



Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Departamento de Matemática



CONEXÕES DA GEOMETRIA ANALÍTICA COM A GEOMETRIA PLANA DE POSIÇÃO

Autora: *Jheniffer Camila Pedro*

Orientador: *Prof. Dr. Roberto Ribeiro Paterlini*

Disciplina: Trabalho de Conclusão de Curso B

Curso: Licenciatura em Matemática

Professores Responsáveis: Alessandra Aparecida Verri
João Carlos Vieira Sampaio
Selma Helena de Jesus Nicola

São Carlos, 20 de setembro de 2017.

Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Departamento de Matemática
Curso de Licenciatura em Matemática

**CONEXÕES DA GEOMETRIA ANALÍTICA COM A
GEOMETRIA PLANA DE POSIÇÃO**

São Carlos - SP, 20 de setembro de 2017.

Jheniffer Camila Pedro
Autora

Roberto Ribeiro Paterlini
Orientador

Para minha família e amigos.

Agradecimentos

Agradeço meus pais, minha irmã e meus avós, pelo apoio incondicional em todo momento da minha vida, em especial durante a graduação em Licenciatura em Matemática. Agradeço o professor Dr. Roberto Ribeiro Paterlini, que me orientou nesse Trabalho de Conclusão de Curso, pelo apoio, ajuda e paciência durante o desenvolvimento deste, além do suporte dado durante minha graduação.

Agradeço a todos os professores que contribuíram para o meu crescimento profissional e pessoal, em especial aos professores Adriana Ramos, Jean Gonçalves Piton, João Carlos Vieira Sampaio, Regina Célia Grandó, Renata Prenstteter Gama e Renato Moura.

Um agradecimento ao meu namorado, pelos momentos de apoio e companheirismo.

Resumo

Este estudo investigou conexões entre a Geometria Analítica e a Geometria Plana de Posição. Através de nossos próprios métodos, de pesquisas em livros e textos encontrados na internet, obtivemos resultados e demonstrações da Geometria Plana de Posição utilizando recursos da Geometria Analítica. Vimos que muitas vezes o uso de vetores proporciona demonstrações mais simples e torna possível localizar pontos notáveis em coordenadas. Observamos que é muito importante o estudo de Geometria com os métodos próprios da Geometria de Posição, no entanto uma maior integração com a Geometria Analítica deveria estar presente no ensino.

Palavras chaves: Geometria Analítica, Geometria Plana de Posição, ensino.

Apresentação

Pensando em um tema para meu Trabalho de Conclusão de Curso e possuindo afinidade com o conteúdo de Geometria, conversei com professores que tive contato através das disciplinas relacionadas ao tema.

Depois de cursar quatro disciplinas ministradas pelo professor Dr. Roberto Ribeiro Paterlini, decidi procurá-lo. Através do contato, o mesmo se disponibilizou a ser o orientador de minha pesquisa.

Em seguida, pensando em conteúdos a serem estudados, o professor sugeriu uma pesquisa sobre a relação entre a Geometria Analítica e a Geometria Plana de Posição. Nesse trabalho estudamos conceitos de Geometria Analítica Plana, propriedades básicas, resultados sobre o triângulo, resultados sobre o quadrilátero e alguns problemas resolvidos com Geometria Analítica.

Descrevemos agora a estrutura do trabalho. Na introdução, apresentamos considerações sobre a conexão da Matemática entre si e áreas da Matemática estudadas no Ensino Básico. No primeiro capítulo, *Conceitos de Geometria Analítica Plana*, apresentamos conceitos básicos de Geometria Analítica.

No segundo capítulo, *Propriedades básicas*, apresentamos conceitos e propriedades básicas de Geometria Analítica que serão utilizadas como suporte para os capítulos seguintes.

No terceiro capítulo, *Resultados sobre o triângulo* escrevemos definições, representação em coordenadas e estudamos propriedades do triângulo usando vetores e coordenadas.

No quarto capítulo, *Resultados sobre o quadrilátero* escrevemos definições, representação em coordenadas e estudamos propriedades do quadrilátero usando vetores e coordenadas.

No quinto capítulo, *Alguns problemas resolvidos com Geometria Analítica* escolhemos alguns problemas que nos pareceram interessantes e para os quais apresentamos soluções usando vetores.

Gostaria de afirmar que esse trabalho contribuiu para minha formação e me possibilitou complementar o que aprendi sobre Geometria Analítica e Geometria de Posição na graduação.

Sumário

Introdução	14
1 Conceitos de Geometria Analítica Plana	18
1.1 Sistema de Coordenadas Cartesianas	18
1.2 Distância	19
1.3 Vetores no Plano	19
1.4 Mudança de coordenadas e isometrias	22
2 Propriedades básicas	24
2.1 Expressão de retas, semirretas e segmentos por vetores	24
2.2 Ponto médio de um segmento	24
2.3 Divisão de um segmento em três partes congruentes	25
2.4 Divisão de um segmento em uma razão dada	26
3 Resultados sobre triângulos	30
3.1 Definições	30
3.2 Representação de um triângulo em coordenadas	30
3.3 Duas propriedades do triângulo retângulo	32
3.4 Pontos Médios de dois lados de um triângulo	34
3.5 Uma propriedade do triângulo isósceles	35
3.6 O Teorema Fundamental da Proporcionalidade	36
3.7 Coordenadas do baricentro	38
3.8 O Teorema da Bissetriz Interna	39
3.9 O Teorema da Bissetriz Externa	41
3.10 Coordenadas do incentro	44
3.11 Coordenadas dos incentros externos	46
3.12 Coordenadas do centro de Spieker	48
3.13 Existência do ortocentro de um triângulo	49
3.14 Uma expressão para o ortocentro	50
3.15 Uma expressão para o circuncentro	52
3.16 O Teorema da reta de Euler	53
3.17 Expressão do ortocentro em coordenadas	53
3.18 Expressão do circuncentro em coordenadas	55

3.19	O Teorema de Ceva	56
3.20	Comprimento da mediana	58
3.21	Lei dos Cossenos	59
4	Resultados sobre quadriláteros	60
4.1	Definições	60
4.2	Representação de quadriláteros em coordenadas	60
4.3	Paralelogramos e propriedades	63
4.3.1	Uma condição para paralelogramos	64
4.3.2	Um quadrilátero é um paralelogramo se e somente se suas diagonais têm o mesmo ponto médio	65
4.3.3	Um quadrilátero é um paralelogramo se e somente se ele tem dois lados paralelos e congruentes	65
4.3.4	Um quadrilátero é um paralelogramo se e somente se os lados opostos são congruentes	65
4.4	Diagonais congruentes de um paralelogramo	66
4.5	As diagonais de um losango são perpendiculares entre si	67
4.6	Em um paralelogramo os ângulos opostos são congruentes	67
4.7	Pontos médios de um quadrilátero	68
4.8	O centróide de um quadrilátero	69
4.9	Pontos médios das diagonais de um trapézio	70
4.10	As bimedias de um quadrilátero	71
4.11	O Teorema de Finsler-Hadwiger	72
4.12	O Teorema de Van Aubel	75
5	Alguns problemas resolvidos com Geometria Analítica	78
5.1	Paralelogramo e suas diagonais	78
5.2	Comprimento do segmento de um quadrado	79
5.3	Coordenadas de um paralelogramo	79
5.4	Ortocentro de um triângulo dado em coordenadas	80
5.5	Razões de um trapézio	82
5.6	Centróide de um triângulo	83
5.7	Dê a propriedade	84
5.8	Três partes congruentes	85

Introdução

Apresentamos aqui algumas considerações sobre a necessidade de se conectar entre si as diversas áreas da Matemática estudadas no Ensino Básico. O ensino tradicional fez uma separação muito acentuada dos diversos conteúdos, e atualmente procura-se superar essa situação.

Começamos destacando uma frase do PCN (1998, p. 19) “O significado da Matemática para o aluno resulta das conexões que ele estabelece entre ela e as demais disciplinas, entre ela e seu cotidiano e das conexões que ela estabelece entre os diferentes temas matemáticos”.

Um pouco mais adiante, novamente o PCN (1998, p. 47) reforça esse conceito propondo “estabelecer conexões entre temas matemáticos de diferentes campos e entre esses temas e conhecimentos de outras áreas curriculares”, evidenciando a importância de serem trabalhados no ensino as relações entre os diversos conteúdos tanto dentro da própria Matemática quanto entre a Matemática e outros ramos do conhecimento.

Segundo a versão dos PCNs para o Ensino Médio (2000, p. 43)

“ O critério central é o da contextualização e da interdisciplinaridade, ou seja, é o potencial de um tema permitir conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático, ou ainda, a relevância cultural do tema, tanto no que diz respeito às suas aplicações dentro ou fora da Matemática, como à sua importância histórica no desenvolvimento da própria ciência” .

As conexões em livros didáticos

Passamos a examinar alguns livros didáticos e ver como eles estão (ou não estão) propondo conexões entre a Geometria Analítica e a Geometria Plana de Posição. Isso nos dá uma ideia sobre o que os autores estão propondo (ou propuseram, quando se trata de livros mais antigos). Podemos ainda ver como os professores fazem essa conexão, supondo que utilizam o livro texto.

Vamos examinar a coleção didática “*A conquista da Matemática, Teoria e Aplicação*” [10]. São livros que foram muito usados nas escolas na década de 90 para estudantes de 5^a à 8^a série (6^o ao 9^o anos atuais). Cada série tinha volumes específicos.

O volume 5 apresenta uma seção de introdução à Geometria. Introduz o ponto, a reta e o plano através de modelos concretos, assim como figuras geométricas. Dá mais ênfase a polígonos, incluindo nomenclatura e classificação dos mais simples.

O volume 6 apresenta ângulo, classificação e propriedades. Traz também mais detalhes sobre triângulos e quadriláteros.

O volume 7 apresenta retas paralelas, e estuda novamente polígonos, particularmente seus ângulos e diagonais. Acrescenta mais propriedades dos triângulos e quadriláteros, como congruência de triângulos, e propriedades de retângulos e losangos. Estuda também as propriedades mais básicas da circunferência.

O volume 8 estuda brevemente o sistema de coordenadas cartesianas. Explica o conceito e como localizar pontos. Desenha algumas figuras, como retas, quadrados, triângulos e a circunferência, sem as equações. Em Geometria, fala sobre proporção e semelhanças. Faz as relações métricas em triângulos retângulos, o teorema de Pitágoras e relações trigonométricas nos triângulos, como lei dos senos e dos cossenos. Depois apresenta mais resultados da circunferência e um estudo sobre medidas em polígonos regulares. Termina o livro estudando áreas de polígonos e da circunferência.

O estilo é tradicional, com apresentação de definições, explicações seguidas de exemplos e exercícios. Em apenas um momento usa a Geometria Analítica para estudar propriedades das figuras geométricas, quando desenha figuras com coordenadas.

Vamos examinar a coleção didática “*Matemática*” [13]. Essa é uma coleção mais moderna usada a partir de 2009 até hoje. Faz partes de livros aprovado pelo MEC (Ministério da Educação). Possui quatro volumes, correspondentes ao 6º, 7º, 8º e 9º anos.

O volume 6 traz uma seção que apresenta ângulos, retas perpendiculares e paralelas, definição e classificação de polígonos, relacionando com problemas e com o cotidiano.

O volume 7 apresenta ângulos, circunferência, simetrias utilizando polígonos e medidas dos ângulos de polígonos regulares. Traz relações da geometria plana e do espaço e algumas classificações, utilizando exemplos concretos. Introduz o sistema cartesiano do plano e representação de pontos. Explica medidas em Geometria através de perímetro e área.

O volume 8 apresenta noções de desenho geométrico e construções de formas tridimensionais, ângulos e suas propriedades, classificação dos polígonos e também especificações do quadrilátero. Faz cálculo de áreas e volumes através de fórmulas.

O volume 9 apresenta semelhança de triângulos, teorema de Pitágoras, deduções de teoremas da geometria, definição e demonstração de paralelismo e teorema de Tales, retoma ideias de construções geométricas e também definições do círculo e cilindro.

O estilo é de forma espiral, apresentando histórias, relações com o cotidiano e problemas, também relembando todo o conteúdo a cada volume. Em nenhum momento utiliza a Geometria Analítica para estudar propriedades das figuras geométricas. O estilo espiral significa que os livros retomam os conteúdos por diferentes formas metodológicas.

Vamos examinar a coleção didática “*Matemática 2º Grau*” [11].

O volume 1 apresenta noções básicas de Geometria Analítica no plano, com noções de par ordenado e sistema cartesiano possui um capítulo para resolução de triângulos, utilizando relações, teoremas e exercícios resolvidos. Também noções de trigonometria, utilizando relações trigonométricas, exercícios no contexto do cotidiano.

O volume 2 apresenta a Geometria Espacial de posição através de seções sobre o prisma, pirâmide, cilindro, cone, esfera, e poliedros.

O volume 3 apresenta Geometria Analítica, iniciando com ponto e retas, em seguida, especifica as cônicas como elipse, hipérbole e parábola. Não apresenta conexões entre áreas da Matemática.

Vamos examinar a coleção didática “*Matemática: Ciência e Aplicações*” [12].

O volume 1 apresenta semelhança de triângulos, propriedades do triângulo retângulo e também demonstra o teorema de Pitágoras e aplicações do teorema de Pitágoras.

O volume 2 apresenta áreas de figuras planas, geometria espacial de posição através de postulados, teoremas e propriedades, divide em seções da pirâmide, do cilindro, do cone e da esfera.

O volume 3 apresenta a Geometria Analítica, introduzindo conceitos básicos e aprofundando com reta, circunferência, cônicas e suas especificações. Estuda também coordenadas do baricentro de um triângulo através da Geometria Analítica. Esse é o único ponto em que o autor faz uma conexão entre a Geometria de Posição e a Geometria Analítica.

O estilo é tradicional, com apresentação de definições e exercícios. Em alguns momentos utiliza a História da Matemática como introdução ao conteúdo.

As conexões segundo artigos

Segundo Wagner (1999), [22], o ensino médio no Brasil trata independentemente cada área em relação às demais. A Geometria Analítica geralmente é apresentada apenas no 3º ano do ensino médio, e de forma desconectada dos outros conteúdos e áreas da Matemática. Evidencia que a Geometria Analítica é ensinada de uma forma que é utilizada apenas para resolver seus problemas específicos.

É educativo mostrar ao estudante como a Geometria Analítica pode ser útil em outros contextos. O ensino e os materiais didáticos não fazem relações entre Matemática e outras disciplinas do ensino, não apresentando aplicações diretas do cotidiano com as áreas da Matemática.

Segundo Lima (2001, p. 50) relata sobre a análise de livros de matemática para o ensino médio que “Não são apresentados os numerosos e eloquentes exemplos de uso da Geometria Analítica para resolver problemas de Geometria Plana.”

Isso evidencia como tem ocorrido o processo de ensino-aprendizagem da Geometria Analítica no ensino básico, apresentando características dos estudantes que ingressa no ensino superior.

No meu curso de Licenciatura em Matemática estudamos alguns livros que fazem a

conexão entre Geometria Analítica e Geometria de Posição em exemplos e problemas, tais livros textos [1] e [7].

Neste trabalho fazemos um resumo dos principais conceitos e propriedades que conectam a Geometria Analítica com a Geometria de Posição e Métrica, e procuramos estender essas propriedades a tópicos e problemas que possivelmente não são abordados na graduação.

Capítulo 1

Conceitos de Geometria Analítica Plana

Apresentamos neste capítulo notações e resultados básicos da Geometria Analítica Plana, que posteriormente utilizaremos para demonstrar teoremas e propriedades. Para esta apresentação nos baseamos em dois livros textos [1] e [7].

1.1 Sistema de Coordenadas Cartesianas

Dado um plano, dois eixos orientados 0_x e 0_y , perpendiculares em $x = 0$ e $y = 0$, determinam um sistema de coordenadas, indicado por 0_{xy} . O eixo 0_x é chamado eixo das abscissas e o eixo 0_y é chamado eixo das ordenadas. O ponto $(0, 0)$ é a origem do sistema de coordenadas.

Todo ponto P do plano corresponde a um par ordenado (x, y) , com $x \in 0_x$ e $y \in 0_y$. Por outro lado, a todo par ordenado corresponde um ponto no plano. A representação figural se faz como indicado na Figura 1.1. Dado um ponto $P = (x, y)$, consideramos a reta perpendicular a 0_x pela abscissa x e a reta perpendicular a 0_y pela ordenada y . O ponto P é localizado na interseção dessas retas.

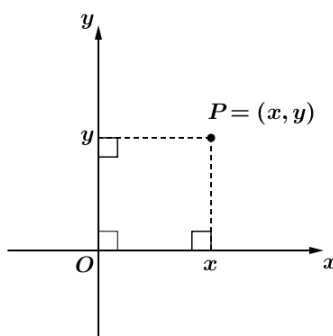


Figura 1.1 Representação de um ponto em um sistema de coordenadas cartesianas.

Esse sistema de coordenadas também é chamado de sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, ou apenas de sistema cartesiano.

1.2 Distância

Se $P = (x_1, 0)$ e $Q = (x_2, 0)$ são pontos quaisquer do eixo 0_x , a distância entre eles é $d(P, Q) = |x_2 - x_1|$. Se $P = (0, y_1)$ e $Q = (0, y_2)$ são pontos do eixo 0_y , a distância entre eles é $d(P, Q) = |y_2 - y_1|$.

Em geral, a distância entre dois pontos $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$ é

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Essa fórmula vem da aplicação do Teorema de Pitágoras, conforme se vê na Figura 1.2.

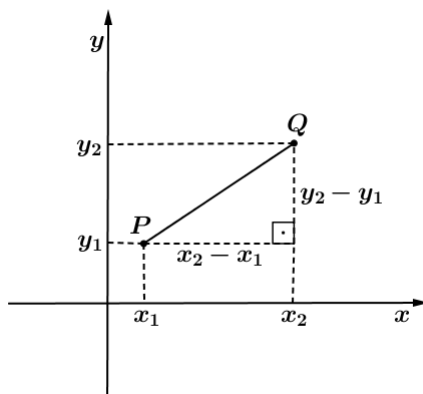


Figura 1.2 Distância entre pontos usando o Teorema de Pitágoras.

1.3 Vetores no Plano

Um vetor no sistema 0_{xy} é um ponto (x, y) desse plano, mas considerado geometricamente como uma “seta” de $(0, 0)$ a (x, y) .

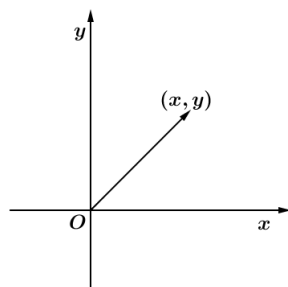


Figura 1.3 Vetor no plano.

