Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Departamento de Matemática

Trabalho de Conclusão de Curso B

Tópicos de Topologia Algébrica

Gabriel Longatto Clemente
Fabio Ferrari Ruffino

São Carlos - SP, 2018.

Tópicos de Topologia Algébrica

Autor: *Gabriel Longatto Clemente*

Orientador: *Fabio Ferrari Ruffino*

Curso: Bacharelado em Matemática

Instituição sede: Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Departamento de Matemática

Disciplina: Trabalho de conclusão de curso B

Professores responsáveis: Selma Helena de Jesus Nicola
Alessandra Aparecida Verri
João Carlos Vieira Sampaio

São Carlos - SP, 26 de novembro de 2018.

Gabriel Longatto Clemente

Gabriel Longatto Clemente

Fábio Ferrari Ruffino

Fábio Ferrari Ruffino

*"Was aus Liebe getan wird,
geschieht immer jenseits von Gut und Böse."*

Friedrich Wilhelm Nietzsche,
Jenseits von Gut und Böse - Vorspiel einer Philosophie der Zukunft.

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais, Vanilda Cristina Longatto Clemente e Milton Aparecido Clemente, e ao meu irmão, Milton Longatto Clemente, pelo apoio, confiança e amor que, tão incondicionalmente, depositaram em mim.

Agradeço ao Profº Dr. Fabio Ferrari Ruffino que aceitou me instruir e que me ajudou com a execução deste projeto de todas as maneiras possíveis. A clareza em suas explicações e a paciência que dedicou a mim durante todo este tempo de trabalho ficarão guardadas em minhas lembranças.

Agradeço aos meus antigos orientadores, Profº Dr. Daniel Vendrúscolo e Profª Dra. Liane Bordignon, que tanto contribuíram para a minha formação acadêmica e profissional. Aos inúmeros professores que me ensinaram e que não mencionei aqui, meu muito obrigado!

Por fim, agradeço Caio Henrique Silva de Souza que me ajudou muito nos cursos que fizemos juntos e que colaborou comigo em diversos trabalhos. Enfim, agradeço aos colegas que comigo caminharam nesta árdua estrada e que a fizeram muito divertida e prazerosa para mim.

Resumo

Neste trabalho de conclusão de curso desenvolvemos um estudo sobre a teoria de Homologia do ponto de vista categorial. Para fazermos isto estudamos na primeira parte do projeto as noções categoriais mais propriamente ditas. Lá estabelecemos uma definição de categoria a partir da teoria de conjuntos *Neumann-Bernays-Gödel* e apresentamos uma quantidade substancial de exemplos e de comentários sobre todos os conteúdos trabalhados. Na parte central do texto explicamos as noções iniciais de Homologia fazendo uso do ferramental construído anteriormente. Em particular, detalhamos o fato de o limite direto comutar com o funtor homologia singular e tratamos de uma aplicação interessante do *Método dos Modelos Acíclicos* que também foi estudado cuidadosamente.

Palavras-chave: Categorias, Morfismos, Produtos, Coprodutos, Funtores, Isomorfismos, Equivalências, Topologia, Álgebra, Homologia, Modelos Acíclicos, Homotopia de Cadeias, Axiomas de Eilenberg-Steenrod, Sequência de Mayer-Vietoris.

Prefácio

Este texto foi produzido como subproduto das atividades de estudo e discussão que realizamos sobre a *Teoria das Categorias*, a *Topologia Geral*, a *Topologia Algébrica* e a *Álgebra Homológica*. Portanto, o objetivo do mesmo é evidenciar o estudo que fizemos sobre estes assuntos.

Não dispomos aqui todos os resultados e demonstrações estudados, especialmente quando estes se encontravam completos nas bibliografias recomendadas. Em vez disso apresentamos exercícios resolvidos e alguns complementos a fim de aprofundar ou tornar mais claros os tópicos estudados. As palavras em negrito nesta composição são o léxico geral da teoria estudada.

Uma vez que a definição de categoria que usamos depende da noção de classe, não poderíamos deixar de dizer as regras do jogo sobre estes objetos. Sendo assim, escolhemos apresentar, na primeira seção do texto, a teoria de conjuntos *Neumann-Bernays-Gödel*. Esta é uma extensão natural da teoria de conjuntos *Zermelo-Fraenkel* mais *Axioma da Escolha*. É importante aqui a classe de todos os conjuntos que, equipada com a devida estrutura, se torna uma das categorias mais notáveis de todo o trabalho.

Em seguida, expomos nossa introdução à *Teoria das Categorias*. Aqui tratamos das várias noções elementares: categorias, subcategorias, morfismos mônicos e épicos, produtos e coprodutos, funtores covariantes e contravariantes, isomorfismos e equivalências de categorias, funtores representáveis, adjunções, limites diretos e inversos, *et reliqua*. Esta parte é essencial em todo trabalho pois é a linguagem na qual este está escrito, mas também contém assuntos que têm vida própria e que poderiam ser estudados *per si* em suas generalidades.

Na terceira e quarta seções apresentamos alguns conceitos de Álgebra Homológica e a Teoria de Homologia do ponto de vista categorial. Como dito no Resumo detalhamos o fato de o limite direto comutar com o funtor homologia singular e tratamos de uma aplicação interessante do *Método dos Modelos Acíclicos* que também foi estudado cuidadosamente.

Sumário

1 Preliminares

Nesta seção inicial expomos a *teoria dos conjuntos Neumann-Bernays-Gödel*. Esta embasa todos os tópicos seguintes do nosso estudo. Apesar disso não pretendemos fornecer um tratamento ótimo desta teoria, mas sim apresentar um conjunto de axiomas para a mesma, que até agora não se contradisse, e que nos permite rapidamente estabelecer o necessário para a teoria do projeto. Usamos [DUGUNDJI] e [HUNGERFORD] durante toda a seção.

1.1 Lógica elementar

Adotamos no texto as convenções lógicas usuais e consideramos somente afirmações que tenham valor verdadeiro ou falso, mas não ambos. Se p e q são afirmações, então a afirmação $p \wedge q$ (lê-se "p e q") é verdade se p e q são ambas verdadeiras e falsa caso contrário. A afirmação $p \vee q$ (lê-se "p ou q") é verdade sempre que ambas p e q não são concomitantemente falsas. Uma implicação é uma afirmação da forma $p \Rightarrow q$ (lê-se "se p, então q"). Uma implicação é falsa se p é verdadeira e q é falsa; caso contrário é verdadeira. Uma equivalência entre as afirmações p e q é uma afirmação da forma $p \Rightarrow q$ e $q \Rightarrow p$. Usualmente lemos "p se, e somente se, q" e denotamos simbolicamente $p \Leftrightarrow q$. Uma equivalência é verdadeira se p e q são ambas verdadeiras ou falsas; caso contrário é falsa.

1.2 Teoria dos conjuntos Neumann-Bernays-Gödel

A teoria dos conjuntos Neumann-Bernays-Gödel é uma teoria dos conjuntos axiomática que estende conservativamente a teoria dos conjuntos Zermelo-Fraenkel mais Axioma da Escolha. Aquela teoria introduz a noção de classe a qual é uma coleção de conjuntos definida por fórmulas que quantificam somente estes.

Idealmente gostaríamos que, para cada propriedade p, existisse um conjunto $E(p)$ cujos elementos fossem exatamente aqueles que gozam da propriedade p. Este pressuposto, porém, leva ao *Paradoxo de Russel*[1]. Um teorema chave na teoria dos conjuntos Neumann-Bernays-Gödel é o *Teorema de Formação de Classe*, que estabelece que a cada propriedade que quantifica somente conjuntos, existe uma classe consistindo somente dos conjuntos que satisfazem esta propriedade. Atentamos para o fato de que a hipótese de as propriedades quantificarem somente conjuntos é fundamental dado que o mesmo argumento devido a Russel se aplica à teoria dos conjuntos Neumann-Bernays-Gödel garantindo a inexistência da classe de todas as classes.

Historicamente, *John von Neumann* (1903-1957) introduziu a noção de classe a sua teoria dos conjuntos em 1925. Posteriormente, *Paul Bernays* (1888-1977) reformulou

[1] O Paradoxo de Russell é um paradoxo descoberto por *Bertrand Russell* (1872-1970) em 1901 que revelou no livro de *Friedrich Frege* (1848-1925), *Leis fundamentais da aritmética*, uma contradição. O paradoxo foi comunicado por Russel a Frege através de uma carta em 1902. Este publicou a descoberta no segundo volume de seu livro, em 1903, num posfácio. O argumento de Russel consiste em considerar o conjunto $\mathscr{A}$ de todos os conjuntos que não pertençam a si próprio. Assim, se $\mathscr{A} \in \mathscr{A}$ tem-se que $\mathscr{A} \notin \mathscr{A}$ e, se $\mathscr{A} \notin \mathscr{A}$, tem-se que $\mathscr{A} \in \mathscr{A}$. Logo $\mathscr{A}$ não pode ser um conjunto e, portanto, a ideia que a cada propriedade que quantifica conjuntos está associado um conjunto tornou-se insólita.

a teoria de von Neumann tomando classe e conjunto como conceitos primitivos. Por fim, *Kurt Gödel* (1906-1978) simplificou a teoria de Bernays através de sua prova da consistência relativa do *Axioma da Escolha* e da *Hipótese de Contínuo Generalizada*[2].

