Ultrafiltros Aplicados a Sistemas Dinâmicos

José Carlos Fontanesi Kling

ICMC - USP

Processo nº 2018/08886-1, Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP)

Resumo

Este trabalho recorre aos ultrafiltros para estudar o comportamento de diferentes sub-órbitas de sistemas dinâmicos contínuos em espaços compactos de Hausdorff. Na primeira seção mostraremos que ultrafiltros sobre os naturais podem ser vistos como uma maneira sistemática de determinar um ponto limite de qualquer sequência, em seguida veremos como expressar convenientemente um sistema dinâmico em termos de iterações de ultrafiltros para então "traduzir" um sistema dinâmico qualquer como um sistema dinâmico específico em $\beta\mathbb{N}$, o espaço dos ultrafiltros dos naturais. Finalmente, munidos dessas ferramentas, será possível demonstrar o teorema de Auslander-Ellis.

Introdução

A principal questão a ser respondida ao estudar um sistema dinâmico é como ele se comporta com o aumento de iterações, ou qual é o limite das órbitas dos pontos do espaço em questão. Essa não é uma questão simples, já que tais sistemas podem apresentar comportamentos bastante erráticos. Baseado no artigo de Andreas Blass, *Ultrafilters: where topological dynamics = algebra = combinatorics*, o presente trabalho apresenta uma resposta para um tipo específico de sistema dinâmicos, em que temos uma função contínua sobre um espaço compacto de Hausdorff. Para isso faremos uso dos ultrafiltros sobre o conjunto dos números naturais, que nos permitirá estudar de maneira sistemática pontos limites das órbitas do sistema e, além disso, nos permitirá construir um sistema dinâmico específico que conterá informações sobre um sistema arbitrário.

Ultrafiltros

Neste trabalho vamos utilizar apenas a definição de ultrafiltros sobre os naturais, porém precisaremos mostrar mais duas definições que serão equivalentes, para podermos manipulá-los no contexto de sistemas dinâmicos.

Definição. *Um **ultrafiltro** sobre $\mathbb{N}$ é uma família $\mathcal{U}$ de subconjuntos de $\mathbb{N}$ de modo que*

1. Se $X \subset Y$ e $X \in \mathcal{U}$, então $Y \in \mathcal{U}$.

2. Se $X, Y \in \mathcal{U}$, então $X \cap Y \in \mathcal{U}$.

3. $\emptyset \notin \mathcal{U}$ e $\mathbb{N} \in \mathcal{U}$.

4. Para todo $X \in \mathbb{N}$, $X \in \mathcal{U}$ ou $\mathbb{N} \setminus X \in \mathcal{U}$.

Para $a \in \mathbb{N}$, denotaremos por $\hat{a}$ o ultrafiltro principal $\{X \subset \mathbb{N} | a \in X\}$.

Proposição. *O conjunto de todos os ultrafiltros é uma compactificação de Stone-Čech, denotado $\beta\mathbb{N}$.*

Demonstração. Consideraremos sobre $\beta\mathbb{N}$ a topologia cuja base é formada pelos conjuntos $\overline{X} = \{\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N} | X \in \mathcal{U}\}$, para $X \subset \mathbb{N}$.
Pode-se mostrar então que $\beta\mathbb{N}$ é um compacto de Hausdorff e que função $f : \mathbb{N} \to \beta\mathbb{N}$ dada por $f(n) = \hat{n}$ é homeomorfismo entre $\mathbb{N}$ e $f(\mathbb{N})$ e $\overline{f(\mathbb{N})} = \beta\mathbb{N}$. □

Podemos pensar no espaço $\beta\mathbb{N}$ como o "fecho" de $\mathbb{N}$, onde para cada sequência de números, adicionamos um ponto limite. Isso nos permitirá analisar não só o comportamento de um sistema dinâmico no limite da sequência de iterações, mas também em diferentes subsequências dela.

