O ESTUDO DA FUNÇÃO SENO COM O SOFTWARE CABRI-GÉOMÈTRE II

Paulo Masanobo Miashiro

Universidade Bandeirante Anhanguera.

paulo@miashiro.com

Maria Elisa Esteves Lopes Galvão

Universidade Bandeirante Anhanguera.

meelg@ig.com.br

A motivação para este trabalho de pesquisa surgiu da constatação, em sala de aula, de que uma das dificuldades dos alunos, no estudo das funções trigonométricas era a compreensão do ciclo trigonométrico. O nosso objetivo principal foi investigar a contribuição de uma estratégia de ensino formada pela combinação dos procedimentos construtivos da geometria dinâmica do Cabri-Géomètre II, que criamos especialmente para o estudo da trigonometria com os materiais concretos, que idealizamos, entre eles o dispositivo "ciclo-trigonométrico". Baseados na Teoria da Aprendizagem Significativa, de Ausubel, escolhemos os conceitos subsunçores relacionados à função seno, e aplicamos intervenções à nove alunos de licenciatura em matemática, usando a metodologia do Design Based Research. Para elaborar as atividades, consideramos o desenvolvimento histórico dos principais conceitos da Trigonometria e as recomendações dos Parâmetros Curriculares Nacionais.". Um teste inicial com os alunos, revelou que eles não conseguiam transformar tabelas em gráficos. No teste final, verificamos que nossas intervenções, não foram suficientes para que esses alunos alcançassem uma aprendizagem significativa dos principais conceitos da trigonometria, contudo observamos num dos encontros que todos os conseguiram construir com perfeição, uma tabela e um gráfico, de uma função periódica, ainda não identificada e no ultimo encontro, dois desses alunos conseguiram construir uma tabela trigonométrica e esboçar o gráfico da função seno.

Palavras-chaves: Cabri-Géomètre II, aprendizagem significativa, conceito subsunçor, trigonometria.

INTRODUÇÃO

Constatamos, em nossa experiência na atividade docente que, independentemente da procedência dos alunos, que a trigonometria ainda representa um enigma para alguns estudantes, dificultando a resolução de problemas na matemática e na física. Essas dificuldades eram relativas às medidas em radianos, à figura do ciclo trigonométrico e à construção de tabelas trigonométricas e gráficos. Estabelecemos, a partir dessas constatações, e de pesquisas correlatas , o objetivo para a nossa pesquisa: verificar as contribuições de uma estratégia de ensino, formada pela combinação do contexto experimental com o contexto computacional para a aprendizagem significativa dos principais conceitos presentes na transição das razões para as funções trigonométricas, que nos levou à formulação da questão:

" Quais as contribuições de uma "estratégia de ensino" para a aprendizagem significativa na transição das razões trigonométricas para as funções trigonométricas?

Inspirados no trabalho de Briguenti (1994), escolhemos a teoria da aprendizagem significativa de Ausubel e criamos um organizador prévio, a partir da adaptação de um texto do livro pro-

duzido em Harvard sobre as funções trigonométricas, *Functions modeling change: a preparation for calculus*. Nessa contextualização criamos com a geometria dinâmica do Cabri II, a figura da "roda-gigante". Verificamos que o programa computacional Cabri-Géomètre II, tem sido empregado na trigonometria, ora num ambiente estritamente computacional, ora combinado com materiais concretos. Lobo da Costa (1997), que recorreu a esse software, utilizando arquivos prontos para serem manipulados pelos alunos e sugeriu que, nas futuras pesquisas com este programa, os pesquisadores permitam que os alunos possam construir as figuras dinâmicas, ao invés de recorrerem aos arquivos prontos. No contexto experimental, ela recomendou a montagem de dispositivos simples, a fim de introduzir novos conceitos matemáticos. Motivados por estas sugestões, criamos o dispositivo "ciclo-trigonométrico" para o contexto experimental. No contexto do computador, ministramos uma aula introdutória num laboratório de informática com e sobre o Cabri-Géomètre II, para que os alunos entendessem a construção das figuras dinâmicas durante as atividades. A metodologia do Design Based Experiments permitiu a avaliação de readequação das atividades durante sua aplicação.

ALGUNS ASPECTOS IMPORTANTES DA HISTÓRIA DA TRIGONOMETRIA.

No antigo Egito as chuvas provocavam enchentes e quando as águas voltavam ao normal deixavam um limo muito fértil. Ao longo dos 3000 quilômetros do rio Nilo,, a agricultura movia a economia e alimentava milhares de pessoas. A preocupação com as vazantes desse rio e com a natureza levou os egípcios ao estudo da astronomia. Segundo o historiador grego Heródoto, Sesóstris, rei do Egito que viveu há aproximadamente 4000 anos, repartiu as terras entre os habitantes para o cultivo, exigindo em troca o pagamento de impostos. Se a colheita fosse prejudicada pela enchente excessiva, eram enviados os medidores de terras, afim de que o imposto se tornasse justo, proporcional à área cultivada. Com as cordas e estacas, esses medidores de terras, foram os prováveis criadores da geometria.

Segundo Boyer (1996, p.13),num dos problemas papiro de Rhind, que data de 1650 a.C., encontram-se vestígios de uma teoria de triângulos semelhantes que deram origem à trigonometria. De acordo com esse documento, para manterem constante as inclinações das pirâmides, os egípcios criaram um conceito semelhante ao da cotangente de um ângulo, o "seqt". O seqt da face de uma pirâmide era o quociente do afastamento horizontal pelo vertical. Segundo Eves, (2004, p.95), Thales (640 a.C. – 564 a.C.), filósofo, astrônomo e matemático que viveu em Mileto, na Grécia, ao visitar a pirâmide de Quéops no Egito calculou a altura deste monumento recorrendo à semelhança dos triângulos formados pelas alturas da pirâmide e de uma estaca que ele fincou na areia e suas respectivas sombras.

Por volta de 572 a.C., nasceu em Samos, próximo a Mileto, Pitágoras, que viria a se a tornar um importante filosofo e matemático. De acordo com Eves, (2004, p.103), o teorema de Pitágoras, tradicionalmente atribuído a ele, já era conhecido pelos babilônios há mais de um milênio, mas a demonstração desse teorema por decomposição, provavelmente teria sido obra de Pitágoras ou de seus seguidores, que continuaram com a irmandade por dois séculos após sua morte, ocorrida por volta de 500 a.C.