Dados pontos $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$, a “seta” de A a B é também um vetor de origem A e extremidade final B , e indicado por \overrightarrow{AB} . Segmentos que possuem o mesmo comprimento, direção e sentido são considerados o mesmo vetor. Dessa forma,

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

Portanto, \overrightarrow{AB} pode ser escrito como $\overrightarrow{O(B-A)}$, sendo assim considerado como o vetor de origem O e extremidade $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.

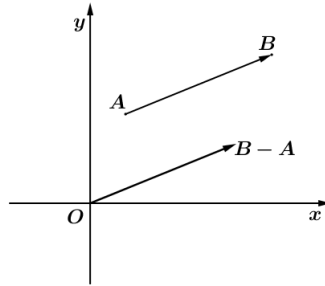


Figura 1.4 Duas representações do mesmo vetor.

Não repetiremos aqui as instruções completas que se encontram em livros textos como [1] e [7]. Apenas estabelecemos as notações relembando as propriedades mais usadas, assim como a forma usual de fazer representações figurais.

Os vetores costumam ser indicados por \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} , etc, e em sua expressão algébrica são pares ordenados.

Dado um vetor $\vec{v} = (x, y)$, seu módulo é

$$|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Vetores podem ser adicionados, subtraídos e multiplicados por um escalar $k \in \mathbb{R}$ da mesma forma como é feito para pares ordenados de \mathbb{R}^2 . Valem as propriedades comutativa, associativa e do elemento neutro. Em relação à multiplicação por um escalar, vale a distributiva. Para mais detalhes consultar [1].

A soma de vetores pode ser observada do ponto de vista geométrico. A soma $\vec{u} + \vec{v}$ é o vetor determinado pela diagonal do paralelogramo formado por eles, conforme indicado nas Figuras 1.5 e 1.6.

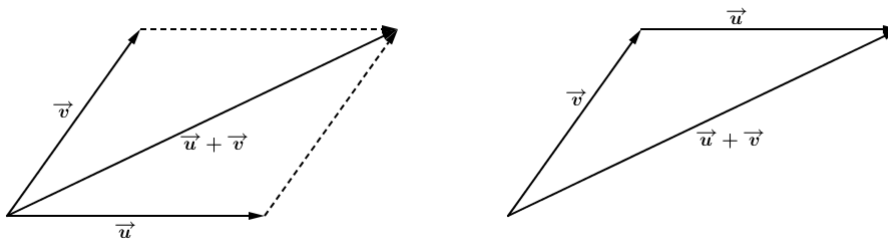


Figura 1.5

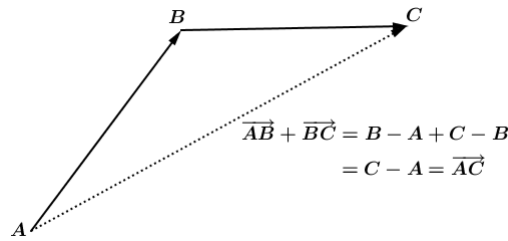


Figura 1.6

Dados dois vetores não nulos \vec{u} e \vec{v} com mesma origem e direções distintas, as semiretas por eles determinadas definem um ângulo de medida em radianos θ , com $0 < \theta < \pi$.

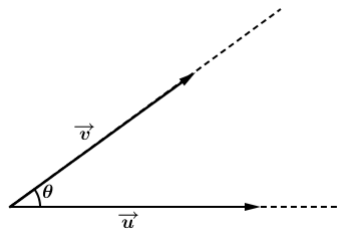


Figura 1.7 Dois vetores com mesma origem e direções distintas.

Se \vec{u} e \vec{v} têm a mesma direção e sentido, podemos dizer que determinam um ângulo nulo, e se têm a mesma direção e sentidos opostos, podemos dizer que determinam um ângulo de medida π .

O produto escalar de $\vec{u} \neq 0$ e $\vec{v} \neq 0$ é o número

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \theta$$

Se $\vec{u} = 0$ ou $\vec{v} = 0$ o produto dos vetores é nulo. Se $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$, em coordenadas temos

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

Valem as seguintes propriedades:

1. $\vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}|^2$ para todo vetor \vec{v}
2. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
3. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
4. $(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) = \lambda (\vec{u} \cdot \vec{v})$
5. $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq |\vec{u}| |\vec{v}|$ (Desigualdade de Cauchy-Schwarz).
6. $|\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|$ (Desigualdade Triangular)

Da fórmula $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \theta$, vemos que o ângulo entre dois vetores pode ser dado por

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} \quad \text{ou} \quad \theta = \arccos \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|}$$

Notemos que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ ocorre quando um dos vetores é nulo ou quando $\theta = \frac{\pi}{2}$. Nesse caso dizemos que \vec{u} e \vec{v} são ortogonais. Se $\vec{u} \neq 0$ e $\vec{v} \neq 0$, a condição $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ implica que as retas determinadas pelos vetores e passando por um ponto comum são perpendiculares naquele ponto.

Uma propriedade que usaremos muito é a seguinte: dois vetores \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{CD} se dizem paralelos quando, expressos como vetores com base na origem, estão contidos na mesma reta. Isso equivale a dizer que existe um número real $\lambda \neq 0$ tal que $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{CD}$.

1.4 Mudança de coordenadas e isometrias

No estudo de figuras do plano usando coordenadas e vetores muitas vezes usamos uma mudança de coordenadas para colocar a figura em uma posição mais favorável em relação ao sistema de coordenadas. São três os movimentos utilizados, podendo ocorrer uma composição deles:

- a) Translação: Todos os pontos são deslocados em uma mesma direção e na mesma distância.
- b) Rotação: Todos os pontos são rotacionados de um ângulo θ com o centro em um ponto previamente fixado.
- c) Reflexão: Todos os pontos são refletidos em relação a uma reta previamente fixada.

Esses movimentos são ditos “rígidos”, termo usado para indicar que os comprimentos e os ângulos da figura não são modificados.

Mais detalhes de mudanças de coordenadas podem ser estudados em [8] p. 117 e seguintes.

Capítulo 2

Propriedades básicas

Apresentamos neste capítulo alguns elementos básicos de Geometria expressos com o uso de coordenadas ou através de vetores. Vemos assim como representar retas, semirretas e segmentos usando vetores, e como repartir um segmento numa razão dada, entre outros resultados.

2.1 Expressão de retas, semirretas e segmentos por vetores

Sejam A um ponto e \vec{v} um vetor. A expressão vetorial da reta por eles determinada é

$$A + \lambda \vec{v}, \lambda \in \mathbb{R}$$

A semirreta \overrightarrow{CD} com extremidade em C e passando por D se escreve

$$C + \lambda \overrightarrow{CD}, \lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0$$

O segmento AB é dado por

$$(1 - \lambda)A + \lambda B, 0 \leq \lambda \leq 1$$

2.2 Ponto médio de um segmento

Sejam $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ pontos de um sistema de coordenadas O_{xy} . O ponto médio M do segmento AB é o ponto que satisfaz à condição $AM=MB$, ou $2AM=AB$.

Em notação vetorial temos $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ ou $2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}$.

$$\begin{aligned}
&\text{Temos } 2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \\
&\Rightarrow 2(M - A) = B - A \\
&\Rightarrow 2M - 2A = B - A \\
&\Rightarrow 2M = B - A + 2A \\
&\Rightarrow M = \frac{A + B}{2}
\end{aligned}$$

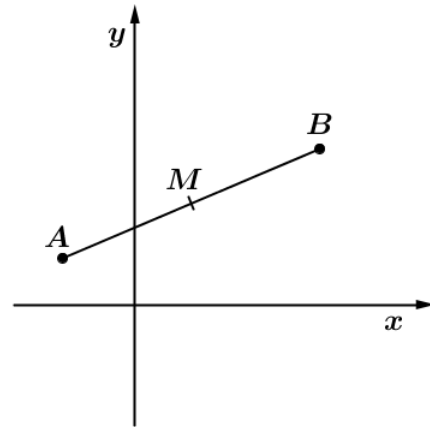


Figura 2.1 Representação de ponto médio em um segmento.

ou, em notação de coordenadas,

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right).$$

2.3 Divisão de um segmento em três partes congruentes

Sejam $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ e sejam P e Q pontos de AB tais que $3AP = AB$ e $3QB = AB$.

$$\begin{aligned}
&\text{Temos } 3\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} \\
&\Rightarrow 3(P - A) = B - A \\
&\Rightarrow 3P - 3A = B - A \\
&\Rightarrow 3P = B - A + 3A \\
&\Rightarrow 3P = 2A + B \\
&\Rightarrow P = \frac{2A + B}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{Temos } 3\overrightarrow{QB} = \overrightarrow{AB} \\
&\Rightarrow 3(B - Q) = B - A \\
&\Rightarrow 3B - 3Q = B - A \\
&\Rightarrow -3Q = B - A - 3B \\
&\Rightarrow 3Q = A + 2B \\
&\Rightarrow Q = \frac{A + 2B}{3}
\end{aligned}$$

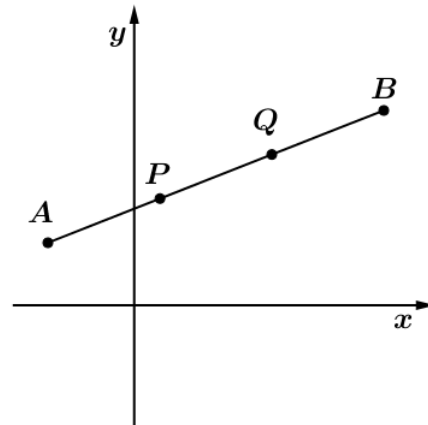


Figura 2.2 Segmento em três partes congruentes

ou, em notação de coordenadas, $P = \left(\frac{2x_1 + x_2}{3}, \frac{2y_1 + y_2}{3} \right)$ e $Q = \left(\frac{x_1 + 2x_2}{3}, \frac{y_1 + 2y_2}{3} \right)$

2.4 Divisão de um segmento em uma razão dada

Consideremos um segmento AB com $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ em um sistema de coordenadas 0_{xy} . Sejam $\lambda > 0$ e $\mu > 0$ números reais. Dizemos que o ponto $P \in AB$ divide esse segmento, internamente, na razão $\frac{\lambda}{\mu}$ quando

$$\frac{AP}{PB} = \frac{\lambda}{\mu}$$

conforme a Figura 2.3.

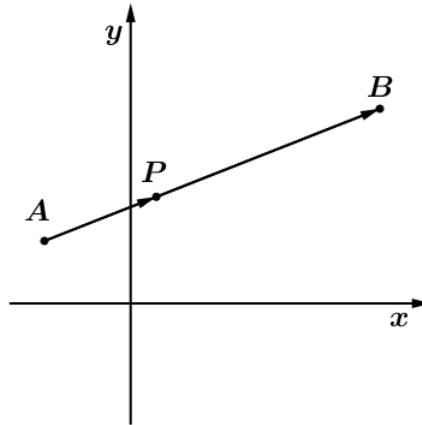


Figura 2.3 Segmento em uma razão dada

Vamos determinar as coordenadas de $P = (x, y)$. A relação numérica $\frac{AP}{PB} = \frac{\lambda}{\mu}$ equivale, em linguagem de vetores, a $\mu \overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{PB}$. Daí

$$\begin{aligned} \mu(P - A) &= \lambda(B - P) \Rightarrow \mu P - \mu A = \lambda B - \lambda P \\ \Rightarrow \mu P + \lambda P &= \mu A + \lambda B \Rightarrow (\mu + \lambda)P = \mu A + \lambda B \\ \Rightarrow P &= \frac{\mu A + \lambda B}{\mu + \lambda} \end{aligned}$$

Note que $\mu - \lambda \neq 0$, pois $A \neq B$. Em coordenadas,

$$P = \left(\frac{\mu x_1 + \lambda x_2}{\lambda + \mu}, \frac{\mu y_1 + \lambda y_2}{\lambda + \mu} \right)$$

Outra forma é chamar $\frac{\lambda}{\mu} = \rho$. Então

$$P = \frac{A + \frac{\lambda}{\mu} B}{1 + \frac{\lambda}{\mu}} = \frac{A + \rho B}{1 + \rho}$$

A relação $\mu\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{PB}$ pode ser escrita como uma relação entre \overrightarrow{AP} e \overrightarrow{AB} da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\mu\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{PB} &\iff \mu\overrightarrow{AP} = \lambda[\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AP}] \\ \iff \mu\overrightarrow{AP} + \lambda\overrightarrow{AP} &= \lambda\overrightarrow{AB} \iff (\mu + \lambda)\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AB}.\end{aligned}$$

Com $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$, temos

$$\overrightarrow{AP} = \frac{\lambda}{\mu + \lambda}\overrightarrow{AB} = \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{1 + \frac{\lambda}{\mu}}\overrightarrow{AB} = \frac{\rho}{1 + \rho}\overrightarrow{AB}$$

Consideremos agora o segmento AB com $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$. Sejam $\lambda > 0$ e $\mu > 0$ números reais distintos. Dizemos que o ponto $P \in \overleftrightarrow{AB} - AB$ divide AB , externamente, na razão $\frac{\lambda}{\mu}$ quando estiver satisfeita a relação numérica

$$\frac{AP}{PB} = \frac{\lambda}{\mu}$$

Pode ocorrer de B estar entre A e P ou de A estar entre B e P . De qualquer forma a relação vetorial é

$$\mu\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{BP}$$

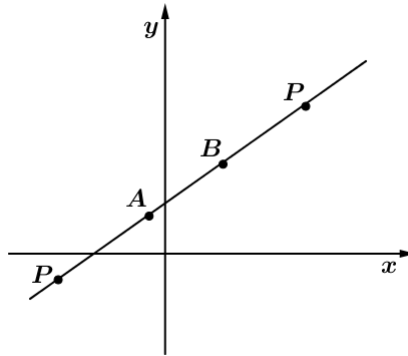


Figura 2.4

$$\begin{aligned}\text{Daí } \mu(P - A) = \lambda(P - B) &\Rightarrow \mu P - \mu A = \lambda P - \lambda B \Rightarrow \mu P - \lambda P = \mu A - \lambda B \Rightarrow (\mu - \lambda)P = \\ \mu A - \lambda B &\Rightarrow P = \frac{\mu A - \lambda B}{\mu - \lambda}.\end{aligned}$$

Em coordenadas

$$P = \left(\frac{\mu x_1 - \lambda x_2}{\mu - \lambda}, \frac{\mu y_1 - \lambda y_2}{\mu - \lambda} \right)$$

Se $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ temos

$$P = \frac{A - \frac{\lambda}{\mu}B}{1 - \frac{\lambda}{\mu}} = \frac{A - \rho B}{1 - \rho}$$

Temos também

$$\begin{aligned} \mu \overrightarrow{AP} &= \lambda \overrightarrow{BP} \iff \mu \overrightarrow{AP} = \lambda [\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB}] \\ \iff \mu \overrightarrow{AP} - \lambda \overrightarrow{AP} &= -\lambda \overrightarrow{AB} \iff (\mu - \lambda) \overrightarrow{AP} = -\lambda \overrightarrow{AB} \\ \iff (\lambda - \mu) \overrightarrow{AP} &= \lambda \overrightarrow{AB}. \end{aligned}$$

Como $A \neq B$ temos $\lambda \neq \mu$ e daí

$$\overrightarrow{AP} = \frac{\lambda}{\lambda - \mu} \overrightarrow{AB}$$

Com $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ temos

$$\overrightarrow{AP} = \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{\frac{\lambda}{\mu} - 1} \overrightarrow{AB} = \frac{\rho}{\rho - 1} \overrightarrow{AB}.$$

Capítulo 3

Resultados sobre triângulos

Apresentamos neste capítulo resultados sobre o triângulo, definições, representações em coordenadas e propriedades do triângulo usando vetores e coordenadas.

3.1 Definições

Dados três pontos não colineares A , B e C , o **triângulo** ABC é a reunião dos segmentos AB , BC e AC . Os pontos A , B e C são chamados **vértices** do triângulo, e os segmentos são chamados **lados**. As medidas desses segmentos também são chamadas de **lados**. Os ângulos do triângulo são $\angle ABC$, $\angle BAC$ e $\angle ACB$, ou simplesmente, \hat{B} , \hat{A} e \hat{C} . O número $AB + BC + AC$ chama-se **perímetro** do triângulo. Seja $D \in \overleftrightarrow{BC}$. O segmento AD chama-se **ceviana** se $D \in BC$ com $D \neq B$ e $D \neq C$. O segmento AD chama-se **mediana** se D for o ponto médio de BC . O segmento AD chama-se **bissetriz** se \overrightarrow{AD} for a semirreta que divide \hat{A} em dois ângulos de mesma medida. O segmento AD chama-se **altura** se $AD \perp \overleftrightarrow{BC}$. O comprimento AD também é chamado **altura**.

3.2 Representação de um triângulo em coordenadas

Um triângulo qualquer é representado em um sistema cartesiano 0_{xy} por três pontos $A=(x_0, y_0)$, $B=(x_1, y_1)$ e $C=(x_2, y_2)$. A condição de não colinearidade é dada algebricamente por

$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

De fato, notemos que

$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & 0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 \end{vmatrix}$$

que é $\neq 0$ se e somente se as linhas não são proporcionais, isto é, não existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$(x_1 - x_0, y_1 - y_0) = \lambda(x_2 - x_0, y_2 - y_0)$$

$$\Leftrightarrow B - A = \lambda(C - A) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{AC}$$

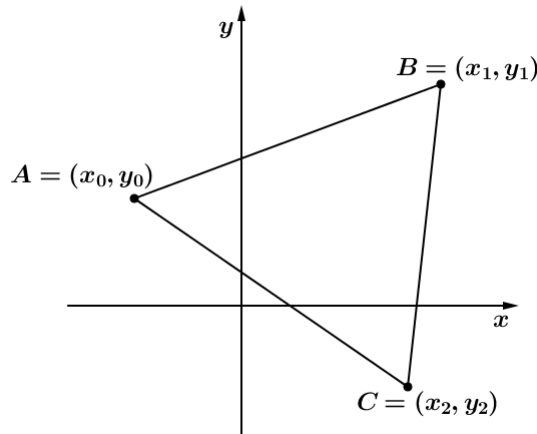


Figura 3.1 Triângulo em um sistema cartesiano.

Para estudar as propriedades de um triângulo que são preservadas por mudança de coordenadas podemos simplificar suas coordenadas da seguinte forma: a origem das coordenadas é transladada para o ponto A, de modo que $A=(0,0)$. O eixo das abcissas é posicionado de modo que $B=(b,0)$ com $b \geq 0$.

O lado AB pode ser escolhido como o maior lado do triângulo, de modo que $m(\hat{A}) \leq 90^\circ$. Apontamos o eixo O_y de modo que C esteja no 1º quadrante, e assim $C=(c,d)$ com $c > 0$ e $d > 0$.

