OS MÉTODOS PARA CALCULAR ÁREAS E VOLUMES DE EUDOXO E ARQUIMEDES: UM OLHAR SOB A PERSPECTIVA HISTÓRICA FAZENDO O USO DAS NOVAS TECNOLOGIAS

Maria Deusa Ferreira da Silva

Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia-UESB

mariadeusa@gmail.com

In this communication I will present a piece of a discussion held in a Doctorate work, defended/ ou submitted in 2010, with a Post-Graduation Program in Education, theme Mathematics Education, in the Federal University of Rio Grande do Norte. With this work, I intent to present that the methods used by the ancient Greeks, in special Eudoxo and Arquimedes to determine areas and volume of curved regions, discussed in the thesis work as an important part of the conceptual development of Cálculo Integral, can be treated making use of technological tools. With this I also hope to show that is possible to associate facts of Historical Mathematics making use of new technologies, in special mathematics software. I will initiate the discussion about the methods of the quadratura do círculo. For that, we will present some of the methods developed by the predecessors of Arquimedes. Then, I will present the methods of Arquimedes to calculate areas and volumes and to finalize showing that these methods can be reviewed when we use new tecnologies.

Key-words: *History, new technologies, mathematics teaching*

1. INTRODUÇÃO

Calcular áreas de regiões curvas se constituiu um grande desafio para os matemáticos da antiguidade. Embora, desde, os egípcios e babilônicos calcular áreas de regiões planas (polígonos regulares) fosse algo bem conhecido, o mesmo não se deu com o cálculo de áreas de regiões curvas, especialmente a área do círculo. Daí, encontramos como um dos grandes desafios dos matemáticos gregos calcular a área de um círculo a partir da área de um quadrado, problema este que ficou conhecido como "quadratura do círculo", um dos três problemas clássicos da antiguidade (BOYER, 1998). Ainda hoje esse e outros problemas sobre áreas e volumes de regiões curvas se constituem em desafios e devem ser trabalhados em sala de aula como uma forma de se levar os alunos a compreenderem a construção dos conceitos matemáticos. Por exemplo, usar os métodos da exaustão para aproximar o valor da área do círculo leva também a determinação do valor de Pi, verificando que este se trata de um número irracional. Além disso, essa atividade se constitui em um excelente problema para introduzirmos o conceito de limite,

embora os gregos não tenham trabalhado sobre este conceito. Esses problemas podem ainda serem ressignificados e se tornarem mais instigantes se utilizarmos as novas tecnologias, em especial alguns softwares matemáticos.

Portanto, partindo dessas considerações iniciais, abordaremos nas seções que se seguem alguns desses problemas fazendo uso de textos clássicos da história como é o caso de *os Elementos* e refazendo-os também utilizando ferramentas tecnológicas. Com isso, esperamos contribuir com o debate sobre associar a história da matemática com uso de novas tecnologias e que esse debate salutar se constitua em propostas para o ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos.

2. O MÉTODO DA EXAUSTÃO[1]: MODELO PROPOSTO POR EUDOXO

2.1 Conforme os Elementos

O *método da exaustão*, também conhecido por *Princípio de Eudoxo-Arquimedes*, leva essa denominação por ter na sua base a teoria das proporções, apresentada por Eudoxo de Cnido (408-355 a. C.), e por Arquimedes de Siracusa (287-212 a.C.) ter sido o matemático que maior visibilidade lhe deu. O termo foi usado pela primeira vez no século XVII por Gregório de São Vicente. Sobre a teoria das proporções já foi tratada neste trabalho merece um tratamento a parte que faremos em outra ocasião. Ainda em relação ao método da exaustão este teve origem na tentativa de calcular áreas de regiões curvas. Surgiu a partir de uma crise das grandezas incomensuráveis, uma vez que sobre grandezas incomensuráveis restou um problema não resolvido: "o da comparação de configurações curvas e retilíneas". Talvez tenha sido também o passo seguinte dado na busca de resolver problemas desse gênero, utilizando um método mais sofisticado do que o da quadratura de lúnulas de Hipócrates, que se constituiu basicamente em circunscrever e inscrever quadrados na figura curva. Assim, como a teoria das proporções, não se sabe exatamente se o que hoje denominamos *método da* exaustão já era conhecido dos matemáticos pitagóricos ou se foi, de fato, primeiramente proposto por Eudoxo (BARON, 1985; TOEPLITZ, 1969).

Contudo, o tratamento dado no livro XII, de *Os Elementos de Euclides*, é devido a Eudoxo. Nele, Euclides começa com a demonstração à proposição XII.1: *"Os polígonos semelhantes nos círculos estão entre si como os quadrados sobre os diâmetros"* (BARON, 1985, p .37; BICUDO 2009, p. 527). Em seguida a proposição XII.2: *"os círculos estão entre si como os quadrados sobre os diâmetros"*. A demonstração é feita por semelhança de triângulos e o resultado de XII.1 é usado na demonstração de XII.2. Assim, segue a demonstração (ver figura-1).

