GEOMETRIA NAS CÔNICAS

Gilberto Gil Fidelis Gomes Passos

Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ – Programa de Pós-graduação em ensino de matemática - PROFMAT)

E-mail: gilbertogilgomes@hotmail.com

Diego Tranjan Viug

Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro (UNIRIO - Programa de Pós-graduação em ensino de matemática - PROFMAT)

E-mail: viug.diego@gmail.com

Conics are traditionally seen as objects related to analytic geometry, and in general, in high school, are seen in a very superficial. But, these curves also have a number of other important geometric properties, which mostly can be established by methods of elementary geometry well within reach of high school students.
From the study of conic this proposal aims to use the software Geogebra and Cabri 3D to display important geometric features of these curves. Therefore, we used some activities that initially explore the features of the ellipse, hyperbola and parabola, building each conic in Geogebra. Then, with the assistance of Cabri 3D, we show that the cone sections originate ellipse, parabola and hyperbola whose foci are the points of tangency with the Dandelin spheres. Still in Cabri 3D, visualize the lines of conical guidelines to define the eccentricity as well as a constant ratio between the distance from a point P to the focus and the distance from the point P to the line guideline.
The proposal also explores significant theorems of geometry of conic sections that are rarely addressed in high school as the theorem of tangents, La Hire's theorem and the theorem of Poncelet ellipses, hyperbolas and parabolas. In the final section are defined conjugates isogonals and concluded that given a triangle, we can construct an ellipse whose foci are enrolled conjugates isogonals.
Palavras-chaves: Cônicas, Elipse, Hipérbole e Parábola.

INTRODUÇÃO

As cônicas são tradicionalmente vistas como objetos referentes à geometria analítica, e em geral, no ensino médio, são vistas de modo muito superficial. Mas, estas curvas também possuem um número de outras propriedades geométricas importantes, onde em sua maioria pode ser estabelecida por métodos de geometria elementar bem ao alcance de estudantes do ensino médio.

A partir do estudo das cônicas a presente proposta tem como objetivo utilizar os softwares *Cabri 3D* e *Geogebra* para mostrar importantes características geométricas destas curvas. Para tal, utilizamos algumas atividades que inicialmente exploram as características da elipse, hipérbole e parábola, construindo cada uma das cônicas no *Geogebra*. Em seguida, com o auxílio do *Cabri 3D*, mostramos as seções no cone que originam a elipse, a hipérbole e a parábola cujos focos são os pontos de tangência com as esferas de *Dandelin*. Ainda no *Cabri 3D*, visualizamos as retas diretrizes das cônicas para assim definir a excentricidade como uma razão constante entre a distância de um ponto P ao foco e a distância do ponto P à reta diretriz. Voltando à utilização do *Geogebra*, é definida qualquer cônica a partir de um ponto fixo e de uma reta fixa, que serão um foco e uma reta diretriz desta cônica.

A proposta também explora significativos teoremas da geometria das cônicas que são raramente abordados no ensino médio, como o teorema das tangentes, o teorema de *La Hire* e o teorema de *Poncelet* para elipses, hipérboles e parábolas. Na seção final são definidos os conjugados isogonais e concluído que dado um triângulo, pode-se construir uma elipse inscrita cujos focos são os conjugados isogonais.

Cabe ressaltar que a utilização desses softwares permite uma melhor visualização dos alunos e os permite ficar mais próximos da abstração necessária para o entendimento do conceito. Nessa perspectiva, mostramos as propriedades das cônicas, a definição de qualquer cônica a partir da excentricidade e demonstramos os teoremas de *Dandelin*, das tangentes, de *La Hire* e de *Poncelet*, utilizando os softwares *Cabri 3D* e o *Geogebra*. Acreditamos que esse é o melhor caminho capaz de despertar no aluno o interesse pela beleza da geometria plana e espacial e compartilhar esse conhecimento com a geometria analítica, além de ser uma excelente ferramenta para os professores tornarem as aulas de matemática mais dinâmicas.

Seção 1: Definindo as cônicas com auxilio do Geogebra.

Utilizaremos o software Geogebra (geometria dinâmica) para mostras as curvas cônicas no plano. Veremos as cônicas como propriedade de um conjunto de pontos que gozam de uma mesma propriedade, ou seja, lugar geométrico.

Elipse

Observe o passo a passo:
1°) Construímos uma elipse utilizando o botão específico para esta cônica. Marcamos dois pontos (F_1 e F_2), que são os focos, e depois um terceiro ponto (A) que gera a curva.
2°) Escolhendo o botão "ponto" geramos um quarto ponto (P) sobre a elipse.
3°) Utilizando o botão "segmento determinado por dois pontos" construiremos os segmentos que unem este ponto P até os focos, PF_1 e PF_2.
4°) Automaticamente o programa chamará os comprimentos desses segmentos de a e b. Observe este fato ao lado esquerdo na "janela de álgebra".
5°) Na linha de entrada, localizada na parte inferior da tela digite "a + b" (ENTER). Note que aparecerá um novo dado (d) na "janela de entrada".
6°) Escolha o botão "mover" e mova o ponto P sobre a elipse e observe que esta soma (d) nunca se altera.
Logo, isso mostra que a elipse é o lugar geométrico dos pontos do plano em que a soma das distâncias para dois pontos predeterminados é constante.

Hipérbole

1°) Construímos uma hipérbole utilizando o botão específico para esta cônica. Marcamos dois pontos (F_1 e F_2), que são os focos, e depois um terceiro ponto (A) que gera a curva.
2°) Escolhendo o botão "ponto" geramos um quarto ponto (P) sobre a hipérbole, este ponto pode estar em qualquer um dos dois ramos.
3°) Utilizando o botão "segmento determinado por dois pontos" construiremos os segmentos que unem este ponto P até os focos, PF_1 e PF_2.
4°) Automaticamente o programa chamará os comprimentos desses segmentos de a e b. Observe este fato ao lado esquerdo na "janela de álgebra".
5°) Na linha de entrada, localizada na parte inferior da tela digite "abs(a – b)" (ENTER). Note que aparecerá um novo dado (d) na "janela de entrada". Esta entrada "abs(a – b)" significa valor absoluto de (a – b), visto que a diferença as vezes, poderá ser negativa.
6°) Escolha o botão "mover" e mova o ponto P sobre a hipérbole, observe que o valor absoluto dessa diferença (d) nunca se altera.

Parábola

1°) Para a construção de uma parábola o procedimento não é análogo aos outros dois. Primeiro devemos criar um ponto (F) qualquer e uma reta que não contenha este ponto.
2°) Agora podemos construir uma parábola utilizando o botão específico para esta cônica, basta selecionar o ponto e a reta que foram construídos no passo anterior. Este ponto será o foco e a reta será a diretriz da parábola que teremos.
3°) Escolhendo o botão "ponto" geramos um ponto (P) sobre a parábola.
4°) Utilizando o botão "segmento determinado por dois pontos" construiremos o segmento que une este ponto P até o foco F.
5°) Construiremos uma reta perpendicular a reta inicial e que passe pelo ponto P, para isso utilizamos o botão "Reta perpendicular".
6°) Novamente com o botão "ponto" geramos um ponto (A) na interseção das duas retas. Podemos agora clicando com o botão esquerdo na reta que contém P e A clicar em "exibir objeto" para que esta reta desapareça, pois ela não terá mais utilidade depois de encontrado o ponto A.
7°) Construiremos agora o segmento PA.
8°) Selecionando o botão "mover" podemos modificar a posição do ponto P na parábola, e isso nos permitirá perceber a distancia do ponto P até o foco e até a reta serão sempre iguais.

Seção 2: Mostrar no Cabri 3d os cortes no cone que definem a elipse, hipérbole e parábola (Teorema de Dandelin)

As seções cônicas, embora possam ser definidas separadamente, são originadas a partir de secções de um mesmo cone por planos distintos.
Apresentaremos nessa seção, exemplos dessas seções utilizando o software Cabri 3d e as suas respectivas demonstrações.

