de um segmento de reta, etc. Todas podem ser demonstradas com o uso de vetores.
Esta seção é dedicada às deduções de alguns resultados utilizados na resolução dos problemas apresentados. As demonstrações completas de todas as proposições aplicadas na resolução dos problemas apresentados neste artigo podem ser encontradas em [bibliografia]. Podemos observar que as deduções são simples e inteiramente acessíveis aos alunos do ensino médio, pois envolvem conceitos básicos sobre vetores e geometria.

2.1 Coordenadas do Ponto Divisor de um Segmento de Reta

Dados três pontos colineares, distintos, A, D e B, chama-se razão entre os segmentos orientados *AD* e *DB* o número k tal que:

$$k = \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}.$$

Sendo k o quociente entre as medidas algébricas de *AD* e *DB*, temos:

I) se *AD* e *DB* tem o mesmo sentido, então a razão k é positiva:

II) se *AD* e *DB* tem sentidos opostos, então a razão k é negativa.

Sejam $A=(x_1,y_1)$ e $B=(x_2,y_2)$ pontos arbitrários no plano. Usando vetores, vamos determinar as coordenadas do ponto divisor D do segmento AB.

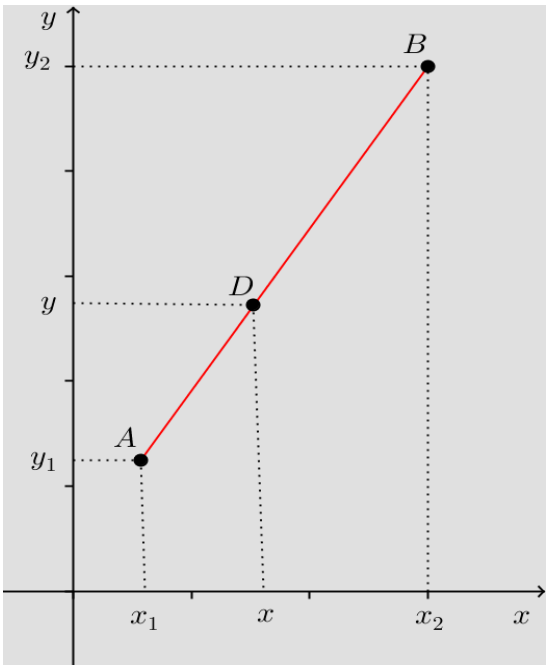


Figura 11 Ponto divisor de um segmento de reta.

Devemos determinar as coordenadas do ponto $D = (x, y)$ que divide o segmento AB em dois segmentos AD e DB, tais que:

$$AD = DB$$

Além disso, como os pontos A, D e B são colineares, devemos ter:

$$AD = k(DB) \quad .$$

Usando a notação de Grasmann, a última relação pode ser escrita assim:

$$D - A = k(B - D) \Rightarrow D = \frac{A + kB}{1 + k}.$$

Substituindo as coordenadas dos pontos, temos:

$$(x, y) = \frac{(x_1, y_1) + k(x_2, y_2)}{1 + k} = \left(\frac{x_1 + kx_2}{1 + k}, \frac{x_1 + kx_2}{1 + k}\right).$$

Portanto as coordenadas do ponto divisor são dadas por:

$$D(x, y) = \left(\frac{x_1 + kx_2}{1 + k}, \frac{y_1 + ky_2}{1 + k}\right), \text{ com } k \neq -1.$$

2.2- Coordenadas do Ponto Médio de um Segmento de Reta

O ponto médio $M(x_m, y_m)$ do segmento AB é obtido fazendo $k = 1$ nas coordenadas do ponto divisor, ou seja:

$$M(x_m, y_m) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

2.3 - Condição de Alinhamento de Três Pontos.

Dizemos que três pontos *A*, *B* e *C* estão alinhados quanto existe uma reta que passa pelos três.

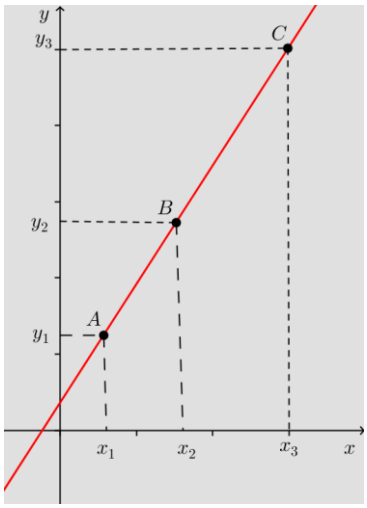


Figura 12 Alinhamento de três pontos.