Proposição. *Um ultrafiltro $\mathcal{U}$ define biunivocamente uma operação que associa para toda sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em todo espaço compacto de Hausdorff X um ponto $\mathcal{U}\text{-}\lim_n x_n \in X$ de modo que se $f : X \to Y$ é contínua, então $f(\mathcal{U}\text{-}\lim_n x_n) = \mathcal{U}\text{-}\lim_n f(x_n)$.*

Demonstração. Uma sequência em X é uma função $f : \mathbb{N} \to X$ contínua, portanto tem uma única extensão contínua $\overline{f} : \beta\mathbb{N} \to X$, então $\mathcal{U}\text{-}\lim_n x_n = \overline{f}(\mathcal{U})$.
Se T é um operador como na definição, então podemos aplicá-lo a $\beta\mathbb{N}$ e tomamos $\mathcal{U} = T((n)_{n\in\mathbb{N}})$.
Note que essas construções são inversas uma à outra. □

Pode-se verificar que $\mathcal{U}\text{-}\lim_n x_n$ é o único ponto $x \in X$ de modo que para toda vizinhança V de x, temos que $\{n \in \mathbb{N} | x_n \in V\} \in \mathcal{U}$. Em particular, temos que para $a \in \mathbb{N}$, $\hat{a}\text{-}\lim_n x_n = x_a$.
A operação de soma sobre $\mathbb{N}$ pode ser estendida a $\beta\mathbb{N}$, mas como é uma operação binária, tal extensão será contínua em apenas uma das coordenadas. Em $\beta\mathbb{N}$, temos:

$$\mathcal{U} + \mathcal{V} = \{X \subset \mathbb{N} | \{m \in \mathbb{N} | \{n \in \mathbb{N} | m + n \in X\} \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}\}$$

O que nos permite definir a soma no contexto dos operadores da proposição anterior:

$$(\mathcal{U} + \mathcal{V})\text{-}\lim_k x_k = \mathcal{U}\text{-}\lim_m(\mathcal{V}\text{-}\lim_n x_{n+m})$$

Sistemas Dinâmicos

Neste contexto, estudaremos apenas sistemas dinâmicos contínuos sobre espaços compactos de Hausdorff, nos aproveitando das ferramentas apresentadas na seção anterior.

Definição. *Um **sistema dinâmico** é um par (X, T) onde X é um espaço compacto de Hausdorff e $T : X \to X$ é uma função contínua. Denotaremos por T^n a n-ésima iteração $T \circ T \circ \cdots \circ T$ de T. Além disso, definimos para $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}$, $T^{\mathcal{U}}(x) = \mathcal{U}\text{-}\lim_n T^n(x)$.*

Para $x \in X$ fixo, a função $f(\mathcal{U}) = T^{\mathcal{U}}(x)$ é extensão contínua de $g : \mathbb{N} \to X$, onde $g(n) = T^n(x)$, mas para $\mathcal{U}$ fixado, temos que $f(x) = T^{\mathcal{U}}(x)$ é contínua somente se $\mathcal{U}$ é ultrafiltro principal.
Uma iteração pode ser descrita como uma soma de ultrafiltros, pois $T^{\mathcal{U}}(T^{\mathcal{V}}(x)) = T^{\mathcal{U}+\mathcal{V}}(x)$. De fato:

$$\begin{aligned} T^{\mathcal{U}+\mathcal{V}}(x) &= (\mathcal{U} + \mathcal{V})\text{-}\lim_p T^p(x) \\ &= \mathcal{U}\text{-}\lim_m(\mathcal{V}\text{-}\lim_n T^{n+m}(x)) = \mathcal{U}\text{-}\lim_m(\mathcal{V}\text{-}\lim_n T^m(T^n(x))) \\ &= \mathcal{U}\text{-}\lim_m T^m(\mathcal{V}\text{-}\lim_n T^n(x)) \text{ (pois } T^m \text{ é contínua)} \\ &= T^{\mathcal{U}}(T^{\mathcal{V}}(x)) \end{aligned}$$