1) Secção formando uma elipse

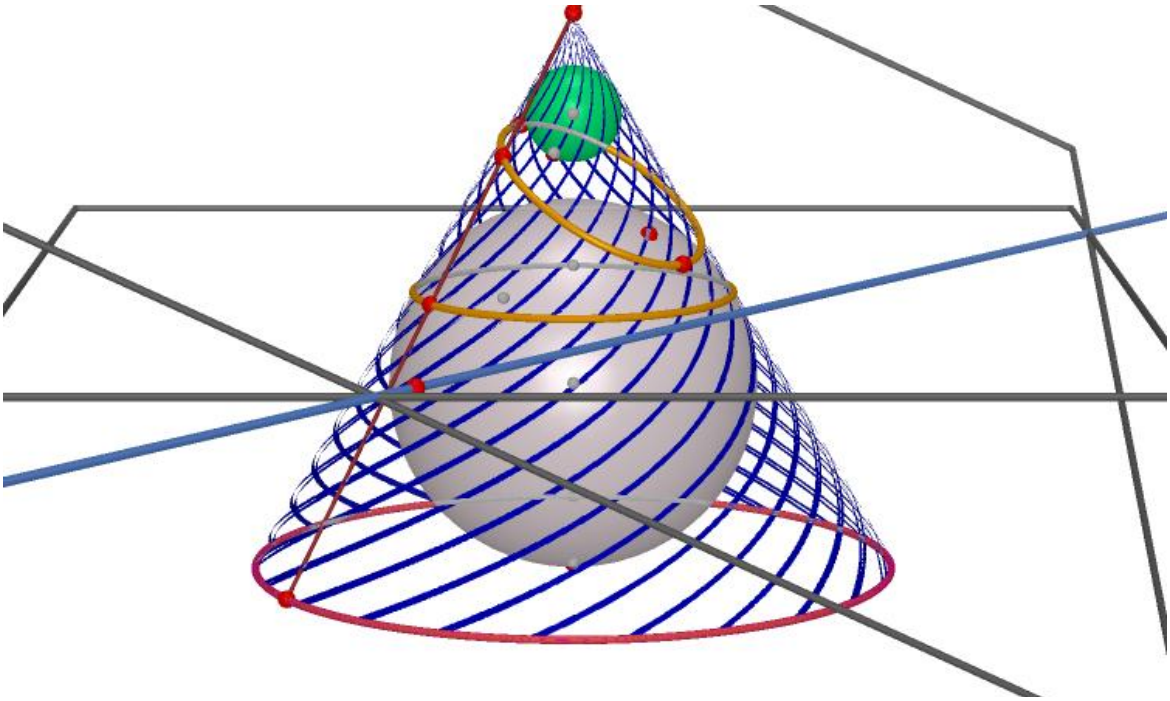


Figura 1: Plano oblíquo gerando elipse.

2) Secção formando uma hipérbole

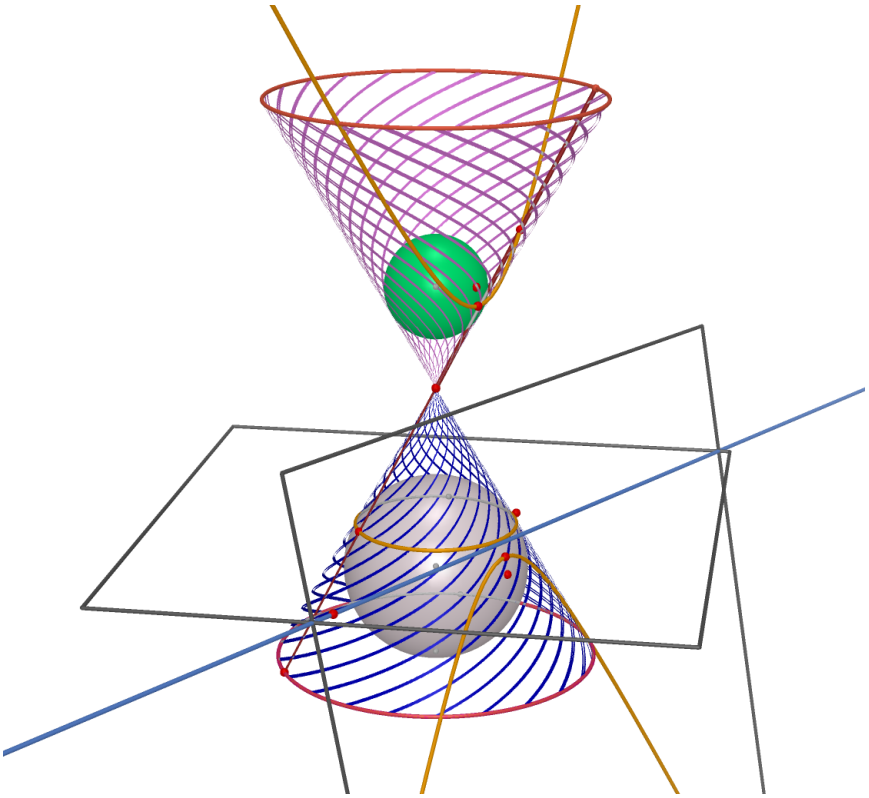


Figura 2: Plano oblíquo gerando hipérbole.

3) Secção formando uma parábola

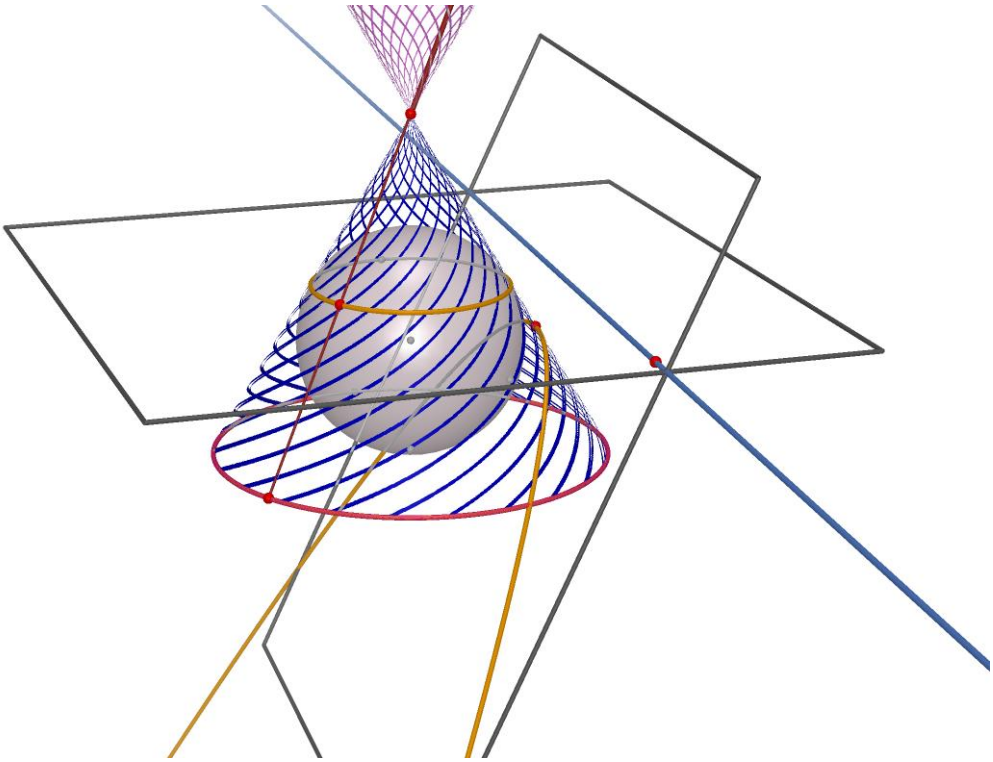


Figura 3: Plano paralelo gerando parábola.

Demonstrações:

Consideremos duas esferas inscritas num cone de revolução e uma seção no cone por um plano π que tangencia simultaneamente estas duas esferas.

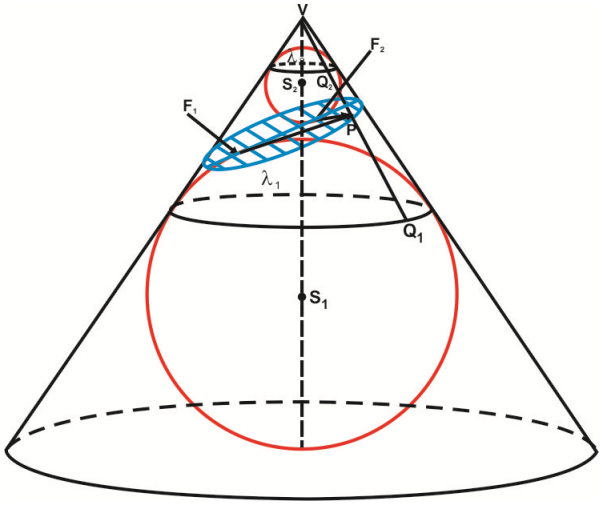


Figura 4: Focos da Elipse.