Vamos agora a demonstração conforme está em os *Elementos* de Euclides:

1.Círculos estão para si assim como os quadrados sobre os diâmetros

Sejam os círculos $ABCD$ e $EFGH$ e seus diâmetros BD e FH.

[1] É só a partir do século XIX que passou a ter esse nome.

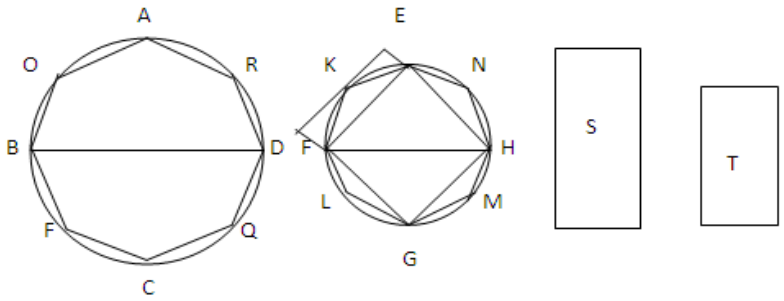


Figura-1 Método da Exaustão de Eudoxo, conforme consta dos *Elementos* de Euclides

Digo que assim como o círculo $ABCD$ está para o círculo $EFGH$, o quadrado de diâmetro BD está para o quadrado de diâmetro FH.

2. Pois se o quadrado de BD não está para o quadrado de FH assim como o círculo $ABCD$ está para o círculo $EFGH$, e como o quadrado de

3. BD está para o quadrado de FH, então o círculo $ABCD$ está para alguma área menor do que o círculo $EFGH$, ou uma maior. Primeiro suponhamos que está para uma área menor S.

4. Inscrevemos o quadrado $EFGH$ no círculo $EFGH$; vemos que o quadrado inscrito é maior do que a metade do círculo $EFGH$, além disso, se traçamos tangentes ao círculo pelos E, F, G, H, o quadrado $EFGH$ é a metade do quadrado que circunscreve o círculo, e o círculo é menor do que o quadrado circunscrito; então, o quadrado inscrito $EFGH$ é maior do que a metade do círculo $EFGH$. Dividimos ao meio os arcos de circunferência EF, FG, GH, HE nos pontos K, L, M, N, e sejam os segmentos $EK, KF, FL, LG, GM, MH, HN, NE$; portanto, cada um dos triângulos EKF, FLG, GMH, HNE é também maior do que a metade do segmento do círculo no qual está inscrito; além disso, se

traçarmos tangentes ao círculo nos pontos K, L, M, N e completamos os paralelogramos sobre os segmentos de retas EF, FG, GH, HE, cada um dos triângulos EKF, FLG, GMH, HNE será metade do paralelogramo que o contém, enquanto que o segmento do círculo em questão é menor do que o paralelogramo; então cada um dos triângulos EKF, FLG, GMH, HNE é maior do que a metade do segmento de círculo que os circunscreve.

5. Assim, utilizando esse processo de bisseção dos arcos de circunferências restantes e ligando os pontos obtidos por segmentos de retas, continuamente, deixamos alguns segmentos do círculo que serão menores do que a diferença entre o círculo $EFGH$ e a área S. Pois provou-se no primeiro teorema do décimo livro que se temos duas grandezas distintas, e da maior subtrairmos uma outra, maior do que sua metade, e desta que restou subtrairmos uma outra maior do que sua metade e assim sucessivamente, obteremos alguma grandeza que será menor do que a menor grandeza em questão. Sejam deixados setores como descrevemos, e sejam os setores do círculo $EFGH$ subtendidos

por $EK, KF, FL, LG, GM, MH, HN, NE$ menores do que a diferença entre o círculo $EFGH$ e a área S.

6. Logo, o polígono $EKFLGMHN$ restante é maior do que a área S. Inscrevamos também no círculo $ABCD$ o polígono $AOBPCQDR$ semelhante ao polígono $EKFLGMHN$; como o quadrado de BD está para o quadrado de FH, então o polígono $AOBPCQDR$ está para o polígono $EKFLGMHN$ (XII, 1).

Mas o quadrado de BD está para o quadrado de FH, então também o círculo $ABCD$ está para a área S; assim, também, como o círculo $ABCD$ está para a área S, o polígono $AOBPCQDR$ está para o polígono $EKFLGMHN$ (V, 11).

Logo, como o círculo $ABCD$ está para o polígono inscrito nele, então a área S está para o polígono $EKFLGMHN$ (V, 16).