Definição. *Seja (X, T) um sistema dinâmico. Então:*

- *$x \in X$ é **recorrente** se para toda vizinhança V de x, temos que $\{n \in \mathbb{N} | T^n(x) \in V\}$ é infinito.*
- *$x \in X$ é **uniformemente recorrente** se para toda vizinhança V de x, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists k < M$, $T^{n+k}(x) \in V$.*
- *$x, y \in X$ são **proximais** se para toda vizinhança V da diagonal Δ de $X \times X$, temos que $\{n \in \mathbb{N} | (T^n(x), T^n(y)) \in V\}$ é infinito.*

Em outras palavras: x é recorrente se é ponto limite de sua órbita; x é uniformemente recorrente se para cada M iterações, ao menos uma delas pertence à vizinhança; em espaços métricos, x e y são proximais se existe uma subsequência $(T^{n_k}(x))_{k\in N}$ de $(T^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim |T^n(x) - T^n(y)| = 0$. Esses conceitos podem ser expressos convenientemente em termos de iterações de ultrafiltros.

Teorema. *Seja (X, T) um sistema dinâmico.*

1. $x \in X$ é recorrente $\Leftrightarrow T^{\mathcal{U}}(x) = x$ para algum $\mathcal{U}$ não principal $\Leftrightarrow T^{\mathcal{U}}(x) = x$ para algum $\mathcal{U} \neq \hat{0}$.

2. $x \in X$ é uniformemente recorrente $\Leftrightarrow \forall\mathcal{V} \in \beta\mathbb{N}$, $\exists\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}$ com $T^{\mathcal{U}}(T^{\mathcal{V}}(x)) = x$.

3. $x, y \in X$ são proximais $\Leftrightarrow \exists\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}$, $T^{\mathcal{U}}(x) = T^{\mathcal{U}}(y) \Leftrightarrow \exists\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, $T^{\mathcal{U}}(x) = T^{\mathcal{U}}(y)$.

Demonstração. 1) Se x é recorrente, é ponto limite de $(T^n(x))$, portanto está em $\overline{\{T^n(x) | n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}} = \{T^{\mathcal{U}}(x) | \mathcal{U} \in \beta\mathbb{N} \setminus \{\hat{0}\}\}$. Portanto existe $T^{\mathcal{U}}(x) = x$ para algum $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N} \setminus \{\hat{0}\}$. Se $\mathcal{U} = \hat{k}$, então $T^{nk}(x) = x\ \forall n \in \mathbb{N}$, então o ultrafiltro $\mathcal{V}$ contendo o conjuntos dos múltiplos de k e os conjuntos cofinitos é tal que $T^{\mathcal{V}}(x) = x$.
Suponha $T^{\mathcal{U}}(x) = x$, se $\mathcal{U}$ é principal, então $T^k(x) = x$ para algum $k \in \mathbb{N}$ e portanto $T^{nk}(x) = x$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se $\mathcal{U}$ é não principal, então x é ponto limite da órbita, portanto é recorrente.
2) Suponha x uniformemente recorrente. Seja $\mathcal{V} \in \beta\mathbb{N}$. Fixada uma vizinhança fechada V de x, tome M como na definição, assim podemos definir os conjuntos $P_k = \{n \in \mathbb{N} | T^{n+k}(x) \in V\}$ para $k < M$. Como $\mathcal{V}$ é ultrafiltro e $\bigcup_{j=0}^{M-1} P_j = \mathbb{N}$, temos que existe $k_0 < M$ com $P_{k_0} \in \mathcal{V}$, portanto $T^{\mathcal{V}}(x) \in V$, pois V é fechado. X é compacto de Hausdorff, então admite sistema de vizinhanças fechadas, provamos então que para qualquer vizinhança V (não necessariamente fechada)

$$Y_V = \{k \in \mathbb{N} | T^k(T^{\mathcal{V}}(x)) \in V\} \neq \emptyset$$

Note que $Y_{V-1} \cap Y_{V_2} = Y_{Y_1 \cap Y_2}$, assim, o conjunto de todos os Y_V gera um filtro que pode ser estendido a um ultrafiltro $\mathcal{U}$, e assim, $T^{\mathcal{U}}(T^{\mathcal{V}}(x)) \in V$ para toda vizinhança.
Reciprocamente, se x não é uniformemente recorrente, fixemos uma vizinhança aberta V de x de modo que para todo $M > 0$

$$Y_M = \{n \in \mathbb{N} | (\forall k < M) T^{n+k}(x) \notin V\} \neq \emptyset$$