Os termos primitivos para a teoria dos conjuntos Neumann-Bernays-Gödel são classe e uma relação dicotômica $\in$ entre estas. Todas as variáveis como $\mathscr{A}, A, x$, dentre outras, representam classes. Além disso, para cada duas classes quaisquer, a afirmação $\mathscr{A} \in \mathscr{B}$ é verdadeira ou falsa. Uma propriedade p significa uma fórmula construída a partir da afirmação $\mathscr{A} \in \mathscr{B}$ por negação, conjunção, disjunção ou quantificação de variáveis de classe.

Definição 1.2.1. *Sejam $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ classes. Dizemos que a classe $\mathscr{A}$* ***está contida*** *na classe $\mathscr{B}$ e denotamos $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}$ se, e somente se, $(\forall x : x \in \mathscr{A} \Rightarrow x \in \mathscr{B})$. Neste caso, dizemos que $\mathscr{A}$ é uma* ***subclasse*** *de $\mathscr{B}$. Também dizemos que a classe $\mathscr{A}$* ***é igual*** *à classe $\mathscr{B}$ e denotamos $\mathscr{A} = \mathscr{B}$ se, e somente se, $(\mathscr{A} \subset \mathscr{B}) \wedge (\mathscr{B} \subset \mathscr{A})$.* ▶

Axioma 1 (de Identidade). $(x \in \mathscr{A}) \wedge (x = y) \Rightarrow (y \in \mathscr{A})$. ▶

Definição 1.2.2. *Dizemos que uma classe A é um* ***conjunto*** *se existe uma classe $\mathscr{A}$ de sorte que $A \in \mathscr{A}$. Caso A não seja um conjunto dizemos que A é uma* ***classe própria****.* ▶

Axioma 2 (de Formação de Classe). *Para cada propriedade p em que somente variáveis conjuntistas são quantificadas e em que a variável classe não aparece, existe uma classe $\mathscr{A}$ cujos membros são exatamente os conjuntos tendo a propriedade p. Simbolicamente, $(x \in \mathscr{A}) \Leftrightarrow (x \text{ é um conjunto}) \wedge p(x)$.* ▶

Observação 1.2.1. *Por conta do Axioma 1, uma classe $\mathscr{A}$ é unicamente determinada pela propriedade p que a define; denotamos então $\mathscr{A}$ por $\{x : (x \text{ é um conjunto}) \wedge p(x)\}$. Com esta nomenclatura o Paradoxo de Russel nos faz concluir que a Classe de Russel $\mathscr{R} := \{x : (x \text{ é um conjunto}) \wedge (x \notin x)\}$ não é um conjunto.* ◀

Sejam $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ classes. Graças ao Axioma 2 a **união** $\mathscr{A} \cup \mathscr{B} := \{x : (x \in \mathscr{A}) \vee (x \in \mathscr{B})\}$ e a **intersecção** $\mathscr{A} \cap \mathscr{B} := \{x : (x \in \mathscr{A}) \wedge (x \in \mathscr{B})\}$, bem como o **produto cartesiano** $\mathscr{A} \times \mathscr{B} := \{(x, y) : (x \in \mathscr{A}) \wedge (y \in \mathscr{B})\}$, são classes bem-definidas.

Duas classes bastante importantes são:

- A classe de todos os conjuntos $\mathscr{U} := \{x : (x \text{ é um conjunto}) \wedge (x = x)\}$ que chamamos de **Classe Universal**;

[2] A *Hipótese do Contínuo* é uma conjectura proposta por *Georg Cantor* (1845-1918). Esta conjectura consiste, simplificadamente, no seguinte: não existe nenhum conjunto com número cardinal maior do que o do conjunto dos números inteiros e menor do que o do conjunto dos números reais. Usualmente a cardinalidade dos números inteiros é denotada por $\aleph_0$, a próxima cardinalidade é denotada por $\aleph_1$ e assim por diante. Fazendo uso destes símbolos, a *Hipótese do Contínuo* pode ser reformulada como $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$. A *Hipótese do Contínuo Generalizada*, que não se deriva da *Hipótese do Contínuo*, diz que para qualquer número ordinal α tem-se $\aleph_{\alpha+1} = 2^{\aleph_\alpha}$.

- A classe que não possui nenhuma outra subclasse que não ela mesma $\emptyset := \{(x \text{ é um conjunto}) \wedge (x \neq x)\}$ que chamamos de **Classe Vazia**.

Definição 1.2.3. *Dizemos que duas classes $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ são **disjuntas** se, e somente se, $\mathscr{A} \cap \mathscr{B} = \emptyset$.* ▶

Uma **relação de equivalência** $\mathscr{R}$ em uma classe $\mathscr{A}$ é uma subclasse $\mathscr{R} \subset \mathscr{A} \times \mathscr{A}$ que possui as seguintes propriedades: (i) *reflexividade:* $(a,\, a) \in \mathscr{R}$ para todos $a \in \mathscr{A}$; (ii) *simetria:* $(a,\, b) \in \mathscr{R} \Rightarrow (b,\, a) \in \mathscr{R}$ e (iii) *transitividade:* $(a,\, b) \in \mathscr{R}$ e $(b,\, c) \in \mathscr{R} \Rightarrow (a,\, c) \in \mathscr{R}$. A subclasse de $\mathscr{R}$ que contém todos os elementos relacionados por $\mathscr{R}$ com o elemento $a \in \mathscr{A}$ fixado é chamada de **classe de equivalência** do elemento a e é usualmente denotada por $[a]$. Em outras palavras,

$$[a] := \{b \in \mathscr{A} : (a,\, b) \in \mathscr{R}\}.$$

Caso $(a,\, b) \in \mathscr{R}$, denotamos, por simplicidade, $a \sim b$ quando a relação $\mathscr{R}$ estiver subentendida. Notamos também que as classes de equivalência de uma relação de equivalência particionam a classe em questão. Isto é, cada duas classes de equivalência ou coindicem ou são disjuntas e $\bigcup_{a \in \mathscr{A}} [a] = \mathscr{A}$.

Axioma 3 (**do Conjunto Vazio**)**.** *A Classe Vazia é um conjunto.* ▶

Axioma 4 (**do Par**)**.** *Sejam A e B conjuntos distintos. Então*

$$\mathscr{A} = \{x : (x = A) \vee (x = B)\}$$

é um conjunto que contém exatamente dois elementos. Denotamos $\mathscr{A} = \{A, B\}$. ▶

Axioma 5 (**de União**)**.** *Seja $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathscr{A}}$ uma família de conjuntos. Então*

$$\bigcup_{\alpha \in \mathscr{A}} A_\alpha := \{x : \exists \alpha \in \mathscr{A}, x \in A_\alpha\}$$

é um conjunto. ▶

Axioma 6 (**de Substituição**)**.** *Sejam $\mathscr{A}$ uma classe, A um conjunto e $f : A \to \mathscr{A}$ uma função. Então $f(A)$ é um conjunto.* ▶

Axioma 7 (**de Peneiração**)**.** *Seja A um conjunto. Então, para toda classe $\mathscr{A}$, $A \cap \mathscr{A}$ é um conjunto.* ▶

Observação 1.2.2. *É decorrente do Axioma 7 que se A é um conjunto e p é uma propriedade em que somente variáveis conjuntistas são quantificadas, então $\{x : (x \in A) \wedge p(x)\}$ é um conjunto. De fato, se $\mathscr{A}$ é uma classe determinada pela propriedade p, então $A \cap \mathscr{A} = \{x : (x \in A) \wedge (x \text{ é um conjunto}) \wedge p(x)\}$ faz com que a restrição $(x \text{ é um conjunto})$ seja redundante.* ◀

Uma vez que membros de classes são conjuntos, definimos a **Classe das Partes** $\mathscr{P}(\mathscr{A})$ de uma classe $\mathscr{A}$ como $\mathscr{P}(\mathscr{A}) = \{\mathscr{B} : (\mathscr{B}$ é um conjunto$) \wedge (\mathscr{B} \subset \mathscr{A})\}$; deste modo, mesmo que $\mathscr{A}$ não seja um conjunto, $\mathscr{P}(\mathscr{A})$ tem como membros somente as subclasses de $\mathscr{A}$ que são conhecidamente conjuntos.