Segundo Boyer (p.98), Apolônio (262 a.C.- 190 a.C.), foi um importante matemático e astrônomo, que descreveu o movimento dos planetas em torno da Terra, com a figura dos epiciclos. Nessa figura o *ponto P* representava um planeta, e girava uniformemente ao longo de um pequeno circulo (epiciclo) de centro C, que por sua vez, se movia ao longo de um círculo maior, conhecido como *deferente*, cujo centro era a Terra (E).

Segundo Maor, (1998, p.23), Hiparco (o astrônomo que fez valiosas observações entre 141 e 127 a.C.) calculou o movimento dos epiciclos sem contar com tabelas de relações trigonométricas, ele considerou que nos triângulos inscritos na circunferência dos epiciclos, os lados correspondiam às

cordas relacionadas com seus respectivos ângulos centrais. Por séculos isto se constituiu na principal tarefa da trigonometria. Três séculos depois de Hiparco, no ano 150 d.C., viveu em Alexandria, o astrônomo, geógrafo e matemático Klaudius Ptolomaios, ou Ptolomeu, que de acordo com Aaboe, (1997, p.133), foi o autor da mais importante obra sobre a trigonometria na antiguidade, o "Almagesto", um manual de astronomia em 13 livros, onde ele descreve suas observações sobre fatos astronômicos, considera o sistema geocêntrico para o universo e apresenta uma tábua de cordas, para ângulos de ½° a 180° com intervalos de 30', detalhando cada etapa de sua construção. Segundo Katz (2008, p.156), nessa obra, Ptolomeu lançou o germe da moderna ideia de função, apresentando algumas tabelas e exibindo relações funcionais entre conjuntos e quantidades. a função *crd* α era definida como sendo comprimento da corda que correspondia a um arco de α graus em um círculo cujo raio media 60. De acordo com essa função*:* $crd\ \alpha = 120 \cdot sen\ (\alpha/2)$

Os hindus adquiriram e aperfeiçoaram os conhecimentos da trigonometria dos helênicos no início do século V d.C., quando consideraram a relação funcional entre a metade da corda e a metade do ângulo central, e a partir dessa relação, construíram uma tabela para servir de base para os cálculos da trigonometria esférica. "Assim, aparentemente surgiu na Índia a precursora da função trigonométrica moderna que chamamos de seno de um ângulo, e a introdução da função seno, representa a contribuição mais importante dos Siddhantas à história da matemática" (BOYER, 1996, p.143).

Do século VIII ao século X d.C., os árabes aperfeiçoaram a álgebra e a trigonometria. Nesse período, o astrônomo al-Battani adotou a razão jiva dos hindus, teve a genial ideia de introduzir o raio unitário, e demonstrou que essa razão era válida para qualquer triangulo retângulo.

No período do Renascimento, que teve início em 1453 com a queda do império Bizantino em Constantinopla (atual Istambul), surgiram as primeiras publicações específicas relacionadas à trigonometria. Nesse período a trigonometria teve duas figuras notáveis, Regiomontanus e Copérnico. Regiomontanus, aprendeu o grego para ler Ptolomeu no original e em 1464, escreveu *De Triangulis Omnimodis (Os triângulos de todas as espécies)*, obra dedicada exclusivamente a geometria, que nos três últimos livros, trata da geometria esférica e trigonometria, como ferramentas na astronomia. Segundo Eves (2004, p.313), a astronomia contribuiu tanto para a matemática, que a designação de matemático, significava astrônomo. Nicolau Copérnico (1473-1543) percebeu que as hipóteses geocêntricas de Aristóteles e Ptolomeu não correspondiam à realidade e, contrariando também a Igreja, que colocava o homem no centro do universo, revolucionou a visão do mundo ao defender a hipótese de um sistema heliocêntrico, segundo a qual, a Terra movia-se em torno do Sol. Em 1543 foi publicado o seu tratado "*De Revolutionibus Orbitun Celestium*" (sobre as evoluções das órbitas celestes) com seções sobre trigonometria.

A partir do século XVII, a introdução de novas notações algébricas por Viète, fez com que a trigonometria assumisse na primeira metade do século XVII, um moderno caráter analítico. Na sua obra "*Cânon Mathemáticus*", Francois Viète construiu tabelas das seis funções trigonométricas com ângulos em aproximações de minutos. No lugar das frações sexagesimais ele usou as decimais e desenvolveu métodos para resolver problemas de triângulos planos e esféricos com as seis funções trigonométricas.

Segundo Boyer (1996, p.231), o termo "produto cartesiano" é um anacronismo, pois Descartes estava longe de associar um sistema de coordenadas formado com pares de números a um ponto geográfico. É possível que Nicole Oresme, que nasceu na Normandia por volta de 1323, ao resolver um problema sobre uma taxa de variação constante, tenha tido a brilhante ideia de traçar numa figura ou num gráfico a maneira pela qual variam as coisas. Partindo do princípio de que tudo que é mensurável, é imaginável na forma de quantidade contínua, Oresme construiu

um gráfico *velocidade x tempo* para um corpo que se movia em aceleração constante, representando o tempo na longitude (abscissas) na reta horizontal e a velocidade na latitude (ordenadas), da mesma forma que construímos atualmente. O uso das coordenadas não era novo, a ideia remonta a Apolônio. A originalidade na ideia de Oresme foi representar na horizontal quantidade variável (tempo) e construir um gráfico com esses dados, antecipando-se assim a geometria analítica. Na mesma ocasião que Descartes articulava as bases da geometria analítica, Pierre de Fermat (1601-1665) discutia com os matemáticos John Wallis, Roberval, Blaise Pascal e Descartes, a equação geral da reta, da circunferência e da hipérbole. Fermat desenvolveu um método para o traçado das tangentes. Tendo por base esses estudos, Newton e Leibniz, separadamente, inventaram o Cálculo Diferencial e Integral.

Um dos mais importantes matemáticos da Suíça no século XVIII foi Leonhard Euler (1707-1783). Ao resolver problemas com equações diferenciais propostos por Daniel Bernoulli em 1735, desenvolveu seu método algébrico e com a publicação do Introductio in analysin infinitorum em 1748, estabeleceu as bases da análise, o estudo dos processos infinitos. Tendo por base a Análise Matemática recém criada em consequência dos Cálculos Infinitesimais. Segundo Lima, (1991), Euler inventou uma função que modernizou as noções de seno e cosseno, definidas no triângulo retângulo que permitiu substituir o ângulo por um número real t . Representando um circulo de raio unitário em um plano cartesiano, por S^1, a função $E : \mathbb{R} \rightarrow S^1$, conhecida como a função de Euler faz corresponder ao numero real t ,um ponto $E(t)$ do circulo S^1. Como ponto de um sistema de coordenadas cartesianas, o ponto $E(t)$ possui as coordenadas (a, b). Com esse par de coordenadas, Euler definiu o cosseno de t e o seno de t, estabelecendo que $\cos t = a$ e $\operatorname{sen} t = b$. Assim o seno de t foi definido por Euler como a ordenada de um ponto $E(t)$ em S.[1]

.