7. Mas o círculo $ABCD$ é maior do que o polígono inscrito nele, portanto a área S é maior do que o polígono $EKFLGMHN$.

8. Mas ela também é menor: o que é impossível. Portanto, como o quadrado de BD está para o quadrado de FH, então o círculo $ABCD$ não está para nenhuma área menor do que o círculo $EFGH$.

9. Do mesmo modo podemos provar que nem o círculo $EFGH$ está para nenhuma área menor do que o círculo $ABCD$ nem o quadrado de FH está para o quadrado de BD.

Eu digo agora que nem o círculo $ABCD$ está para qualquer área maior do que o círculo $EFGH$, nem o quadrado de BD está para o de FH. Pois, se possível, suponhamos que ele assim esteja relacionado a uma área maior, S.

Logo, inversamente, como o quadrado de FH está para o quadrado de DB, então a área S está para o círculo $ABCD$;

10. Assim também, como o quadrado de FH está para o quadrado de DB, então o círculo $EFGH$ está para alguma área menor do que a do círculo $ABCD$, (V, 11), que demonstramos não ser possível.

Portanto, como o quadrado de BD está para o quadrado de FH, então o círculo $ABCD$ não está para nenhuma área maior do que o círculo $EFGH$.

11. Como já provamos que nenhum se relaciona com uma área menor do que o círculo $EFGH$, concluímos que o quadrado de BD está para o quadrado de FH, logo o círculo $ABCD$ está para o círculo $EFGH$.

Logo, etc.

C.Q.D.

(BICUDO, 2009, p. 528; BARON, 1985, p.38)

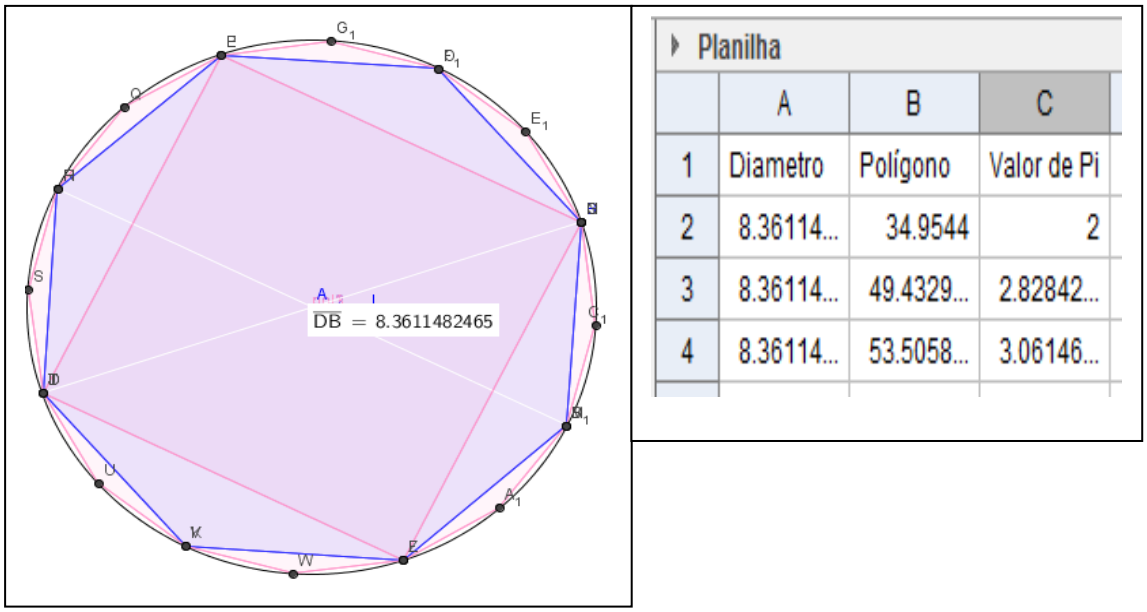
Assim, essa demonstração foi um importante passo dado na tentativa de melhorar a resolução de problemas sobre áreas de regiões curvas. A partir de então, *os problemas sobre quadratura*, ao invés de serem resolvidos reduzindo-se a figura circular ou lunar a um quadrado equivalente, tornou-se mais simples (ou mais preciso) aproximar a área de

um círculo à área de um polígono regular com um número de lados cada vez maior. Tais polígonos eram sucessivamente inscritos na circunferência. Quanto maior o número de lados do polígono, mais próxima estava área desse polígono da área do círculo. Foi dessa forma que a matemática grega contribuiu com o que séculos depois foi tratado como matemática infinitesimal, ou matemática do infinito, abrindo caminho para o desenvolvimento do cálculo integral e o estudo de limites (BARON, 1985; TOEPLITZ, 1969; BOYER, TORRETTI, 2007, SILVA,2010).