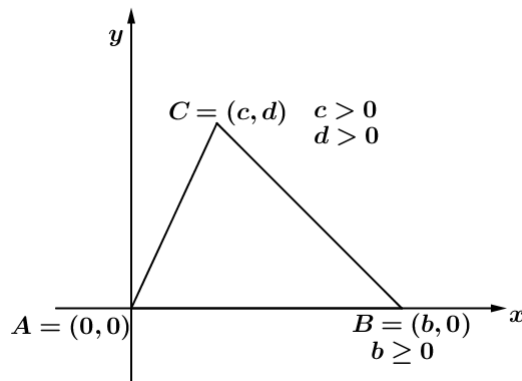


Figura 3.2 Coordenadas especiais do triângulo.

Se o triângulo for retângulo, podemos escolher também a posição $A=(0,0)$, $B=(b,0)$ com $b>0$ e $C=(0,c)$ com $c>0$. Confira a Figura 3.3.

Vejam alguns importantes resultados da Geometria Plana estudados no Ensino Fundamental cuja demonstração pode ser realizada com Geometria Analítica, muitas vezes de forma mais simples.

3.3 Duas propriedades do triângulo retângulo

Temos os dois resultados seguintes, bastante conhecidos na Geometria Elementar, mas aqui demonstrados com o uso de vetores.

1. Em um triângulo retângulo o ponto médio da hipotenusa é equidistante dos três vértices (isto é, o ponto médio da hipotenusa é o circuncentro).
2. Se em um triângulo a mediana relativa a um lado tem comprimento igual à metade desse lado, então o triângulo é retângulo e a hipotenusa é o lado mencionado.

Demonstração de 1. usando vetores

Consideramos o triângulo ABC , retângulo em A , e seja M o ponto médio da hipotenusa BC . Confira a Figura 3.3.

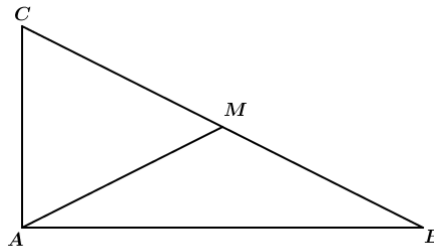


Figura 3.3

Temos $\vec{BC} = \vec{BA} + \vec{AC}$. Portanto

$$\begin{aligned} BC^2 &= \|\vec{BC}\|^2 = \vec{BC} \cdot \vec{BC} = (\vec{BA} + \vec{AC}) \cdot (\vec{BA} + \vec{AC}) = \\ &= \|\vec{BA}\|^2 + 2\vec{BA} \cdot \vec{AC} + \|\vec{AC}\|^2 = AB^2 + AC^2 \end{aligned}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} \vec{AM} &= \vec{AB} + \vec{BM} = \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{BC} = \\ \vec{AB} + \frac{1}{2}[\vec{BA} + \vec{AC}] &= \vec{AB} - \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC} = \frac{1}{2}[\vec{AB} + \vec{AC}] \end{aligned}$$

Logo $AM^2 = \|\vec{AM}\|^2 = \frac{1}{4} (\vec{AB} + \vec{AC}) \cdot (\vec{AB} + \vec{AC}) = \frac{1}{4}(AB^2 + AC^2)$. Daí

$$AM^2 = \frac{1}{4}BC^2 \Rightarrow AM = \frac{1}{2}BC$$

Logo M é equidistante dos três vértices.

Observação: Esse resultado também pode ser provado com coordenadas.

Seja ABC um triângulo retângulo com ângulo reto em A . Consideramos as coordenadas $A = (0, 0)$, $B = (b, 0)$ com $b > 0$ e $C = (0, c)$, com $c > 0$.

Seja D o ponto médio de BC . Pela seção 2.2 temos $D = \left(\frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)$. Confira a Figura 3.4 e por definição D já é equidistante de B e C .

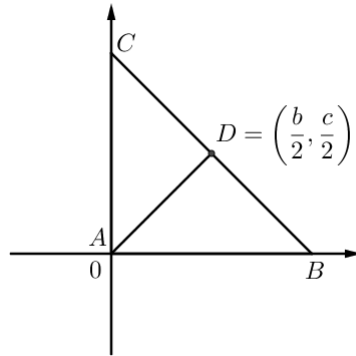


Figura 3.4

$$\begin{aligned} \text{Temos } AD &= \sqrt{\left(\frac{b}{2} - 0\right)^2 + \left(\frac{c}{2} - 0\right)^2} = \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + c^2} \\ \text{e } BD &= \sqrt{\left(b - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(0 - \frac{c}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + c^2} \end{aligned}$$

Portanto, $AD = BD$. Logo D é equidistante dos três vértices.

Demonstração de 2. usando vetores

Dado o triângulo ABC , seja M o ponto médio de BC , e suponhamos que $AM = \frac{1}{2}BC$. Confira a Figura 3.5.

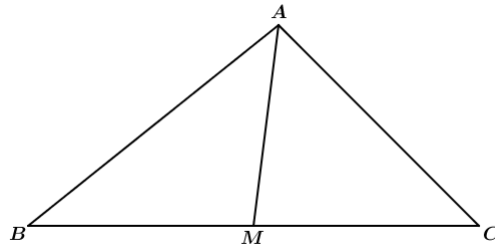


Figura 3.5

Dos cálculos feitos na demonstração da propriedade 1, temos

$$\begin{aligned}\|\vec{BC}\|^2 &= AB^2 + 2\vec{BA} \cdot \vec{AC} + AC^2 \text{ e} \\ \|\vec{AM}\|^2 &= \frac{1}{4} [AB^2 + 2\vec{AB} \cdot \vec{AC} + AC^2]\end{aligned}$$

Usando a relação dada obtemos

$$\begin{aligned}2\vec{BA} \cdot \vec{AC} &= 2\vec{AB} \cdot \vec{AC} \\ \Rightarrow \vec{BA} \cdot \vec{CA} + \vec{BA} \cdot \vec{AC} &= 0 \\ \Rightarrow \vec{BA} \cdot \vec{AC} &= 0\end{aligned}$$

Logo $\vec{BA} \perp \vec{AC}$, e ABC é um triângulo retângulo em A , com hipotenusa BC .

3.4 Pontos Médios de dois lados de um triângulo

O segmento de reta que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e igual à metade deste lado.

Seja ABC um triângulo, conforme a Figura 3.6 em que M e N são pontos médios dos lados AC e BC respectivamente.

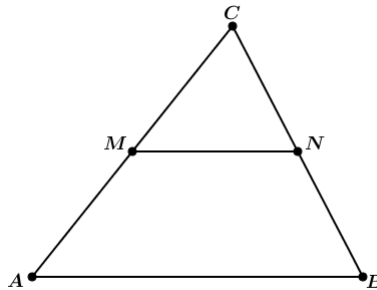


Figura 3.6

Queremos provar que $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Temos

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \\ &= \frac{1}{2}[\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}] = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

Portanto $MN \parallel AB$ e $MN = \frac{1}{2}AB$.

Vale a seguinte recíproca:

Se M é ponto médio de AC e se $N \in BC$ satisfaz $MN \parallel AB$ então N é o ponto médio de BC .

Para demonstrar observamos que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MC}$ e que existem números reais $\lambda \neq 0$ e $\mu \neq 0$ tais que $\overrightarrow{MN} = \lambda\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CN} = \mu\overrightarrow{NB}$. Temos

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CN} - \overrightarrow{NB} &= (\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MN}) - (\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) = \\ &= \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MN} - \overrightarrow{NM} - \overrightarrow{AB} = \\ &= \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MN} - \overrightarrow{AB} = \\ &= 2\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{AB} = 2\lambda\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} = (2\lambda - 1)\overrightarrow{AB}.\end{aligned}$$

Por outro lado

$$\overrightarrow{CN} - \overrightarrow{NB} = \mu\overrightarrow{NB} - \overrightarrow{NB} = (\mu - 1)\overrightarrow{NB}.$$

Portanto

$$(\mu - 1)\overrightarrow{NB} = (2\lambda - 1)\overrightarrow{AB}$$

Como \overrightarrow{NB} e \overrightarrow{AB} não são paralelos temos $\mu - 1 = 0$ e $2\lambda - 1 = 0$. Logo $\mu = 1$ e $\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{NB}$. Portanto N é ponto médio de BC . Ainda $\lambda = \frac{1}{2}$ e $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, como era de se esperar.

3.5 Uma propriedade do triângulo isósceles

Vamos provar, usando vetores, uma conhecida propriedade dos triângulos isósceles:

A mediana relativa à base de um triângulo isósceles é perpendicular à base.

Seja ABC um triângulo isósceles com base AB , conforme a Figura 3.7, em que M é o ponto médio do lado AB . Vamos mostrar que a mediana CM é perpendicular à base AB .

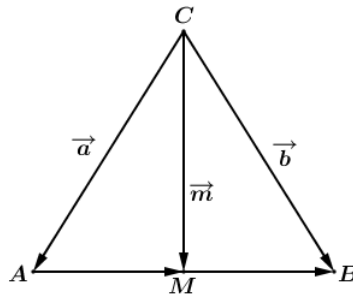


Figura 3.7

Sejam $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CB}$ e $\vec{m} = \overrightarrow{CM}$. Pela Figura 3.7 temos:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CM} &= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM} \text{ e } \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CB} \\ \Rightarrow \vec{m} &= \vec{a} + \overrightarrow{AM} \text{ e } \vec{m} = \vec{b} - \overrightarrow{MB}. \end{aligned}$$

Somando, temos:

$$2\vec{m} = \vec{a} + \vec{b} + \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{MB}.$$

Como M é ponto médio de AB , temos $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$. Logo

$$2\vec{m} = \vec{a} + \vec{b} \Rightarrow \vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}).$$

Assim $\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$. Temos também, da Figura 3.7, que $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$

Notemos agora que

$$\vec{m} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \frac{1}{2}(a^2 - b^2)$$

Como $a^2 = |\vec{a}|^2$ e $b^2 = |\vec{b}|^2$ e o triângulo é isósceles ($|\vec{a}| = |\vec{b}|$), temos: $\vec{m} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$. Concluímos que \vec{m} é ortogonal a \overrightarrow{AB} , o que mostra que a mediana CM é perpendicular à base AB .

3.6 O Teorema Fundamental da Proporcionalidade

A identificação do plano com \mathbb{R}^2 permite uma demonstração bem simples do Teorema Fundamental da Proporcionalidade. Começamos com a seguinte afirmação:

Se uma reta, paralela a um dos lados de um triângulo, corta os outros dois lados em pontos internos, então ela os divide na mesma razão.

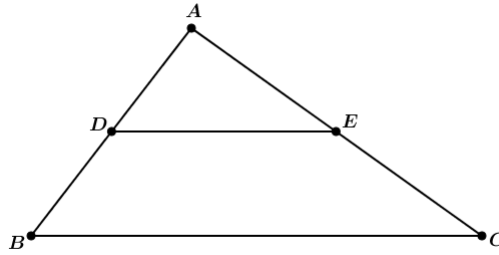


Figura 3.8

Demonstração:

Por hipótese existem λ, μ e $\rho > 0$ tais que

$$\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BC} = \mu \overrightarrow{DE} \text{ e } \overrightarrow{AB} = \rho \overrightarrow{AD}$$

Queremos provar que $\lambda = \mu = \rho$. Temos

$$\lambda \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \rho \overrightarrow{AD} + \mu \overrightarrow{DE}$$

Portanto

$$\lambda \overrightarrow{AE} = \rho \overrightarrow{AD} + \mu \overrightarrow{DE} = \rho[\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ED}] + \mu \overrightarrow{DE}$$

Logo $(\lambda - \rho)\overrightarrow{AE} = (\mu - \rho)\overrightarrow{DE} \Rightarrow \lambda - \rho = \mu - \rho = 0$. Segue o resultado.

Vejam agora a Recíproca do Teorema Fundamental da Proporcionalidade. Com as notações da Figura 3.8, se

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} \text{ então } DE \parallel BC \text{ e } \frac{BC}{DE} \text{ está na mesma razão.}$$

Seja $\lambda = \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$. Temos $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AE}$. Assim

$$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE} = -\frac{1}{\lambda} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{\lambda} \overrightarrow{AC} = \frac{1}{\lambda} \overrightarrow{BA} + \frac{1}{\lambda} \overrightarrow{AC} = \frac{1}{\lambda} (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{\lambda} \overrightarrow{BC}$$

Logo $\overrightarrow{DE} \parallel \overrightarrow{BC}$ e $\frac{BC}{DE} = \lambda$.

3.7 Coordenadas do baricentro

Seja ABC um triângulo. As medianas são concorrentes no ponto $G = \frac{A + B + C}{3}$, localizado ao longo de cada mediana a dois terços de seu comprimento contados a partir do vértice. Este ponto é chamado *baricentro*.

Demonstração:

Seja ABC um triângulo qualquer. Podemos supor que BC é o maior lado. A projeção de A sobre a reta suporte de BC está em BC . Assim podemos considerar um sistema cartesiano como o da Figura 3.9.

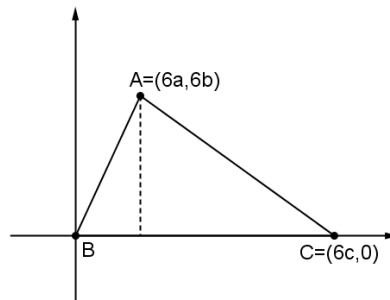


Figura 3.9

Para evitar frações, chamamos $A = (6a, 6b)$ e $C = (6c, 0)$, com $a > 0$, $b > 0$ e $c > 0$. Vimos na Seção 2.2 que podemos obter as coordenadas de E , que é o ponto médio de AC . Temos

$$E = \frac{A + C}{2} = \left(\frac{6a + 6c}{2}, \frac{6b + 0}{2} \right) = (3a + 3c, 3b)$$

Seja agora G o ponto da mediana BE tal que $BG = 2GE$. Da Seção 2.3 temos

$$G = \frac{B + 2E}{3} = \left(\frac{0 + 2(3a + 3c)}{3}, \frac{0 + 2 \cdot 3b}{3} \right) = (2a + 2c, 2b).$$

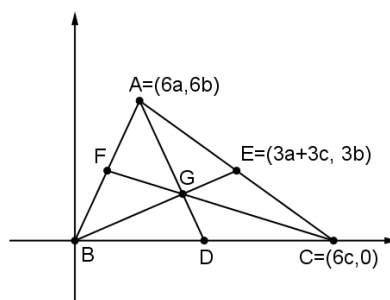


Figura 3.10

Seja agora Q o ponto da mediana AD a partir do vértice A até o lado BC tal que $AQ = 2QD$. Sendo $D = (3c, 0)$, temos

$$Q = \frac{A + 2D}{3} = \left(\frac{6a + 2 \cdot 3c}{3}, \frac{6b + 2 \cdot 0}{3} \right) = (2a + 2c, 2b)$$

Isto significa que $G = Q$, pois um ponto é determinado pelas suas coordenadas. Dessa forma, segue-se que o ponto correspondente da mediana de A a BC é o mesmo ponto G .

O mesmo ocorre na mediana CF por C , novamente G está nessa mediana e $CG=2GF$. Portanto as três medianas se encontram em G que tem a propriedade do enunciado.

$$\text{Vemos ainda que } G = \frac{B + 2E}{3} = \frac{B + 2 \frac{A+B}{2}}{3} = \frac{A+B+C}{3}.$$

3.8 O Teorema da Bissetriz Interna

Seja ABC um triângulo e anotemos suas medidas por $b = AC$ e $c = AB$. Seja r a reta bissetriz do ângulo \hat{A} e D a intersecção de r com o lado BC . Então

$$D = \frac{bB + cC}{b+c} \text{ e } \frac{BD}{AB} = \frac{CD}{AC} \text{ ou } b\overrightarrow{BD} = c\overrightarrow{CD}$$

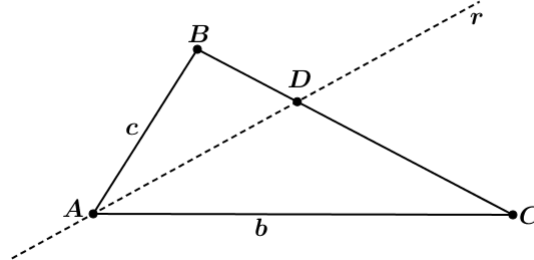


Figura 3.11

Demonstração:

A bissetriz r de \hat{A} contém a diagonal do losango cujos lados estão na direção dos lados de \hat{A} . Como esses lados precisam ter a mesma medida, sejam eles

$$\vec{u} = \frac{B - A}{|B - A|} = \frac{B - A}{c} \text{ e } \vec{v} = \frac{C - A}{|C - A|} = \frac{C - A}{b}$$

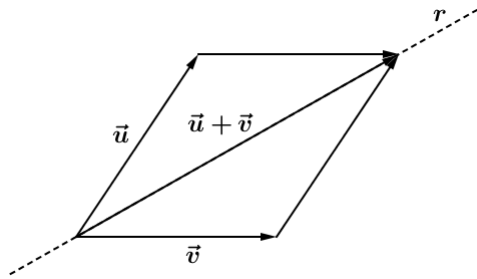


Figura 3.12

A equação da reta é

$$r : A + \lambda(\vec{u} + \vec{v}) = A + \lambda \left(\frac{B - A}{c} + \frac{C - A}{b} \right)$$

com $\lambda \in \mathbb{R}$. A reta por B e C é

$$s : C + \mu(B - C), \mu \in \mathbb{R}$$

Vamos encontrar a intersecção de r e s :

$$\begin{aligned} A + \lambda \left(\frac{B - A}{c} + \frac{C - A}{b} \right) &= C + \mu(B - C) \\ \frac{\lambda}{c}(B - A) + \frac{\lambda}{b}(C - A) &= (C - A) + \mu(B - C) \\ \frac{\lambda}{c}(B - A) + \left(\frac{\lambda}{b} - 1 \right) (C - A) - \mu(B - C) &= 0 \quad (*) \end{aligned}$$

Como

$$B - C = B - A + A - C = B - A - (C - A)$$

substituímos em (*):

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{c}(B - A) + \left(\frac{\lambda}{b} - 1 \right) (C - A) - \mu[(B - A) - (C - A)] &= 0 \\ \frac{\lambda}{c}(B - A) + \left(\frac{\lambda}{b} - 1 \right) (C - A) - \mu(B - A) + \mu(C - A) &= 0 \\ \left(\frac{\lambda}{c} - \mu \right) (B - A) + \left(\frac{\lambda}{b} - 1 + \mu \right) (C - A) &= 0 \end{aligned}$$

Como $B - A$ e $C - A$ são independentes temos:

$$\begin{cases} \frac{\lambda}{c} - \mu = 0 \Rightarrow \mu = \frac{\lambda}{c} \\ \frac{\lambda}{b} - 1 + \mu = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\lambda}{b} - 1 + \frac{\lambda}{c} = 0 \Rightarrow \frac{\lambda}{b} + \frac{\lambda}{c} = 1 \Rightarrow \lambda \left[\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right] = 1 \Rightarrow \lambda \frac{b+c}{bc} = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{bc}{b+c}$$

Daí $\mu = \frac{\lambda}{c} = \frac{b}{b+c}$.