Novamente esses conjuntos geram um filtro (pois formam uma cadeia) que pode ser estendido a um ultrafiltro $\mathcal{V}$, e não existe ultrafiltro $\mathcal{U}$ tal que $T^{\mathcal{U}}(T^{\mathcal{V}}(x)) \in V$.
3) Suponha $T^{\mathcal{U}}(x) = T^{\mathcal{U}}(y)$. Se $\mathcal{U}$ é ultrafiltro principal o resultado é trivial. Senão, $(T^{\mathcal{U}}(x), T^{\mathcal{U}}(y)) = \mathcal{U}\text{-}\lim_n(T^n(x), T^n(y)) \in \Delta$, e temos o resultado.
Se x e y são proximais, então os conjuntos $Y_V = \{n \in \mathbb{N} | (T^n(x), T^n(y))\} \neq \emptyset$, com V uma vizinhança de Δ, formam um filtro que estendemos a um ultrafiltro $\mathcal{U}$, e assim, $(T^{\mathcal{U}}(x), T^{\mathcal{U}}(y)) \in \Delta$. □

Álgebra de $\beta\mathbb{N}$

Nesta seção "transformaremos" um sistema dinâmico qualquer em um sistema dinâmico em $\beta\mathbb{N}$, mais especificamente $(\beta\mathbb{N}, S)$, onde $S(\mathcal{U}) = \hat{1} + \mathcal{U}$. Dessa forma, se (X, T) é um sistema dinâmico qualquer, então para $x \in X$, temos uma função contínua $f : \mathbb{N} \to X$ dada por $f(n) = T^n(x)$, e portanto admite uma única extensão contínua $\overline{f} : \beta\mathbb{N} \to X$, onde $\overline{f}(\mathcal{U}) = T^{\mathcal{U}}(x)$ e temos que $\overline{f} \circ S = S \circ T$.
A relação fica mais clara ao calcularmos $S^{\mathcal{U}}(\mathcal{V}) = \mathcal{U}\text{-}\lim_n(S^n(\mathcal{V})) = \mathcal{U}\text{-}\lim_n(n + \mathcal{V}) = \mathcal{U} + \mathcal{V}$.
Com isso podemos reformular o teorema da seção anterior algebricamente, e também em termos de subsemigrupos e ideais de $\beta\mathbb{N}$.

Teorema. *1. $\mathcal{U}$ é recorrente em $\beta\mathbb{N} \Leftrightarrow \mathcal{V} + \mathcal{U} = \mathcal{U}$ para algum $\mathcal{V} \neq \hat{0}$.*

2. $\mathcal{U}$ é uniformemente recorrente em $\beta\mathbb{N} \Leftrightarrow$ para cada $\mathcal{V}$, existe $\mathcal{W}$ com $\mathcal{W}+\mathcal{V}+\mathcal{U} = \mathcal{U} \Leftrightarrow \mathcal{U}$ pertence a um ideal à esquerda minimal (fechado) de $\beta\mathbb{N}$.

3. $\mathcal{U}_1$ e $\mathcal{U}_2$ são proximais em $\beta\mathbb{N} \Leftrightarrow$ existe $\mathcal{V}$ tal que $\mathcal{V} + \mathcal{U}_1 = \mathcal{V} + \mathcal{U}_2$.