Axioma 8 (das Partes). *Seja A uma classe. Se A for um conjunto, então $\mathscr{P}(A)$ também é um conjunto.* ▶

Se $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathscr{A}}$ é uma família de conjuntos, então

$$\bigcap_{\alpha \in \mathscr{A}} A_\alpha := \{x : \forall \alpha \in \mathscr{A}, x \in A_\alpha\}$$

é um conjunto. De fato, devido ao Axioma 5, $S = \bigcup\{A_\alpha : \alpha \in \mathscr{A}\}$ é um conjunto; tomando $p(x) = [\forall \alpha \in \mathscr{A} : p(x)]$, na qual somente a variável conjuntista α é quantificada, $\{x \in S : p(x)\} = \bigcap\{A_\alpha : \alpha \in \mathscr{A}\}$ é um conjunto.

Observação 1.2.3. *O produto cartesiano de dois conjuntos é um conjunto. Sejam A e B conjuntos e, para cada $a_0 \in A$, $f_{a_0} : B \to A \times B$, $b \mapsto (a_0, b)$. De acordo com o Axioma 6, $f_{a_0}(B) = \{a_0\} \times B$ é um conjunto. Dado que $A \times B = \bigcup_{a_0 \in A}\{a_0\} \times B$, o Axioma 5 garante que $A \times B$ é um conjunto.* ◀

Observação 1.2.4. *Sejam A e B conjuntos. Então a classe de todas as funções de A a B é um conjunto. De fato, tendo visto que $A \times B$ é um conjunto, pelo Axioma 8, $\mathscr{P}(A \times B)$ também o é. Uma vez que uma aplicação é uma subclasse de $A \times B$ especificada por uma propriedade, cada aplicação é um membro de $\mathscr{P}(A \times B)$. Portanto o conjunto de todas as funções de A a B é um conjunto.* ◀

Observação 1.2.5. *A Classe Universal não é um conjunto. Denotamos por $\mathscr{R}$ a Classe de Russel. Se a classe $\mathscr{U}$ fosse um conjunto, então teríamos que $\mathscr{U} \cap \mathscr{R}$ também seria um conjunto graças ao Axioma 7. Entretanto, $\mathscr{U} \cap \mathscr{R} = \mathscr{R}$ não é um conjunto.* ◀

Axioma 9 (de Base). *Em cada conjunto não-vazio A existe $u \in A$ tal que $u \cap A = \emptyset$. Ou seja, $\forall x : x \in A \Rightarrow \neg(x \in u))$.* ▶

O Axioma 9 diz que: (i) nenhum conjunto não-vazio pode ser membro de si mesmo e, (ii) se A e B são conjuntos não-vazios, então não é possível que ao mesmo tempo se tenha $A \in B$ e $B \in A$. Provamos agora somente (i) porque a demonstração de (ii) é análoga. Suponhamos que A seja um conjunto não-vazio tal que $A \in A$; sabemos que nesta situação $\{A\}$ também é um conjunto e, como seu único membro é A, $\{A\}$ nega o Axioma 9.

Axioma 10 (do Infinito). *Existe um conjunto A com as seguintes propriedades: (i) $\emptyset \in A$, e (ii) se $a \in A$, então $a \cup \{a\} \in A$.* ▶

Observação 1.2.6. *A classe dos números naturais é um conjunto. Enfaticamente, seja A um conjunto que goza das duas propriedades enunciadas no Axioma 10. Seja $\mathscr{B} \subset \mathscr{P}(A)$ definida por*

$$\mathscr{B} = \{B \in \mathscr{P}(A) : B \text{ goza das duas propriedades do Axioma } 10\}.$$

Cada B é um conjunto e, pelo Axioma 8, $\mathscr{B}$ também o é. Daí segue que

$$N = \bigcap_{B \in \mathscr{B}} B$$

é um conjunto. Como cada B goza das propriedades do Axioma 8, é claro que N também as goza. Lembrando dos Axiomas de Peano,[3] *e chamando $x \cup \{x\} \in N$ de o sucessor de $x \in N$, segue que há uma bijeção entre o conjunto N e o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais.* ◀

Axioma 11 (da Escolha). *Dada uma família não-vazia $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathscr{A}}$ de conjuntos dois a dois disjuntos, existe um conjunto S consistindo de exatamente um elemento de cada A_α.* ▶

Em 1938, *Kurt Gödel* demonstrou que se a teoria dos conjuntos baseada nos axiomas acima, com exceção do Axioma 11, é consistente, então a teoria dos conjuntos fundamentada em todos os onze axiomas também o é. O resultado devido a Gödel deixava aberta a possibilidade de que o *Axioma da Escolha* fosse derivável a partir dos outro dez axiomas. Em 1963, *Paul Cohen* (1934-2007) demonstrou que este não era o caso.

[3] Alguns matemáticos do século XIX como Weierstrass, Dedekind e Cantor produziram construções para os númers reais que reduziam todas as discussões matemáticas ou metamatemáticas para os números naturais. Em 1889, *Giuseppe Peano* (1858-1932) apresentou os *Axiomas de Peano* que são uma coleção de axiomas para o conjunto dos números naturais.

2 Introdução à Teoria das Categorias

A partir de 1943, *Samuel Eilenberg* (1913-1998) e *Saunders Mac Lane* (1909-2005) colaboraram na área de Topologia Algébrica e, em especial, na área de Álgebra Homológica. Em 1945 estes matemáticos lançaram os fundamentos da Teoria das Categorias com a publicação *General Theory of Natural Equivalences*. Rapidamente as noções introduzidas neste trabalho se mostraram muito mais interessantes do que se imaginava porque vários campos da Matemática puderam ser interpretados em seus termos.

Nesta seção estudamos a Teoria das Categorias a fim de entender algumas ramificações deste ponto de vista na Matemática. Apesar de estudarmos vários exemplos e aplicações na área de Álgebra, nosso escopo é compreender as noções fundamentais acerca da Topologia Algébrica através desta teoria. As referência usadas nesta parte do texto foram [HUNGERFORD], [HILTON-STAMMBACH] e as notas de aula do orientador.

2.1 Definição e exemplos

Definição 2.1.1 (Categoria). *Seja $\mathscr{C}$ uma classe de objetos tal que*

- *para cada dois objetos $A, B \in \mathscr{C}$ tenha-se associado um conjunto $Hom_{\mathscr{C}}(A, B)$. Os elementos de $Hom_{\mathscr{C}}(A, B)$ são ditos **morfismos** do **domínio** A ao **contra-domínio** B;*
- *para cada três objetos $A, B, C \in \mathscr{C}$ haja uma **lei de composição***

$$\circ : Hom_{\mathscr{C}}(A, B) \times Hom_{\mathscr{C}}(B, C) \to Hom_{\mathscr{C}}(A, C),$$

$$(f, g) \mapsto g \circ f.$$

Se tivermos também que

1. *$Hom_{\mathscr{C}}(A, B) = Hom_{\mathscr{C}}(A', B') \Leftrightarrow A = A'$ e $B = B'$;*
2. *para todos $f \in Hom_{\mathscr{C}}(A, B)$, $g \in Hom_{\mathscr{C}}(B, C)$ e $h \in Hom_{\mathscr{C}}(C, D)$,*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f;$$

3. *para cada $A \in \mathscr{C}$ existe um morfismo $id_A \in Hom_{\mathscr{C}}(A, A)$ tal que para todas $f \in Hom_{\mathscr{C}}(A, B)$ e $g \in Hom_{\mathscr{C}}(C, A)$,*

$$f \circ id_A = f \quad \text{e} \quad id_A \circ g = g,$$

*dizemos que $\mathscr{C}$ é uma **categoria**.* ▶

Alertamos para o fato de que na Definição 2.1.1 abusamos um pouco da linguagem chamando a classe de objetos $\mathscr{C}$ de categoria. Deve estar claro que uma categoria é formada por três peças: (i) uma classe de objetos, (ii) para cada par de objetos um conjunto de morfismos e (iii) para cada par de conjuntos de morfismos uma lei de composição.