A interseção é

$$\begin{aligned} D &= A + \frac{bc}{b+c} \left(\frac{B-A}{c} + \frac{C-A}{b} \right) \\ &= A + \frac{b}{b+c}(B-A) + \frac{c}{b+c}(C-A) \\ &= A + \frac{b}{b+c}B - \frac{b}{b+c}A + \frac{c}{b+c}C - \frac{c}{b+c}A \\ &= A + \frac{b}{b+c}B + \frac{c}{b+c}C - \left[\frac{b}{b+c} + \frac{c}{b+c} \right] A \\ &= \frac{b}{b+c}B + \frac{c}{b+c}C = \frac{bB+cC}{b+c} \end{aligned}$$

Portanto $D = \frac{bB+cC}{b+c}$.

Disso temos $(b+c)D = bB+cC \Rightarrow bD+cD = bB+cC$

$\Rightarrow bD - bB = cC - cD \Rightarrow b(D-B) = c(C-D)$

$\Rightarrow b\overrightarrow{BD} = c\overrightarrow{CD} \Rightarrow \frac{\overrightarrow{BD}}{c} = \frac{\overrightarrow{CD}}{b} \Rightarrow \frac{BD}{AB} = \frac{CD}{AC}$

3.9 O Teorema da Bissetriz Externa

Seja ABC um triângulo e sejam $a = BC$, $b = AC$ e $c = AB$. Suponha $b < c$. Então a bissetriz do ângulo externo de \hat{A} encontra \overleftrightarrow{BC} no ponto $D = \frac{bB-cC}{b-c}$, e se tem $\frac{BD}{AB} = \frac{CD}{AC}$ ou $b\overrightarrow{BD} = c\overrightarrow{CD}$.

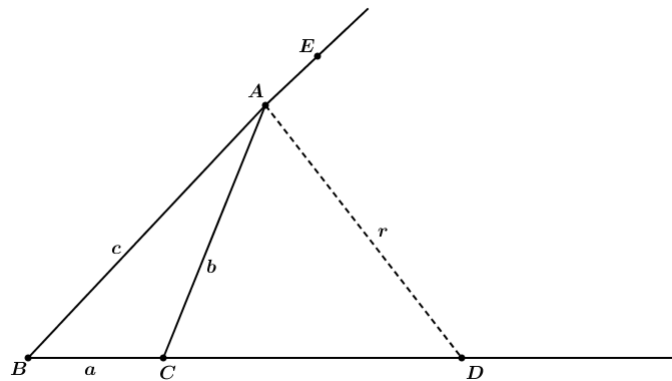


Figura 3.13

Observação: Se $b = c$ a bissetriz do ângulo externo de \hat{A} é paralela a \overleftrightarrow{BC} . Suponhamos a situação da Figura 3.13.

Demonstração:

A bissetriz r de $\angle CAE$ tem vetor direcional \vec{r} dado pela soma dos versores de \overrightarrow{AC} e \overrightarrow{AE} . Portanto

$$\vec{r} = \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} + \frac{\overrightarrow{AE}}{|\overrightarrow{AE}|}$$

Podemos substituir \overrightarrow{AE} por \overrightarrow{BA} , logo

$$\vec{r} = \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} + \frac{\overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BA}|}$$

Então a equação da reta r é

$$r : A + \lambda \left[\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} + \frac{\overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BA}|} \right] \text{ com } \lambda \in \mathbb{R}$$

Como $AB = c$ e $AC = b$ vem que

$$r : A + \lambda \left(\frac{C - A}{b} + \frac{A - B}{c} \right)$$

A reta por B e C é

$$s : B + \mu \overrightarrow{BC} = B + \mu(C - B), \mu \in \mathbb{R}$$

A intersecção de r e s é dada por

$$\begin{aligned}
A + \lambda \left(\frac{C - A}{b} + \frac{A - B}{c} \right) &= B + \mu(C - B) \\
A - B + \frac{\lambda}{b}(C - A) + \frac{\lambda}{c}(A - B) &= \mu(C - B) \\
\frac{\lambda}{b}(C - A) + \left(\frac{\lambda}{c} + 1 \right) (A - B) &= \mu(C - B)
\end{aligned}$$

Substituindo $C - B = (C - A) + (A - B)$ temos

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda}{b}(C - A) + \left(\frac{\lambda}{c} + 1 \right) (A - B) &= \mu(C - A) + \mu(A - B) \\
\left(\frac{\lambda}{b} - \mu \right) (C - A) + \left(\frac{\lambda}{c} + 1 - \mu \right) (A - B) &= 0
\end{aligned}$$

No plano os vetores $C - A$ e $A - B$ são independentes. Logo

$$\begin{cases} \frac{\lambda}{b} - \mu = 0 \Rightarrow \mu = \frac{\lambda}{b} \\ \frac{\lambda}{c} + 1 - \mu = 0 \end{cases}$$

Daí

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda}{c} + 1 - \frac{\lambda}{b} &= 0 \\
1 = \frac{\lambda}{b} - \frac{\lambda}{c} \Rightarrow 1 &= \frac{\lambda c - \lambda b}{bc} \Rightarrow 1 = \frac{\lambda(c - b)}{bc}
\end{aligned}$$

Como $b \neq c$, temos $\lambda = \frac{bc}{c - b}$ e $\mu = \frac{c}{c - b}$. A intersecção é

$$\begin{aligned}
D &= B + \frac{c}{c - b}(C - B) = B + \frac{c}{c - b}C - \frac{c}{c - b}B = \\
&= \left(1 - \frac{c}{c - b} \right) B + \frac{c}{c - b}C = \\
&= \frac{c - b - c}{c - b}B + \frac{c}{c - b}C = \\
&= \frac{-b}{c - b}B + \frac{c}{c - b}C = \\
&= \frac{b}{b - c}B - \frac{c}{b - c}C = \frac{bB - cC}{b - c}
\end{aligned}$$

Além disso

$$\begin{aligned}
D &= \frac{bB - cC}{b - c} \Rightarrow (b - c)D = bB - cC \\
&\Rightarrow bD - cD = bB - cC \\
\Rightarrow bD - bB &= cD - cC \Rightarrow b(D - B) = c(D - C) \\
&\Rightarrow b\overrightarrow{BD} = c\overrightarrow{CD} \\
&\Rightarrow b|\overrightarrow{BD}| = c|\overrightarrow{CD}| \\
\Rightarrow bBD &= cCD \Rightarrow \frac{BD}{c} = \frac{CD}{b} \\
&\Rightarrow \frac{BD}{AB} = \frac{CD}{AC}
\end{aligned}$$

Caso o ponto D esteja no lado oposto, a demonstração é similar.

3.10 Coordenadas do incentro

Seja ABC um triângulo, com $a = BC$, $b = AC$ e $c = AB$. Suas bissetrizes se encontram no ponto

$$I = \frac{aA + bB + cC}{a + b + c}$$

O ponto I chama-se *incentro* do triângulo.

Demonstração:

Seja r a reta bissetriz de \hat{A} . A interseção de r com BC é $D = \frac{bB + cC}{b + c}$, por 3.8. Confira a Figura 3.14.

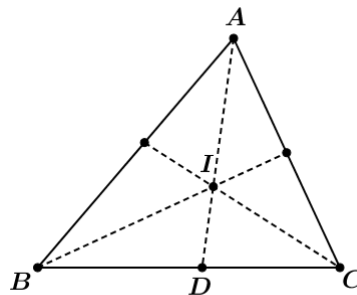


Figura 3.14 Encontro das bissetrizes.

Logo a equação de r é

$$A + \lambda(D - A) = A + \lambda \left[\frac{bB + cC}{b + c} - A \right], \lambda \in \mathbb{R}$$

Façamos $\lambda_0 = \frac{b + c}{a + b + c}$. Temos

$$\begin{aligned} A + \lambda_0(D - A) &= A + \frac{b + c}{a + b + c} \left[\frac{bB + cC}{b + c} - A \right] = \\ &= A + \frac{b + c}{a + b + c} \frac{bB + cC}{b + c} - \frac{b + c}{a + b + c} A = \\ &= A + \frac{bB + cC}{a + b + c} - \frac{b + c}{a + b + c} A = \\ &= \frac{(a + b + c)A + bB + cC - (b + c)A}{a + b + c} = \frac{aA + bB + cC}{a + b + c} = I \end{aligned}$$

Logo I está na bissetriz por \widehat{A} . Do mesmo modo se prova que I está nas outras duas bissetrizes.

Em coordenadas, se $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ e $C = (x_3, y_3)$. Temos

$$\begin{aligned} I &= \frac{a(x_1, y_1) + b(x_2, y_2) + c(x_3, y_3)}{a + b + c} \\ I &= \left(\frac{ax_1 + bx_2 + cx_3}{a + b + c}, \frac{ay_1 + by_2 + cy_3}{a + b + c} \right) \end{aligned}$$

Lembremos também que o incentro I do triângulo ABC é o centro da circunferência inscrita. Isso vem da seguinte propriedade: I é equidistante dos lados de ABC . Confira a Figura 3.15.

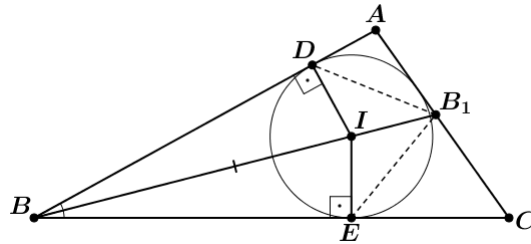


Figura 3.15

Sejam D o pé da perpendicular de I a BC e E o pé da perpendicular de I a AB . Temos

$$BIE \cong BID \text{ pelo caso de congruência LAA. Daí } IE = ID.$$

Da mesma forma se vê que a distância de I a AC é a mesma. Portanto a circunferência de centro I e raio IE é tangente aos três lados.

3.11 Coordenadas dos incentros externos

Seja ABC um triângulo com $a = BC$, $b = AC$ e $c = AB$. A bissetriz de \hat{A} e as duas bissetrizes externas em \hat{B} e \hat{C} se encontram no ponto

$$I_A = \frac{-aA + bB + cC}{-a + b + c}$$

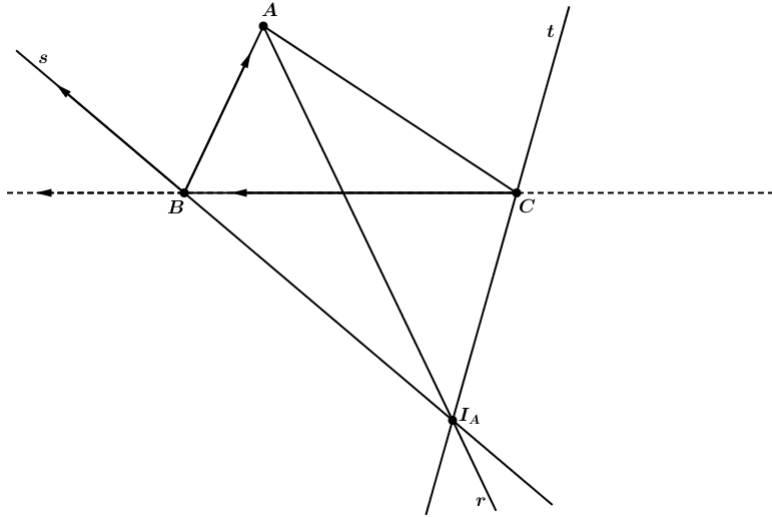


Figura 3.16

Demonstração:

Seja r a bissetriz de \hat{A} , sua equação é

$$r : A + \lambda(D - A) = A + \lambda \left[\frac{bB + cC}{b + c} - A \right], \lambda \in \mathbb{R}$$

Provemos que $I_A \in r$. Seja $\lambda_1 = \frac{b + c}{-a + b + c}$. Temos

$$\begin{aligned} A + \lambda_1 \left[\frac{bB + cC}{b + c} - A \right] &= A + \frac{b + c}{-a + b + c} \frac{bB + cC}{b + c} - \frac{b + c}{-a + b + c} A = \\ &= A + \frac{bB + cC}{-a + b + c} - \frac{A(b + c)}{-a + b + c} = A + \frac{bB + cC - bA - cA}{-a + b + c} = \\ &= \frac{(-a + b + c)A + bB + cC - bA - cA}{-a + b + c} = \frac{-aA + bA + cA + bB + cC - bA - cA}{-a + b + c} = \\ &= \frac{-aA + bB + cC}{-a + b + c} = I_A \end{aligned}$$

Seja s a reta bissetriz do ângulo externo a B. Sua equação é

$$s : B + \lambda \left(\frac{\overrightarrow{BA}}{c} + \frac{\overrightarrow{CB}}{a} \right), \lambda \in \mathbb{R}$$

Provemos que $I_A \in s$. Seja $\lambda_2 = \frac{-ac}{-a+b+c}$. Temos

$$\begin{aligned} B + \lambda_2 \left(\frac{\overrightarrow{BA}}{c} + \frac{\overrightarrow{CB}}{a} \right) &= B + \frac{-ac}{-a+b+c} \left(\frac{A-B}{c} + \frac{B-C}{a} \right) = \\ &= B + \frac{-ac}{-a+b+c} \frac{a(A-B) + c(B-C)}{ac} = B + \frac{-ac}{-a+b+c} \frac{aA - aB + cB - cC}{ac} = \\ &= \frac{(-a+b+c)B - [aA - aB + cB - cC]}{-a+b+c} = \frac{-aB + bB + cB - aA + aB - cB + cC}{-a+b+c} = \\ &= \frac{-aA + bB + cC}{-a+b+c} = I_A \end{aligned}$$

Seja t a reta bissetriz do ângulo externo C . Sua equação é

$$t : C + \lambda \left(\frac{\overrightarrow{CA}}{b} + \frac{\overrightarrow{BC}}{a} \right), \lambda \in \mathbb{R}$$

Provemos que $I_A \in t$. Seja $\lambda_3 = \frac{-ab}{-a+b+c}$. Temos

$$\begin{aligned} C + \lambda_3 \left(\frac{\overrightarrow{CA}}{b} + \frac{\overrightarrow{BC}}{a} \right) &= C + \frac{-ab}{-a+b+c} \left(\frac{A-C}{b} + \frac{C-B}{a} \right) = \\ &= C + \frac{-ab}{-a+b+c} \frac{a(A-C) + b(C-B)}{ab} = C + \frac{-ab}{-a+b+c} \frac{aA - aC + bC - bB}{ab} = \\ &= \frac{(-a+b+c)C - [aA - aC + bC - bB]}{-a+b+c} = \frac{-aC + bC + cC - aA + aC - bC + bB}{-a+b+c} = \\ &= \frac{-aA + bB + cC}{-a+b+c} = I_A \end{aligned}$$

A bissetriz de \hat{B} e as duas bissetrizes externas em \hat{A} e \hat{C} se encontram no ponto

$$I_B = \frac{aA - bB + cC}{a - b + c}, \text{ só existe se } a - b + c \neq 0.$$

A bissetriz de \hat{C} e as duas bissetrizes externas em \hat{A} e \hat{B} se encontram no ponto

$$I_C = \frac{aA + bB - cC}{a + b - c}, \text{ só existe se } a + b - c \neq 0.$$

Os pontos I_A , I_B e I_C chamam-se ex-incentros.

3.12 Coordenadas do centro de Spieker

Dado um triângulo chamamos de *triângulo medial* aquele formado pelos pontos médios de seus lados. Confira a Figura 3.17.

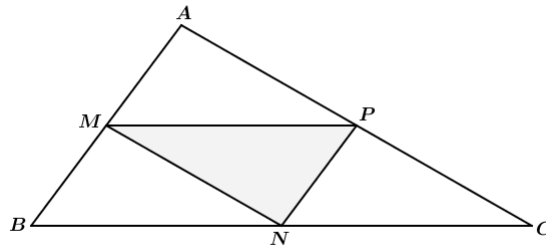


Figura 3.17 Triângulo medial

Dado um triângulo chamamos de centro de Spieker o incentro do seu *triângulo medial*.

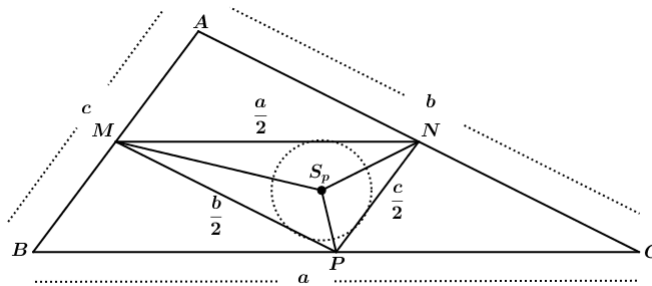


Figura 3.18

Seja ABC um triângulo de medidas $BC = a$, $AB = c$ e $AC = b$. Seu centro de Spieker é dado por

$$S_p = \frac{Aa + Bb + Cc}{(a + b + c)}$$

Demonstração:

Seja P o ponto médio de BC , M o ponto médio de AB e N o ponto médio de AC , temos que:

$$S_p = \frac{\frac{a}{2}P + \frac{b}{2}N + \frac{c}{2}M}{\frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c}{2}} = \frac{aP + bN + cM}{a + b + c}$$

$$\begin{aligned}
S_p &= \frac{a \frac{B+C}{2} + b \frac{A+C}{2} + c \frac{B+A}{2}}{a+b+c} = \\
(a+b+c)S_p &= a \left(\frac{B+C}{2} \right) + b \left(\frac{A+C}{2} \right) + c \left(\frac{B+A}{2} \right) = \\
(a+b+c)S_p &= \frac{aB+aC}{2} + \frac{bA+bC}{2} + \frac{cB+cA}{2} = \\
(a+b+c)S_p &= \frac{aB+aC+bA+bC+cB+cA}{2} = \\
(a+b+c)S_p &= \frac{A(b+c) + B(a+c) + C(a+b)}{2} = \\
2S_p &= \frac{A(b+c) + B(a+c) + C(a+b)}{(a+b+c)} = \\
S_p &= \frac{A(b+c) + B(a+c) + C(a+b)}{(a+b+c)} = \\
S_p &= \frac{Aa + Bb + Cc}{(a+b+c)}
\end{aligned}$$

3.13 Existência do ortocentro de um triângulo

Vamos demonstrar, usando vetores, que as três alturas de qualquer triângulo se encontram em um ponto, denominado *ortocentro* do triângulo.