Tomemos arbitrariamente um ponto P da interseção de π com o cone e tracemos a geratriz deste cone que contém P. Sejam os pontos Q_1 e Q_2 a interseção da geratriz com as esferas λ_1 e λ_2 respectivamente e F_1 e F_2 a interseção de π com as esferas λ_1 e λ_2 respectivamente, como mostra a fig. 4. Temos então que $PF_1 = PQ_1$, pois PQ_1 e PF_1 são tangentes às esferas. Analogamente $PF_2 = PQ_2$. Portanto, $PF_1 + PF_2 = Q_1Q_2$, que é constante, pois o segmento Q_1Q_2 pertence à geratriz do cone e está compreendido entre dois planos paralelos às bases do cone e esta constante não depende da escolha de P. Logo a seção determinada pelo plano π é uma elipse.

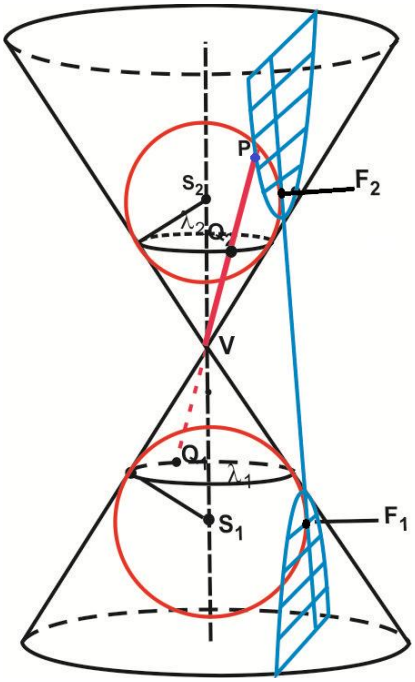


Figura 5: Focos da Hipérbole.

Caso π seccione o cone de modo que intersecte os dois ramos cônicos, a figura que formaremos é uma hipérbole, pois desse modo temos então que $PF_1 = PQ_1$, pois PQ_1 e PF_1 são tangentes às esferas, como mostra a fig. 5. Analogamente, $PF_2 = PQ_2$. Portanto, $PF_1 - PF_2 = Q_1Q_2$, que é

constante, pois o segmento Q_1Q_2 pertence à geratriz do cone e está compreendido entre dois planos paralelos às bases do cone e esta constante não depende da escolha de P.
Caso π seja paralelo a alguma geratriz, a figura que formaremos é uma parábola.

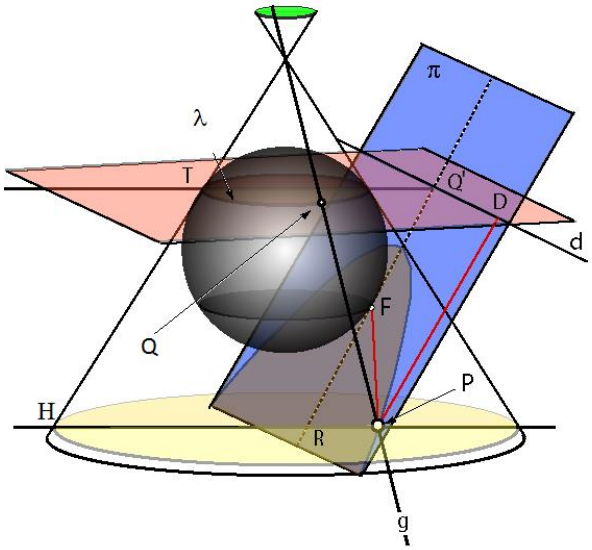


Figura 6: Foco da Parábola.

Por um ponto P qualquer da interseção do cone com o plano π tracemos a geratriz que intersecta a esfera em Q. Seja ainda F a interseção de π com a esfera λ. Temos que PF = PQ. Por outro lado, seja σ o plano que contém a interseção da esfera com o cone e σ' o plano paralelo a σ que contém P, logo temos uma reta d que é a interseção de π com σ. Da figura, temos que HT = RQ' = PQ = PD, pois H e P pertencem a σ', e os quadriláteros HTQ'R e RQ'DP são paralelogramos, logo PF = PD e observamos que parábola é o lugar geométrico dos pontos cujas distâncias a um ponto fixo e uma reta fixa são iguais.

Seção3 : Mostrar no Cabri 3d o que é a excentricidade.

Podemos definir as cônicas através da de um ponto fixo F e de uma reta fixa r. Uma cônica está bem definida como o lugar geométrico dos pontos cujas distâncias a F e a r mantém uma razão constante. Esta razão é o que chamamos de excentricidade.

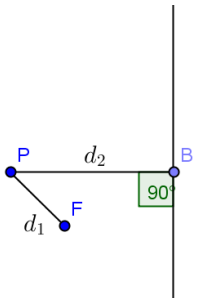


Figura 7: Foco e reta diretriz.

$$\frac{d_1}{d_2} = excentricidade(\varepsilon) \qquad (1)$$

Mostremos então que esta razão é uma constante.

Suponha um cone circular reto de vértice S e um plano π que o corta obliquamente. Considere a esfera inscrita no cone e tangente a π no ponto F_1. Seja também um plano σ que contém os pontos de tangência da esfera e do cone . Os planos π e σ se intersectam em uma reta t, como mostra a fig. 8.

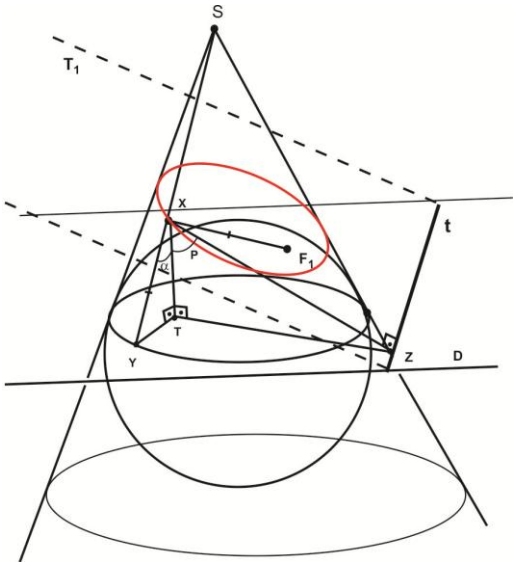


Figura 8: Intersecção dos planos gerando a reta diretriz.

Tracemos uma geratriz desse cone, que terá $X \in \pi$ e $Y \in \sigma$. Baixando a perpendicular de X sobre o plano σ, determinamos dois triângulos retângulos XTZ e XTY, onde Z é o pé da perpendicular baixada de X sobre a reta t.

Com $\alpha = \measuredangle TXY$ e $\beta = \measuredangle TXZ$, temos que $\cos\beta = \frac{XT}{XZ}$ e $\cos\alpha = \frac{XT}{XY}$, logo, $\frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = \frac{XY}{XZ}$.

Mas sabemos que XY = XF_1, pois ambos os segmentos são tangentes à esfera partindo de X, que $\cos\alpha$ e $\cos\beta$ são constantes, pois α é o ângulo do eixo do cone com uma geratriz e β é o ângulo entre os planos π e σ. Portanto, $\frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = \frac{XY}{XZ} = \frac{XF_1}{XZ}$, ou seja, $\frac{XF_1}{XZ} = e$ é uma constante que se chama excentricidade.

Caso e < 1, temos uma elipse; caso e > 1, temos uma hipérbole e caso e = 1, temos uma parábola.

Podemos mostrar com o software Cabri 3D , como na fig.9, o explicitado acima, mostrando a construção da reta diretriz e a razão que determina a excentricidade.

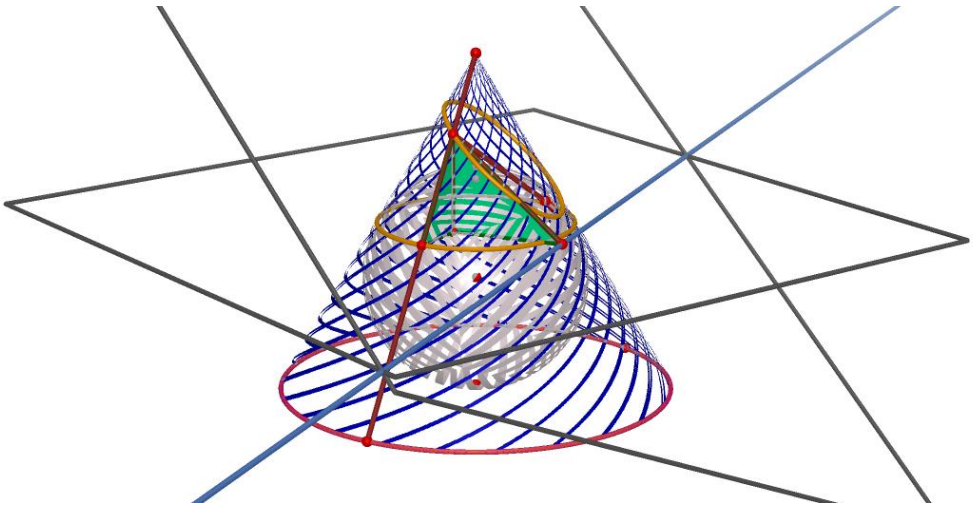


Figura 9: Excentricidade.