4. $\mathcal{U}$ gera um um subsemigrupo minimal fechado de $\beta\mathbb{N} \Leftrightarrow \mathcal{U}$ é idempotente ($\mathcal{U} + \mathcal{U} = \mathcal{U}$).

Corolário. *Existe um ultrafiltro uniformemente recorrente. Existe um ultrafiltro idempotente.*

Demonstração. A interseção de uma cadeia de subsemigrupos fechados é subsemigrupo fechado (compacidade), então pelo Lema de Zorn, existe um subsemigrupo minimal fechado de $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$.
Use o mesmo argumento para ideias à esquerda fechados para a primeira parte. □

O próximo resultado mostra que, de fato, podemos analisar $(\beta\mathbb{N}, S)$ para estudar o comportamento das órbitas de outro sistema dinâmico arbitrário.

Teorema. *Seja $(X, T$ um sistema dinâmico e $x \in X$. Se $\mathcal{U}$ é (uniformemente) recorrente em $\beta\mathbb{N}$, então $T^{\mathcal{U}}(x)$ é (uniformemente) recorrente em X. Se $\mathcal{U}_1$ e $\mathcal{U}_2$ são proximais em $\beta\mathbb{N}$, então $T^{\mathcal{U}_1}(x)$ e $T^{\mathcal{U}_2}(x)$ são proximais em X.*

Teorema. *$\mathcal{U}$ uniformemente recorrente e proximal a $\hat{0} \Rightarrow \mathcal{U}$ é idempotente $\Rightarrow \mathcal{U}$ é recorrente e proximal a $\hat{0}$.*

Demonstração. Primeira parte: $\mathcal{U}$ proximal a $\hat{0}$, então existe $\mathcal{V}$ com $\mathcal{V} + \mathcal{U} = \mathcal{V} + 0 = \mathcal{V}$. Para tal $\mathcal{V}$, existe $\mathcal{W}$ com $\mathcal{W} + \mathcal{V} + \mathcal{U} = \mathcal{U}$. Combine as equações para concluir que $\mathcal{U} + \mathcal{U} = \mathcal{U}$.
Segunda parte: Tome $\mathcal{V} = \mathcal{U}$ na definição de recorrência e proximalidade. □

Finalmente temos todas as ferramentas para concretizar nosso objetivo, o de demonstrar o seguinte teorema:

Teorema (Auslander-Ellis)**.** *Seja (X, T) um sistema dinâmico. Para cada $x \in X$, existe $y \in X$ uniformemente recorrente e proximal a x.*

Demonstração. Sabemos que existe $\mathcal{V} \in \beta\mathbb{N}$ uniformemente recorrente, portanto todo ultrafiltro de $\beta\mathbb{N} + \mathcal{V}$ também o é. Note que $\beta\mathbb{N} + \mathcal{V}$ é subsemigrupo fechado, então pelo Lema de Zorn, ele inclui um subsemigrupo minimal fechado, portanto um elemento $\mathcal{U}$ de tal subsemigrupo é idempotente (portanto proximal a $\hat{0}$) e uniformemente recorrente.
Tome $y = T^{\mathcal{U}}(x)$, assim, $T^{\mathcal{U}}(x)$ é uniformemente recorrente e proximal a $T^0(x) = x$. □

Conclusão

Vimos então que os ultrafiltros podem ser uma ferramenta útil no estudo de sistemas dinâmicos, mas a relação entre eles se é mais extensa, por exemplo, no mesmo artigo em que este trabalho se baseia, essa abordagem permite demonstrar o teorema de Hindman, em que para toda partição finita de $\mathbb{N}$, existe um $H \subset \mathbb{N}$ infinito de modo que todas as somas finitas de elementos distintos de H esteja em uma das partes.

Referências

[1] Blass A. (1991) *Ultrafilters: where topological dynamics = algebra = combinatorics*

[2] Hindman N. (1979) *Ultrafilters and combinatorial number theory*. In: Nathanson M.B. (eds) Number Theory Carbondale 1979. Lecture Notes in Mathematics, vol 751. Springer, Berlin, Heidelberg