Um passeio pelas dimensões

Gabriel Longatto Clemente

Gabriel Silva Lucidio

Prof. Dr. Rafael Augusto dos Santos Kapp

Resumo

Neste trabalho vamos nos aventurar pelos Espaços Euclidianos n-dimensionais. Com recursos da Análise, visamos o entendimento sobre a esfera e a bola, além de um brevíssimo estudo sobre a Função Gama. Motivados pelas fórmulas já conhecidas para área e volume em três dimensões, apresentamos aqui uma generalização para dimensões maiores.

1 Bolas e esferas

Sejam $n \in \mathbb{N}^*$ e $r > 0$ um número real. Escrevemos $x := (x_j)_{j=1}^n \in \mathbb{R}^n$ e definimos

$$\|x\| := \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}.$$

Dizemos que a **bola n-dimensional de raio r** é o conjunto $\mathbb{B}_r^n := \{x \in \mathbb{R}^n ; \|x\| \leq r\}$, e que a **esfera $(n-1)$-dimensional de raio r** é o conjunto $\mathbb{S}_r^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n ; \|x\| = r\}$. Chamamos $\mathbb{B}_1^n$ de **bola unitária** e $\mathbb{S}_1^{n-1}$ de **esfera unitária**.

O **volume** de $\mathbb{B}_r^n$ é o valor real

$$V(\mathbb{B}_r^n) := \int_{\mathbb{B}_r^n} 1 \, dV,$$

em que dV denota o elemento de volume. Daí, $V(\mathbb{B}_r^n) = r^n \, V(\mathbb{B}_1^n)$. A **área superficial** de $\mathbb{S}_r^{n-1}$ é o valor real

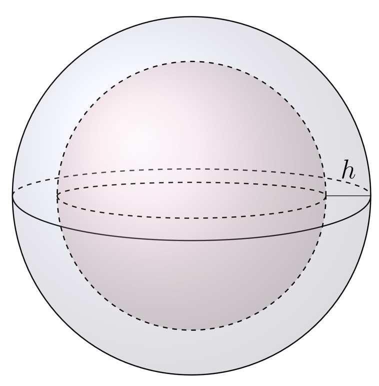
$$A(\mathbb{S}_r^{n-1}) := \int_{\mathbb{S}_r^{n-1}} 1 \, dA,$$

em que dA denota o elemento de área. Consequentemente, $A(\mathbb{S}_r^{n-1}) = r^{n-1} \, A(\mathbb{S}_1^{n-1})$.

Observação: Pode-se provar que a área superficial coincide com a derivada do volume em relação ao raio. Ou seja,

$$A(\mathbb{S}_r^{n-1}) := \lim_{h \to 0^+} \frac{V(\mathbb{B}_{r+h}^n) - V(\mathbb{B}_r^n)}{h}.$$

Uma interpretação para o quociente incremental acima é a necessidade de se induzir um decaimento de dimensão na diferença de volumes.



2 Função Gama

Chamamos de **Função Gama** a aplicação

$$\begin{aligned} \Gamma : (0, \infty) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt. \end{aligned}$$

Para todo $x \in (0, \infty)$, temos que

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^x dt = \int_0^\infty \frac{d}{dt}(-e^{-t}) t^x dt = x \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt = x \cdot \Gamma(x).$$

Observamos que $\Gamma(1) = 1$ e, por isso,

$$\Gamma(n+1) = n!$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

3 Volume da bola n-dimensional

Denotamos um ponto de $\mathbb{R}^{n+1}$ por (x, y), em que $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}$. Consideramos então o conjunto $D := \{(x, y); \|x\|^2 < y\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ e notamos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Integrando a função e^{-y} sobre D obtemos

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{B}_{\sqrt{y}}^n} e^{-y} dx \, dy = V(\mathbb{B}_1^n) \int_0^\infty e^{-y} y^{n/2} \, dy = V(\mathbb{B}_1^n) \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right). \tag{1}$$