O ensino de trigonometria refaz o percurso histórico da evolução dos principais fatos que utilizamos na construção das funções trigonométricas, e as referências históricas podem ser uma fonte de motivação para os estudantes.

Referenciais teóricos.

1. A teoria da aprendizagem significativa.

De acordo com essa teoria da psicologia educacional, a aquisição e retenção dos novos conhecimentos, para uma seja aprendizagem significativa, o material a ser aprendido deve ser logicamente significativo, e na estrutura cognitiva do aprendiz, devem existir conceitos capazes de "ancorar" esses novos conhecimentos, os autores dessa teoria chamam esses conceitos como "subsunçores". Segundo Ausubel, Novak e Hanesian, (1978), uma aprendizagem pode ser significativa ou mecânica, significativa quando o o conhecimento a ser aprendido, interage com um determinado conceito presente na estrutura cognitiva do aprendiz (conceito subsunçor). Essa interação ocorre com a assimilação do novo conhecimento, pelo conceito subsunçor da estrutura cognitiva do aprendiz. Quando isso não acontecer, a aprendizagem será mecânica, ou seja, "decorada" e sem nenhum apoio lógico, como os números de um telefone. Na aprendizagem escolar, esses autores classificam como *por recepção* quando quando o aluno recebe pronto todo o conteúdo a ser aprendido, ou seja, na sua forma final, ficando para este aluno a tarefa de internalizar esse conteúdo, e *por descoberta*, quando o conteúdo a ser aprendido não é dado pronto, mas deve ser descoberto pelo aluno.

A maior parte das informações adquiridas pelos alunos tanto dentro como fora da escola, é apresentada verbalmente, e sob o ponto de vista psicológico, aprendizagem receptiva verbal é mais complexa, visto que ela exige um amadurecimento intelectual. Assim uma criança em idade pré-escolar, adquire o conceito "cadeira" por descoberta, depois de alguns encontros incidentais com esse objeto, abstraindo as características comuns, para generalizar seus atributos,

mas não é capaz de compreender os conceitos "democracia" ou "aceleração". Nesta pesquisa, durante os encontros com os alunos, planejamos atividades com materiais concretos e com o software Cabri, para que os alunos pudessem redescobrir as razões trigonométricas nos triângulos retângulos semelhantes.

Ao lembrar que no processo da aprendizagem significativa, a nova informação deve interagir com os conceitos subsunçores do aprendiz, Moreira (2006), ressalta que esta situação reflete a "subordinação" entre o novo material e os conceitos subsunçores. Durante o processo de aprendizagem por subordinação, quando o conceito subsunçor sofre alguma modificação, podemos dizer que, com esse conceito está ocorrendo uma *diferenciação progressiva*. Mas, quando a nova informação é aprendida por uma *superordenação dos conceitos subsunçores*, ou uma recombinação de ideias (que não apresentam nenhuma dependência entre si) presentes na estrutura cognitiva, dizemos que com esses conceitos, ocorreu uma *reconciliação integrativa*.

No nosso entendimento, de acordo com essa teoria, a aprendizagem significativa da função seno, exige em grande parte, a aplicação do princípio da *reconciliação integrativa*, com a combinação dos seguintes conceitos que devem estar presentes na estrutura cognitiva do aprendiz no momento da aprendizagem (conceitos subsunçores): relações trigonométricas no triângulo retângulo; medidas em radianos; ciclo trigonométrico; pontos no sistema cartesiano ortogonal; o conjunto dos números reais; domínio, contra-domínio e imagem de uma função e o Teorema de Pitágoras. Com a *reconciliação integrativa*, todos esses conceitos se recombinam para darem sentido a definição do seno segundo a função de Euler $\boldsymbol{E: \mathbb{R} \rightarrow S^1}$.

2. Registros de representação semiótica

Diante da complexidade do ambiente tecnológico-computacional, na França, na virada do milênio, foram realizados cursos de preparação para todos os estudantes. Conforme os relatos de Raymond Duval, pesquisador em Educação Matemática, durante esses eventos surgiram as seguintes questões:

– Como podemos entender as dificuldades, frequentemente intransponíveis, que alguns estudantes têm na compreensão da matemática?

– Qual a natureza e em quais aspectos identificamos estas dificuldades?

Para Duval, as respostas a estas perguntas não estão restritas a um ramo da matemática ou à sua história, mas podem ser encontradas numa abordagem cognitiva. Segundo o pesquisador, uma abordagem cognitiva pode determinar a origem dessa incompreensão e ajudar o estudante a compreender e controlar a diversidade dos processos matemáticos.

Sob o ponto de vista da aprendizagem e do ensino na matemática, existem dois tipos de transformações radicalmente diferentes: os tratamentos e as conversões. De acordo com essa teoria, os tratamentos são as transformações que acontecem dentro de um mesmo registro, por exemplo, durante um cálculo com números decimais ou na resolução de um sistema de equações. Conferindo essas operações na tabela de Duval, verificamos que elas permanecem dentro do mesmo registro, classificadas como sistemas de escrita numérica e algébrica, respectivamente. Já as conversões são as transformações de representações que mudam de um registro para outro, por exemplo, durante a passagem da escrita algébrica de uma função para o seu gráfico cartesiano.

Tabela 1 – Classificação dos diferentes registros mobilizáveis no funcionamento matemático (fazer matemática, atividade matemática). Fonte: Machado (2008, p.14)

	Representação discursiva	**Representação não discursiva**
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: Os tratamentos não são algoritmizáveis	Língua natural Associações verbais (conceituais). Forma de raciocinar: - Argumentação a partir de observações, de crenças... - Dedução válida a partir de definição ou Teoremas.	Figuras geométricas planas ou em perspectivas (configurações nas dimensões: 0, 1, 2 ou 3) - Apreensão operatória e não somente perceptiva. - Construção com instrumentos
REGISTROS MONOFUNCIONAIS: Os tratamentos são principalmente algoritmos.	Sistemas de escritas: - Numéricas (binária, decimal, fracionárias,...) - Algébricas - Simbólicas (línguas formais) - Cálculo	Gráficos cartesianos. - Mudanças de sistemas de coordenadas. - Interpolação, extrapolação.