Seção 4: Parâmetros e raios vetores de uma cônica.

Chamamos de raio vetor o vetor que tem uma extremidade no foco de uma cônica e outra em um ponto qualquer de sua curva. Existem infinitos raios vetores, pois a cônica é formada por infinitos pontos, mas mostraremos a seguir como calcularmos os raios vetores em uma elipse e uma hipérbole, baseados nas coordenadas de um ponto genérico (x, y).

1° Caso: Raio vetor em uma elipse.

Para simplificar os cálculos, tomemos uma elipse centrada na origem e um ponto P(x, y), como mostra a fig. 10.

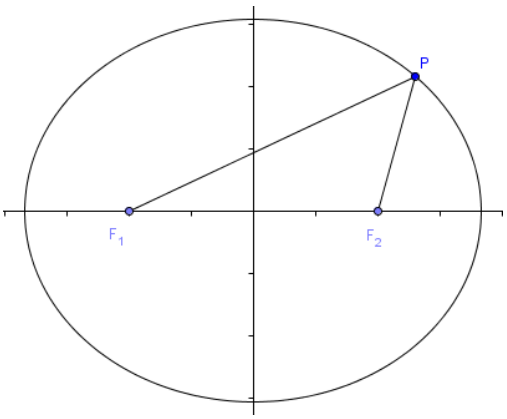


Figura 10: Raios vetores na elipse.

Note que as coordenadas dos focos são $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$, note também que $PF_1 + PF_2 = 2a$.
A partir desta equação, que é a definição de elipse, temos que:
$PF_1 = 2a - PF_2 \rightarrow (PF_1)^2 = (2a - PF_2)^2 \leftrightarrow (PF_1)^2 = 4a^2 - 4aPF_2 + (PF_2)^2$, analiticamente sabemos os valores de $(PF_1)^2$ e $(PF_2)^2$, para isso basta aplicarmos a distância entre dois pontos do plano.Logo, $(x + c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a.PF_2 + (x - c)^2 + y^2 \leftrightarrow 4xc = 4a^2 - 4aPF_2$, portando, $PF_2 = a - \frac{c}{a}x$. Como sabemos que $\frac{c}{a} = e$, excentricidade, podemos reescrever $PF_2 = a - ex$.
Para encontramos o outro raio vetor basta utilizarmos a expressão inicial, $PF_1 + PF_2 = 2a$.

$$\begin{cases} PF_1 = a + ex \\ PF_2 = a - ex \end{cases} \qquad (2)$$

2° Caso: Raio vetor em uma hipérbole.

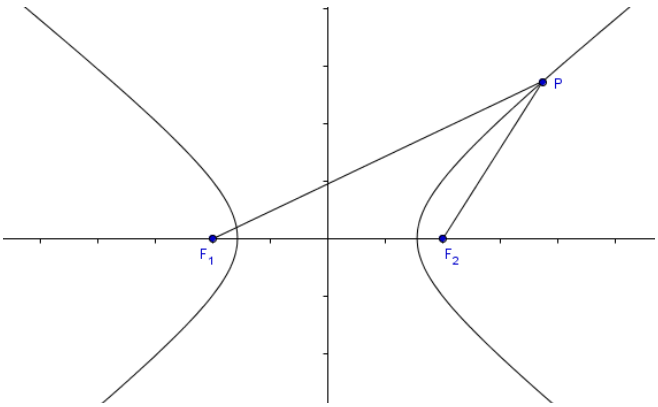


Figura 11: Raios vetores no ramo direito da hipérbole.
Para o ramo direito da hipérbole temos que $PF_1 - PF_2 = 2a$.

$PF_1 = 2a + PF_2 \rightarrow (PF_1)^2 = (2a + PF_2)^2 \leftrightarrow (PF_1)^2 = 4a^2 + 2.2a.PF_2 + (PF_2)^2$, analiticamente sabemos os valores de $(PF_1)^2$ e $(PF_2)^2$, para isso basta aplicarmos a distância entre dois pontos do plano. Logo, $(x + c)^2 + y^2 = 4a^2 + 4a.PF_2 + (x - c)^2 + y^2 \leftrightarrow 4xc = 4a^2 + 4a.PF_2$, portando, $PF_2 = -a + \frac{c}{a}x$.
Como sabemos que $\frac{c}{a} = e$, excentricidade, podemos reescrever $PF_2 = ex - a$.

Para encontramos o outro raio vetor basta utilizarmos a expressão inicial, $PF_1 = PF_2 + 2a$.

$$\begin{cases} PF_1 = ex + a \\ PF_2 = ex - a \end{cases} \quad (3)$$

Para o ramo esquerdo da hipérbole valerá $PF_2 - PF_1 = 2a$.

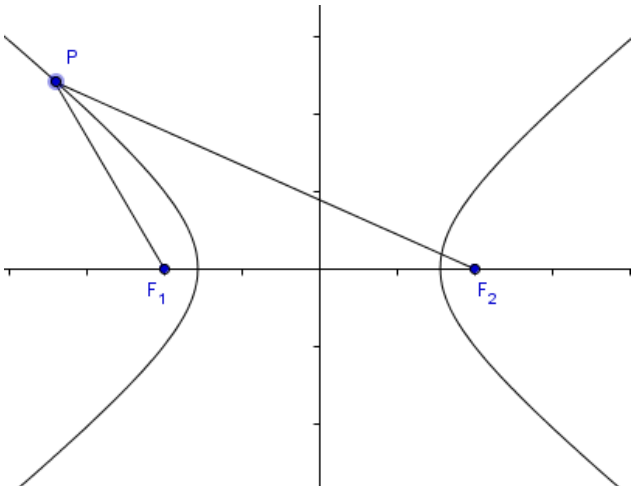


Figura 12: Raios vetores no ramo esquerdo da hipérbole.

Desenvolvendo como no caso anterior temos:

$PF_2 = 2a + PF_1 \rightarrow (PF_2)^2 = (2a + PF_1)^2 \leftrightarrow (PF_2)^2 = 4a^2 + 2.2a.PF_1 + (PF_1)^2$, analiticamente sabemos os valores de $(PF_1)^2$ e $(PF_2)^2$, para isso basta aplicarmos a distância entre dois pontos do plano.
Logo, $(x - c)^2 + y^2 = 4a^2 + 4a.PF_1 + (x + c)^2 + y^2 \leftrightarrow -4xc = 4a^2 + 4a.PF_1$, portando,
$PF_1 = -a - \frac{c}{a}x$.
Como sabemos que $\frac{c}{a} = e$, excentricidade, podemos reescrever $PF_1 = -ex - a$. Para encontramos o outro raio vetor basta utilizarmos a expressão inicial, $PF_2 = PF_1 + 2a$.

$$\begin{cases} PF_1 = -ex + a \\ PF_2 = -ex - a \end{cases} \quad (4)$$

Parâmetro de uma cônica

Chamamos de parâmetro de uma cônica a semicorda focal mínima e mostraremos como calculamos seu valor em elipses, hipérboles e parábolas.

1° Caso: Parâmetro de uma elipse.

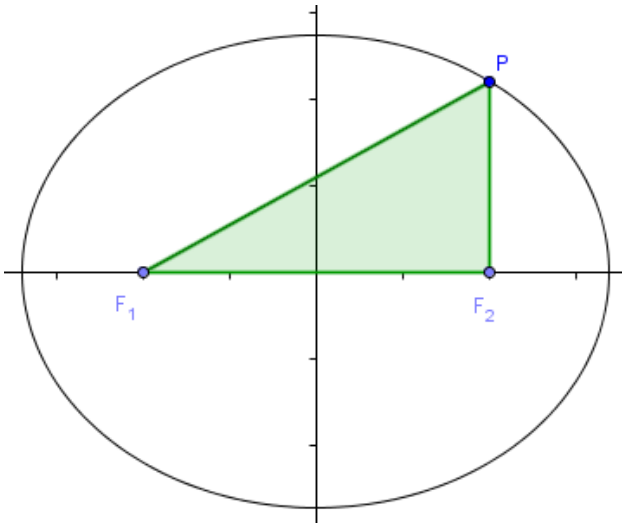


Figura 13: Parâmetro de uma elipse.