Primeiro observamos a seguinte identidade, válida para vetores quaisquer:

$$\overrightarrow{AX} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BX} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CX} \cdot \overrightarrow{BA} = 0 \quad (*)$$

De fato, temos

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{AX} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BX} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CX} \cdot \overrightarrow{BA} = \\
&= (X - A) \cdot (B - C) + (X - B) \cdot (C - A) + (X - C) \cdot (A - B) = \\
&= X \cdot B - X \cdot C - A \cdot B + A \cdot C + X \cdot C - X \cdot A - B \cdot C + B \cdot A + X \cdot A - X \cdot B - C \cdot A + C \cdot B
\end{aligned}$$

Lembrando que o produto escalar é comutativo vemos que todos os termos se cancelam, de modo que vale a identidade (*).

Consideramos agora um triângulo ABC qualquer. Observamos que as alturas relativas a A e B não são paralelas, pois isso implicaria que A , B e C seriam colineares. Seja H o ponto comum dessas duas alturas. Precisamos mostrar que a altura por C contém H .

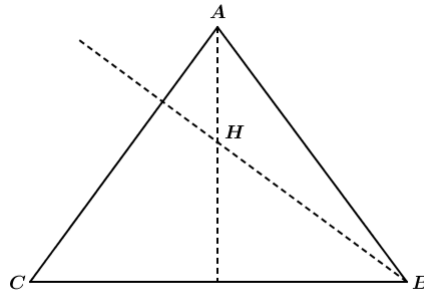


Figura 3.19 Existência do ortocentro

Com as notações da Figura 3.19, temos

$$\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$$

e

$$\overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$$

Usando agora a identidade (*) com $X = H$ vem

$$0 = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{BA}$$

Portanto $\overrightarrow{CH} \perp \overrightarrow{AB}$, de modo que H está na altura relativa ao vértice C . Provamos a existência do ortocentro.

3.14 Uma expressão para o ortocentro

Seja ABC um triângulo e sejam α a medida de \hat{A} , β a medida de \hat{B} e γ a medida de \hat{C} . As retas suportes das suas alturas se encontram no ponto

$$H = \frac{(\operatorname{tg} \alpha)A + (\operatorname{tg} \beta)B + (\operatorname{tg} \gamma)C}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma}.$$

Esse ponto é chamado *ortocentro* de ABC .

Demonstração:

Indicamos os pés das alturas relativas aos vértices A , B e C por A_1 , B_1 e C_1 respectivamente. Consideremos a situação da Figura 3.20.

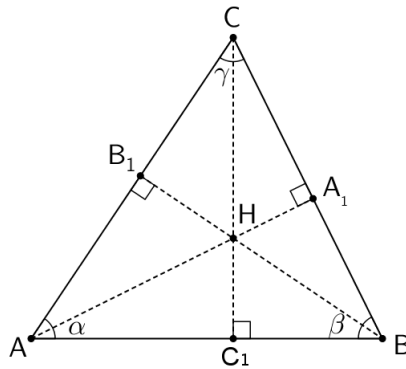


Figura 3.20 Encontro das alturas

Como $BB_1 = AB_1 \operatorname{tg} \alpha = B_1C \operatorname{tg} \gamma$, temos $\frac{AB_1}{B_1C} = \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg} \alpha}$. Logo, o ponto B_1 divide o lado AC em segmentos proporcionais a $\operatorname{tg} \gamma$ e $\operatorname{tg} \alpha$. Utilizando 2.3 temos $B_1 = \frac{(\operatorname{tg} \alpha)A + (\operatorname{tg} \gamma)C}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \gamma}$.

Analogamente, $A_1 = \frac{(\operatorname{tg} \beta)B + (\operatorname{tg} \gamma)C}{\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma}$ e $C_1 = \frac{(\operatorname{tg} \alpha)A + (\operatorname{tg} \beta)B}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}$.

Consideremos a reta por B e B_1 : $B + \lambda(B_1 - B)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Seja H o ponto dessa reta dado por $\lambda_0 = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma}$.

$$\begin{aligned} \text{Temos } H &= B + \lambda_0(B_1 - B) = B + \lambda_0 B_1 - \lambda_0 B = \\ &= B + \left(\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma} \right) B_1 - \left(\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma} \right) B = \\ &= \frac{(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma)B + (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \gamma)B_1 - (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \gamma)B}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma} = \\ &= \frac{(\operatorname{tg} \beta)B + (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \gamma)B_1}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma} = \\ &= \frac{(\operatorname{tg} \alpha)A + (\operatorname{tg} \beta)B + (\operatorname{tg} \gamma)C}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma} \end{aligned}$$

Do mesmo modo se mostra que H está nas outras alturas.

De forma análoga consideramos outras situações, como da Figura 3.21. Resulta a mesma fórmula.

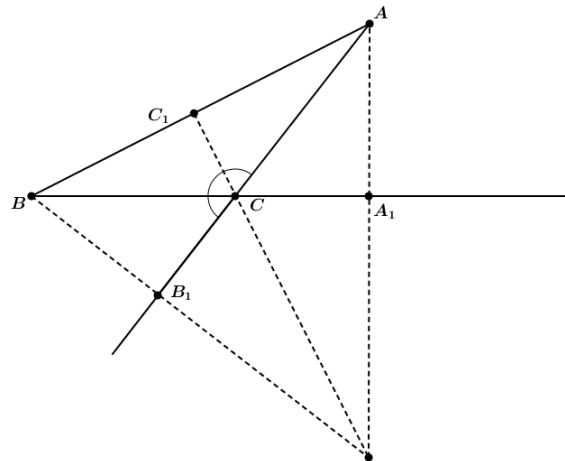


Figura 3.21

Portanto, o ortocentro de um triângulo não retângulo é a média ponderada dos vértices tendo como pesos as tangentes dos ângulos do triângulo.

3.15 Uma expressão para o circuncentro

Sejam ABC um triângulo e R , P e Q , os pontos médios dos lados AB , BC e CA , respectivamente. Suas mediatrizes se encontram no ponto

$$N = \frac{(\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma)A + (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \gamma)B + (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)C}{2(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma)}$$

N chama-se *circuncentro* de ABC .

Demonstração:

Temos $R = \frac{A+B}{2}$, $P = \frac{B+C}{2}$ e $Q = \frac{A+C}{2}$, e os ângulos do triângulo RPQ são respectivamente iguais aos ângulos do triângulo ABC e também $RP \parallel AC$, $QP \parallel AB$ e $RQ \parallel BC$. Confira a Figura 3.22.

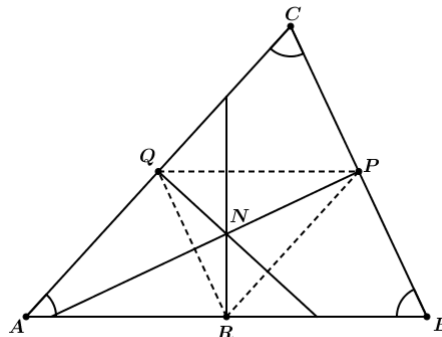


Figura 3.22

Dessa forma, as mediatrizes dos lados do triângulo ABC contêm as alturas do triângulo RPQ , dessa forma o circuncentro N do triângulo ABC é o ortocentro do triângulo RPQ .

Logo,

$$\begin{aligned} N &= \frac{(\operatorname{tg} \alpha)P + (\operatorname{tg} \beta)Q + (\operatorname{tg} \gamma)R}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma} = \frac{(\operatorname{tg} \alpha)\frac{B+C}{2} + (\operatorname{tg} \beta)\frac{A+C}{2} + (\operatorname{tg} \gamma)\frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma} \\ &= \frac{(\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma)A + (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \gamma)B + (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)C}{2(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma)} \end{aligned}$$

Obtivemos a fórmula para N .

3.16 O Teorema da reta de Euler

Notemos que, usando as notações de 3.15,

$$\begin{aligned} N &= \frac{(\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma)A + (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \gamma)B + (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)C}{2(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma)} = \\ &= \frac{(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma)(A + B + C)}{2(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma)} - \frac{(\operatorname{tg} \alpha)A + (\operatorname{tg} \beta)B + (\operatorname{tg} \gamma)C}{2(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma)} = \\ &= \frac{A + B + C}{2} - \frac{1}{2} \frac{(\operatorname{tg} \alpha)A + (\operatorname{tg} \beta)B + (\operatorname{tg} \gamma)C}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma} = \frac{3}{2}G - \frac{1}{2}H \end{aligned}$$

sendo G o baricentro e o H o ortocentro do triângulo ABC .

Em resumo, $N = \frac{3}{2}G - \frac{1}{2}H$. Essa fórmula relaciona N , G e H , e também nos diz que

$$2\overrightarrow{GN} = \overrightarrow{HG} \text{ e } \overrightarrow{NH} = 3\overrightarrow{NG}$$

Portanto N , G e H são colineares em qualquer triângulo, G está sempre entre H e N , e a distância de H a G é o dobro da distância de G a N .

Essa é o chamado Teorema da reta de Euler.

3.17 Expressão do ortocentro em coordenadas

Consideremos um triângulo qualquer ABC , e indiquemos as coordenadas dos vértices por $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ e $C = (c_1, c_2)$.

Queremos encontrar uma expressão para o ortocentro $H = (h_1, h_2)$ em função dessas coordenadas.

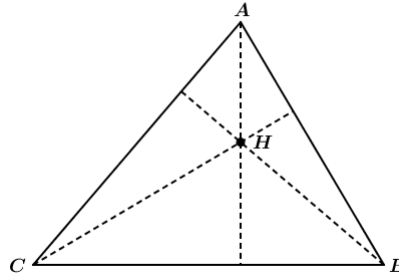


Figura 3.23 Cálculo das coordenadas do ortocentro

Temos

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CB} &= 0 \text{ e } \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CA} = 0 \\ \Rightarrow (H - A) \cdot (B - C) &= 0 \text{ e } (H - B) \cdot (A - C) = 0 \\ \Rightarrow H \cdot (B - C) &= A \cdot (B - C) \text{ e } H \cdot (A - C) = B \cdot (A - C) \end{aligned}$$

Anotaremos $m = A \cdot (B - C)$ e $n = B \cdot (A - C)$. Então

$$H \cdot (B - C) = m \text{ e } H \cdot (A - C) = n$$

Introduzindo agora as coordenadas vem

$$\begin{cases} (h_1, h_2) \cdot (b_1 - c_1, b_2 - c_2) = m \\ (h_1, h_2) \cdot (a_1 - c_1, a_2 - c_2) = n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (b_1 - c_1)h_1 + (b_2 - c_2)h_2 = m \\ (a_1 - c_1)h_1 + (a_2 - c_2)h_2 = n \end{cases}$$

Temos um sistema linear nas incógnitas h_1 e h_2 com determinante

$$D = \begin{vmatrix} b_1 - c_1 & b_2 - c_2 \\ a_1 - c_1 & a_2 - c_2 \end{vmatrix}$$

Sabemos que $D \neq 0$ pois os vetores \overrightarrow{CB} e \overrightarrow{CA} não são paralelos. Aplicando a regra de Cramer temos

$$h_1 = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} m & b_2 - c_2 \\ n & a_2 - c_2 \end{vmatrix} \text{ e } h_2 = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} b_1 - c_1 & m \\ a_1 - c_1 & n \end{vmatrix}$$

Como $m = A \cdot (B - C)$ e $n = B \cdot (A - C)$ só dependem das coordenadas de A , B e C , encontramos uma expressão para H que só depende das coordenadas dos vértices do triângulo.

3.18 Expressão do circuncentro em coordenadas

Consideremos um triângulo qualquer ABC com vértices $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ e $C = (c_1, c_2)$. Seu circuncentro N é a interseção das retas \overrightarrow{MN} e \overrightarrow{PN} , sendo $M = \left(\frac{b_1 + c_1}{2}, \frac{b_2 + c_2}{2}\right)$ o ponto médio de BC e $P = \left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}\right)$ o ponto médio de AB . Confira a Figura 3.24.

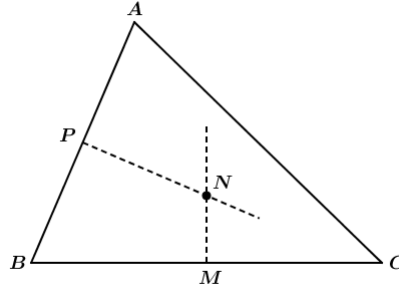


Figura 3.24 Coordenadas do circuncentro

Temos $\overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{CB}$ e $\overrightarrow{PN} \perp \overrightarrow{BA} \Rightarrow \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$ e $\overrightarrow{PN} \cdot \overrightarrow{BA} = 0$, segue que

$$\begin{cases} (N - M) \cdot (B - C) = 0 \\ (N - P) \cdot (A - B) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} N \cdot (B - C) = M \cdot (B - C) \\ N \cdot (A - B) = P \cdot (A - B) \end{cases}$$

Chamamos $p = M \cdot (B - C)$ e $q = P \cdot (A - B)$, que são números que dependem apenas das coordenadas de A , B e C .

Assim, chamando $N = (n_1, n_2)$, temos

$$\begin{cases} (b_1 - c_1)n_1 + (b_2 - c_2)n_2 = p \\ (a_1 - b_1)n_1 + (a_2 - b_2)n_2 = q \end{cases}$$

que é um sistema de equações lineares nas incógnitas n_1 e n_2 . O determinante desse sistema é

$$D = \begin{vmatrix} b_1 - c_1 & b_2 - c_2 \\ a_1 - b_1 & a_2 - b_2 \end{vmatrix}$$

que é $\neq 0$ pois os pontos A , B e C não são colineares. Aplicando a regra de Cramer temos

$$n_1 = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} p & b_2 - c_2 \\ q & a_2 - b_2 \end{vmatrix} \text{ e } n_2 = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} b_1 - c_1 & p \\ a_1 - b_1 & q \end{vmatrix}$$

o que nos dá o circuncentro N em função das coordenadas dos vértices do triângulo.

3.19 O Teorema de Ceva

Seja ABC um triângulo qualquer. Sejam $D \in CB$, $E \in AC$ e $F \in AB$, de modo que as cevianas AD , BE e CF satisfazem à condição

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1 \quad (*)$$

Então as cevianas são concorrentes.

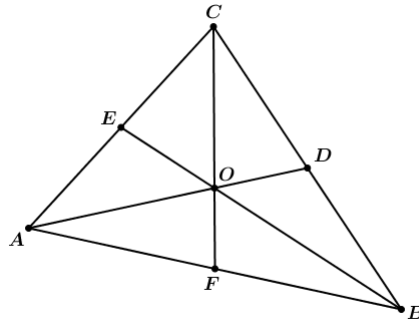


Figura 3.25

Demonstração:

Sejam $AF = n$, $FB = m$ e

$$p = n \frac{BD}{DC} \Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{p}{n}$$

Logo

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} = \frac{n}{m} \cdot \frac{p}{n} = \frac{p}{m}$$

De

$$\begin{aligned} \frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} &= 1 \\ \Rightarrow \frac{CE}{EA} &= \frac{1}{\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC}} = \frac{m}{p} \end{aligned}$$

Em resumo

$$\frac{AF}{FB} = \frac{n}{m}, \quad \frac{BD}{DC} = \frac{p}{n} \text{ e } \frac{CE}{EA} = \frac{m}{p}$$

O segmento AB está dividido por F na razão $\frac{AF}{FB} = \frac{n}{m}$. Logo por 2.3, temos

$$F = \frac{mA + nB}{n + m}$$

O segmento BC está dividido por D na razão $\frac{BD}{DC} = \frac{p}{n}$. Logo por 2.3, temos

$$D = \frac{nB + pC}{n + p}$$

O segmento CA está dividido por E na razão $\frac{CE}{EA} = \frac{m}{p}$. Logo por 2.3, temos

$$E = \frac{pC + mA}{m + p}$$

No segmento CF consideremos o ponto O_F que o divide na razão $\frac{n + m}{p}$, ou seja, $\frac{CO_F}{O_FF} = \frac{n + m}{p}$. Por 2.3, temos

$$O_F = \frac{pC + (n + m)F}{m + n + p} = \frac{pC + (n + m)\frac{mA + nB}{n + m}}{m + n + p} = \frac{mA + nB + pC}{m + n + p}$$

No segmento AD consideremos o ponto O_D que o divide na razão $\frac{n + p}{n}$, ou seja, $\frac{AO_D}{O_DD} = \frac{n + p}{n}$. Por 2.3, temos

$$O_D = \frac{mA + (n + p)D}{m + n + p} = \frac{mA + (n + p)\frac{nB + pC}{n + p}}{m + n + p} = \frac{mA + nB + pC}{m + n + p}$$

No segmento BE consideremos o ponto O_E que o divide na razão $\frac{m + p}{n}$, ou seja, $\frac{BO_E}{O_EE} = \frac{m + p}{n}$. Por 2.3, temos

$$O_E = \frac{nB + (m + p)E}{m + n + p} = \frac{nB + (m + p)\frac{pC + mA}{m + p}}{m + n + p} = \frac{mA + nB + pC}{m + n + p}$$

Vemos que $O_F = O_D = O_E$ é um ponto comum às cevianas CF , AD e BE .

3.20 Comprimento da mediana

Deduza o comprimento das medianas de um triângulo qualquer em função de seus lados usando vetores.

Solução (Adaptado de [20] pág. 35)

Seja ABC um triângulo com $a = BC$, $b = AC$ e $c = AB$. Seja M o ponto médio de BC . Queremos achar $m_a = AM$.

Notemos que AM é a metade da diagonal do paralelogramo formado pelos lados AB e AC . Usando vetores temos

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$

Assim

$$\begin{aligned} m_a = |AM| &\Rightarrow m_a^2 = |\overrightarrow{AM}|^2 = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \\ &\Rightarrow 4m_a^2 = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &\Rightarrow 4m_a^2 = c^2 + b^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}. \end{aligned}$$

Para eliminarmos o termo $2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ precisamos de um truque. Calculamos

$$(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})^2 + (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})^2 = 2\overrightarrow{AB}^2 + 2\overrightarrow{AC}^2 = 2c^2 + 2b^2$$

Notando que $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$ temos, por outro lado, que

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})^2 + (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})^2 &= (\overrightarrow{AB})^2 + \overrightarrow{AC}^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}^2 = \\ &= c^2 + b^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + a^2 = 4m_a^2 + a^2 \end{aligned}$$

Assim

$$4m_a^2 + a^2 = 2c^2 + 2b^2 \Rightarrow m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$$

As outras medianas têm valores

$$m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2} \text{ e } m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}$$

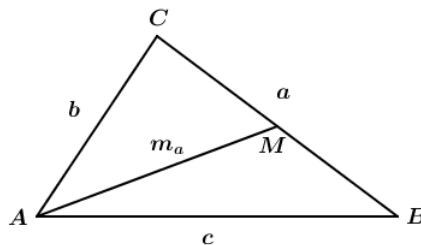


Figura 3.26

3.21 Lei dos Cossenos

Podemos deduzir a Lei dos cossenos utilizando vetores.