Duval também associou os fracassos e os bloqueios na compreensão dos alunos, ao "enclausuramento" em um registro, ou seja, quando o aluno não consegue reconhecer o mesmo objeto matemático em duas representações diferentes. Nesse aspecto, o autor adverte que jamais devemos confundir um objeto com a sua representação. Na matemática, o acesso aos objetos passa pelas representações semióticas; por esta razão a compreensão matemática está intimamente ligada ao fato de dispor de, ao menos, dois registros de representações diferentes. Para o autor a compreensão requer a coordenação dos diferentes registros.

A teoria dos Registros de Representações Semióticas de Duval não se limita aos aspectos que abordamos. Escolhemos apenas os aspectos que podem ter alguma ligação com a nossa pesquisa. Para nós, são de especial importância, os bloqueios que eventualmente possam surgir na compreensão, em razão dos tratamentos ou conversões, entre os registros semióticos das funções trigonométricas.

Metodologia e procedimentos metodológicos.

Escolhemos a metodologia do Design Based Research, em razão de suas características retrospectivas e reflexivas. De acordo com Steffe e Thompson (2000), nos EUA, por volta de 1970, os primeiros pesquisadores em Educação Matemática perceberam que, para poderem entender a "matemática dos estudantes", primeiro era preciso desenvolver novos modelos de pesquisa com raízes na educação matemática, ao invés de simplificar e usar os modelos criados fora da educação matemática.

O primeiro artigo abordando o Design Based Research, resumiu o pensamento de um grupo formado pelos pesquisadores Cobb, Confrey, Disessa, Lehrer e Schauble, que tinham sólidos conhecimentos nas áreas das ciências cognitivas, psicologia, antropologia, inteligência artificial, biologia, matemática, da interação homem-computador, e algum envolvimento com a nova metodologia.

Em Cobb et al (2003), os autores ressaltaram que a metodologia do design, deveria trabalhar num contexto sujeito a testes e revisões, sucessivas e iterativas, de forma sistemática tendo como alvo um domínio específico da matemática. Na sequencia, Cobb et al relacionaram algumas configurações e alvos dessa teoria e identificaram algumas características do "design based experiments":

- uma nova teoria capaz de dar apoio ao processo de aprendizagem não apenas para um aluno individualmente, mas para uma classe e até mesmo uma comunidade;

- sua natureza intervencionista possibilita uma melhoria educacional nessa nova forma de aprendizagem;
- as faces prospectivas e refletivas. Com a face prospectiva, as hipóteses são colocadas em prática e testadas em sala de aula, e com a face retrospectiva, no caso de algumas dessas conjecturas serem rejeitadas, outras conjecturas alternativas poderão substituí-las em novos testes;
- iteratividade dessa metodologia, ou seja, é repetições da terceira característica, formando um ciclo que termina quando todas as conjecturas forem testadas e revisadas.

O objetivo e o planejamento.

O objetivo de nossa pesquisa foi verificar as contribuições de uma estratégia de ensino, formada pela combinação do contexto experimental com o contexto computacional para a aprendizagem significativa dos principais conceitos presentes na transição das razões para as funções trigonométricas. Com esse propósito, promovemos um primeiro contato dos alunos com o software Cabri-Géomètre, aplicamos um teste diagnóstico, planejamos aplicar as intervenções permeadas com testes, e encerramos com um teste final. Com base nos resultados obtidos nos testes, avaliamos e refletimos sobre a nossa pesquisa.

Sujeitos da pesquisa e a preparação do design inicial das quatro intervenções

Os sujeitos desta pesquisa foram nove alunos de um curso noturno de uma universidade particular da cidade de São Paulo, que, na época cursavam o terceiro semestre de licenciatura em matemática. Devido ao reduzido número de participantes, optamos por uma pesquisa qualitativa e abrimos mão do grupo de referência.

Na preparação do design inicial das quatro intervenções, levamos em conta os conceitos subsunçores, identificados na preparação do teste diagnóstico, assim como a ordem que esses conceitos surgiram na história da matemática, e com o foco na trigonometria, realizamos uma pesquisa nos Parâmetros Curriculares Nacionais, nas pesquisas correlatas de Briguenti (1994), Costa (1997), Lindegger (2000), Goios (2010); e nos livros: "Trigonometria Números Complexos" de Carmo, Morgado e Wagner (2005), SBM; "Matemática, Contexto e Aplicações" de Dante (2003), Editora Ática; *Trigonometria* da coleção *Fundamentos da Matemática Elementar* de Gelson Iezzi; "Functions Modeling Change", dos autores Connally, Gleason e Hughes-Hallet e o livro " Atividades com o Cabri-Géomètre II" de Baldin e Villagra (2010), Eduscar.

Os objetos do ambiente experimental.



Figura 1 - O dispositivo "ciclo trigonométrico" e a projeção ortogonal de um ponto sobre o eixo vertical.

Para esse ambiente, construímos com o EVA, três jogos com dois retângulos proporcionais, para serem medidos, relacionados e comparados pelos alunos. Com o mesmo material, recortamos discos e juntamos a arames com a medida dos respectivos raios desses discos, que podem ser "entortados" para possibilitarem a medida de arcos. Com os triângulos foram propostas atividades envolvendo a semelhança entre os triângulos e as relações trigonométricas;

com o disco e o arame as medidas em radianos e com o dispositivo "ciclo trigonométrico" que criamos, explicamos com detalhes, todas as caracterisitcas do objeto matemático que leva esse nome.

O programa Cabri-Géomètre II e o ambiente computacional.

Em 1985, os pesquisadores Jean-Marie Laborde e Frank Ballemain, do Instituto de Informática e Matemática da Universidade Joseh Fourier, em Grenoble, na França, desenvolveram o programa computacional educativo Cabri-Géomètre (abreviação da palavra francesa "cahier de brouillon intéractif") especialmente para o estudo da geometria plana. Trata-se de um software interativo, que possui ferramentas capazes de construir na tela do computador, figuras dinâmicas substituindo o lápis, o papel, a régua e o compasso. Essas figuras podem ser deslocadas, ampliadas ou reduzidas, mas continuam preservando suas propriedades. Com as ferramentas do Cabri-Géomètre, podemos dispor dos eixos cartesianos, medir o comprimento de segmentos e arcos, medir ângulos, e transferir o comprimento de um segmento para o outro, e até mesmo, transferir o comprimento de um arco para um segmento. As construções dinâmicas desse software podem facilitar o estudo dos teoremas da geometria euclidiana plana e da trigonometria. Suas construções podem ser salvas em arquivos e revistas passo a passo. Todos esses recursos a transformaram o programa computacional Cabri-Géomètre numa valiosa ferramenta educacional.