2.2 Apresentando o método da exaustão usando um software matemático[2]

O uso de ferramentas tecnológicas, neste caso usamos o Geogebra, permite que aproximemos a área do círculo inscrevendo e/ou circunscrevendo polígonos regulares. Isso, além de encontrarmos a área aproximada do circulo, também nos permite aproximar o valor de Pi e, assim, seguir os passos de Arquimedes. Nos exemplos, a seguir, vamos circunscrever polígonos numa dada circunferência e aproximar a área do círculo e o valor de Pi para polígonos regulares de 4, 8, 16, 24, 48 e 96 lados:

Primeiro fazemos para 4, 8 e 16 lados:



	A	B	C
1	Diametro	Polígono	Valor de Pi
2	8.36114...	34.9544	2
3	8.36114...	49.4329...	2.82842...
4	8.36114...	53.5058...	3.06146...

Figura -2 Construção no Geogebra com tabela.

Vale ressaltar que Arquimedes fez esse procedimento, usando lápis e papel, para polígonos inscritos e circunscritos de 6, 12, 24, 48 e 92 lados e, assim, encontrou a melhor aproximação para Pi até então.

Fazendo para um polígono com 24 lados, obtemos a figura a seguir:

[2] Utilizamos o Geogebra

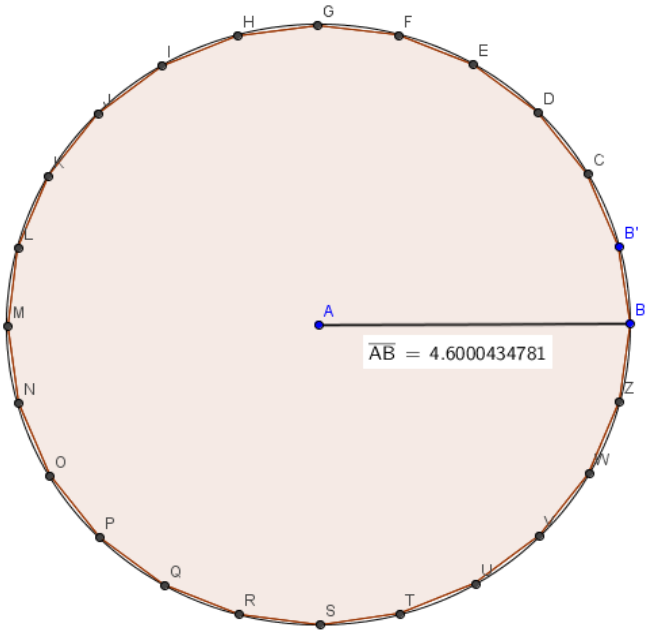


Figura -10 Polígono regular inscrito com 24 lados

Cuja tabela é dada a seguir:

Planilha

	A	B	C
1	Raio	Polígono	Valor de Pi
2	4.60004...	65.7205...	3.10582...

Para um polígono de 48 lados, temos a figura -3, a seguir:

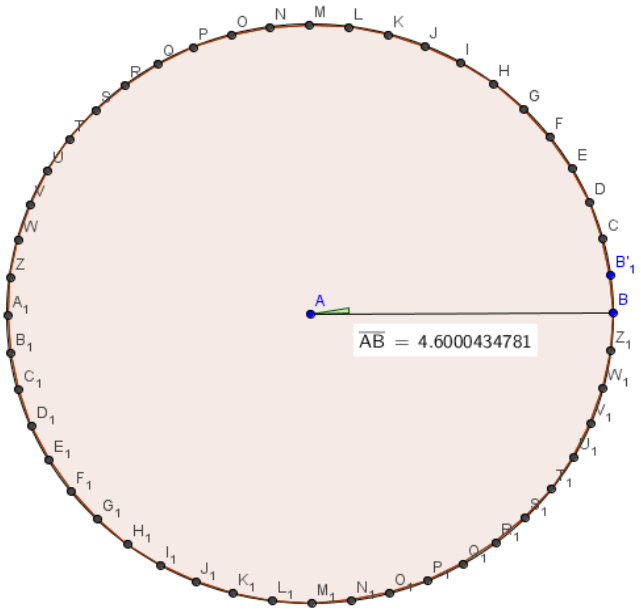


Figura -3 Polígono regular inscrito com 48 lados

Cuja tabela é:

Planilha

	A	B	C
1	Raio	Polígono	Valor de Pi
2	4.60004...	66.2876...	3.13262...