Solução(Adaptado de [20] pág.34)

Seja ABC um triângulo com $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ e $\theta = m(\angle BAC)$. Temos

$$\begin{aligned} a^2 = \overrightarrow{BC}^2 &= (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = \\ &= |\overrightarrow{AC}|^2 + |\overrightarrow{AB}|^2 - 2|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AB}|\cos\theta = b^2 + c^2 - 2bc\cos\theta \end{aligned}$$

Em resumo $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\theta$. Confira a Figura 3.27.

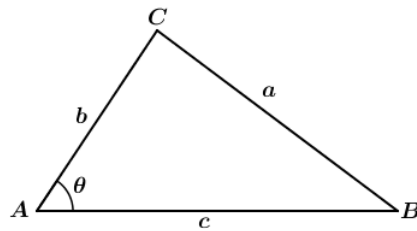


Figura 3.27

Capítulo 4

Resultados sobre quadriláteros

Apresentamos neste capítulo resultados sobre o quadrilátero, definições, representações em coordenadas e propriedades do quadrilátero usando vetores e coordenadas.

4.1 Definições

Dados quatro pontos A, B, C e D , coplanares e não colineares três a três, o **quadrilátero** $ABCD$ é o polígono de quatro segmentos. Tais **segmentos** são AB, BC, CD e DA apenas se interceptam em suas extremidades e suas medidas são chamados de **lados** e os pontos A, B, C e D são chamados de **vértices**. Os ângulos $\angle BAD, \angle ABC, \angle BCD$ e $\angle CDA$ são **ângulos** do quadrilátero. Dois vértices ou dois lados ou dois ângulos não consecutivos são chamados **ângulos opostos**. Os segmentos que ligam vértices não consecutivos são chamados de **diagonais**. Se cada vértice estiver no interior do ângulo do quadrilátero formado pelos outros três vértices é chamado de **convexo** e suas diagonais se interceptam. Se um vértice está no interior do ângulo formado pelos outros três vértices é chamado de **não convexo** e suas diagonais não se interceptam.

4.2 Representação de quadriláteros em coordenadas

Um quadrilátero qualquer é representado em um sistema de cartesiano O_{xy} por quatro pontos $A = (x_1, y_1), B = (x_2, y_2), C = (x_3, y_3)$ e $D = (x_4, y_4)$.

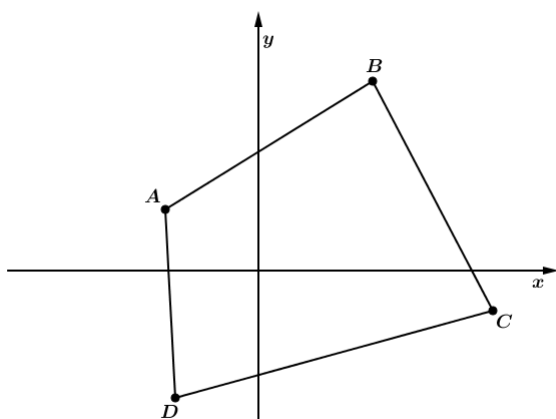


Figura 4.1

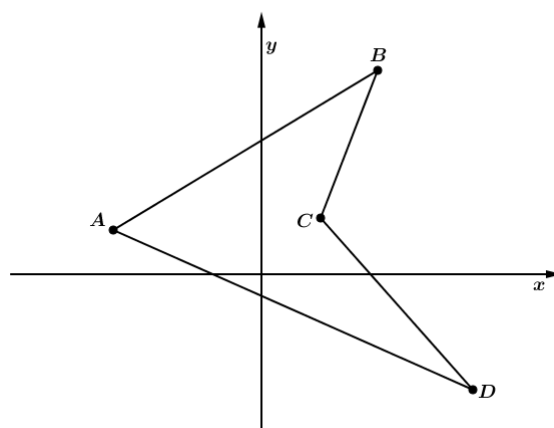


Figura 4.2

Observamos que existem dois tipos de quadriláteros: convexos e não convexos. Em qualquer caso existe um lado do quadrilátero cujo suporte tem o quadrilátero contido em um de seus semiplanos. Portanto uma simplificação das coordenadas de qualquer quadrilátero pode ser obtida colocando um vértice na origem das coordenadas, um vértice no semi-eixo positivo O_x e os outros dois vértices com ordenada positiva.

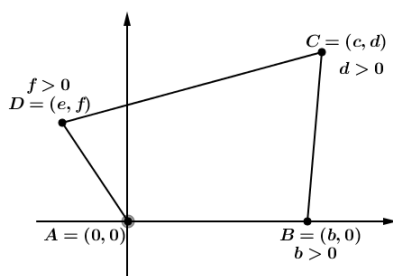


Figura 4.3

Um caso especial é o retângulo, cujas coordenadas podem ser simplificadas como está ilustrado na Figura 4.4.

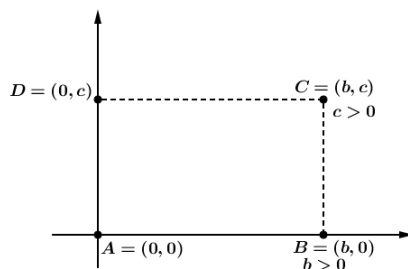


Figura 4.4 Caso especial

Se o retângulo for um quadrado, fazemos $b = c = d$ na Figura 4.4

Um paralelogramo é um quadrilátero com os dois pares de lados opostos paralelos. Um exemplo de paralelogramo é o retângulo, que tem todos os ângulos retos. Se um paralelogramo não é retângulo, podemos colocá-lo num sistema cartesiano como indicado na Figura 4.5. Vamos estudar as condições sobre as coordenadas do paralelogramo.

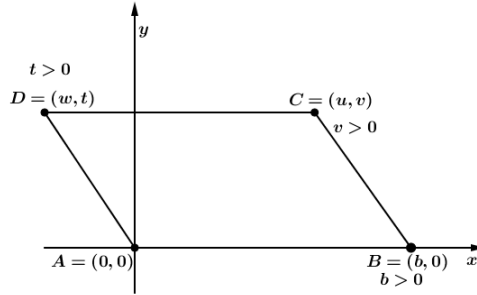


Figura 4.5

Como $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC}$ e $\overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{AD}$, existem números reais μ e λ tais que

$$\overrightarrow{AB} = \mu \overrightarrow{DC} \text{ e } \overrightarrow{BC} = \lambda \overrightarrow{AD}$$

Como $\overrightarrow{AB} \neq 0$ e $\overrightarrow{BC} \neq 0$ temos $\mu \neq 0$ e $\lambda \neq 0$. Continuando temos

$$\begin{aligned} B - A &= \mu(C - D) \text{ e } C - B = \lambda(D - A) \\ \Rightarrow (b, 0) &= \mu[(u, v) - (w, t)] \text{ e } (u, v) - (b, 0) = \lambda(w, t) \end{aligned}$$

Daí vem

$$b = \mu(u - w), \mu(v - t) = 0, u - b = \lambda w \text{ e } v = \lambda t$$

De $\mu(v - t) = 0$ vem que $v = t$. Daí

$$v = \lambda t \Rightarrow v = \lambda v \Rightarrow \lambda = 1$$

Ficamos com

$$b = \mu(u - w) \text{ e } u - b = w$$

Que implicam

$$\begin{aligned} u - \mu(u - w) &= w \\ \Rightarrow u - w &= \mu(u - w) \end{aligned}$$

Como $v = t$ temos $C = (u, v)$ e $D = (w, v)$. Mas $C \neq D$ temos $u \neq w$.

Assim $u - w = \mu(u - w) \Rightarrow \mu = 1$.

Voltando de $b = \mu(u - w)$ temos

$$b = u - w \Rightarrow u = b + w.$$

Logo

$$D = (w, v) \text{ e } C = (b + w, v)$$

Portanto a coordenadas de um paralelogramo podem ser como na Figura 4.6.

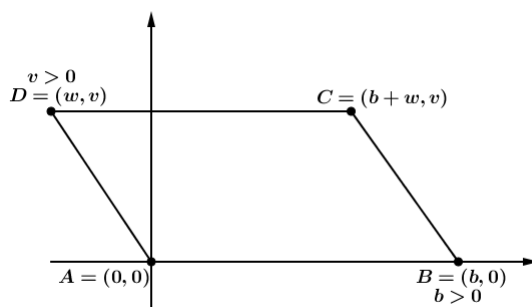


Figura 4.6

Na Figura 4.6, transladando a origem das coordenadas para B e fazendo a reflexão $x \rightarrow -x$, podemos supor $w > 0$. Ficamos como a Figura 4.7.

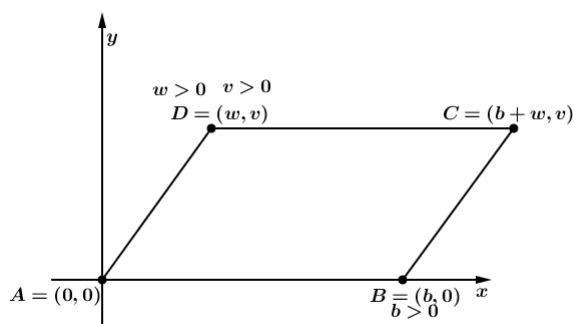


Figura 4.7

Se for um losango, todos os lados são congruentes, logo $AD = AB$. Isso implica que $b = \sqrt{w^2 + v^2}$.

4.3 Paralelogramos e propriedades

Como foi dito em 4.2, um paralelogramo é um quadrilátero no qual os dois pares de lados opostos são paralelos.

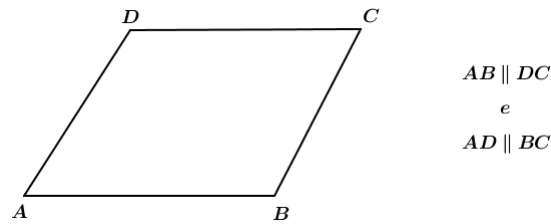


Figura 4.8

Vejamos algumas propriedades.

4.3.1 Uma condição para paralelogramos

Um quadrilátero ABCD é um paralelogramo se e somente se $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ (ou de forma equivalente se e somente se $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$).

Para a demonstração, suponhamos primeiro que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Temos $B - A = C - D \Rightarrow B - C = A - D \Rightarrow \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$. Portanto $AB \parallel DC$ e $AD \parallel BC$, de modo que o quadrilátero é um paralelogramo.

Reciprocamente suponhamos que ABCD seja um paralelogramo. Temos $AD \parallel BC$ e $AB \parallel DC$ de modo que existem números reais λ e μ tais que

$$\overrightarrow{AD} = \lambda \overrightarrow{BC} \text{ e } \overrightarrow{AB} = \mu \overrightarrow{DC}.$$

Queremos provar que $\mu = 1$. Isso já foi feito em 4.2, mas aqui vamos usar apenas vetores. Temos

$$\begin{aligned} B - A &= \mu(C - D) \text{ e } D - A = \lambda(C - B) \\ \Rightarrow A &= B - \mu(C - D) \text{ e } A = D - \lambda(C - B) \\ \Rightarrow B - \mu(C - D) &= D - \lambda(C - B) \\ \Rightarrow (1 - \lambda)B + (\lambda - \mu)C + (\mu - 1)D &= 0 \quad (*) \\ (1 - \lambda)\overrightarrow{OB} + (\lambda - \mu)\overrightarrow{OC} + (\mu - 1)\overrightarrow{OD} &= 0 \end{aligned}$$

Como B, C e D não são colineares pelo menos um desses coeficientes é zero. Se $\mu - 1 = 0$ terminamos.

Suponhamos $1 - \lambda = 0$. Então (*) fica

$$\begin{aligned} (1 - \mu)C + (\mu - 1)D &= 0 \Rightarrow (1 - \mu)(C - D) = 0 \\ \Rightarrow (1 - \mu)\overrightarrow{DC} &= 0 \Rightarrow \mu = 1 \end{aligned}$$

Suponhamos $\lambda - \mu = 0$. Então (*) fica

$$(1 - \lambda)B + (\mu - 1)D = 0 \Rightarrow (1 - \mu)\overrightarrow{DB} = 0$$

$$\Rightarrow \mu = 1.$$

Portanto $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, e terminamos. De forma equivalente uma condição necessária e suficiente é que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

4.3.2 Um quadrilátero é um paralelogramo se e somente se suas diagonais têm o mesmo ponto médio

De fato, seja ABCD um quadrilátero. Ele é um paralelogramo $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ (por 4.3.1) $\Leftrightarrow B - A = C - D \Leftrightarrow B + D = A + C \Leftrightarrow \frac{1}{2}(B + D) = \frac{1}{2}(A + C)$ e assim os pontos médios das diagonais AC e BD são os mesmos.

4.3.3 Um quadrilátero é um paralelogramo se e somente se ele tem dois lados paralelos e congruentes

De fato, seja ABCD um quadrilátero. Se ele é um paralelogramo, sabemos por 4.3.1 que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Logo $AB \parallel DC$ e $AB = DC$.

Reciprocamente, suponhamos que $AB \parallel DC$ e $AB = DC$. Então $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ou $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Nesse último caso os lados AD e BC se intersectam, o que não é possível pela definição de quadrilátero. Logo $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Usando novamente 4.3.1, vemos que ABCD é um paralelogramo.

4.3.4 Um quadrilátero é um paralelogramo se e somente se os lados opostos são congruentes

Seja ABCD um quadrilátero. Se for um paralelogramo, o item 4.3.1 garante que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ e $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. Logo $AB = DC$ e $AD = BC$, e temos a condição satisfeita.

Reciprocamente, suponhamos que $AB = DC$ e $AD = BC$. Sejam $\alpha = m(\angle CAD)$ e $\beta = m(\angle ACB)$. Confira a Figura 4.9.

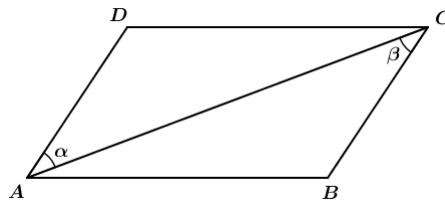


Figura 4.9

Usando a Lei dos Cossenos nos triângulos ACD e ABC temos:

$$\begin{aligned} AC^2 &= AD^2 + BC^2 - 2AD \cdot BC \cos \alpha \\ \text{e } AB^2 &= AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cos \beta \\ \Rightarrow AD^2 + AC^2 - 2AD \cdot AC \cos \alpha &= AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cos \beta \\ \Rightarrow AD \cdot \cos \alpha &= AC \cdot BC \cos \beta \\ \Rightarrow \cos \alpha &= \cos \beta \end{aligned}$$

Usando agora a relação entre o produto escalar de dois vetores e o cosseno do ângulo entre eles, temos

$$\begin{aligned} \vec{AD} \cdot \vec{AC} &= AD \cdot \cos \alpha = \\ &= AC \cdot BC \cos \beta = \vec{CA} \cdot \vec{CB} \\ \text{Logo } \vec{AD} \cdot \vec{AC} &= \vec{CA} \cdot \vec{CB} \Rightarrow \\ \Rightarrow \vec{AD} \cdot \vec{AC} - \vec{CA} \cdot \vec{CB} &= 0 \\ \Rightarrow \vec{AD} \cdot \vec{AC} - \vec{AC} \cdot \vec{BC} &= 0 \\ \Rightarrow \vec{AC} [\vec{AD} - \vec{BC}] &= 0 \\ \Rightarrow \vec{AD} &= \vec{BC} \end{aligned}$$

Da mesma forma se prova que $\vec{AB} = \vec{DC}$, e concluímos que $ABCD$ é um paralelogramo (ou então usamos 4.3.3).

4.4 Diagonais congruentes de um paralelogramo

Se as diagonais de um paralelogramo são congruentes, então o paralelogramo é um retângulo.

Temos que $AC=BD$. Por 1.2, temos que

$$\begin{aligned} \sqrt{(a+b-0)^2 + (c-0)^2} &= \sqrt{(a-b)^2 + (0-c)^2}, \\ (a+b)^2 + c^2 &= (a-b)^2 + c^2, \\ \text{ou } a^2 + 2ab + b^2 + c^2 &= a^2 - 2ab + b^2 + c^2. \end{aligned}$$

Logo $4ab = 0$

Sendo $a > 0$, segue-se que $b = 0$; assim significa que D está sobre o eixo- y . Portanto, $\angle DAB$ é um ângulo reto e $ABCD$ é um retângulo.

4.5 As diagonais de um losango são perpendiculares entre si

Seja ABCD um losango, sabendo que todo losango é um paralelogramo cujos lados têm o mesmo comprimento, como a Figura 4.10.

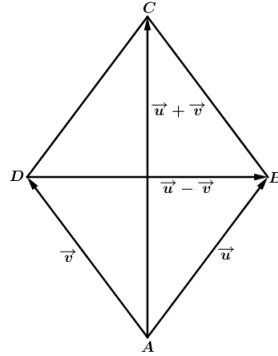


Figura 4.10

Temos que

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$$

Temos $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ e $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$ como na Figura 4.10, temos que $\overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v}$ e $\overrightarrow{DB} = \vec{u} - \vec{v}$. Logo,

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = 0$$

4.6 Em um paralelogramo os ângulos opostos são congruentes

Consideremos um paralelogramo ABCD. Sejam $\theta = \angle BAD$ e $\varphi = \angle BCD$ dois ângulos opostos. Sejam $AB = \vec{u}$ e $AD = \vec{v}$. Então $CD = -\vec{u}$ e $CB = -\vec{v}$. Como na Figura 4.11.

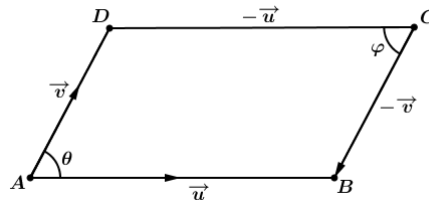


Figura 4.11

Da propriedade do produto interno, temos

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos\theta$$

e

$$(-\vec{u}) \cdot (-\vec{v}) = |-\vec{u}| |-\vec{v}| \cos\varphi = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos\varphi.$$

Mas

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (-\vec{u}) \cdot (-\vec{v}).$$

Logo,

$$\begin{aligned} |\vec{u}| |\vec{v}| \cos\theta &= |\vec{u}| |\vec{v}| \cos\varphi \\ \Rightarrow \cos\theta &= \cos\varphi \end{aligned}$$

Como $0 < \theta < \pi$ e $0 < \varphi < \pi$, temos $\theta = \varphi$.

4.7 Pontos médios de um quadrilátero

Em um quadrilátero qualquer, os pontos médios dos lados formam um paralelogramo.

Demonstração:

Sejam A, B, C e D os vértices do quadrilátero e P, Q, R e S os pontos médios, como mostra a Figura 4.12.