Observação 2.1.1. *A condição 3 da Definição 2.1.1 determina unicamente o morfismo identidade* $id_A \in Hom_{\mathscr{C}}(A, A)$ *para todo* $A \in \mathscr{C}$. *De fato, se* $id_A, id'_A \in Hom_{\mathscr{C}}(A, A)$ *são morfismos identidade para o objeto* A, *então, em particular,* $id_A = id'_A \circ id_A = id_A \circ id'_A = id'_A$. ◄

Observação 2.1.2. *A condição 1 da Definição 2.1.1 garante que todo morfismo tem domínio e contradomínio bem-definidos. Se tal condição não se verificar, então podemos impô-la por construção. Isto se faz da seguinte maneira: suponha que haja um conjunto de morfismos* $Hom_{\mathscr{C}}(A, B)$, $A, B \in \mathscr{C}$, *de modo que não valha (i); definimos* $Hom'_{\mathscr{C}}(A, B) := Hom_{\mathscr{C}}(A, B) \times \{A\} \times \{B\}$. *Assim temos que* $Hom'_{\mathscr{C}}(A, B) = Hom'_{\mathscr{C}}(A', B') \Leftrightarrow A = A'$ *e* $B = B'$. *Considerando a função* $Hom_{\mathscr{C}}(A, B) \to Hom'_{\mathscr{C}}(A, B)$, $f \mapsto (f, A, B)$, *tem-se que há uma correspondência biunívoca entre estes dois conjuntos. Portanto podemos trocar* $Hom_{\mathscr{C}}(A, B)$ *por* $Hom'_{\mathscr{C}}(A, B)$ *na categoria* $\mathscr{C}$ *sem prejuízo algum.* ◄

Listamos a seguir uma quantidade razoável de exemplos interessantes. Notamos que os morfismos dos exemplos abaixo, com exceção do primeiro, preservam estruturas adicionais.

1. Seja $\mathscr{U}$ a Categoria Universal cujos objetos são os conjuntos e cujos morfismos são as funções.

2. Seja $\mathscr{S}$ a categoria dos semigrupos cujos morfismos são os homomorfismos de semigrupos. Seja também $\mathscr{M}_o$ a categoria dos monóides cujos morfismos são os homomorfismos de monóides. Lembramos que todo homomorfismo de monóides é um homomorfismo de semigrupos que preserva os elementos identidade. Ou seja, se $M_1, M_2 \in \mathscr{M}_o$ e e_{M_1} e e_{M_2} são os elementos identidade, respectivamente, dos monóides M_1 e M_2, então $f : M_1 \to M_2$ é um morfismo em $\mathscr{M}_o$ se f é um homomorfismo de semigrupos e $f(e_{M_1}) = e_{M_2}$.

3. Seja $\mathscr{G}$ a categoria dos grupos cujos morfismos são os homomorfismos de grupos. Seja $\mathscr{G}_{ab}$ a categoria dos grupos abelianos cujos morfismos são os homomorfismos de grupos. Seja também $\mathscr{G}_f$ a categoria dos grupos finitos cujos morfismos são os homomorfismos de grupos.

4. Seja $\mathscr{R}$ a categoria dos anéis cujos morfismos são os homomorfismos de anéis. Seja também $\mathscr{R}_u$ a categoria dos anéis unitários cujos morfismos são os homomorfismos de anéis unitários. Lembramos que todo homomorfismo de anéis unitários é um homomorfismo de anéis que preserva as unidades.

5. Seja $\mathscr{M}_l^R$ a categoria dos R-módulos à esquerda cujos morfismos são homomorfismos de R-módulos.

6. Seja $\mathscr{V}^{\mathbb{K}}$ a categoria dos $\mathbb{K}$-espaços vetorias cujos morfismos são as transformações lineares. Seja também $\mathscr{V}_f^{\mathbb{K}}$ a categoria dos $\mathbb{K}$-espaços vetorias de dimensão finita cujos morfismos são as transformações lineares.

7. Seja Top a categoria dos espaços topológicos cujos morfismos são as aplicações contínuas. Seja Top_+ a categoria dos espaços topológicos com ponto marcado (X, x_0) cujos morfismos $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ são aplicações contínuas $f : X \to Y$

de sorte que $f(x_0) = y_0$. Seja também Top_n a categoria das n-uplas de espaços topológicos $(X, A_1, \cdots, A_{n-1})$ tais que $A_{n-1} \subset \cdots \subset A_1 \subset X$ cujos morfismos $f : (X, A_1, \cdots, A_{n-1}) \to (Y, B_1, \cdots, B_{n-1})$ são aplicações contínuas $f : X \to Y$ de modo que $f(A_j) \subset B_j$ para todo $1 \leq j \leq n-1$. Identificamos Top_1 com Top para que a definição de Top_n faça sentido para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Por fim, seja Top_{n+} a categoria das n-uplas de espaços topológicos com ponto marcado $(X, A_1, \ldots, A_{n-1}, x_0)$ tais que $x_0 \in A_{n-1} \subset \cdots \subset A_1 \subset X$ cujos morfismos $f : (X, A_1, \cdots, A_{n-1}, x_0) \to (Y, B_1, \cdots, B_{n-1}, y_0)$ são aplicações contínuas $f : X \to Y$ de sorte que $f(A_j) \subset B_j$ para todo $1 \leq j \leq n-1$ e que $f(x_0) = y_0$. Identificamos Top_{1+} com Top_+ para que a definição de Top_{n+} faça sentido para todo $n \in \mathbb{N}^*$. ◀

Os próximos exemplos tratam sobre construções básicas com categorias quaisquer. Eles são fundamentais na continuação do texto para o estudo de categorias de espaços topológicos e para a parte de homologia.

Exemplo 2.1.1 (Categoria oposta). *Seja $\mathscr{C}$ uma categoria. Consideramos a classe de objetos $\mathscr{C}^{op}$ como sendo a classe $\mathscr{C}$. Além disso, para todos $A, B \in \mathscr{C}^{op}$, definimos o conjunto de morfismos*

$$Hom_{\mathscr{C}^{op}}(A,\, B) := Hom_{\mathscr{C}}(B,\, A).$$

Um morfismo $f \in Hom_{\mathscr{C}}(A,\, B)$, quando pensado como morfismo em $Hom_{\mathscr{C}^{op}}(B,\, A)$, é denotado por nós como f^{op}. Com esta notação, para todos $A,\, B,\, C \in \mathscr{C}^{op}$, definimos a lei de composição

$$\circ : Hom_{\mathscr{C}^{op}}(A,\, B) \times Hom_{\mathscr{C}^{op}}(B,\, C) \to Hom_{\mathscr{C}^{op}}(A,\, C),$$

$$(f^{op},\, g^{op}) \mapsto g^{op} \circ f^{op} := (f \circ g)^{op}.$$

Com os objetos, morfismos e leis de composição definidos desta forma, $\mathscr{C}^{op}$ é uma categoria, que doravante chamamos de ***categoria oposta*** *ou* ***categoria dual*** *a $\mathscr{C}$. Vale ressaltar que $(\mathscr{C}^{op})^{op} = \mathscr{C}$.* ◀

Exemplo 2.1.2 (Categoria produto). *Sejam J um conjunto de índices e $\{\mathscr{C}_j\}_{j \in J}$ uma família de categorias. Consideramos a classe de objetos $\prod_{j \in J} \mathscr{C}_j$. Para todos $(A_j)_{j \in J}$, $(B_j)_{j \in J}$, $(C_j)_{j \in J} \in \prod_{j \in J} \mathscr{C}_j$, definimos o conjunto de morfismos entre $(A_j)_{j \in J}$ e $(B_j)_{j \in J}$ como*

$$Hom_{\prod_{j \in J} \mathscr{C}_j}((A_j)_{j \in J},\, (B_j)_{j \in J}) := \prod_{j \in J} Hom_{\mathscr{C}_j}(A_j,\, B_j)$$

e definimos a lei de composição

$$Hom_{\prod_{j \in J} \mathscr{C}_j}((A_j)_{j \in J},\, (B_j)_{j \in J}) \times Hom_{\prod_{j \in J} \mathscr{C}_j}((B_j)_{j \in J},\, (C_j)_{j \in J})$$

$$\to Hom_{\prod_{j \in J} \mathscr{C}_j}((A_j)_{j \in J},\, (C_j)_{j \in J}),$$

$$((f_j)_{j \in J},\, (g_j)_{j \in J}) \mapsto (g_j)_{j \in J} \circ (f_j)_{j \in J} := (g_j \circ f_j)_{j \in J}.$$

Com os objetos, morfismos e leis de composição definidos desta forma, $\prod_{j \in J} \mathscr{C}_j$ é uma categoria, que doravante chamamos de ***categoria produto*** *da família de categorias $\{\mathscr{C}_j\}_{j \in J}$.* ◀

Exemplo 2.1.3 (Categoria quociente)**.** *Seja $\mathscr{C}$ uma categoria na qual, para cada dois objetos $A,\, B \in \mathscr{C}$, está definida uma relação de equivalência $\sim$ no conjunto $Hom_{\mathscr{C}}(A,\, B)$. Variando o par de objetos obtemos uma família de relações de equivalência em $\mathscr{C}$. Dizemos que esta família é **compatível com a composição** se, para todos $A,\, B,\, C \in \mathscr{C}$, $f_1, f_2 : A \to B$ e $g_1, g_2 : B \to C$ tais que $f_1 \sim f_2$ e $g_1 \sim g_2$, tivermos que $g_1 \circ f_1 \sim g_2 \circ f_2$.*