Finalmente, para 96 lados, obtemos a figura-4:

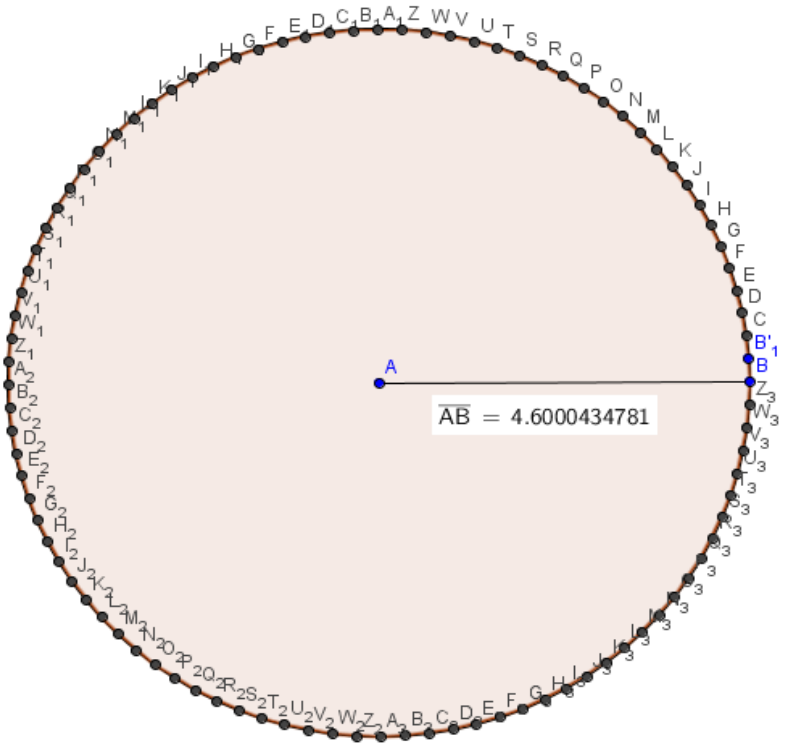


Figura – 4 Polígono regular inscrito de 96 lados

E a tabela é:

Planilha

	A	B	C
1	Raio	Polígono	Valor de Pi
2	4.60004...	66.4299...	3.13935...

Assim, podemos seguir nesse processo e ir aproximando o valor de Pi e, consequetemente, aproximar a área do circulo. Vale ressaltar que Arquimedes obteve a melhor aproximação da antiguidade para área do círculo e o valor de Pi e fez para um polígonos regulares inscritos e circunscritos de 96 lados, um feito notável considerando as ferramentas da época. Além disso, esse grande matemático também trabalhou sobre o cálculo de várias outras áreas de regiões curvas com foi o caso da área compreendida entre uma reta e um segmento parabólico. É que trataremos na seção a seguir.

3. O MÉTODO DA EXAUSTÃO DE ARQUIMEDES

3.1 A quadratura da parábola[3]

A Hipótese de Arquimedes:

> *"Uma seção de parábola excede em $\frac{1}{3}$ a área do triângulo inscrito de mesma base da seção de parábola e cujo vértice é o mesmo da parábola". Isto é,* $\boxed{A_{\cap ABC} = \frac{4}{3} A_{\Delta ABC}}$ *a área do segmento parabólico é $\frac{4}{3}$ a área do triângulo inscrito na parábola, de mesma base e mesmo vértice.*

Em notação algébrica moderna, temos:

$$\boxed{A_{\cap ABC} = \frac{4}{3} A_{\Delta ABC}}$$

Vejamos também a demonstração usando a soma de uma série infinita[4], conforme está em Wussing (1998, p. 57):

> Em uma sucessão geométrica com razão $\frac{1}{4}$ a soma de todos os termos, aumentada na terça parte do termo menor é $\frac{4}{3}$ do termo maior. Sejam $a, b, c, d, e, \ldots$ Termos da sucessão. Tem-se que:
> $b + \frac{1}{3} b = \frac{4}{3} b = \frac{1}{3} a, c + \frac{1}{3} c = \frac{4}{3} c = \frac{1}{3} b, \ldots$
> Somando, segue que:
> $$b + c + d + e + \frac{1}{3} b + \frac{1}{3} c + \frac{1}{3} d + \frac{1}{3} e = \frac{1}{3} (a + b + c + d)$$
> Somando a e restando $\frac{1}{3} b, \frac{1}{3} c, \frac{1}{3} d, \frac{1}{3} e$ se obtém
> $$a + b + c + d + e + \frac{1}{3} e = \frac{4}{3} a$$
> c.q.d.

Portanto, de acordo com Wussing, na essência esse resultado, numa concepção moderna, nada mais é do que "o cálculo efetivo do limite de uma sucessão de somas parciais que se diferencia de uma quantidade finita em menos do que uma quantidade arbitrariamente pequena" (WUSSING,1998, p. 57). Ainda para historiador:

> No segmento parabólico (fig. 36) AC se inscreve o triângulo ABC; H divide AC em duas partes iguais, HB é paralelo ao eixo da parábola. AB e AC dão lugar a novos segmentos parabólicos, aos quais se aplica o procedimento anterior. Obtêm-se, assim, os triângulos ADB e BEC. Das propriedades da parábola segue que ΔABC é quatro vezes a soma dos outros triângulos. No passo seguinte se obtém quatro triângulos, cuja soma é um quarto da área dos anteriores, etc.