Durante nossas intervenções com os alunos, em cada assunto, sempre que possível, procuramos alternar o material concreto e o software Cabri-Géomètre.

As intervenções.

A primeira intervenção teve como objetivo explorar as relações trigonométricas no triângulo retângulo com o Cabri-Géomètre e ajudar os alunos na construção de uma tabela para senos dos ângulos notáveis com a aplicação do Teorema de Pitágoras. O objetivo da segunda intervenção foi promover situações com o Cabri-Géomètre e os materiais concretos, para trabalhar com as medidas em radianos, mostrando que essas medidas independem das dimensões da circunferência. A terceira intervenção teve como objetivo era criar um organizador prévio para a função seno, com a contextualização de uma situação para identificar e estudar um fenômeno periódico, e apresentar a definição do ciclo trigonométrico. O objetivo do planejamento inicial da quarta intervenção foi o estudo da definição da função seno e a construção de gráficos dessa função, no papel e com o Cabri-Géomètre.

Neste resumo, vamos ressaltar apenas alguns trechos da terceira e da quarta intervenção, quando verificamos os melhores resultados da aplicação de nossa estratégia de ensino, formada pela combinação dos contextos materiais e computacionais.

Na terceira intervenção, ao apresentarmos o nosso dispositivo "ciclo trigonométrico", como uma extensão da lousa e do giz, depois de falarmos sobre as medidas em radianos, mostrando o cordão que representava um arco, os eixos cartesianos, materializados pelas réguas cruzadas, o circulo orientado e a primeira determinação de um arco, ouvimos o comentário de um aluno afirmando que a partir daquele instante, passava a entender a medida 3,14 rd. Em seguida explicamos com o Cabri e um projetor de imagens, os passos para a construção de um círculo de raio unitário. Com essa figura, (reproduzida no quadro 1) repetimos as explicações que havíamos feito anteriormente, e ativamos a ferramenta "coordenadas", para um ponto colocado nesse círculo. Com esse ponto na figura dinâmica desse software, os alunos seguiram as instruções dessa atividade, para calcular a soma dos quadrados dessas coordenadas, e puderam

perceber a genialidade de Euler, ao criar este objeto matemático que permitiu a aplicação do teorema de Pitágoras, para definir a sua função E(x), de um número real x.

Atividade 1 – Característica dos pontos do S^1.

Todos os pontos P(a, b) de S^1, não coincidentes com os eixos cartesianos e em qualquer quadrante, formam com a sua projeção ortogonal no eixo horizontal e o ponto O, no vértice do ângulo central, um triângulo retângulo, cujos catetos têm a medida das coordenadas, e a hipotenusa, medindo **1 rd**, conforme mostra a figura 3:

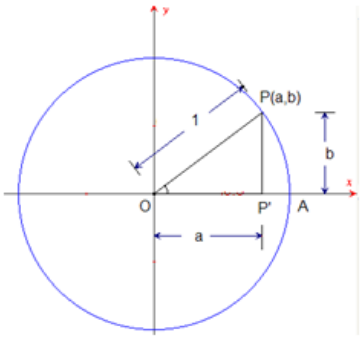
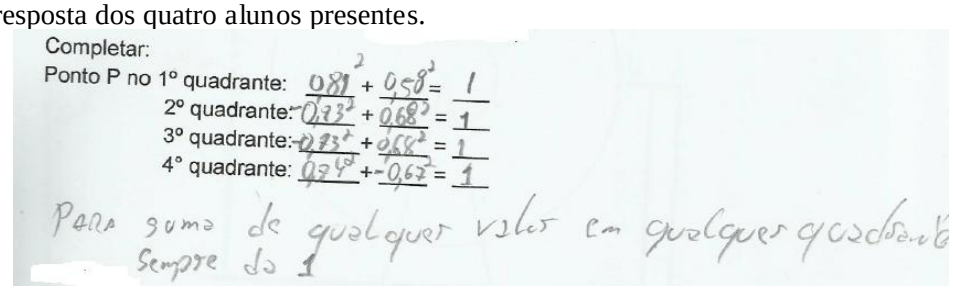


Figura 3 – Pontos do S^1.

Quadro 1 – 3ª int., at.1

No manuscrito 1, exibimos a participação do aluno 3, nessa atividade, que coincidiu com a resposta dos quatro alunos presentes.



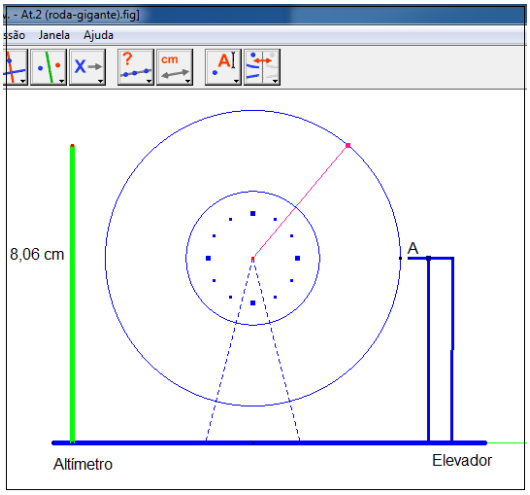
Manuscrito 1 - Aluno 3, 3ª Int., at.1.

Verificamos que os quatro alunos, conseguiram realizar esta primeira atividade. Antes do início da próxima, pedimos que fizessem a leitura de um breve texto com a definição de uma função periódica. Na sequencia iniciamos a contextualização da "roda-gigante", com a apresentação da figura exibida na tela 1. Nessa figura, do lado esquerdo instalamos o "altímetro", um marcador da altura da gondola deste brinquedo. Explicamos detalhadamente essa construção, mas sugerimos que usassem um arquivo pronto. Com o "ponteiro" era possível deslocarem a "gondola" dessa figura dinâmica. Vejam o texto dessa atividade:

-- Você terá que embarcar como passageiro numa roda-gigante que dispõe de um elevador para deixá-lo na plataforma de embarque, no ponto *A* da figura. Esta roda, que está representada em escala na figura, gira em sentido anti-horário, e o diâmetro de sua circunferência, na representação, é de 8 cm. A altura da plataforma A (a altura do centro da roda), na representação, é de 5 cm.