Note que o $F_1F_2 = 2c$, $PF_2 = p$ (parâmetro) e $PF_1 = 2a - p$, dessa forma por ser a distancia focal mínima sabemos que ABD = 90°, portanto, aplicando o teorema de Pitágoras temos:
$(2a - p)^2 = (2c)^2 + p^2 \rightarrow 4a^2 - 4ap + p^2 = 4c^2 + p^2 \leftrightarrow 4ap = 4a^2 - 4c^2 \leftrightarrow 4ap = b^2 \leftrightarrow p = b^2/a$.

2° Caso: Parâmetro de uma hipérbole.

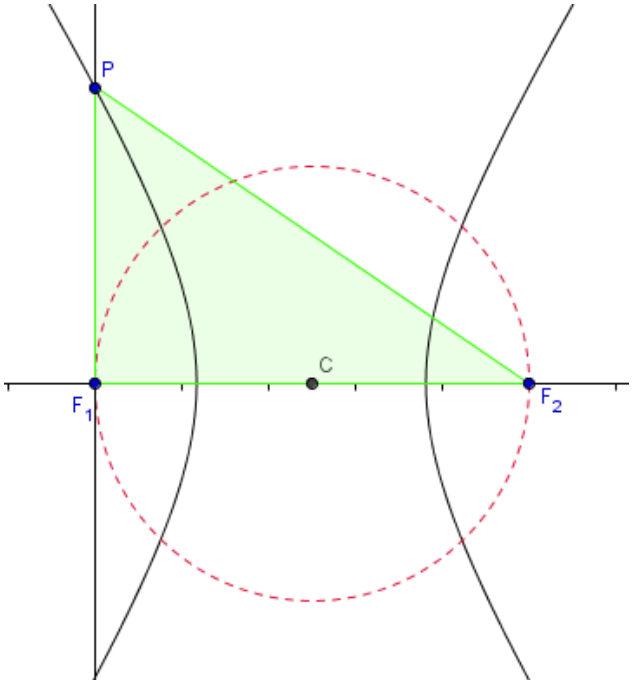


Figura 14: Parâmetro numa

O parâmetro referente ao ramo esquerdo da hipérbole será calculado de forma análoga ao parâmetro da elipse, note que mais uma vez utilizaremos o teorema de Pitágoras, $F_1F_2 = 2c$, $PF_1 = p$ e $PF_2 = 2a + p$.
$(2a + p)^2 = p^2 + (2c)^2 \rightarrow 4a^2 + 4ap + p^2 = p^2 + 4c^2 \leftrightarrow 4ap = 4c^2 - 4a^2 \leftrightarrow ap = b^2 \leftrightarrow p = b^2/a$.
Para o ramo direito temos o calculo de forma análoga.

3° Caso: Parâmetro de uma parábola.

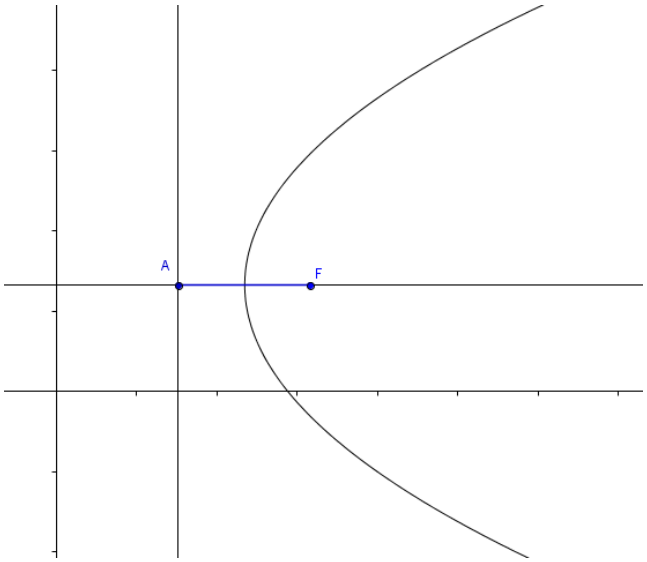


Figura 15: Parâmetro em uma parábola.

Na parábola o parâmetro é a distancia do foco a diretriz.

Teorema das tangentes na Elipse.

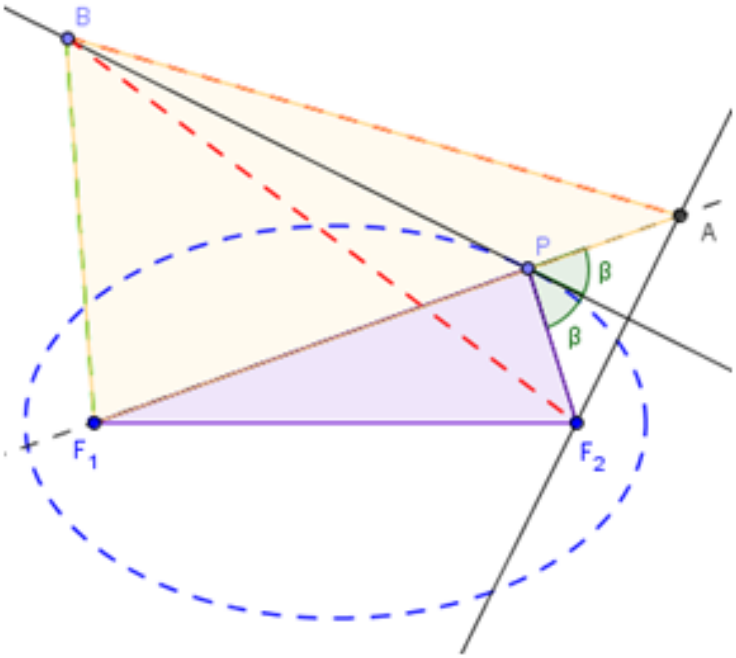


Figura 16: Teorema das tangentes na elipse.

Tomemos um ponto P qualquer da Elipse de focos F_1 e F_2. Seja t a bissetriz externa do angulo P do triângulo PF_1F_2. Queremos provar que t é tangente à elipse.
Tomemos o ponto A, simétrico de F_2 em relação à bissetriz externa de P, como na fig.16. Note que A está na reta PF_1, pois o triângulo PF_2A é isósceles, logo t é mediatriz de F_2A, $PF_2 = PA$ e $PF_1 + PF_2 = F_1A = 2a$. Tomando um ponto B qualquer em t, observe que $BA = BF_2$, então $BF_1 + BF_2 = BF_1 + BA > F_1A = 2a$, desta forma temos que B está fora da elipse então P é único como queríamos demonstrar.

Teorema das tangentes na hipérbole.

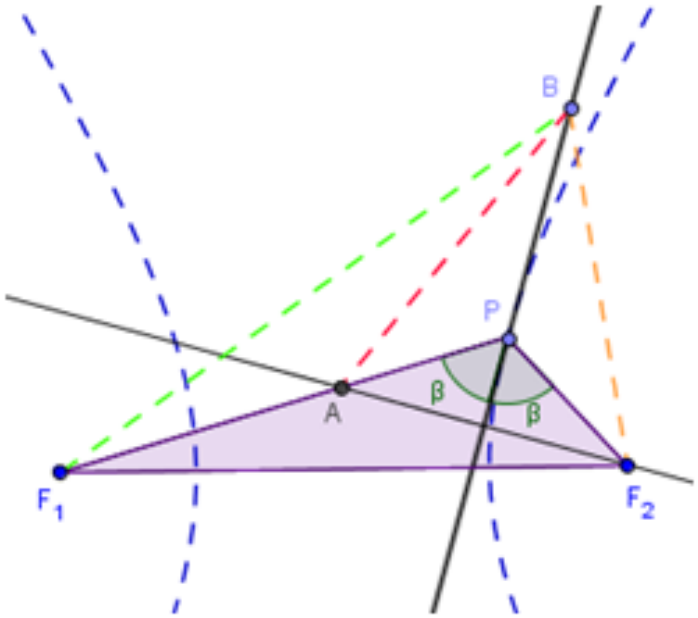


Figura 17: Teorema das tangentes na hipérbole.

Tomemos um ponto P qualquer da hipérbole de focos F_1 e F_2. Seja t a bissetriz interna do ângulo P do triângulo PF_1F_2. Queremos provar que t é tangente à hipérbole.
Tomemos o ponto A, simétrico de F_2 em relação à bissetriz interna de P, como na fig.17. Note que A está na reta PF_1, pois o triângulo PF_2A é isósceles, logo t é mediatriz de F_2A, $PF_2 = PA$ e $|PF_1 - PF_2| = |PF_1 - PA| = 2a$. Tomando um ponto B qualquer em t, observe que $BA = BF_2$, então $|BF_1 - BF_2| = |BF_1 - BA| > F_1A = 2a$, desta forma temos que B está fora da hipérbole então P é único como queríamos demonstrar.

Teorema das tangentes na parábola.