[3] A demonstração aqui apresentada está em conformidade com (HERRERA, 2003, p. 63-67). Embora esteja em conformidade com o exposto por Arquimedes, utiliza uma linguagem moderna.

[4] Naturalmente, Arquimedes não usou a expressão soma de uma série infinita.

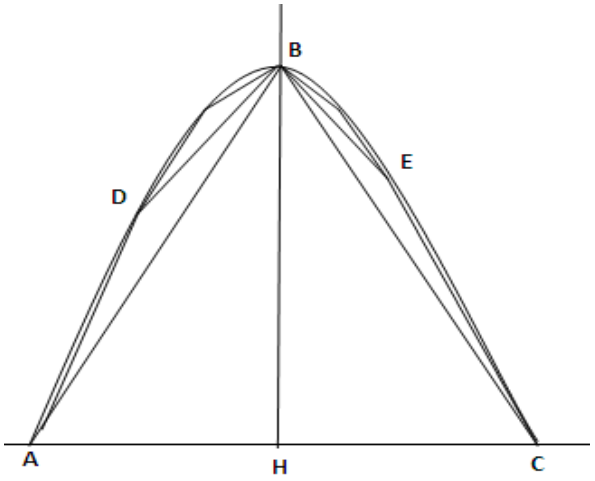


Figura- 7 Quadratura da Parábola por aproximação de triângulos inscritos conduzida por Arquimedes.

Supondo que proposição seja falsa, se teria então que a área do segmento parabólico deveria ser maior ou menor do que $\frac{4}{3}$ da área K do triângulo ABC. Suponhamos primeiro que a área é $> \frac{4}{3}\Delta$. Por meio do procedimento de inscrever triângulos, "será possível continuar (...) até que a soma dos segmentos resultantes seja menor do que a diferença na qual o segmento supera a área K. De onde segue que o polígono inscrito [isto é, uma soma parcial $a + b + \cdots + e$, N.A] será maior que a área K. Porém, isso é impossível, pois então existem áreas que formam uma sucessão geométrica de razão $\frac{1}{4}$, ..., e é claro que a soma de todas as áreas que $\frac{4}{3}$ a maior de todas" (WUSSING, 1998, p. 58).

A seguir fazemos essa demonstração usando ferramentas tecnológicas atuais.

3.2 A quadratura da parábola usando um Software Matemático[5]

Dado o segmento parabólico *ABC*, seguir:

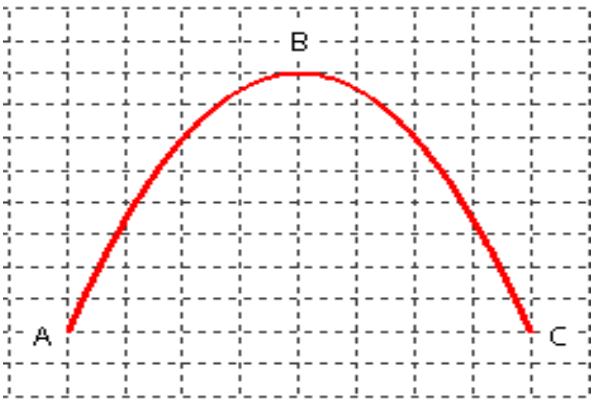


Figura-2 Segmento parabólico

[5] - A atividade foi feita usando o software Winplot.

Vamos à prova dada por Arquimedes:

Prova: Dado o segmento de parábola *ABC*, conforme figura-32, a seguir:

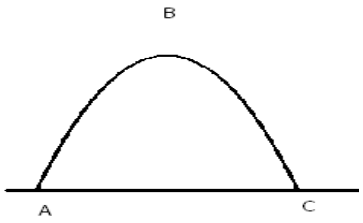


Figura 3 Segmento de Parábola

1) Tracemos por A uma reta paralela ao vértice B e por C uma reta tangente à parábola nesse ponto. A reta tangente a C deve cortar a reta tangente a A no ponto Z. Unir, com retas, os pontos AC, AB e BC, formando o triângulo ΔABC, de acordo com figura-33 (seguindo N.M)