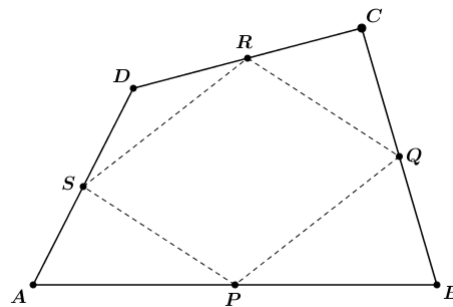


Figura 4.12

Temos que

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) \text{ e } \vec{q} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}) \\ \vec{r} &= \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d}) \text{ e } \vec{s} = \frac{1}{2}(\vec{d} + \vec{a}) \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\vec{q} - \vec{p} &= \frac{1}{2}(\vec{c} - \vec{a}) = \vec{r} - \vec{s} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR} \text{ e} \\ \vec{s} - \vec{p} &= \frac{1}{2}(\vec{d} - \vec{b}) = \vec{r} - \vec{q} \Rightarrow \overrightarrow{PS} = \overrightarrow{QR}\end{aligned}$$

Portanto, o quadrilátero $PQRS$ é um paralelogramo.

4.8 O centróide de um quadrilátero

Seja $ABCD$ um quadrilátero plano e sejam M , N , P e Q respectivamente os pontos médios de AB , BC , CD e AD . Os segmentos MP e NQ são chamados *bimedianas* do quadrilátero. Por outro lado, o centróide G de $ABCD$ pode ser expresso, em coordenadas, por $G=(A+B+C+D)/4$.

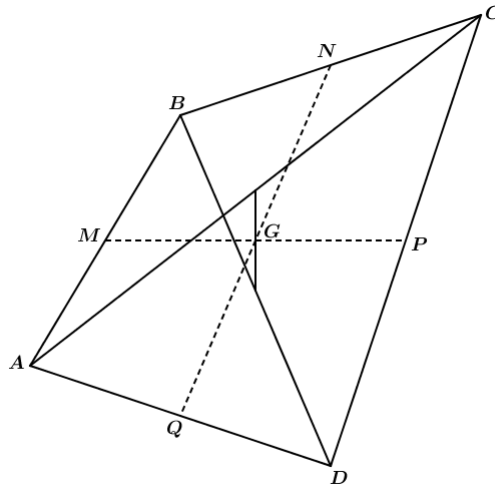


Figura 4.13

Prove que:

(a) G é o ponto médio de cada uma das bimedias (portanto as bimedias se encontram em seus pontos médios, e esse ponto é o centróide do quadrilátero).

Sabendo que $M = \frac{A+B}{2}$, $N = \frac{B+C}{2}$, $P = \frac{C+D}{2}$ e $Q = \frac{D+A}{2}$.

Temos o ponto médio de MP : $\frac{MP}{2} = \frac{\frac{A+B}{2} + \frac{C+D}{2}}{2} = \frac{A+B+C+D}{4} = G$.

O ponto médio de NQ : $\frac{N+Q}{2} = \frac{\frac{B+C}{2} + \frac{A+D}{2}}{2} = \frac{A+B+C+D}{4} = G$.

(b) G é o ponto médio do segmento que une os pontos médios das diagonais. Confira a Figura 4.13.

O ponto médio de BD: $\frac{B + D}{2}$ e ponto médio de AC: $\frac{A + C}{2}$.

Ponto médio desses pontos médios: $\frac{\frac{B + D}{2} + \frac{A + C}{2}}{2} = \frac{A + B + C + D}{4} = G$.

4.9 Pontos médios das diagonais de um trapézio

O segmento de reta que une os pontos médios das diagonais de um trapézio é paralelo às bases e igual à semidiferença destas.

Seja ABCD um trapézio e sejam E e F os pontos médios das diagonais AC e BD respectivamente, conforme a Figura 4.14.

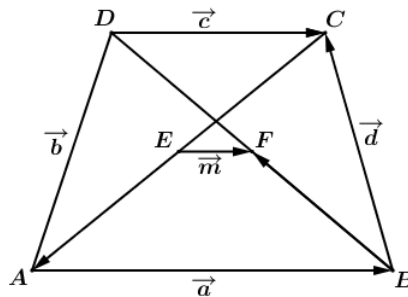


Figura 4.14

Chamando $B - A = \vec{a}$, $C - B = \vec{d}$ e $F - E = \vec{m}$, devemos mostrar que $\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{c})$.

De fato:

$$\vec{m} = \vec{EA} + \vec{AB} + \vec{BF}$$

No entanto,

$$\vec{EA} = \frac{1}{2}\vec{CA} = \frac{-1}{2}(\vec{a} + \vec{d})$$

e

$$\vec{BF} = \frac{1}{2}\vec{BD} = \frac{1}{2}(\vec{d} - \vec{c})$$

Logo

$$\vec{m} = \frac{-\vec{a}}{2} - \frac{\vec{d}}{2} + \vec{a} + \frac{\vec{d}}{2} - \frac{\vec{c}}{2}$$

Portanto

$$\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{c}).$$

4.10 As bimedias de um quadrilátero

Seja ABCD um quadrilátero plano e sejam M, N, P e Q respectivamente os pontos médios de AB, BC, CD e AD. Os segmentos MP e NQ são chamados *bimedias* do quadrilátero. Prove que:

(a) As bimedias de um quadrilátero são congruentes e se e somente se as diagonais são ortogonais. Confira 4.15 (caso convexo e caso não convexo).

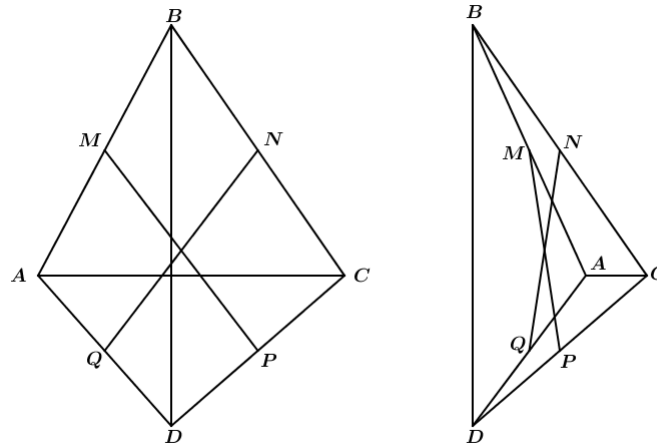


Figura 4.15

$$\begin{aligned}
 |M - P|^2 &= (M - P)(M - P) = \left(\frac{A + B}{2} - \frac{D + C}{2} \right) \left(\frac{A + B}{2} - \frac{D + C}{2} \right) = \\
 &= \frac{1}{4}(A + B - D - C)(A + B - D - C) = \\
 &= \frac{1}{4}(A^2 + AB - AD - AC + BA + B^2 - DB - BC - DA - DB + D^2 + DC - CA - CB + DC + C^2) = \\
 &= \frac{1}{4}(A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + 2AB - 2AC - 2AD - 2DB + 2DC - 2BC). \\
 |N - Q|^2 &= (N - Q)(N - Q) = \left(\frac{B + C}{2} - \frac{A + D}{2} \right) \left(\frac{B + C}{2} - \frac{A + D}{2} \right) = \\
 &= \frac{1}{4}(B + C - A - D)(B + C - A - D) = \\
 &= \frac{1}{4}(B^2 + BC - AB - DB + CB + C^2 - AC - DC - AB - AC + A^2 + AD - DB - DC + AD + D^2) = \\
 &= \frac{1}{4}(A^2 + B^2 + C^2 + D^2 - 2AB - 2AC + 2AD - 2DB - 2DC + 2BC)
 \end{aligned}$$

Temos

$$\begin{aligned}
& |M - P| = |N - Q| \Leftrightarrow |M - P|^2 = |N - Q|^2 \Leftrightarrow \\
& \frac{1}{4}(A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + 2AB - 2AC - 2AD - 2DB + 2DC - 2BC) = \\
& \frac{1}{4}(A^2 + B^2 + C^2 + D^2 - 2AB - 2AC + 2AD - 2DB - 2DC + 2BC) \Leftrightarrow \\
& AB - AD - BC + CD = 0 \Leftrightarrow (A - C)(B - D) = 0 \Leftrightarrow AC \perp BD
\end{aligned}$$

(b) As bimedias de um quadrilátero são perpendiculares se e somente se as diagonais são congruentes. Confira 4.16

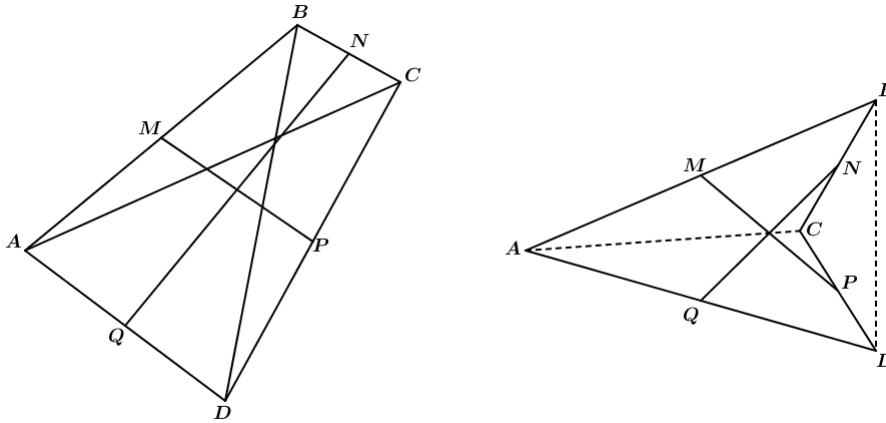


Figura 4.16

Vamos provar que $(M - P)(N - Q) = 0 \Leftrightarrow (A - C)^2 = (B - D)^2$.

$$(M - P)(N - Q) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{A+B}{2} - \frac{C+D}{2} \right) \left(\frac{B+C}{2} - \frac{A+D}{2} \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(A + B - C - D)(B + C - A - D) = 0 \Leftrightarrow$$

$$AB + AC - A^2 - AD + B^2 + BC - AB - BD - CB - C^2 + AC + CD - BD - CD + AC + D^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$2AC - A^2 + B^2 - 2BD - C^2 + D^2 = 0 \Leftrightarrow (A - C)(A - C) - (B - D)(B - D) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(A - C)^2 = (B - D)^2$$

4.11 O Teorema de Finsler-Hadwiger

Construa dois quadrados $ABCD$ e $DEFG$ com um vértice comum D . Seja M o centro de $ABCD$, e N o centro de $DEFG$, e P o ponto médio de AE e Q o ponto médio de CG . Prove que $MPNQ$ é um quadrado.

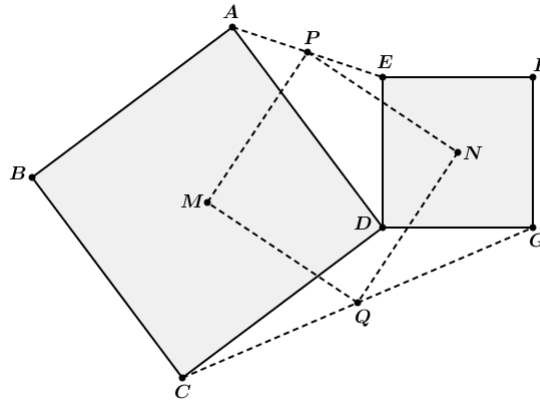


Figura 4.17

Lema. Conforme a Figura 4.17, temos $AG = CE$ e $\overrightarrow{AG} \perp \overrightarrow{CE}$.

Demonstração:

Notemos que $ADG \cong CDE$ pelo caso LAL. Logo $AG = CE$.

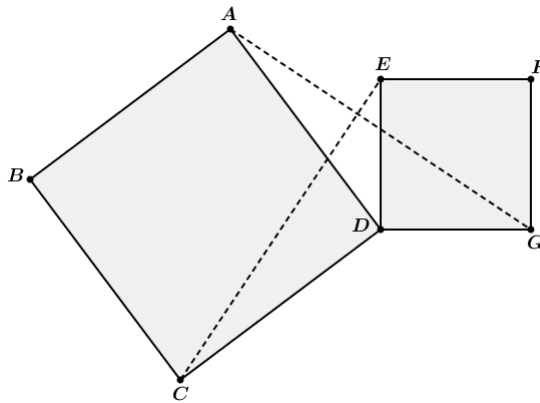


Figura 4.18

Notemos que $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DG}$ e $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}$. Temos

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{CE} &= [\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DG}] [\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}] = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DG} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DG} \cdot \overrightarrow{DE} = \\ &= \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DG} \cdot \overrightarrow{CD} \end{aligned}$$

Note que $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ pois $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{CD}$, e que $\overrightarrow{DG} \cdot \overrightarrow{DE} = 0$ pois $\overrightarrow{DG} \perp \overrightarrow{DE}$.

Sejam agora $\theta = m(\angle ADE)$ e $\gamma = m(\angle CDG)$. Sua soma com a soma de dois ângulos retos formam o ângulo de 360° , de modo que $\theta + \gamma = 180^\circ$. Assim

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DG} \cdot \overrightarrow{CD} &= -\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DG} \cdot \overrightarrow{DC} = \\ &= -AD \cdot DE \cos \theta - DG \cdot CD \cos \gamma = -AD \cdot DE \cos \theta + DE \cdot AD \cos \theta = 0 \end{aligned}$$

Portanto $\overrightarrow{AG} \perp \overrightarrow{CE}$ e terminamos a demonstração do Lema.

Agora faremos a demonstração do teorema de Finsler-Hadwiger.

Primeiro observamos que $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{QN}$. De fato,

$$\overrightarrow{MP} - \overrightarrow{QN} = P - M - N + Q = \frac{1}{2}(A + E) - \frac{1}{2}(A + C) - \frac{1}{2}(E + G) + \frac{1}{2}(C + G) = 0$$

Logo o quadrilátero $MPNQ$ é um paralelogramo.

Vamos provar que $\overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{PQ}$.

Temos

$$\overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{PQ} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0 \Leftrightarrow (N - M)(Q - P) = 0$$

Calculando

$$\begin{aligned} 4(N - M)(Q - P) &= [(E + G) - (A + C)] \cdot [(C + G) - (A + E)] = \\ &= (E + G - A - C) \cdot (C + G - A - E) = [(E - C) + (G - A)] \cdot [(C - E) + (G - A)] = \\ &= [\overrightarrow{CE} + \overrightarrow{AG}] \cdot [\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{AG}] \cdot [-\overrightarrow{CE} + \overrightarrow{AG}] = |\overrightarrow{AG}|^2 - |\overrightarrow{CE}|^2 = 0 \end{aligned}$$

pois $AG = CE$ pelo Lema.

Portanto $\overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{PQ}$, que implica que o quadrilátero $MPNQ$ é um losango.

Vamos provar que $MP \perp NP$. Considerando o triângulo ACE vemos que MP une os pontos médio dos lados AC e AE . Logo $MP \parallel CE$. Considerando o triângulo AEG vemos que NP une os pontos médios dos lados EG e AE . Logo $NP \parallel AG$. Mas já vimos no Lema acima que $\overrightarrow{AG} \perp \overrightarrow{CE}$. Portanto $MP \perp NP$.

Concluimos que o quadrilátero $MPNQ$ é um quadrado.

Os dois quadrados podem estar em qualquer posição. Segue um exemplo na Figura 4.19.

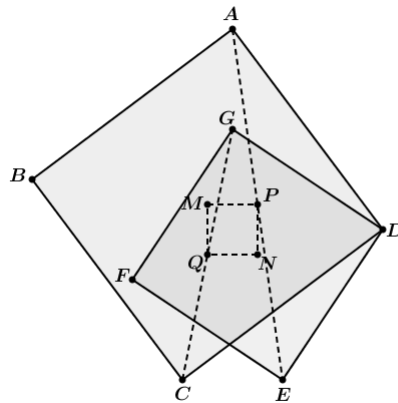


Figura 4.19

4.12 O Teorema de Van Aubel

Dado um quadrilátero qualquer, construa quadrados sobre seus lados, todos situados externamente. Os segmentos que unem os centros dos quadrados opostos são congruentes e perpendiculares.

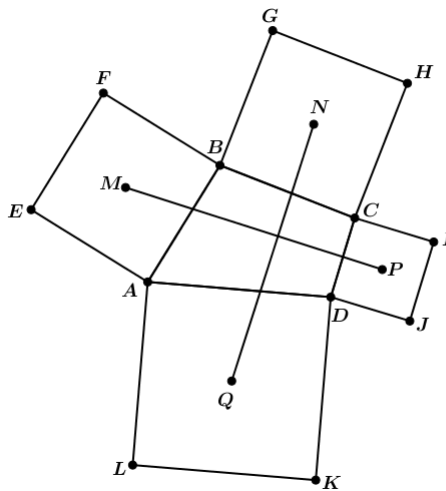


Figura 4.20

Conforme a Figura 4.20, vamos provar que $MP = NQ$. Seja O o ponto médio de AC . Por 4.11 temos OM e ON são lados de um quadrado (o quarto vértice é o ponto médio de FG). Portanto $OM = ON$ e $OM \perp ON$. Da mesma forma OP e OQ são lados de (outro) quadrado, e $OP = OQ$ e $OP \perp OQ$.

Notemos agora que $\angle MOP \cong \angle NOQ$ pois suas medidas são iguais a 90° mais a medida de $\angle NOP$. Assim $MOP \cong NOQ$ pelo caso de congruência LAL. Segue que $MP = NQ$.

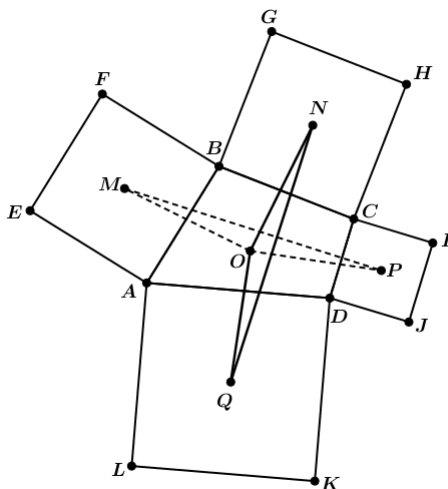


Figura 4.21

Agora vamos provar que $MP \perp NQ$. Isso equivale a provar que $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{NQ} = 0$. Conforme a Figura 4.21, temos

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{NQ} &= (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OP})(\overrightarrow{NO} + \overrightarrow{OQ}) = \overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{NO} + \overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{NO} + \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = \\ &= \overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{NO} \end{aligned}$$

pois $OM \perp ON \Rightarrow \overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{NO} = 0$ e $OP \perp OQ \Rightarrow \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 0$.

Seja $\theta = m(\angle MOQ)$, de modo que $m(\angle NOP) = 180^\circ - \theta$. Assim

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OQ} = OM \cdot OQ \cos \theta$$

e

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{ON} = OP \cdot ON \cos(180^\circ - \theta) = -OP \cdot ON \cos \theta$$

Como $OM = ON$ e $OP = OQ$ vem

$$\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{NO} = -\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{ON} = -OM \cdot OQ \cos \theta + OP \cdot ON \cos \theta = 0$$

Segue que $MP \perp NQ$, e terminamos.