Se $\mathscr{C}$ é uma categoria com relações de equivalência compatíveis com a composição, então definimos a classe de objetos ${}^{\mathscr{C}}\!/_{\sim}$ como sendo a classe $\mathscr{C}$. Além disso, para todos $A, B, C \in \mathscr{C}$, definimos o conjunto de morfismos

$$Hom_{\mathscr{C}/_{\sim}}(A,\, B) := {}^{Hom_{\mathscr{C}}(A,\, B)}\!/_{\sim}$$

e a lei de composição

$$\circ : Hom_{\mathscr{C}/_{\sim}}(A,\, B) \times Hom_{\mathscr{C}/_{\sim}}(B,\, C) \to Hom_{\mathscr{C}/_{\sim}}(A,\, C),$$

$$([f],\, [g]) \mapsto [g] \circ [f] := [g \circ f].$$

*Com os objetos, morfismos e leis de composição definidos desta forma, ${}^{\mathscr{C}}\!/_{\sim}$ é uma categoria, que doravante chamamos de **categoria quociente**.* ◀

Exemplo 2.1.4 (Categoria de morfismos)**.** *Seja $\mathscr{C}$ uma categoria. Consideramos a classe de objetos*

$$Hom(\mathscr{C}) := \bigsqcup_{(A,B) \in \mathscr{C} \times \mathscr{C}} Hom_{\mathscr{C}}(A, B).$$

Dizemos que um morfismo entre os objetos $f : X \to Y$ e $g : Z \to W$ de $Hom(\mathscr{C})$ é um par $(h, k) : f \to g$, com $h : X \to Z$ e $k : Y \to W$, de sorte que o Diagrama (2.1.1) é comutativo.

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{X} \arrow[r, "\boldsymbol{f}"] \arrow[d, "\boldsymbol{h}"'] & \boldsymbol{Y} \arrow[d, "\boldsymbol{k}"] \\ \boldsymbol{Z} \arrow[r, "\boldsymbol{g}"'] & \boldsymbol{W} \end{tikzcd} \tag{2.1.1}$$

Além disso, definimos a lei de composição

$$\circ : Hom_{Hom(\mathscr{C})}(f_1,\, f_2) \times Hom_{Hom(\mathscr{C})}(f_2,\, f_3) \to Hom_{Hom(\mathscr{C})}(f_1,\, f_3),$$

$$((h_1, k_1), (h_2, k_2)) \mapsto (h_2, k_2) \circ (h_1, k_1) := (h_2 \circ h_1, k_2 \circ k_1).$$

*Com os objetos, morfismos e leis de composição definidos desta forma, $Hom(\mathscr{C})$ é uma categoria, que doravante chamamos de **categoria de morfismos** de $\mathscr{C}$.* ◀

2.1.1 Subcategorias

Definição 2.1.2 (Subcategoria)**.** *Seja $\mathscr{C}$ uma categoria. Dizemos que $\mathscr{C}' \subset \mathscr{C}$ é uma **subcategoria** de $\mathscr{C}$ se*

1. *para todos $A,\, B \in \mathscr{C}'$ tivermos $Hom_{\mathscr{C}'}(A,\, B) \subset Hom_{\mathscr{C}}(A,\, B)$;*

2. *para todos $f \in Hom_{\mathscr{C}'}(A, B)$ e $g \in Hom_{\mathscr{C}'}(B, C)$ a composição $g \circ f$ coincidir com a composição em $\mathscr{C}$, sendo $A, B, C \in \mathscr{C}'$.*

Se para todos $A, B \in \mathscr{C}'$ valer que $Hom_{\mathscr{C}'}(A, B) = Hom_{\mathscr{C}}(A, B)$, dizemos que a subcategoria $\mathscr{C}'$ é ***cheia****.* ▶

Exemplo 2.1.5 (Subcategorias de espaços topológicos)**.** *Consideramos*

- *a categoria TopHd cujos objetos são os espaços topológicos de Hausdorff e cujos morfismos são as aplicações contínuas;*
- *a categoria TopLocCpt cujos objetos são os espaços topológicos localmente compactos e cujos morfismos são as aplicações contínuas;*
- *a categoria TopLocCptP cujos objetos são os espaços topológicos localmente compactos e cujos morfismos são as aplicações contínuas e próprias.*

Em TopHd, TopLocCpt e TopLocCptP a composição de morfismos é a composição ordinária de funções. Temos que TopHd e TopLocCpt são subcategorias cheias de Top, ao passo que TopLocCptP é uma subcategoria não-cheia de Top dado que nem toda aplicação contínua entre espaços topológicos é uma aplicação própria. Também, TopLocCptP é uma subcategoria não-cheia de TopLocCpt. ◀

Exemplo 2.1.6 (Subcategorias algébricas)**.** *A categoria dos monóides $\mathscr{M}_o$ é uma subcategoria não-cheia da categoria $\mathscr{S}$ dos semigrupos. O fato de $\mathscr{M}_o$ não ser cheia em $\mathscr{S}$ se deve a nem todo homomorfismo de semigrupos respeitar os elementos identidade. Analogamente, a categoria dos anéis unitários $\mathscr{R}_u$ é uma subcategoria não-cheia da categoria $\mathscr{R}$ dos anéis. Por outro lado, a categoria $\mathscr{G}$ dos grupos é cheia na categoria dos semigrupos $\mathscr{S}$ e na categoria dos monóides $\mathscr{M}_o$. Além disso, a categoria dos grupos finitos $\mathscr{G}_f$ é uma subcategoria cheia de $\mathscr{G}$.* ◀

Exemplo 2.1.7 (Categorias $\mathscr{C} \downarrow A$ e $\mathscr{C} \uparrow A$)**.** *Sejam $\mathscr{C}$ uma categoria e $A \in \mathscr{C}$. Consideramos as classes de objetos*

$$\mathscr{C} \downarrow A := \bigsqcup_{X \in \mathscr{C}} Hom_{\mathscr{C}}(X, A) \quad \text{e} \quad \mathscr{C} \uparrow A := \bigsqcup_{X \in \mathscr{C}} Hom_{\mathscr{C}}(A, X).$$

Dizemos que um morfismo entre os objetos $f : X \to A$ e $g : Y \to A$ de $\mathscr{C} \downarrow A$ é um morfismo $h : X \to Y$ de sorte que o Diagrama (2.1.2) seja comutativo.

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{X} \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "f"'] & \boldsymbol{Y} \arrow[d, "g"] \\ & \boldsymbol{A} \end{tikzcd} \tag{2.1.2}$$

Dizemos também que um morfismo entre os objetos $f : A \to X$ e $g : A \to Y$ de $\mathscr{C} \uparrow A$ é um morfismo $h : X \to Y$ de sorte que o Diagrama (2.1.3) seja comutativo.

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{A} \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ \boldsymbol{X} \arrow[r, "h"'] & \boldsymbol{Y} \end{tikzcd} \tag{2.1.3}$$

Definimos a lei de composição de morfismos de $\mathscr{C} \downarrow A$ e de $\mathscr{C} \uparrow A$ como a restrição da lei de composição da categoria de morfismos (vide Exemplo 2.1.4). As categorias $\mathscr{C} \downarrow A$ e $\mathscr{C} \uparrow A$ são subcategorias não-cheias de $Hom(\mathscr{C})$. De fato, as classes $\mathscr{C} \downarrow A$ e $\mathscr{C} \uparrow A$ são subclasses de $Hom(\mathscr{C})$, por definição. Ademais, temos a inclusão $Hom_{\mathscr{C}\downarrow A}(f,g) \subset Hom_{Hom(\mathscr{C})}(f,g)$, $h \mapsto (id_A, h)$, pois o Diagrama (2.1.2) é equivalente ao Diagrama (2.1.4).

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & A \arrow[d, "id_A"] \\ Y \arrow[r, "g"'] & A \end{tikzcd} \tag{2.1.4}$$

Analogamente, temos a inclusão $Hom_{\mathscr{C}\uparrow A}(f,g) \subset Hom_{Hom(\mathscr{C})}(f,g)$, $h \mapsto (h, id_A)$. Estas subcategorias não são cheias pois fica fixado id_A como morfismo de A a A. ◀

2.1.2 Isomorfismos

Definição 2.1.3 (Isomorfismo)**.** *Sejam $\mathscr{C}$ uma categoria e A, $B \in \mathscr{C}$. Um morfismo $f : A \to B$ de $\mathscr{C}$ é dito um **isomorfismo** se existir um morfismo $g : B \to A$ na categoria $\mathscr{C}$, chamado **inverso** de f, tal que $g \circ f = id_A$ e $f \circ g = id_B$. Se f é um isomorfismo, dizemos que A e B são **isomorfos** e escrevemos $A \simeq B$.* ▶

Se $f : A \to B$ é um isomorfismo na categoria $\mathscr{C}$, então o inverso $g : B \to A$ é único. Enfaticamente, se $g' : B \to A$ é outro inverso para o morfismo f na categoria $\mathscr{C}$, então $g' = g' \circ id_B = g' \circ (f \circ g) = (g' \circ f) \circ g = id_A \circ g = g$. Por este motivo denotamos o inverso g em questão por f^{-1}.