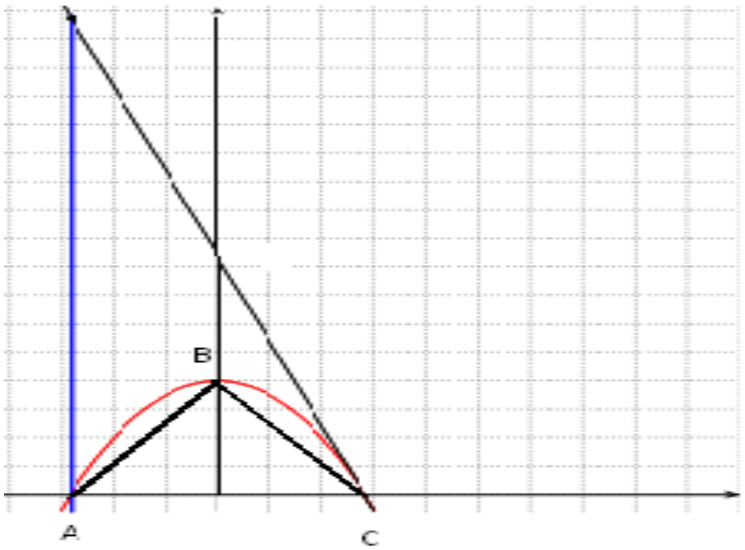


Figura-4 - triângulo ABC interior à parábola.

2) Construir uma reta entre a reta que passa por A e o vértice e que seja paralela ao vértice. Esta reta corta a base da parábola no ponto X, a parábola no ponto O, em M a reta tangente ao ponto C, em N a reta CB e em K, a reta AZ, conforme figura-34, a seguir:

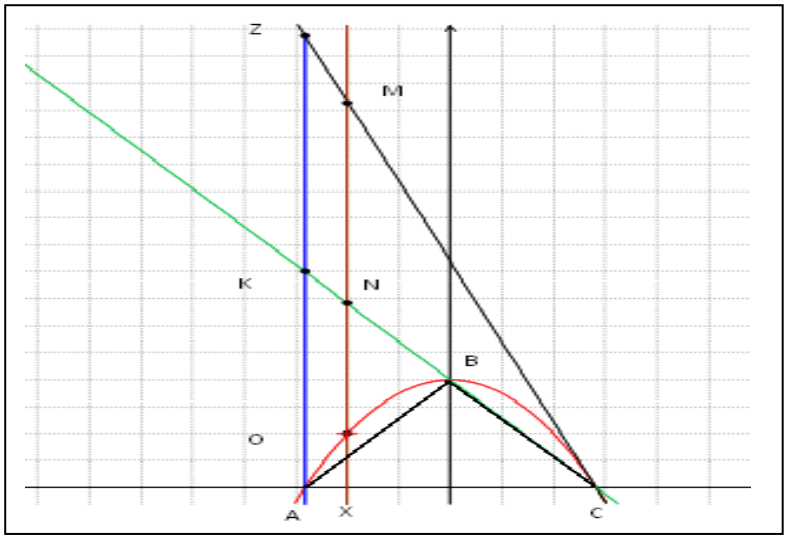


Figura 5– Arquimedes e a quadratura da parábola

Figura 5– Arquimedes e a quadratura da parábola

A partir da figura-5, Arquimedes deduziu as seguintes relações envolvendo o produto de segmentos, ou seja, ele deduziu que:

$OX.AC = AX.XM$ e que $OX.KC = KN.XM$

Além disso, essas relações o levaram fazer a seguinte consideração:
Se prolongarmos a reta BKC até um ponto D, tal que a distância KC seja igual à distancia KD e colocar sobre essa reta um segmento de longitude igual a OX no ponto D, obtemos a figura-6 (N.M):

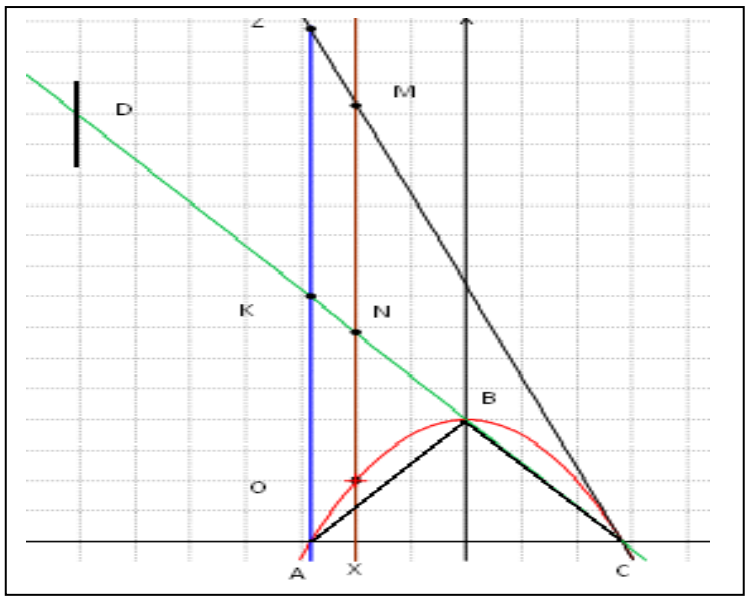


Figura -6 Princípio da balança aplicado à parábola.