Capítulo 5

Alguns problemas resolvidos com Geometria Analítica

Apresentamos neste capítulo problemas de Geometria Plana, solucionados usando vetores e coordenadas para o estudo e aprendizado.

5.1 Paralelogramo e suas diagonais

Dois lados de um paralelogramo medem 2 e 3 e fazem entre si um ângulo de 60° . Qual é o cosseno do ângulo formado pelas diagonais?

Se ABCD o paralelogramo, como a Figura 5.1. De $AB = 3$, $AD = BC = 2$ e $\widehat{DAB} = 60^\circ$ obtemos as coordenadas dos vértices do paralelogramo.

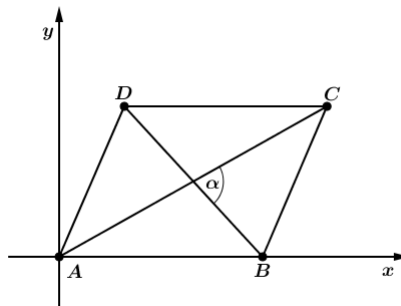


Figura 5.1

$$A = (0, 0), B = (3, 0), C = (4, \sqrt{3}) \text{ e } D = (1, \sqrt{3}).$$

Considerando os vetores

$$\vec{u} = \overrightarrow{AC} = C - A = (4, \sqrt{3})$$

$$\text{e } \vec{v} = \overrightarrow{BD} = D - B = (2, -\sqrt{3})$$

O cosseno do ângulo α entre as diagonais AC e BD do paralelogramo é então dado por

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{8 - 3}{\sqrt{19}\sqrt{7}} = \frac{5}{\sqrt{133}}$$

5.2 Comprimento do segmento de um quadrado

O quadrado ABCD tem lado 10. Sendo M o ponto médio de BC, traçando a perpendicular a AM é o segmento DP. Qual o comprimento desse segmento ?

Utilizando o eixo das abscissas passando por AB e o eixo das coordenadas passando por AD, conforme a Figura 5.2, temos $A = (0, 0)$, $B = (10, 0)$, $C = (10, 10)$, $D = (0, 10)$ e $M = (10, 5)$.

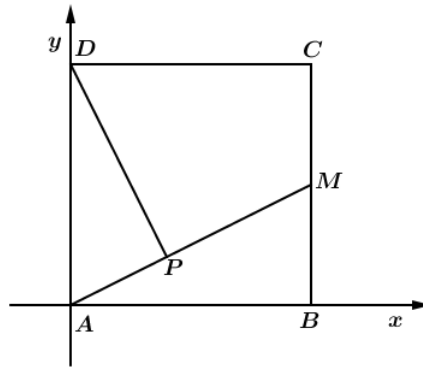


Figura 5.2

A equação da reta AM é $x - 2y = 0$ e o comprimento do segmento DP é a distância do ponto D à reta AM. A distância do ponto (x_0, y_0) à reta $ax + by + c = 0$ é dada por:

$$d = |ax_0 + by_0 + c|$$

Portanto,

$$DP = \frac{|0 - 2 \cdot 10|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{20}{\sqrt{5}} = 4\sqrt{5}$$

5.3 Coordenadas de um paralelogramo

Em um sistema de coordenadas 0_{xy} , são dados os pontos $A = (2, 4)$, $B = (1, 1)$ e $C = (7, 2)$. Usando vetores encontre as coordenadas do ponto D de modo que ABCD seja um paralelogramo.

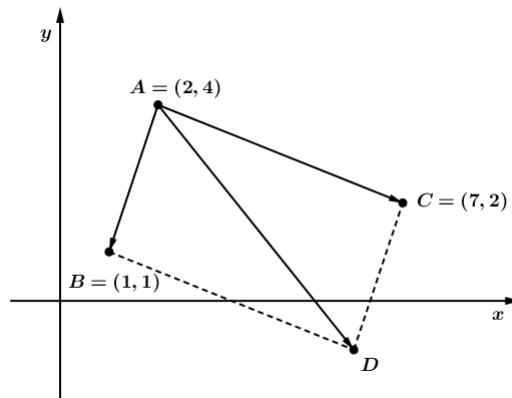


Figura 5.3

1ª Solução

Temos $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD} &= (B - A) + (C - B) = \\ &= (-1, -3) + (5, -2) = (4, -5)\end{aligned}$$

Como $\overrightarrow{AD} = (4, -5)$, temos

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD} &= (D - A) \\ (4, -5) &= D - (2, 4) \\ D &= (6, -1)\end{aligned}$$

2ª Solução

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ ou $(C - A) = (D - B)$. Seja $D = (p, q)$, temos

$$(5, -2) = (p - 1, q - 1)$$

$$\begin{cases} p - 1 = 5 \\ q - 1 = -2 \end{cases} \Rightarrow p = 6 \text{ e } q = -1$$

Portanto $D = (6, -1)$.

5.4 Ortocentro de um triângulo dado em coordenadas

Encontre o ortocentro do triângulo $A = (2, 2)$, $B = (8, -1)$ e $C = (6, 5)$.

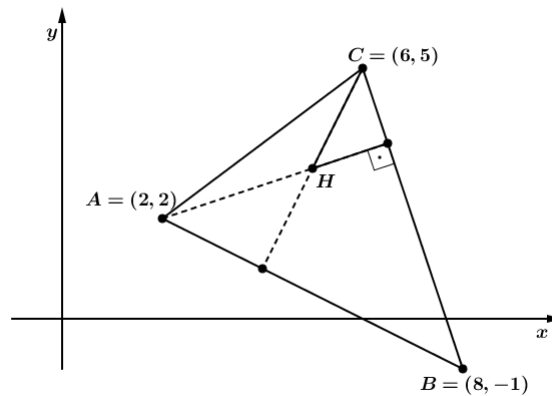


Figura 5.4

Seja $H = (a, b)$ o ortocentro do triângulo ABC. Temos:

$$\text{i) } \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

$$\begin{aligned} (H - C) \cdot (B - A) &= 0 \\ (a - 6, b - 5) \cdot (8 - 2, -1 - 2) &= 0 \\ (a - 6, b - 5) \cdot (6, -3) &= 0 \\ 6(a - 6) - 3(b - 5) &= 0 \\ 6a - 36 - 3b + 15 &= 0 \\ 6a - 3b - 21 &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{ii) } \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

$$\begin{aligned} (H - A) \cdot (C - B) &= 0 \\ (a - 2, b - 2) \cdot (6 - 8, 5 + 1) &= 0 \\ (a - 2, b - 2) \cdot (-2, 6) &= 0 \\ -2(a - 2) + 6(b - 2) &= 0 \\ -2a + 4 + 6b - 12 &= 0 \\ -2a + 6b - 8 &= 0 \end{aligned}$$

Fazendo o sistema das expressões encontradas, temos:

$$\begin{cases} 6a - 3b - 21 = 0 \\ -2a + 6b - 8 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6a - 3b - 21 = 0 \\ -6a + 18b - 24 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 15b &= 45 \Rightarrow b = 3 \\ \Rightarrow 6a - 30 &= 0 \Rightarrow a = 5 \end{aligned}$$

Portanto temos que o ortocentro é o ponto $H = (5, 3)$.

5.5 Razões de um trapézio

Na Figura 5.5, temos um trapézio, suponha que as razões em que M divide \overrightarrow{AD} e N divide \overrightarrow{BC} são iguais a r . Prove que $\overrightarrow{MN} = \frac{r}{1+r}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{1+r}\overrightarrow{DC}$. Deduza que $MN \parallel AB$ e que a medida de MN é igual a $\frac{|\overrightarrow{AB}| + r|\overrightarrow{DC}|}{1+r}$.

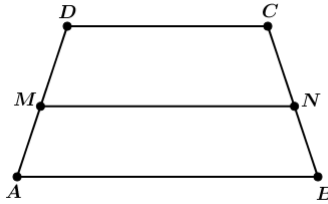


Figura 5.5

Seja $\overrightarrow{AM} = r\overrightarrow{MD}$ e $\overrightarrow{BN} = r\overrightarrow{NC}$, temos $r > 0$. Ainda, como $ABCD$ é um trapézio com $AB \parallel CD$, temos $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{DC}$ para algum $\lambda > 0$. Usando 2.4, temos

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{AM} &= \frac{r}{1+r}\overrightarrow{AD} \text{ e } \overrightarrow{BN} = \frac{r}{1+r}\overrightarrow{BC} \\
 \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = -\frac{r}{1+r}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \frac{r}{1+r}\overrightarrow{BC} = \\
 &= -\frac{r}{1+r}\overrightarrow{AD} - \frac{r}{1+r}\overrightarrow{DC} - \frac{r}{1+r}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB} + \frac{r}{1+r}\overrightarrow{DC} = \\
 &= -\frac{r}{1+r}[\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}] + \overrightarrow{AB} + \frac{r}{1+r}\overrightarrow{DC} = \\
 &= -\frac{r}{1+r}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \frac{r}{1+r}\overrightarrow{DC} = \\
 &= \left[-\frac{r}{1+r} + 1\right]\overrightarrow{AB} + \frac{r}{1+r}\overrightarrow{DC} = \\
 &= \frac{-r + 1 + r}{1+r}\overrightarrow{AD} + \frac{r}{1+r}\overrightarrow{DC} = \\
 &= \frac{1}{1+r}\overrightarrow{AB} + \frac{r}{1+r}\overrightarrow{DC}
 \end{aligned}$$

Como $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC}$, existe $\lambda > 0$ tal que $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{DC}$. Logo

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{1+r} \lambda \overrightarrow{DC} + \frac{r}{1+r} \overrightarrow{DC} = \left(\frac{\lambda}{1+r} + \frac{r}{1+r} \right) \overrightarrow{DC}$$

Tomando o módulo temos

$$\begin{aligned} MN &= \left(\frac{\lambda}{1+r} + \frac{1}{1+r} \right) DC = \frac{\lambda DC}{1+r} + \frac{\lambda DC}{1+r} \\ &= \frac{1}{1+r} AB + \frac{r}{1+r} DC = \\ &= \frac{AB + rDC}{1+r} \end{aligned}$$

5.6 Centróide de um triângulo

Prove que o centróide de um triângulo qualquer é também o centróide do triângulo formado pelos seus pontos médios. Retirado de [19] p 11.

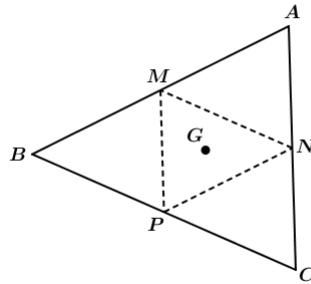


Figura 5.6

O centróide de um triângulo qualquer pode ser expresso por $G = \frac{A + B + C}{3}$. Conforme a Figura 5.6, temos M , N e P os pontos médios do triângulo ABC .

Sabendo que $M = \frac{A + B}{2}$, $N = \frac{B + C}{2}$ e $P = \frac{C + A}{2}$, temos

$$\begin{aligned} \frac{M + N + P}{3} &= \frac{\frac{A + B}{2} + \frac{B + C}{2} + \frac{C + A}{2}}{3} = \\ &= \frac{\frac{A + B + B + C + C + A}{2}}{3} = \frac{A + B + C}{3} = G \end{aligned}$$

Logo G é o centróide dos triângulos ABC e MNP .

5.7 Dê a propriedade

Descreva e demonstre o resultado proposto pela Figura 5.7.

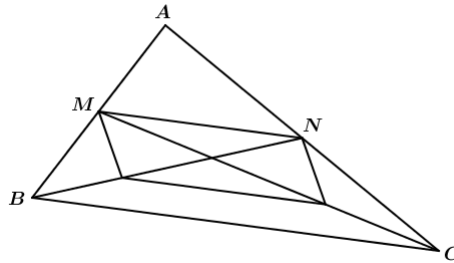


Figura 5.7

Seja ABC um triângulo qualquer. Sejam M o ponto médio de AB e N o ponto médio de AC . Seja $P \in BN$ tal que $PN = 2BP$ e seja $Q \in CM$ tal que $QM = 2CQ$. A Figura 5.7 sugere que $MNQP$ é um paralelogramo.

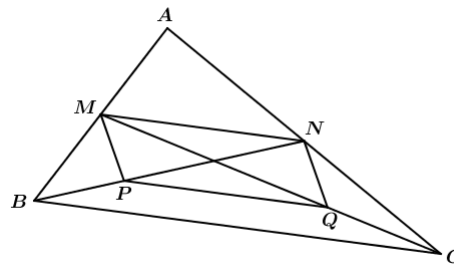


Figura 5.8

Demonstração:

Temos $M = \frac{A+B}{2}$ e $N = \frac{A+C}{2}$. Ainda por 2.3, temos $P = \frac{2B+N}{3}$ e $Q = \frac{2C+M}{3}$.
Agora

$$Q - P = \frac{2C+M}{3} - \frac{2B+N}{3} = \frac{1}{3}[2C+M-2B-N] = \frac{1}{3}[2(C-B) + (M-N)]$$

$$\text{Agora } M - N = \frac{A+B}{2} - \frac{A+C}{2} = \frac{1}{2}[B-C].$$

$$\text{Logo } B - C = 2(M - N) \Rightarrow C - B = -2(M - N).$$

Daí

$$Q - P = \frac{1}{3}[-4(M - N) + (M - N)] = \frac{1}{3}[-3(M - N)] = N - M$$

Logo $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{MN}$. Assim $MNQP$ é um paralelogramo.

5.8 Três partes congruentes

Seja $ABCD$ um paralelogramo. Prove que as retas que passam por A e pelos pontos médios dos lados opostos repartem a diagonal BD em três partes congruentes, e são repartidas por elas na terça-parte mais próxima dos pontos médios.

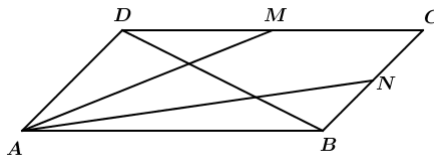


Figura 5.9

Sejam M o ponto médio de CD e N o ponto médio de BC . Seja P o ponto que reparte AM na razão 2, isto é, $AP = 2PM$. Por 2.3 temos $P = \frac{A + 2M}{2}$.

Agora seja Q o ponto que reparte BD na razão 2, isto é, $BQ = 2QD$. Temos, por 2.3, $Q = \frac{B + 2D}{2}$. Vamos provar que $P = Q$. Temos

$$P = \frac{1}{2}[A + 2M] = \frac{1}{2}\left[A + 2\frac{D + C}{2}\right] = \frac{1}{2}[A + D + C]$$

Como $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, pois $ABCD$ é um paralelogramo, temos $D - A = C - B$. Logo $D + B = A + C$ e $P = \frac{1}{2}[D + D + B] = \frac{B + 2D}{2} = Q$.

O mesmo ocorre com AN e BD . O ponto de encontro L é tal que

$$AL = 2LN \text{ e } DL = 2LB$$

$$\frac{500}{350} = \frac{20}{x} \Rightarrow 500 \cdot x = 350 \cdot 20$$

$$\Rightarrow 500 \cdot x = 7000$$

$$\Rightarrow x = \frac{7000}{500} \Rightarrow x = 14$$

Referências e Bibliografia

- [1] Baldin, Y. Y e Furuya, Y. K. S. *Geometria Analítica para todos e atividades com Octave e GeoGebra*. São Carlos: EDUFScar, 2011.
- [2] Bogomolny, A. *A Problem of Hinged Squares*. Disponível em: <www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/SqFromSq.shtml>. Acesso em 05 de maio de 2017.
- [3] Bogomolny, A. *Bimedians and Diagonals in a Quadrilateral*. Disponível em: <www.cut-the-knot.org/pythagoras/BimediansAndDiagonals.shtml>. Acesso em 05 de maio de 2017.
- [4] Bogomolny, A. *Squares on Sides of a Quadrilateral*. Disponível em: <www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/SqOnQuadri.shtml>. Acesso em 05 de maio de 2017.
- [5] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. (3º e 4º ciclos do ensino fundamental)*. Brasília: MEC, 1998.
- [6] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio)*. Brasília: MEC, 2000.
- [7] Boulos, P.; Camargo, I. *Geometria Analítica-um tratamento vetorial* 3.ed. São Paulo: Prentice Hall, 2007.
- [8] Elon, L. L. *Coordenadas no Plano* 4.ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2002.
- [9] Figueiredo, J. O. *Usando Coordenadas Baricêntricas para Estudar a Geometria do Triângulo*. 2008. 79f. Monografia (Especialização em Matemática para Professores) - Instituto de Matemática, Universidade Federal Fluminense, Niterói. Disponível em: <<http://www.professores.im-uff.mat.br/hjbortol/arquivo/2008.2/esp/2008-osorio-esp-uff.pdf>>. Acesso em 05 de maio de 2017.
- [10] Giovani, R. J et al *A conquista da Matemática, Teoria e Aplicação*. Volumes 5, 6, 7 e 8. São Paulo: FTD, 1992.
- [11] Iezzi, G et al. *Matemática 2º grau*. Volumes 1, 2 e 3: Ensino Médio. São Paulo: Saraiva, 1990.

- [12] Iezzi, G *et al.* *Matemática: Ciência e aplicações*. Coleção Ensino Médio, Volumes 1, 2 e 3. São Paulo: Saraiva, 2010.
- [13] Imenes, L. I e Lellis, M. *Matemática*. Volumes 6, 7, 8 e 9. São Paulo: Moderna, 2009.
- [14] Lima, R. B *Análise de Livros de Matemática para o Ensino Médio*. Revista do Professor de Matemática, n. 46, Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2001.
- [15] Lima, R. B. *Elementos da Álgebra Vetorial*. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1973.
- [16] Moise, E. E.; Downs, F. L. *Geometria Moderna*. São Paulo: Edgard Blucher Ltda, 1971.
- [17] Morgado, A. C. *Coordenadas para os centros do triângulo*. Revista do Professor de Matemática, n. 43, Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2000.
- [18] Paterlini, R. R. *Geometria Elementar, gênese e desenvolvimento*. São Carlos: Departamento de Matemática, 2010. Disponível em: <http://www.dm.ufscar.br/~paterlini/geo_paterlini_completo_23_04_2015.pdf>. Acesso em 05 de maio de 2017.
- [19] Tondeur, P. *Vectors and Transformations in Plana Geometry*. Houston: Publish or Perish, 1993.
- [20] Truffault, B. *Géométrie Élémentarie*. Paris: Ellipses Éditions, 2001.
- [21] Vincze, C e Kozma, L. *College Geometry*, 2014. Disponível em: <math.unideb.hu/media/nagy-abris/Collegegeom-main-1.pdf>. Acesso em 05 de maio de 2017.
- [22] Wagner E. *Sobre o ensino de geometria analítica*. Revista do Professor de Matemática, n. 41, Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1999.