Proposição 2.1.1. *Sejam $\mathscr{C}$ uma categoria e A, $B \in \mathscr{C}$. Dizemos que A está relacionado com B se, e somente se, $A \simeq B$. Esta relação é uma relação de equivalência na classe $\mathscr{C}$.*

Demonstração. É preciso verificar que a relação de isomorfismo seja reflexiva, simétrica e transitiva para que seja uma relação de equivalência na classe $\mathscr{C}$. Sejam A, B, $C \in \mathscr{C}$.

(*i*) (Reflexividade) Considerando $id_A : A \to A$ tem-se $A \simeq A$.

(*ii*) (Simetria) Se $A \simeq B$, então existe um isomorfismo $f : A \to B$ na categoria $\mathscr{C}$. Assim, $f^{-1} : B \to A$ é um isomorfismo que garante que $B \simeq A$.

(*iii*) (Transitividade) Se $A \simeq B$ e $B \simeq C$, então existem isomorfismos $f : A \to B$ e $g : B \to C$ na categoria $\mathscr{C}$. Precisamos definir um isomorfismo $h : A \to C$ para mostrar que $A \simeq C$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, dashed, "h"'] & B \arrow[dl, "g"] \\ C & \end{tikzcd} \tag{2.1.5}$$

Definimos h de modo que o Diagrama (2.1.5) seja comutativo, isto é, de modo que $h = g \circ f$. Veja que h é o isomorfismo cujo inverso é $h^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. ■

Proposição 2.1.2. *Sejam $\mathscr{C}$ uma categoria e A, B, A', $B' \in \mathscr{C}$. Se $f : A \to B$ e $g : A' \to B'$ são dois isomorfismos em $\mathscr{C}$, então existe uma bijeção*

$$\Phi_{f,g} : Hom_{\mathscr{C}}(A,\, A') \to Hom_{\mathscr{C}}(B,\, B')$$

que faz o Diagrama (2.1.6) comutativo para todo morfismo $\alpha \in Hom_{\mathscr{C}}(A,\, A')$.

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{A} \arrow[r, "\boldsymbol{\alpha}"] \arrow[d, "\boldsymbol{f}"'] & \boldsymbol{A'} \arrow[d, "\boldsymbol{g}"] \\ \boldsymbol{B} \arrow[r, dashed, "\boldsymbol{\Phi_{f,g}(\alpha)}"'] & \boldsymbol{B'} \end{tikzcd} \tag{2.1.6}$$

Demonstração. Defina $\Phi_{f,g} : Hom_{\mathscr{C}}(A,\, A') \to Hom_{\mathscr{C}}(B,\, B')$, $\alpha \mapsto g \circ \alpha \circ f^{-1}$. É imediato que esta aplicação torna o Diagrama (2.1.6) comutativo para todo morfismo $\alpha \in Hom_{\mathscr{C}}(A,\, A')$. Lembramos que uma função k é bijetora se, e somente se, é invertível. Assim, considere $\Phi^{-1}_{f,g} : Hom_{\mathscr{C}}(A',\, B') \to Hom_{\mathscr{C}}(A,\, B)$, $\beta \mapsto g^{-1} \circ \beta \circ f$. É imediato que $\Phi_{f,g} \circ \Phi^{-1}_{f,g} = id_{Hom_{\mathscr{C}}(A',\, B')}$ e que $\Phi^{-1}_{f,g} \circ \Phi_{f,g} = id_{Hom_{\mathscr{C}}(A,\, B)}$. ■

Exemplo 2.1.8. *Tomamos $\mathscr{C} = \mathscr{U}$, a Categoria Universal, $A = A' = \{1, 2\}$ e $B = B' = \{3, 4\}$. Um isomorfismo na categoria $\mathscr{U}$ é uma função bijetora entre conjuntos. Existem dois isomorfismos $f, g : A \to B$ que são*

$$f : 1 \mapsto 3,\ 2 \mapsto 4;$$

$$g : 1 \mapsto 4,\ 2 \mapsto 3.$$

Verifica-se diretamente que $Hom_{\mathscr{U}}(A,\, A) = \{\phi_i\}_{i=1}^{4}$ e $Hom_{\mathscr{U}}(B,\, B) = \{\psi_i\}_{i=4}^{4}$ em que

$$\begin{aligned} &\phi_1 : 1 \mapsto 1,\ 2 \mapsto 2; && \psi_1 : 3 \mapsto 3,\ 4 \mapsto 4; \\ &\phi_2 : 1 \mapsto 2,\ 2 \mapsto 1; && \psi_2 : 3 \mapsto 4,\ 4 \mapsto 3; \\ &\phi_3 : 1 \mapsto 1,\ 2 \mapsto 1; && \psi_3 : 3 \mapsto 3,\ 4 \mapsto 3; \\ &\phi_4 : 1 \mapsto 2,\ 2 \mapsto 2; && \psi_4 : 3 \mapsto 4,\ 4 \mapsto 4. \end{aligned}$$

Para cada possibilidade de combinação entre f e g segue abaixo a especificação da bijeção entre $Hom_{\mathscr{C}}(A,\, A)$ e $Hom_{\mathscr{C}}(B,\, B)$.

$$\begin{array}{cc} \Phi_{f,f} : Hom_{\mathscr{C}}(A,\, A) \to Hom_{\mathscr{C}}(B,\, B), & \Phi_{g,g} : Hom_{\mathscr{C}}(A,\, A) \to Hom_{\mathscr{C}}(B,\, B), \\ \phi_i \mapsto \psi_i,\ \textit{para } i = 1, 2, 3, 4; & \phi_i \mapsto \psi_i,\ \textit{para } i = 1, 2, \\ & \phi_3 \mapsto \psi_4 \ \textit{e}\ \phi_4 \mapsto \psi_3; \\ \Phi_{f,g} : Hom_{\mathscr{C}}(A,\, A) \to Hom_{\mathscr{C}}(B,\, B), & \Phi_{g,f} : Hom_{\mathscr{C}}(A,\, A) \to Hom_{\mathscr{C}}(B,\, B), \\ \phi_1 \mapsto \psi_2,\ \phi_2 \mapsto \psi_1, & \phi_1 \mapsto \psi_2, \phi_2 \mapsto \psi_1 \ \textit{e} \\ \phi_3 \mapsto \psi_4 \ \textit{e}\ \phi_4 \mapsto \psi_3; & \phi_i \mapsto \psi_i,\ \textit{para } i = 3, 4. \end{array}$$

Cada par (f, f), (f, g), (g, f) e (g, g) induz uma bijeção distinta das outras, como demonstrado na Observação 2.1.4 a seguir. ◄

Observação 2.1.3. *Com a notação da Proposição 2.1.2, se $f = f'$ e $g = g'$, então claramente $\Phi_{f,g} = \Phi_{f',g'}$. A recíproca desta afirmação não é necessariamente verdadeira. Isto é, $\Phi_{f,g} = \Phi_{f',g'}$ não necessariamente implica $f = f'$ e $g = g'$. Um exemplo desta situação ocorre na categoria $\mathscr{G}_{ab}$ dos grupos abelianos. Sejam $p, q \in \mathbb{N}^*$ números primos distintos; $Hom_{\mathscr{G}_{ab}}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_q) = \{0\}$, em que 0 é o homomorfismo trivial. Desta forma, quaisquer automorfismos $f : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$ e $g : \mathbb{Z}_q \to \mathbb{Z}_q$ são tais que $\Phi_{f,g}$ aplica 0 em 0.* ◀

Observação 2.1.4. *Também com a notação da Proposição 2.1.2, se $\mathscr{C}$ é a Categoria Universal e A' possuir pelo menos dois elementos, então $\Phi_{f,g} = \Phi_{f',g'} \Rightarrow f = f'$ e $g = g'$. De fato, suponhamos que $\Phi_{f,g} = \Phi_{f',g'}$. Isso significa que, para toda $\alpha \in Hom_{\mathscr{U}}(A, A')$, tem-se $g \circ \alpha \circ f^{-1} = g' \circ \alpha \circ (f')^{-1}$. Equivalentemente, se $\tilde{g} = (g')^{-1} \circ g$ e $\tilde{f} = f^{-1} \circ f'$, temos que*

$$\tilde{g} \circ \alpha \circ \tilde{f} = \alpha \text{ para toda função } \alpha \in Hom_{\mathscr{U}}(A, A'). \tag{2.1.7}$$