Lema: O ponto simétrico do foco da parábola em relação à bissetriz é um ponto sobre a diretriz.

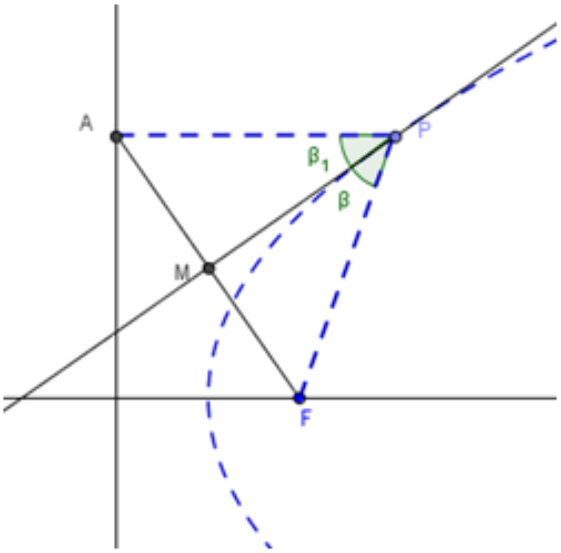


Figura 18: Teorema das tangentes na parábola.

Seja P um ponto qualquer da parábola e A sua projeção ortogonal sobre a reta diretriz como na fig. 18. Por definição PF = PA, traçando a bissetriz de APF note que esta é também mediatriz de

AF, pois o triângulo APF é isósceles. Desta forma M é ponto médio de AF e concluímos que A é simétrico de F em relação à bissetriz de P.

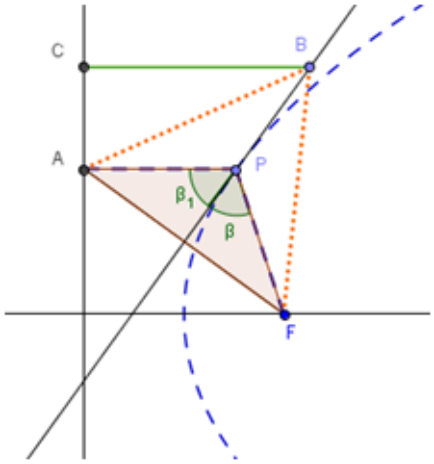


Figura 19: Simetria do foco em relação a tangente.

Tomemos um ponto P qualquer da parábola de foco F e diretriz r. Seja t a bissetriz interna do ângulo P do triângulo PAF, vale ressaltar que A é o ponto simétrico de F em relação a reta t e este ponto está sobre a diretriz. Queremos provar que t é tangente à parábola.
Tomando um ponto B qualquer em t, observe que BA = BF e tomando um ponto C que é projeção ortogonal de B na reta diretriz temos que BA > BC, então BF = BA > BC, desta forma temos que B está fora da parábola então P é único como queríamos demonstrar.

Teorema de La Hire nas elipses

Definição: Circunferência principal da elipse é a circunferência cujo centro coincide com o da elipse e o seu raio vale a.

O Teorema de La Hire

Sejam M e N as projeções dos focos F e F' em relação à reta t, tangente à elipse no ponto P. Os pontos M e N pertencem à circunferência principal.

Demonstração:

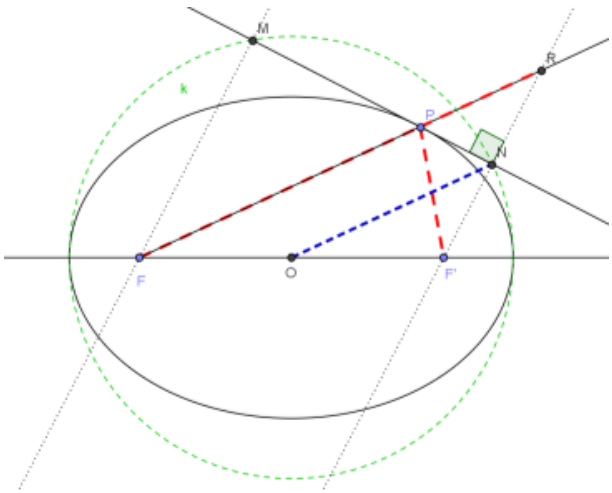


Figura 20: Teorema de La Hire na elipse.
Tomemos o ponto R simétrico a F' em relação à tangente t. O ponto N, médio de F'R é a projeção de F' em r. Pelo teorema das tangentes, temos que r é mediatriz de F'R, então

PF' = PR e PF + PF' = 2a. Temos então que ON é base média do triângulo FF'R e, portanto ON = a. A demonstração para o ponto M é análoga.

Teorema de La Hire na Hipérbole

Sejam M e N as projeções dos focos F e F' em relação à reta t, tangente à hipérbole no ponto P. Os pontos M e N pertencem à circunferência principal.

Demonstração:

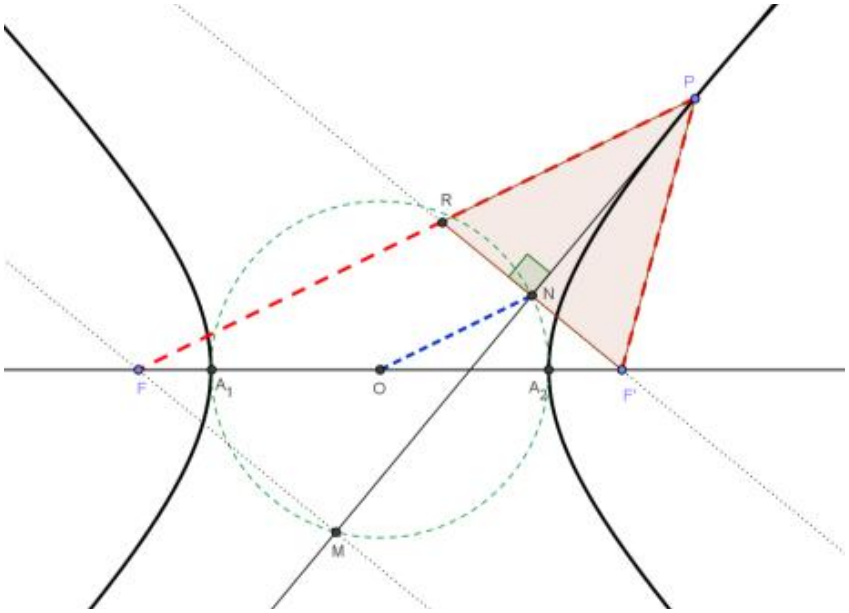


Figura 21:Teorema de La Hire na hipérbole.

Tomemos o ponto R simétrico a F' em relação à tangente t. O ponto N, médio de F'R é a projeção de F' em r. Pelo teorema das tangentes, temos que r é mediatriz de F'R, então PF' = PR e PF – PF' = FR = 2a. Temos então que ON é base média do triângulo FF'R e, portanto ON = a. A demonstração para o ponto M é análoga.

Teorema de Poncelet nas elipses

Dada uma elipse de focos F e F' e duas retas r e s tangentes à elipse nos pontos M e N respectivamente. Temos então que os ângulos $\measuredangle MPF$ e $\measuredangle NPF'$ são congruentes.

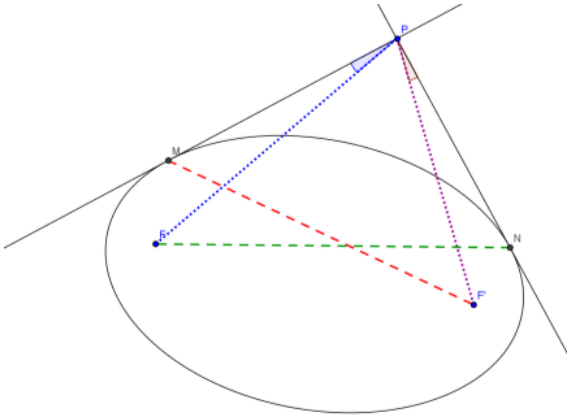


Figura 22: Teorema de Poncelet na elipse.