Por outro lado, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\|x\|^2}^\infty e^{-y} dy \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^2} dx = \prod_{j=1}^n \int_{-\infty}^\infty e^{-x_j^2} \, dx_j = \pi^{n/2}. \tag{2}$$

Devido ao *Teorema de Fubini-Tonelli*, os valores das Equações (1) e (2) coincidem. Portanto,

$$V(\mathbb{B}_1^n) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}.$$

Logo,

$$V(\mathbb{B}_r^n) = \frac{r^n \cdot \pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}.$$

4 Área superficial da esfera n-dimensional

O vetor normal unitário ν à esfera $\mathbb{S}_r^{n-1}$ em um seu ponto x é dado por $\nu = x/\|x\|$. Além disso, o *Teorema da Divergência* nos diz que

$$\int_{\mathbb{B}_r^n} div(x) \, dV = \int_{\mathbb{S}_r^{n-1}} \langle x, \nu \rangle \, dA.$$

Mas como

$$div(x) = n \quad \text{e} \quad \langle x, \nu \rangle = \|x\| = r,$$

temos que

$$A(\mathbb{S}_r^{n-1}) = \int_{\mathbb{S}_r^{n-1}} 1 \, dA = \frac{n}{r} \int_{\mathbb{B}_r^n} 1 \, dV = \frac{n}{r} \cdot V(\mathbb{B}_r^n).$$

Portanto,

$$A(\mathbb{S}_r^{n-1}) = \frac{n \cdot r^{n-1} \cdot \pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}.$$

5 Algumas áreas e volumes

Mostra-se por *Indução Finita*, a partir das fórmulas acima obtidas, que

$$V(\mathbb{B}_r^{2k}) = \frac{r^{2k} \cdot \pi^k}{k!}, \quad A(\mathbb{S}_r^{2k}) = \frac{2k \cdot r^{2k-1} \cdot \pi^k}{k!}$$

$$V(\mathbb{B}_r^{2k+1}) = \frac{r^{2k+1} \cdot \pi^k \cdot k! \cdot 2^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \text{e que} \quad A(\mathbb{S}_r^{2k+1}) = \frac{r^{2k} \cdot \pi^k \cdot k! \cdot 2^{2k+1}}{(2k)!}.$$

A seguir incluimos uma tabela com expressões de área superficial de $\mathbb{S}_r^{n-1}$ e de volume de $\mathbb{B}_r^n$ para alguns valores de n.

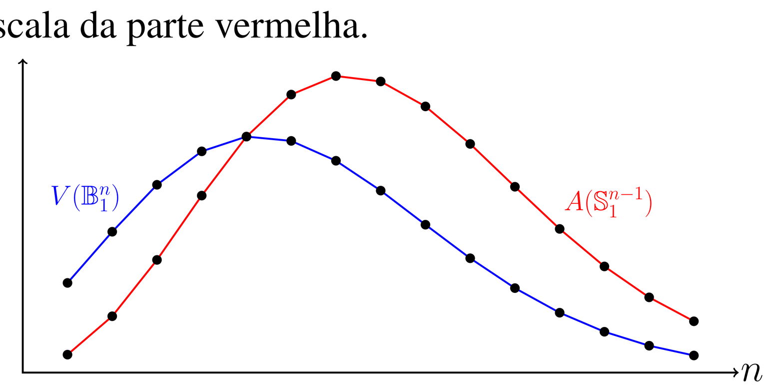
n	$V(\mathbb{B}_r^n)$	$A(\mathbb{S}_r^{n-1})$
1	$2r$	2
2	πr^2	$2\pi r$
3	$\frac{4}{3}\pi r^3$	$4\pi r^2$
4	$\frac{1}{2}\pi^2 r^4$	$2\pi^2 r^3$
5	$\frac{8}{15}\pi^2 r^5$	$\frac{8}{3}\pi^2 r^4$
6	$\frac{1}{6}\pi^3 r^6$	$\pi^3 r^5$
7	$\frac{16}{105}\pi^3 r^7$	$\frac{16}{15}\pi^3 r^6$
8	$\frac{1}{24}\pi^4 r^8$	$\frac{1}{3}\pi^4 r^7$
9	$\frac{32}{945}\pi^4 r^9$	$\frac{32}{105}\pi^4 r^8$
10	$\frac{1}{120}\pi^5 r^{10}$	$\frac{1}{12}\pi^5 r^9$