A condição para que três pontos $A=(x_1,y_1)$, $B=(x_2,y_2)$ e $C=(x_3,y_3)$ estejam em linha reta é que os vetores AB e AC sejam colineares, isto é:

$AB=\lambda(AC)$, para algum $\lambda\in\Re$

Desenvolvendo a expressão acima em coordenadas, tem-se:

$$(x_2-x_1,y_2-y_1)=\lambda(x_3-x_1,y_3-y_1).$$

Ou de modo equivalente,

$$\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}=\frac{y_2-y_1}{y_3-y_1}=\lambda.$$

A última relação mostra que se A, B e C são colineares então as coordenadas dos vetores *u* = *AB* e *v* = *AC* são proporcionais.

2.4 Coordenadas do Baricentro de um Triângulo.

Denomina-se baricentro o ponto de interseção entre as três medianas de um triângulo. Consideremos no plano cartesiano os pontos $A=(x_1,y_1)$, $B=(x_2,y_2)$ e $C=(x_3,y_3)$, distintos e não colineares. Seja $G=(x_g,y_g)$ o baricentro do triângulo ABC.

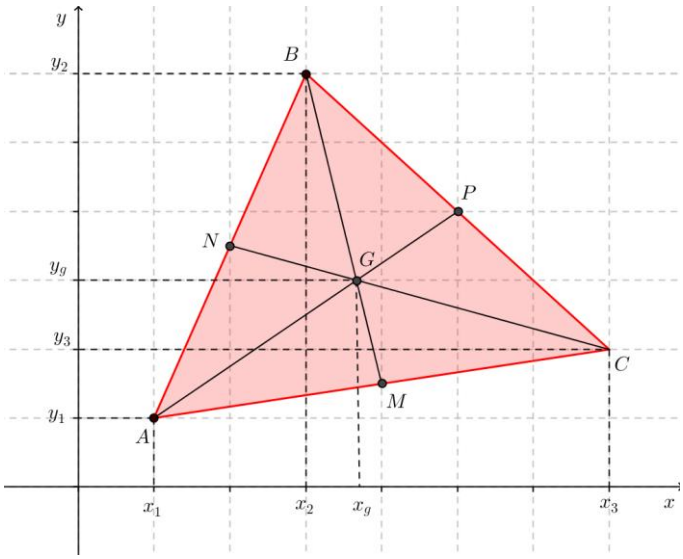


Figura 13 Coordenadas do baricentro

O ponto G é tal que $BG=2(GM)$.

Usando a notação de Grasmann, podemos escrever:

$$GB=2(MC)\Rightarrow 3G=2M+C\Rightarrow G=\frac{2M+C}{3}\Rightarrow$$

$$(x_g,y_g)=\frac{2(x_m,y_m)+(x_2,y_2)}{3}\Rightarrow x_g=\frac{2x_m+x_2}{3}\ ;\ y_g=\frac{2y_m+y_2}{3}.$$

Observe inicialmente que sendo $M=(x_m,y_m)$ ponto médio de AC, tem-se:

$$x_m = \frac{x_1 + x_3}{2} \text{ e } y_m = \frac{y_1 + y_3}{2}.$$

Logo, teremos:

$$x_g = \frac{2\left(\frac{x_1 + x_3}{2}\right) + x_2}{3} \text{ e } y_g = \frac{2\left(\frac{y_1 + y_3}{2}\right) + y_2}{3}$$

$$x_g = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \quad y_g = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

Portanto, as coordenadas do baricentro são:

$$G = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right).$$

2.5 Proposição (vetores perpendiculares)

Seja $\vec{u} = (a, b)$ um vetor não nulo no plano cartesiano. Então, os vetores $\vec{v} = (-b, a)$ e $\vec{w} = (b, -a)$ são obtidos a partir do vetor $\vec{u}$ através de uma rotação de 90° em torno da origem. No primeiro caso a rotação tem sentido anti-horário e no segundo caso tem sentido horário.

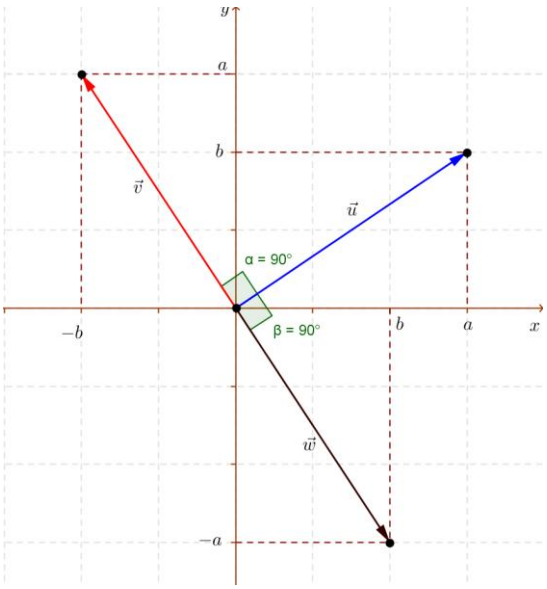


Figura 14 Vetores perpendiculares.