Demonstração:

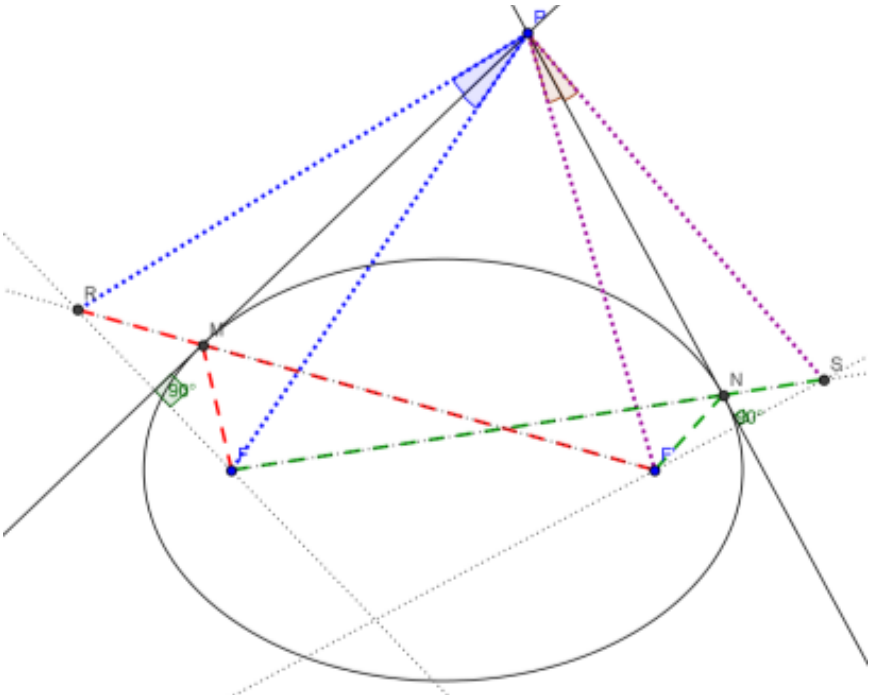


Figura 23: Demonstração do teorema de Poncelet.

Tomemos o ponto R, simétrico de F em relação à reta tangente r. Observemos que R pertence à reta MF', pois a reta r é bissetriz externa do ângulo M do triângulo MFF'. Logo MF = MR e PF = PR, com a reta r mediatriz do segmento FR. Seja S, simétrico de F' em relação à reta tangente s. Analogamente, F'N = NS e PF' = PS. Temos então que MF + MF' = RF' = 2a e NF + NF' = FS = 2a. Logo temos que os triângulos PRF' e PSF são congruentes pelo caso LLL e, portanto $\measuredangle RPF = \measuredangle SPF'$ e $\measuredangle MPF = \measuredangle NPF'$.

Teorema de Poncelet na Hipérbole

Dada uma elipse de focos F e F' e duas retas r e s tangentes à hipérbole nos pontos M e N respectivamente. Temos então que os ângulos $\measuredangle MPF$ e $\measuredangle NPF'$ são congruentes.

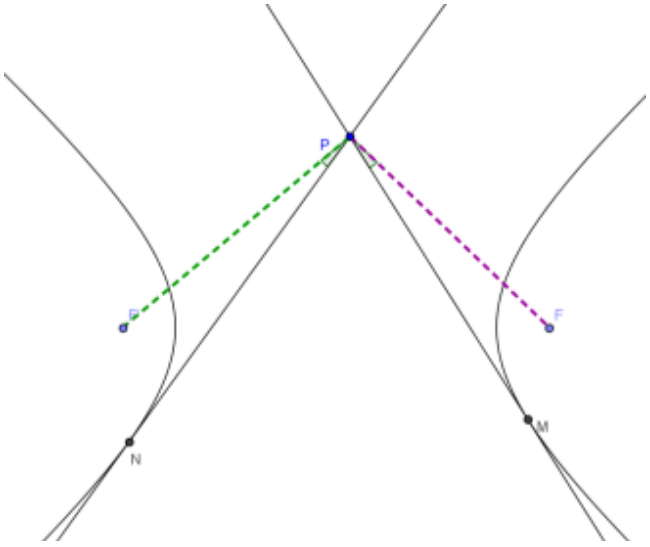


Figura 24: Teorema de Poncelet na hipérbole.

Demonstração:

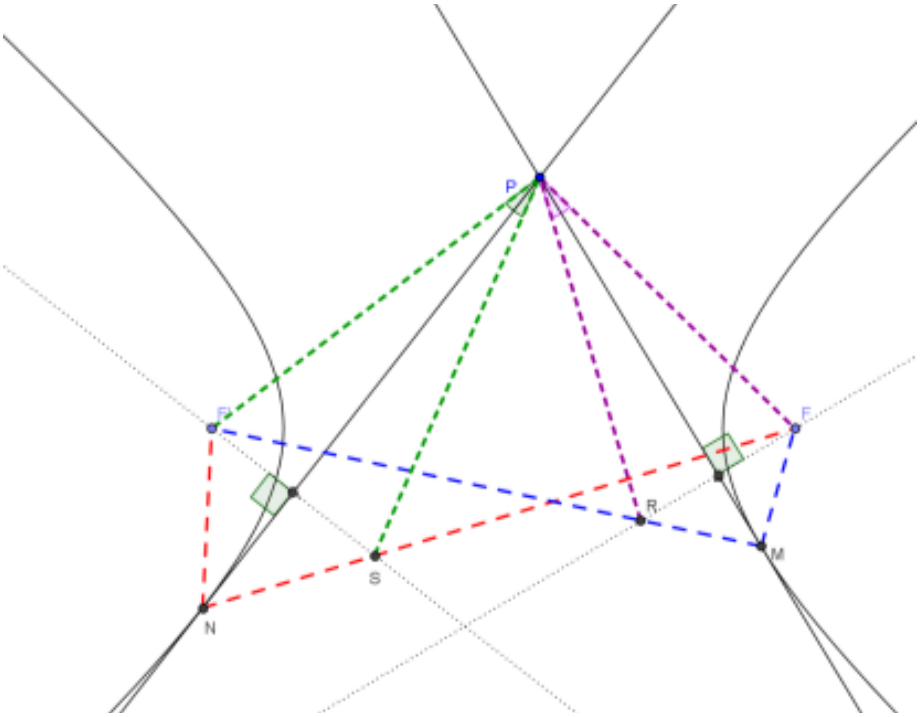


Figura 25: Demonstração do teorema de Poncelet.

Tomemos o ponto R, simétrico de F em relação à reta tangente r. Observemos que R pertence à reta MF', pois a reta r é bissetriz interna do ângulo M do triângulo MFF'. Logo MF = MR e PF = PR, com a reta r mediatriz do segmento FR. Seja S, simétrico de F' em relação à reta tangente s. Analogamente, F'N = NS e PF' = PS. Temos então que MF' – MF = RF' = 2a e NF' – NF = FS = 2. Logo temos que os triângulos PRF' e PSF são congruentes pelo caso LLL e portanto $\measuredangle RPF = \measuredangle SPF'$ e $\measuredangle MPF = \measuredangle NPF'$.

Teorema de Poncelet nas Parábolas

Sejam as retas r e s tangentes a uma parábola nos pontos M e N respectivamente a partir de um ponto P. Tracemos por P uma reta t, paralela ao eixo, formando um ângulo α com s. Seja ainda $\measuredangle FPM = \theta$. Temos que os ângulos α e θ são congruentes.

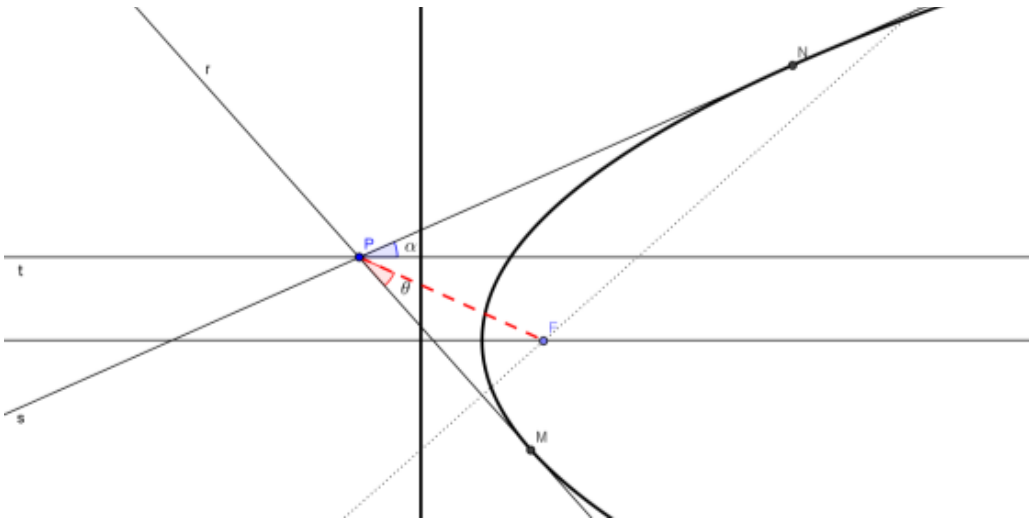


Figura 26: Teorema de Poncelet na parábola.