Após esse texto, informamos que essa roda demorava uma hora para dar uma volta completa, e a tarefa dos alunos, consistia em preencher uma tabela com a altura do passageiro a cada

cinco minutos e com os dados dessa tabela, construir um gráfico. Na tela 1, mostramos a figura da "roda-gigante" que criamos para funcionar como um dispositivo:



Tela 1 – 3ª Int, at.2.

A seguir, exibimos a tabela preenchida pelo aluno 7, seguida do gráfico de uma função ainda não identificada. Todos os quatro alunos realizaram com sucesso esta atividade.

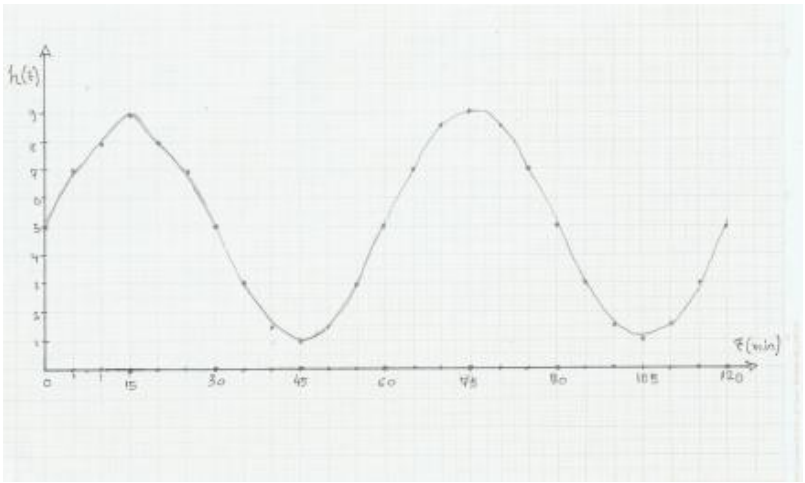
Tabela 1 – Altura do passageiro em relação ao solo.

t (min)	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
h(t) (cm)	5	7	8,5	9	8,5	7	5	3	1,5	1	1,5	3	5

Tabela 2 – Altura do passageiro em relação ao solo.

t (min)	65	70	75	80	85	90	95	100	105	110	115	120
h(t) (cm)	7	8,5	9	8,5	7	5	3	1,5	1	1,5	3	5

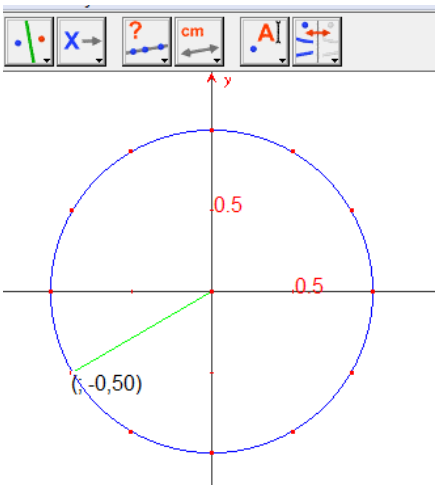
Manuscrito 2 - Aluno 7, 3ª Int., at.2.



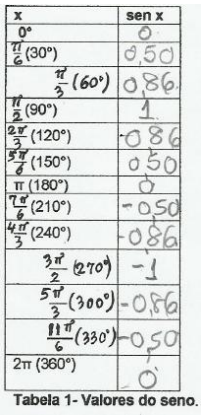
Manuscrito 3 - Aluno 7, 3ª Int., at.2.

Na quarta intervenção que teve como objetivo o estudo da função seno, a sequência de atividades foi semelhante a anterior, ouseja, os alunos trabalharam com uma figura do Cabri (neste caso puderam construir), que manipulada forneceu as coordenadas (ferramenta do Cabri), relativas ao valor do seno, em intervalos de 30º, e com esses valores construiram o gráfico da função seno. Dos seis alunos que participavam, todos preencheram corretamente a tabela

trigonométrica, mas apenas uma dupla formada pelos alunos 4 e 7, conseguiu traçar o gráfico da função seno com perfeição.



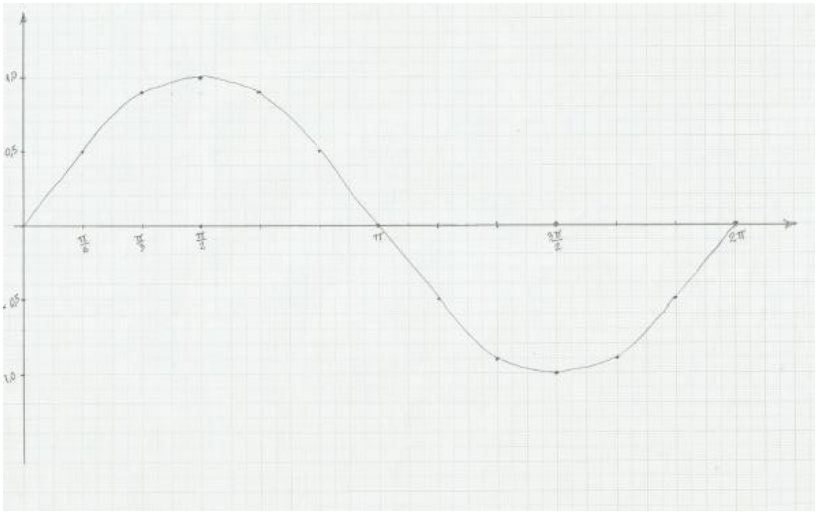
Tela 2 - do aluno 8, no ângulo de 210º.



x	sen x
0°	0
$\frac{\pi}{6}$ (30°)	0,50
$\frac{\pi}{3}$ (60°)	0,86
$\frac{\pi}{2}$ (90°)	1
$\frac{2\pi}{3}$ (120°)	-0,86
$\frac{5\pi}{6}$ (150°)	-0,50
π (180°)	0
$\frac{7\pi}{6}$ (210°)	-0,50
$\frac{4\pi}{3}$ (240°)	-0,86
$\frac{3\pi}{2}$ (270°)	-1
$\frac{5\pi}{3}$ (300°)	-0,86
$\frac{11\pi}{6}$ (330°)	-0,50
2π (360°)	0

Tabela 1- Valores do seno.