6 Comportamento assintótico

É interessante notar que

$$\lim_{n \to \infty} A(\mathbb{S}_r^{n-1}) = \lim_{n \to \infty} V(\mathbb{B}_r^n) = 0.$$

No gráfico a seguir colocamos o parâmetro dimensional n no eixo das abscissas e o volume (em azul) e a área superficial (em vermelho) das bolas e das esferas unitárias no eixo das ordenadas. A escala gráfica da parte azul é cinco vezes a escala da parte vermelha.



Seja $\mathbb{I} := [0, 1] \subset \mathbb{R}$. Definimos o **cubo n-dimensional** como sendo $\mathbb{I}^n$. Observamos que $V(\mathbb{I}^n) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$. A bola n-dimensional de raio $\frac{1}{2}$ está inscrita no cubo n-dimensional e toca os centros das faces de $\mathbb{I}^n$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Sendo assim,

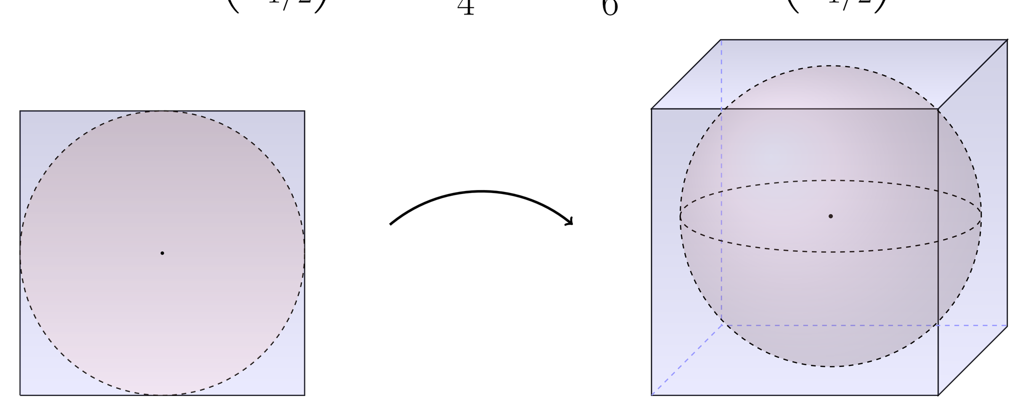
$$1 - V\left(\mathbb{B}_{1/2}^n\right)$$

é a quantidade de volume exterior à bola $\mathbb{B}_{1/2}^n$ e interior ao cubo $\mathbb{I}^n$. Consequentemente,

$$\lim_{n \to \infty} \left[1 - V\left(\mathbb{B}_{1/2}^n\right)\right] = 1.$$

Isto significa que a quantidade de volume exterior à bola torna-se cada vez mais significativa conforme a dimensão cresce. Nas figuras a seguir, estão ilustrados os casos de dimensão 2 e 3, em que

$$1 - V\left(\mathbb{B}_{1/2}^2\right) = 1 - \frac{\pi}{4} < 1 - \frac{\pi}{6} = 1 - V\left(\mathbb{B}_{1/2}^3\right).$$



Referências

[1] HÖRMANDER, Lars. **The Analysis of Linear Partial Differential Operators I.** New York: Springer, 1998. 391 p. (Undergraduate texts in mathematics).

[2] JANSON, Svante. **The Volume of a Ball in $\mathbb{R}^n$.** Department of Mathematics: Uppsala University, 2006.