Demonstração:

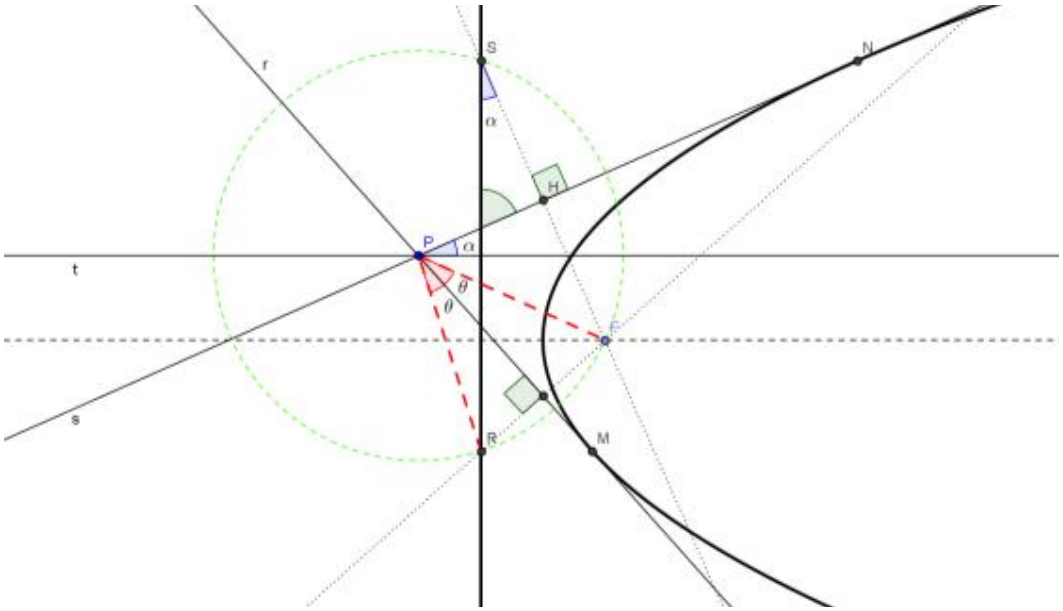


Figura 27: Demonstração do teorema de Poncelet.

É sabido que o simétrico do foco em relação à reta tangente na parábola pertence à reta diretriz. Sejam os pontos R e S simétricos do foco F em relação às retas r e s respectivamente. Temos então que as retas r e s são mediatrizes de RF e SF respectivamente. Logo P é o circuncentro do triângulo FSR e o ângulo $\measuredangle FSR = \alpha = \theta$, pois $\measuredangle FSR$ é inscrito no círculo e enxerga o mesmo arco cujo ângulo central é 2α.

Conjugados Isogonais

Definição: Dado um triângulo ABC, o conjugado isogonal em relação a ABC de um ponto T do plano de ABC é obtido refletindo as retas TA, TB e TC em relação às bissetrizes internas de ABC que passam por A, B e C, respectivamente. As retas resultantes são concorrentes no isogonal T' de T.

Na figura a seguir AP, BQ e CR são bissetrizes e T um ponto qualquer e T' seu isogonal.

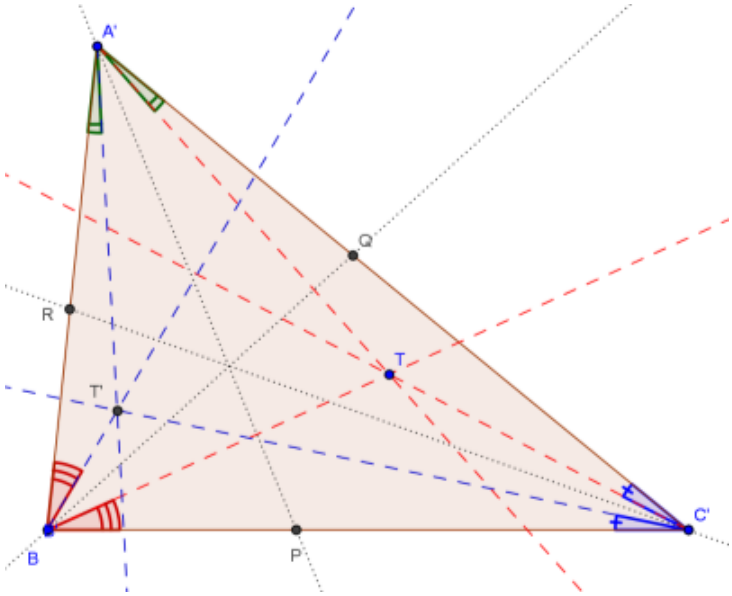


Figura 28: Conjugados isogonais.

Conhecendo o teorema de Poncelet, é possível construir uma elipse inscrita em ABC com os focos em T e T'.
Seja S o ponto simétrico de T em relação a AC e E a interseção de AC com T'S. O ponto E pertence à elipse, pois a reta AC será bissetriz externa de E no triângulo TT'E. Analogamente, determinamos os outros pontos de tangência.

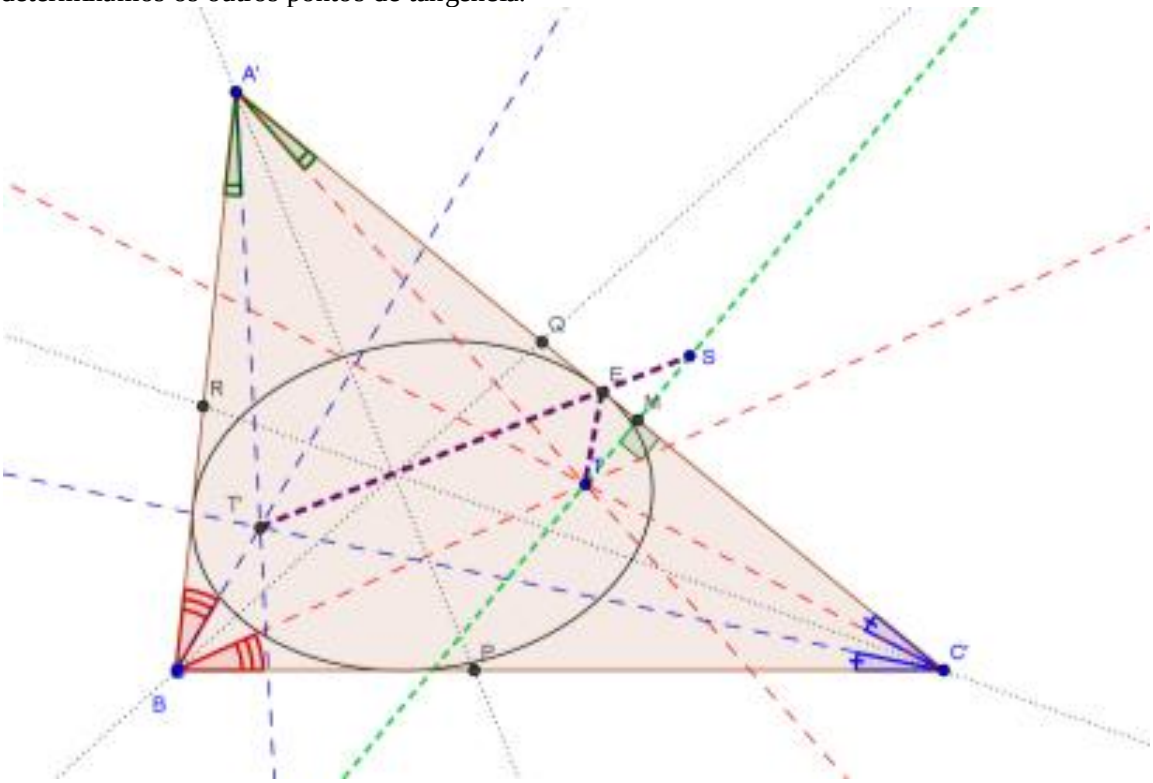


Figura 29: Elipse inscrita.

Referências

1. ZALAVSKY, A.A; AKOPYAN, A. V.(2007) *Geometry of conics*. Ams (Ed.) Estados Unidos, 4 – 21.
2. CARONNET, T.H (1959) *Exercices de Géométrie*. Les Courbes Uselles. França, 11 – 45.
3. INSTITUTO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES.(2010) *Geometria: una visión de la estereometria*. Lumbreras (Ed.) Peru, 690 – 710.
4. SMITH, P.F; GALE, A.S.; NEELLEY, J.H(1958). *New analytic geometry*. Ginn and company(Ed). Estados Unidos, 91 – 107.

Copyright © 2013. PASSOS, Gilberto; VIUG, Diego. Os autores concedem licença não exclusiva, aos organizadores do VI HTEM, para publicar este documento no caderno de resumos do evento. Qualquer outro uso é proibido sem o consentimento dos autores.