Demonstração:

Consideremos os vetores $\vec{u} = (a, b)$, $\vec{v} = (-b, a)$ e $\vec{w} = (b, -a)$. Devemos mostrar que $\vec{u} \perp \vec{v}$ e $\vec{u} \perp \vec{w}$.

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = (a, b) \bullet (-b, a) = -ab + ba = 0 \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{v}.$$

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = (a, b) \bullet (b, -a) = ab - ba = 0 \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{w}.$$

3. REFERÊNCIAS

[1] LINDOSO, J. *Uma proposta de abordagem da geometria na educação básica usando vetores. 2013. 98f.* Tese (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal do Maranhão, São Luís. 2013.

[2] BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática: ensino médio.* Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 1999.

[3] DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão e m Matemática. In: Aprendizagem em Matemática. Machado, S. D. A. (org.). pp.11-33. Campinas, SP: Papirus, 2003.

[4] IEZZI, Gelson, et al. *Matemática Ciência e Aplicações* - 3o *Ano do Ensino Médio.* São Paulo: Atual, 2010. v.3.

[5] LIMA, Elon Lages et al. *A Matemática do Ensino Médio*. 6.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.v.3

[6] http://moodle.profmat-sbm.org.br/MA23/2012/Unidades/MA23-U01.pdf (08/03/2013).

[7] http://moodle.profmat-sbm.org.br/MA23/2012/Unidades/MA23-U02.pdf (08/03/2013).

ANEXO: Solução do problema 1 usando as ferramentas usuais da geometria analítica.

1) Equação geral da reta que contém os pontos A e B.

$$y - y_0 = m(x - x_0); \qquad m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1-4}{2-1} = -3$$

$$y - 1 = -3(x-2) \Rightarrow 3x + y - 7 = 0.$$

2) Equação geral da reta que contém os pontos A e D.

$$m_{AD} = -\frac{1}{m_{AB}} \Rightarrow m_{AB} = \frac{1}{3}$$

$$y - y_A = m_{AB}(x - x_A) \Rightarrow y - 4 = \frac{1}{3}(x-1) \Rightarrow x - 3y + 11 = 0$$

3) Ponto médio de $\overline{AC}$ = ponto médio deBD.

$$\left(\frac{a+1}{2}, \frac{b+4}{2}\right) = \left(\frac{c+2}{2}, \frac{d+1}{2}\right)$$

$$a + 1 = c + 2 \Rightarrow a - c = 1 \quad (a)$$

$$b + 4 = d + 1 \Rightarrow d - b = 3 \quad (b)$$

4) Distância do ponto C à reta que contém os pontos A e B

$$d_{c,\overrightarrow{AB}} = \frac{|3a + b - 7|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10} \Rightarrow |3a + b - 7| = 10 \qquad (c)$$

5) Distância do ponto $C(a, b)$ à reta que contém pontos A e D.

$$\frac{|a - 3b + 11|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10} \Rightarrow |a - 3b + 11| = 10 \qquad (d)$$

6) Distância entre os pontos B e C.

$$[d(B,C)]^2 = (\sqrt{2})^2 \Rightarrow (a-2)^2 + (b-1)^2 = 10 \qquad (e)$$

De (c) e (d), temos:

$$3a + b - 7 = a - 3b + 11 \Rightarrow 2a + 4b = 18 \Rightarrow a + 2b = 9 \qquad (f)$$

Substituindo (f) em (e), temos:

$$(7-2b)^2 + (b-1)^2 = 10 \Rightarrow 5b^2 - 30b + 40 = 0 \Rightarrow b^2 - 6b + 8 = 0$$

Resolvendo a equação anterior, obtemos:

$$b = 2 \text{ ou } b = 4$$

Para $b = 2 \Rightarrow a = 5$, logo $C = (5, 2)$
Para $a = 5 \Rightarrow c = 4$ e $d = 5$, logo $D = (4, 5)$.

Observe que a solução 2 envolve conhecimentos de conteúdos relativos aos estudos do ponto e da reta (equações, distâncias, perpendicularismo, etc.).

- Exige conhecimentos de distância entre dois pontos;
- Exige conhecimento das equações de retas;
- Exige conhecimento de perpendicularismo de retas;
- Exige conhecimento de distância de um ponto à uma reta;
- Exige conhecimentos de que as diagonais de um quadrado se encontram nos seus pontos médios;
- Exige conhecimentos de resoluções de equações modulares.

Copyright © 2013 <José Ribamar Penha Lindoso e João de Deus Mendes da Silva>. O(s) autor(es) concede(m) licença não exclusiva, aos organizadores do VI HTEM, para publicar este documento no CD de trabalhos completos do evento. Qualquer outro uso é proibido sem o consentimento do(s) autor(es).