Vamos demonstrar que $\tilde{g} = id_{A'}$, logo $g = g'$. De fato, fixado $a \in A'$, seja $\alpha_a : A \to A'$ a função constante com imagem a. Aplicando a Equação (2.1.7) a α_a, obtemos que $\tilde{g}(a) = a$. Dado que isso vale para todo $a \in A'$ temos que $\tilde{g} = id_{A'}$. Isso implica que a Equação 2.1.7 se resume a

$$\alpha \circ \tilde{f} = \alpha \text{ para toda função } \alpha \in Hom_{\mathscr{U}}(A, A'). \tag{2.1.8}$$

Suponhamos que $\tilde{f} \neq id_A$. Isto é, suponhamos que exista $a \in A$ tal que $\tilde{f}(a) \neq a$. Neste caso, como A' contém pelo menos dois elementos distintos, digamos a_1 e a_2, existe $\alpha : A \to A'$ de modo que $\alpha(a) = a_1$ e $\alpha(\tilde{f}(a_1)) = a_2$. Isto contradiz a Equação 2.1.8. Destarte $\tilde{f} = id_A$ e, portanto, $f = f'$. Assim segue a afirmação. ◀

2.1.3 Categorias concretas

Exemplo 2.1.9 (Categoria cujos morfismos não são funções)**.** *Seja G um grupo, que denotamos multiplicativamente. Dizemos que $\{G\}$ é uma categoria unitária com $Hom_{\{G\}}(G, G) = G$; ou seja, os morfismos de G a G são os elementos do grupo. A composição de dois morfismos $a, b \in G$ é simplesmente $ab \in G$, a operação binária do grupo. Desta forma todo morfismo em $\{G\}$ é um isomorfismo nesta categoria. Evidentemente, $id_G = e$, em que e é o elemento neutro do grupo G.* ◀

O Exemplo 2.1.9 mostra que não necessariamente os morfismos entre os objetos de uma categoria são funções entre conjuntos. Este mesmo exemplo, além disso, fornece uma situação em que todo morfismo de uma categoria é um isomorfismo. A seguir especificamos uma terminologia, levando em conta o Exemplo 2.1.9, sobre quando uma categoria $\mathscr{C}$ formada por conjuntos é tal que os seus morfismos são funções entre estes conjuntos e as leis de composição de morfismos respeitam a composição ordinária de funções.

Definição 2.1.4 (Categoria Concreta)**.** *Uma categoria $\mathscr{C}$ equipada com uma função σ que associa a cada $A \in \mathscr{C}$ um conjunto $\sigma(A) \in \mathscr{U}$, chamado **conjunto subjacente** de A, de modo que*

1. *haja uma injeção do conjunto* $Hom_{\mathscr{C}}(A,B)$ *no conjunto* $Hom_{\mathscr{U}}(\sigma(A),\sigma(B))$ *para todos* $A, B \in \mathscr{C}$. *Denotamos um morfismo* $f : A \to B$ *de* $\mathscr{C}$ *no conjunto* $Hom_{\mathscr{U}}(\sigma(A),\sigma(B))$ *por* $\sigma(f) : \sigma(A) \to \sigma(B)$;

2. $\sigma(id_A) = id_{\sigma(A)}$ *para todo* $A \in \mathscr{C}$;

3. $\sigma(g) \circ \sigma(f) = \sigma(g \circ f)$ *para todos morfismos* f *e* g *de* $\mathscr{C}$ *cuja composição* $g \circ f$ *esteja definida,*

é dita uma ***categoria concreta***. ▶

Exemplos de categorias concretas são abundantes: a categoria $\mathscr{S}$ dos semigrupos, a categoria $\mathscr{G}$ dos grupos, a categoria $\mathscr{G}_{ab}$ dos grupos abelianos, a categoria Top dos espaços topológicos, a categoria TopHd dos espaços topológicos de *Hausdorff*, dentre outras.

Definição 2.1.5 (Objeto livre em um conjunto numa categoria)**.** *Sejam* $(\mathscr{C}, \sigma)$ *uma categoria concreta,* $L \in \mathscr{C}$, X *um conjunto não-vazio e* $i : X \to \sigma(L)$ *uma função. Dizemos que* L *é* ***livre em*** X ***na categoria*** $\mathscr{C}$ *se para todo* $A \in \mathscr{C}$ *e toda aplicação* $f : X \to \sigma(A)$ *existir um único morfismo* $g : \sigma(L) \to \sigma(A)$ *de modo que* $g \circ i = f$. ▶

Com a mesma notação da Definição 2.1.5, observamos que o que faz um objeto livre L especial é o fato de que para definir um morfismo com domínio L é suficiente especificar a imagem do subconjunto $i(X)$.

Exemplo 2.1.10. *Sejam* G *um grupo e* $g \in G$. *A aplicação* $h : \mathbb{Z} \to G$, $n \mapsto g^n$, *é o único homomorfismo de* $\mathbb{Z}$ *em* G *tal que* $1 \mapsto g$. *Consequentemente, se* $X = \{1\}$ *e* $i : X \hookrightarrow \mathbb{Z}$ *é a aplicação inclusão, então* $\mathbb{Z}$ *é livre em* X *na categoria* $\mathscr{G}$ *dos grupos. Para determinar um único homomorfismo de* $\mathbb{Z}$ *a* G *precisamos somente especificar a imagem de* $1 \in \mathbb{Z}$. *Ou seja, a imagem* $i(X) \subset G$. ◀

Proposição 2.1.3. *Seja* $(\mathscr{C}, \sigma)$ *uma categoria concreta. Sejam* L, $L' \in \mathscr{C}$ *tais que* L *é livre em um conjunto* X *na categoria* $\mathscr{C}$ *e* L' *é livre em um conjunto* X' *na categoria* $\mathscr{C}$. *Se* $card(X) = card(X')$, *então* L *é isomorfo a* L'.

Demonstração. Uma vez que L é livre em X na categoria $\mathscr{C}$ e que L' é livre em X' na categoria $\mathscr{C}$, existem aplicações $i : X \to \sigma(L)$ e $j : X' \to \sigma(L')$. Como por hipótese $card(X) = card(X')$, existe uma bijeção $f : X \to X'$. Sendo L livre e considerando a aplicação $j \circ f : X \to \sigma(L')$, temos que existe um morfismo $\varphi : \sigma(L) \to \sigma(L')$ de modo que o Diagrama (2.1.9) seja comutativo.

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{\sigma(L)} \arrow[r, "\varphi"] & \boldsymbol{\sigma(L')} \\ \boldsymbol{X} \arrow[u, "i"] \arrow[r, "f"'] & \boldsymbol{X'} \arrow[u, "j"'] \end{tikzcd} \tag{2.1.9}$$

Da mesma maneira, como f é um bijeção existe sua inversa $f^{-1} : X' \to X$ e pelo fato de L' ser livre existe um morfismo $\psi : \sigma(L') \to \sigma(L)$ tal que o Diagrama (2.1.10) seja comutativo.

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{\sigma(L')} \arrow[r, "\psi"] & \boldsymbol{\sigma(L)} \\ \boldsymbol{X'} \arrow[u, "j"] \arrow[r, "f^{-1}"'] & \boldsymbol{X} \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd} \tag{2.1.10}$$

Combinando os Diagramas (2.1.9) e (2.1.10) obtemos os Diagramas (2.1.11).

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{\sigma(L)} \arrow[r, "\psi\circ\varphi"] & \boldsymbol{\sigma(L)} & \boldsymbol{\sigma(L')} \arrow[r, "\varphi\circ\psi"] & \boldsymbol{\sigma(L')} \\ \boldsymbol{X} \arrow[u, "i"] \arrow[r, "f^{-1}\circ f=id_X"'] & \boldsymbol{X} \arrow[u, "i"'] & \boldsymbol{X'} \arrow[u, "j"] \arrow[r, "f\circ f^{-1}=id_{X'}"'] & \boldsymbol{X'} \arrow[u, "j"'] \end{tikzcd} \tag{2.1.11}$$

Assim, $(\psi \circ \varphi) \circ i = i \circ id_X = i$ e $(\varphi \circ \psi) \circ j = j \circ id_{X'} = j$. Mas também $id_L \circ i = i$ e $id_{L'} \circ j = j$. Da propriedade de unicidade que gozam objetos livres temos que $\psi\circ\varphi = id_L$ e $\varphi\circ\psi = id_{L'}$. Desta forma L é isomorfo a L' e terminamos a prova. ■

2.1.4 Objetos universais e couniversais

Definição 2.1.6 (Objetos universais e couniversais)**.** *Seja $\mathscr{C}$ uma categoria. Um objeto $I \in \mathscr{C}$ é dito* ***universal*** *(ou* ***inicial****) se para cada $A \in \mathscr{C}$ existe um único morfismo $f : I \to A$. Um objeto $F \in \mathscr{C}$ é dito* ***couniversal*** *(ou* ***final****) se para cada $A \in \mathscr{C}$ existe um único morfismo $f : A \to F$.* ▶

Um exemplo bastante simples é o grupo trivial $\{e\}$ que tanto é um objeto universal quanto um objeto couniversal na categoria $\mathscr{G}$ dos grupos. Além do grupo trivial podemos considerar o Exemplo 2.1.11 que parte de uma categoria concreta arbitrária e que relaciona objetos livres com objetos universais.