Manuscrito 4 - Tabela do aluno 8



Manuscrito 5 - Alunos 4 e 7, gráfico da função seno

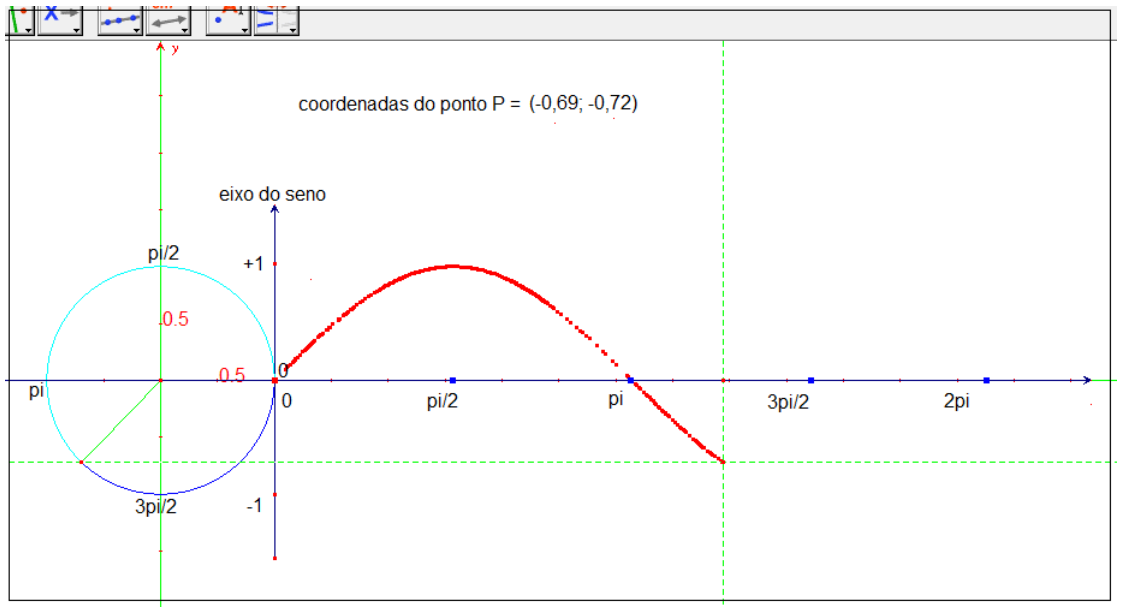
De acordo com a teoria cognitiva dos registros de representação semiótica de Duval, a *conversão de registros*, se constitui numa das dificuldades na aprendizagem dessa disciplina, e para ele "a compreensão em matemática implica a capacidade de mudar de registro" (Duval, 2008, p.21). è importante lembrarmos que durante o teste diagnostico, nenhum desse alunos sabia como traçar o gráfico da função seno. Os resultados dessas últimas intervenções confirmaram o potencial didático da nossa estratégia de ensino.

De acordo com a teoria cognitiva dos registros de representação semiótica de Duval, a *conversão de registros*, se constitui numa das dificuldades na aprendizagem dessa disciplina, e para ele "a compreensão em matemática implica a capacidade de mudar de registro" (Duval, 2008, p.21). è importante lembrarmos que durante o teste diagnostico, nenhum desse alunos sabia como traçar o gráfico da fun-

ção seno. Os resultados dessas últimas intervenções confirmaram o potencial didático da nossa estratégia de ensino.

A última atividade foi destinada a construção do gráfico da função seno, com os recursos do Cabri, e sem a ferramenta "lugar geométrico" desse software, que traça automaticamente os gráficos das funções trigonométricas. Na ocasião explicamos aos alunos que o "lugar geométrico" do Cabri II, facilitava o traçado do gráfico dessas funções, mas não exigia o conhecimento das etapas e da lógica dessas construções.

Vejamos como ficou a tela durante essa atividade:



Tela 3 – 4ª Int. at.4.

Explicamos detalhadamente as etapas da construção dessa figura dinâmica. Após essa construção, pedimos aos alunos que utilizassem as ferramentas "ponteiro" e "rastro", e desenhassem o gráfico do seno, a partir da variação do comprimento de um arco. Observamos que nessa atividade, dois dos alunos perceberam a lógica dessa construção, e compreenderam a conversão dos registros de representação *tabela trigonométrica* para o *gráfico do seno.*

Considerações finais.

Constatamos que apesar da irregularidade da frequência dos alunos nos nossos encontros, a aplicação da "estratégia de ensino", formada pela combinação do contexto experimental com o contexto computacional (com esses alunos construindo as figuras dinâmicas do Cabri II), trouxe as seguintes contribuições para a aprendizagem significativa dos conceitos subsunçores da trigonometria:

- A aprendizagem do cálculo das razões trigonométricas.
- A percepção de que as razões trigonométricas surgiram em decorrência da semelhança entre triângulos retângulos.
- O entendimento do cálculo das medidas em radianos.
- A redescoberta do número π.

- A habilidade de construir uma tabela e um gráfico, a partir da contextualização de uma função periódica ainda não identificada.
- A habilidade de construir uma tabela trigonométrica e o gráfico da função seno.

. As dificuldades dos nove alunos, nos fundamentos da matemática, relativos ao ensino médio e fundamental, influíram nos resultados desta pesquisa. Contudo, conseguimos atingir parte dos objetivos e responder a nossa questão de pesquisa

Sabemos que o estudo das razões trigonométricas é uma parte de um conjunto de conceitos subsunçores da trigonometria, e consideramos que o conceito mais complexo desse grupo é o do ciclo trigonométrico, cuja aprendizagem significativa depende do princípio da reconciliação integrativa (teoria de Ausubel, Novak e Hanesian , 1978), para que haja a combinação dos seguintes conceitos: sistema cartesiano ortogonal, definição de lugar geométrico do círculo, arco orientado e as medidas em radianos e o conjunto dos números reais. Ressaltamos que esses conceitos citados, são constituídos por ideias paralelas, que não guardam entre si uma dependência sequencial, e nessa situação, de acordo com Ausubel, Novak e Hanesian (1978, p.161), compreender parte do material não pressupõe a compreensão do conjunto.

Para as futuras pesquisas no ensino e aprendizagem da trigonometria, nossa sugestão é que continuem persistindo na combinação dos contextos materiais e computacionais, e sempre que possível, recorram a história da matemática. Esperamos que este trabalho possa contribuir para a Educação Matemática, e possa servir de inspiração para novos pesquisadores.

Referências bibliográficas.