> Segundo Arquimedes, utilizando as Leis da Balança, este segmento equilibrará MX com respeito ao ponto K. Então:
> A soma de todos os segmentos OX corresponderá à área da superfície do segmento parabólico ABC e a soma de todas as retas MX é a área total do triângulo ACZ.

Ainda, seguindo a demonstração de Arquimedes:

> Assim, a superfície de segmento OX, cujo centro de gravidade está em D, equilibra a superfície do triângulo ACZ, que tem seu centro de gravidade em G, ponto este situado sobre a reta KC, e a uma distância de K de $\frac{1}{3}$ de KC. Portanto, a superfície de segmentos XO, isto é $A_{\cap ABC}$ é $\frac{1}{3}$ da área do ΔACZ. Desse modo, podemos ver que a área do ΔACZ é quatro vezes a área do triângulo ΔABC, já que $ZK = AK$ e $AE = EC$ e também se verificam as proporções:
> $\frac{EC}{AC} = \frac{EB}{AK}$
> Daí fica fácil deduzirmos que $EB = \frac{AK}{2} = \frac{AZ}{4}$. Feito isso, é possível afirmar que a altura do triângulo ΔACZ é quatro vezes o triângulo ΔACB e suas bases são iguais a *AC*. Portanto, a área do segmento parabólico *ABC* é $\frac{4}{3}$ da área do triângulo ΔABC.

Essa prova poderia ser feita, ainda usando um software, e aproximando a área compreendida entre o segmento parabólico e o triângulo.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Para a escrita deste artigo escolhemos duas situações da história da matemática, as quais foram importantes para o desenvolvimento da matemática, especialmente, para a definição de limite e cálculo de integral. Assim, o uso de atividades usando a história da matemática pode se constituir em um importante elemento para a aprendizagem de conceitos matemáticos e, assim, conforme Mendes(2009) utilizar a matemática como agente de cognição para a aprendizagem matemática. Além disso, associando a história ao uso de novas tecnologias essas atividades se tornam mais fácil de serem construídas e interpretadas bem como mais atrativas para os alunos, uma vez que utilizamos ferramentas mais próximas de sua realidade . Portanto, uma proposta eficaz para a aprendizagem de conceitos matemáticos é associar o uso de problemas históricos que contribuíram para o desenvolvimento de conceitos matemáticos ao uso de ferramentas tecnológicas, em especial os softwares matemáticos.

REFERÊNCIAS

-BARON, M. *Curso de História da matemática: Origens e desenvolvimento do cálculo.* Editora Universidade de Brasília, 1985. Brasília. Unidade 1.
-BICUDO, I. Os Elementos (Tadução do grego). Ed. UNESP, São Paulo, 2009.
BOYER, C. B. História da Matemática. (Tradução de Elza F. Gomide). 2ed. Edgard Blücher. São Paulo, 1996.
- HERRERA, R.T. *Arquímedes alredor del círculo.* (Coleção: La Matemática en sus personajes, v.1). 2ed. Nivola. Madri, 2003. 132p.
- MENDES, I. A *A Investigação histórica como agente da cognição matemática na sala de aula.* **In:** A história como um agente na educação matemática. Porto Alegre: Sulina, 2006. pp. 79-136.

- _____. A Investigação histórica como agente da cognição matemática na sala de aula. In: *A história como um agente na educação matemática.* Porto Alegre: Sulina, 2006. p. 79-136.Org. Iran A. Mendes, Jonh A. Fossa e Juan E. Nápoles Valdez)

- _____. Investigação histórica no ensino de Matemática. Editora Ciência Moderna. Rio de Janeiro, 2009.
- MENDES, I. A. História da matemática em atividades didáticas. 2ed. EDUFRN. Natal, 2009.
- SILVA, M. D. F. Um método de Arquimedes para a quadratura da parábola. Revista de Matemática, Ensino e Cultura. Editora da UFRN. Ano 3, nº. 4, fev/jun. de 2008 pp. 35-39).
-SILVA, M. D. F Problemas e modelos que contribuíram com desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral: dos gregos a Newton. Tese de Doutorado. UFRN, 2010.
-TORRETTI, R. De Eudoxo a Newton: modelos matemáticos em la filosofia natural. Colección Pensamiento Contemporáneo. Santiago. Chile, 2007.
- URBANEJA, P.M. G eti ali. Método de Arquímedes. Fundació Bernat Metge - 1997 .
- WUSSING, H. *História Concisa de las Matemáticas.* Siglo Veintiuno editores, as. Madri, Espanha, 1998.

Copyright © 2013 A autora Maria Deusa Ferreira da Silva concede licença não exclusiva, aos organizadores do VI HTEM, para publicar este documento no CD de trabalhos completos do evento. Qualquer outro uso é proibido sem o consentimento da autora.