AABOE, Asger, *Episódios da História Antiga da Matemática*, Sociedade Brasileira de Matemática-SBM, trad. João B. Pitombeira de Carvalho, 1984.
AUSUBEL, David; NOVAK, ;HANESIAN, Helen , *Psicologia Educacional*, Tradução* das professoras Eva Nick, Helena de Barros C. Rodrigues, Luciana Peotta, Maria Angela Fontes e Maria da Gloria R. Maron, da Universidade Santa Úrsula, do Instituto de Psicologia da UFRJ, Editora Interamericana,1978.
(*) Educational Psychology, a cognitive view, N.Y., Rinehart and Winston.
BARBOSA, João Lucas M, *Geometria Euclidiana Plana*, Sociedade Brasileira de Matemática-SBM, 2006.
BONGIVANNI, Vincenzo, *A construção de uma tabela trigonométrica*. Publicado na Revista Iberoamericana de Educação Matemática - UNION, nº 18, junho de 2009.
BOYER, Carl C., *História da Matemática*. Editora Edgard Bucler, 1996. 470 p.
BRASIL, Ministério da Educação e Cultura, Secretaria de Educação Fundamental, *Parâmetros Curriculares Nacionais*. Brasília, 1998. 148 p.
BRASIL, Ministério da Educação e Cultura, Secretaria da Educação Média e Tecnológica, Coordenação Geral do Ensino Médio, *Parâmetros Curriculares Nacionais - Ensino Médio. 2000.*
CARMO, Manfredo Perdigão.; MORGADO, Augusto Cesar ; WAGNER, Eduardo, *Trigonometria Números Complexos*. Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), Coleção do Professor de Matemática, Rio de Janeiro, 2005. 165 p.
COBB, Paul; CONFREY, Jere; DISESSA, Andrea; LEHRER, Richard: SCHAUBLE, Leona, *Design Experiments in Educational Research, Educational Researcher*; Jan/Feb 2003; Wilson Education Abstracts, p.9. Encontrado no site:
<http:eec.edc.org/cwis_docs/NEWS_ARTICLES_JOURNAL/Cobb_Paul_Design_Experiments >. acesso em 30/03/2013
CONNALLY, Eric; GLEASON, Andrew M.; HUGHES-HALLET, Deborah. *Functions Modeling Change, a preparation for calculus*. John Wiley & Sons, Inc, 1998.

BRIGHENTI, Maria J. L., *Ensino e aprendizagem da trigonometria; novas perspectivas da Educação Matemática*. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática,Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, S.P.1994.

BRIGHENTI, Maria J. L., *Representações gráficas – atividades para o ensino e a aprendizagem de conceitos trigonométricos*. Editora da Universidade do Sagrado Coração, 2003. 150 p.

DANTE, Luiz R., *Matemática Contexto & Aplicações*. Editora Ática, 2003. 616 p.

DANTE, Luiz R., *Matemática Contexto & Aplicações*. Editora Ática, 2009. 626 p.

DUVAL, Raymond, *Semiósis e Pensamento Humano, registros semióticos e aprendizagens intelectuais*. Trad. Lênio F. Levy e Marisa R. A. Silveira. Livraria da Física Editora, São Paulo, 2009. 110 p.

DUVAL, Raymond, *A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics*, artigo publicado na revista *Educational Studies in Mathematics*, pp.103-131, 2006.

EVES, Howard, *Introdução à história da matemática*. Trad. Hygino H. Domingues. Editora Unicamp, 2004. 844 p.

FIORENTINI, Dario & LORENZATO, Sergio, *Investigação em educação matemática*. Editora Autores Associados LTDA, 2008. 228 p.

GALVÃO, Maria E. E. L.. *A História da Trigonometria*. CEU- Centro de Extensão Universitária, IME-USP/UNIFIEO.

GARBI, Gilberto G., *A rainha das ciências – um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática*. Editora Livraria da Física, 2007. 470 p.

GOIOS, Douglas Ferreira, *Potencialidades didático-pedagógicas de um objeto para a aprendizagem: uma análise através da Teoria da Cognição Corporificada para o ensino de trigonometria*. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, Universidade Bandeirante de São Paulo, 2010.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David; PÉRIGO, Roberto, *Matemática – volume único*. Atual Editora, 2005.

IEZZI, Gelson, *Fundamentos de matemática elementar, 3: trigonometria.* Coleção para o ensino médio, Atual Editora 2004.

LIMA, Elon Lages, *Sobre a evolução de algumas ideias matemáticas*, artigo da RPM, nº 4, pp.1-8, Sociedade Brasileira de Matemática.

LINDEGGER, Luiz Roberto de Moura, PUC/SP, *Construindo os conceitos básicos da trigonometria no triangulo retângulo: uma proposta a partir da manipulação de modelos.* Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2000

LOBO DA COSTA, Nilce M., *Funções seno e cosseno: uma sequencia de ensino a partir dos contextos do mundo experimental e do computador*. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 1997.

KATZ, Victor, *A history of mathematics – an introduction*. Addison Wesley, 2008. 992 p.

MAOR, Eli, *Trigonometric Delights*, Princeton University Press, 1998.

MACHADO, Silvia Alcântara (org.) *Aprendizagem em matemática – registro de representação semiótica***.** Papirus editora, 2008. (Duval, pp. 11-33).

MOREIRA, Marco Antônio. *A teoria da aprendizagem significativa e sua implementação em sala de aula.* Editora UnB, Brasília, 2006.186 p.

SECRETARIA DA EDUCAÇÃO DO ESTADO DE SÃO PAULO, *Proposta Curricular do Estado de São Paulo – Matemática – Ensino Fundamental – Ciclo II e Ensino Médio. 2008.*

STEFFE, Leslie.P, & THOMPSON, Patrick W., *Teaching experiment methodology: underling principles and essential elements*, org. R.Lesh e A.E. Kelly, "Research design in mathematics and science education", pp. 267-307, 2000., no site: <http://pat-thompson.net/PDFversions/2000TchExp.pdf> Acesso em 30/03/2013,

STRUIK, Dirk J, cap. 11, *Por que estudar história da matemática*, in *História da técnica e da tecnologia*. Org. Ruy Gama, trad. Celia Regina.

YAMAMOTO, Yuriko B. e VILLAGRA, Guilhermo A. L**.,** *Atividades com Cabri-Géomètre II*. EdufsCar - Inep, São Carlos, 2010. 240 p.

(fig.15) no site <www.gapsystem.org/~history/HistTopics/Indian_sulbasutras.html>, acesso em 06/01/2012.

Copyright © 2013 <Paulo Masanobo Miashiro e Maria Elisa Esteves Lopes Galvão>. Os autores concedem licença não exclusiva, aos organizadores do VI HTEM, para publicar este documento no caderno de resumos do evento. Qualquer outro uso é proibido sem o consentimento dos autores.