Exemplo 2.1.11. *Seja $(\mathscr{C}, \sigma)$ uma categoria concreta. Seja $L \in \mathscr{C}$ um objeto livre em um conjunto X não-vazio na categoria $\mathscr{C}$. Definimos uma nova categoria $\mathscr{D}$ da seguinte maneira: a classe $\mathscr{D}$ de objetos é formada pelas funções entre conjuntos $f : X \to \sigma(A)$, em que $A \in \mathscr{C}$. Um morfismo em $\mathscr{D}$ entre dois objetos $f : X \to \sigma(A)$ e $g : X \to \sigma(B)$ é um morfismo $\sigma(h) : \sigma(A) \to \sigma(B)$ que faz o Diagrama (2.1.12) comutativo.*

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{\sigma(A)} \arrow[r, "\sigma(h)"] & \boldsymbol{\sigma(B)} \\ \boldsymbol{X} \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd} \tag{2.1.12}$$

É imediato que $\sigma(id_A) : \sigma(A) \to \sigma(A)$ é o morfismo identidade para $f : X \to \sigma(A)$ e que $\sigma(h) : \sigma(A) \to \sigma(B)$ é um isomorfismo em $\mathscr{D}$ se, e somente se, h o é em $\mathscr{C}$. Dado que L é livre em X, para cada aplicação $f : X \to \sigma(A)$ existe um único morfismo $\sigma(g) : \sigma(L) \to \sigma(A)$ de modo que $g \circ i = f$. Esta é precisamente a afirmação que garante que $i : X \to \sigma(L)$ é um objeto universal na categoria $\mathscr{D}$. ◀

Os objetos universais e couniversais de uma categoria $\mathscr{C}$ são totalmente caracterizados: quaisquer dois elementos universais (respectivamente, couniversais) são isomorfos. Fazemos a prova desta afirmação somente para objetos universais, dado que a demonstração deste fato para objetos couniversais é análoga.

Demonstração. Sejam I, $I' \in \mathscr{C}$ objetos universais. Como I é um objeto universal, existe um único morfismo $f : I \to I'$. Da mesma forma, como I' é um objeto universal, existe um único morfismo $g : I' \to I$. Portanto, as composições $g \circ f : I \to I$ e $f \circ g : I' \to I'$ são morfismo de $\mathscr{C}$. Entretanto, $id_I : I \to I$ e $id_{I'} : I' \to I'$ também são morfismos de $\mathscr{C}$. Destarte, $g \circ f = id_I$ e $f \circ g = id_{I'}$. Assim temos que I é isomorfo a I' e terminamos a prova. ■

2.1.5 Morfismos

Uma parte significante da teoria básica de categorias consiste em generalizar vários conceitos presentes nas categorias usuais ($\mathscr{U}$, $\mathscr{G}$, $\mathscr{M}_l^R$, *et reliqua*) para categorias genéricas.

Lembramos que um morfismo $f : A \to B$ de uma categoria $\mathscr{C}$ é dito um isomorfismo se existir um morfismo $g : B \to A$ em $\mathscr{C}$ de modo que $g \circ f = id_A$ e que $f \circ g = id_B$ (vide Definição 2.1.3). Esta definição de isomorfismo é uma simples reflexão de que um morfismo nas categorias acima citadas é um isomorfismo se, e somente se, possuir um inverso tanto à esquerda quanto à direita. Inicialmente estendemos os conceitos de monomorfismos e epimorfismos para categorias arbitrárias.

Definição 2.1.7 (Morfismos mônicos e épicos)**.** *Sejam $\mathscr{C}$ uma categoria e $f : B \to C$ um morfismo de $\mathscr{C}$. Dizemos que f é um* ***morfismo mônico*** *ou um* ***monomorfismo*** *se, para todo $A \in \mathscr{C}$ e para todos $g_1, g_2 \in Hom_{\mathscr{C}}(A, B)$, tivermos que*

$$f \circ g_1 = f \circ g_2 \Rightarrow g_1 = g_2.$$

Dizemos também que f é um ***morfismo épico*** *ou um* ***epimorfismo*** *se tivermos que*

$$h_1 \circ f = h_2 \circ f \Rightarrow h_1 = h_2$$

para todo $D \in \mathscr{C}$ e para todos $h_1, h_2 \in Hom_{\mathscr{C}}(C, D)$. ▶

Sejam $\mathscr{C}$ uma categoria e $f_1 : B \to C$ e $f_2 : C \to D$ morfismos de $\mathscr{C}$. A partir da Definição 2.1.7 tem-se que (i) se f_1 e f_2 são morfismos mônicos, então $f_2 \circ f_1$ é um morfismo mônico; (ii) se $f_2 \circ f_1$ é um morfismo mônico, então f_1 é um morfismo mônico; (iii) se f_1 e f_2 são morfismos épicos, então $f_2 \circ f_1$ é um morfismo épico; (iv) se $f_2 \circ f_1$ é um morfismo épico, então f_2 é um morfismo épico, e (v) se f_1 é um isomorfismo, então é também um morfismo mônico e épico.

Proposição 2.1.4. *Sejam $\mathscr{M}_l^R$ a categoria dos R-módulos à esquerda e $f : B \to C$ um morfismo de $\mathscr{M}_l^R$. Então f é mônico se, e somente se, é injetor.*

Demonstração. ($\Leftarrow$) Sejam $A \in \mathscr{M}_l^R$ e $g_1, g_2 \in Hom_{\mathscr{M}_l^R}(A, B)$. Se f é um morfismo injetor e $(f \circ g_1)(a) = (f \circ g_2)(a)$ para todo $a \in A$, então necessariamente $g_1(a) = g_2(a)$ para todo $a \in A$. Portanto $g_1 = g_2$ e, assim, f é um monomorfismo.

($\Rightarrow$) Se f é um monomorfismo e $b_1, b_2 \in B$ são tais que $f(b_1) = f(b_2)$, então tomamos $A = R$ e definimos $g_1, g_2 : A \to B$ de modo que $g_1(1_R) = b_1$ e que $g_2(1_R) = b_2$. Então $f \circ g_1 = f \circ g_2$ e, portanto, $g_1 = g_2 \Rightarrow g_1(1_R) = g_2(1_R) \Rightarrow b_1 = b_2$. ■

Proposição 2.1.5. *Sejam $\mathscr{M}_l^R$ a categoria dos R-módulos à esquerda e $f : B \to C$ um morfismo de $\mathscr{M}_l^R$. Então f é épico se, e somente se, é sobrejetor.*

Demonstração. ($\Leftarrow$) Sejam $D \in \mathscr{M}_l^R$ e $h_1, h_2 \in Hom_{\mathscr{M}_l^R}(C, D)$. Se f é um morfismo sobrejetor e $(h_1 \circ f)(b) = (h_2 \circ f)(b)$ para todo $b \in B$, então $h_1(c) = h_2(c)$ para todo $c \in C$. Portanto $h_1 = h_2$ e, assim, f é um epimorfismo.

($\Rightarrow$) Consideramos as aplicações $\pi : C \to C/f(B)$ a projeção e $0 : C \to C/f(B)$ a aplicação nula. Se f é um epimorfismo, então $0 \circ f = 0 = \pi \circ f \Rightarrow 0 = \pi$. Destarte $C/f(B) = 0$ e, pois, $C = f(B)$. ■

Bem como nas Proposições 2.1.4 e 2.1.5 um morfismo na Categoria Universal é mônico (respectivamente, épico) se, e somente se, é injetor (respectivamente, sobrejetor). Também, na categoria $\mathscr{G}$ dos grupos, um morfismo é mônico (respectivamente, épico) se, e somente se, é injetor (respectivamente, sobrejetor). Em geral não vale a equivalência entre morfismos mônicos (respectivamente, épicos) e morfismos injetores (respectivamente, sobrejetores). Os Exemplos 2.1.12 e 2.1.13 garantem a veracidade do conteúdo desta afirmação.

Exemplo 2.1.12 (Monomorfismo não-injetor)**.** *Dizemos que um grupo G é **divisível** se, para todo $y \in G$ e para todo $n \in \mathbb{Z}^*$, existir $x \in G$ de sorte que $nx = y$. Seja $\mathscr{G}_D$ a categoria dos grupos abelianos divisíveis e dos homomorfismos de grupos. Afirmamos que a projeção $\pi : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, que não é injetora, é um monomorfismo na categoria $\mathscr{G}_D$. Sejam $f, g : A \to \mathbb{Q}$ morfismos de grupos abelianos, sendo $A \in \mathscr{G}_D$ e sendo $\pi \circ f = \pi \circ g$. Para todo $a \in A$, temos que $f(a) - g(a) = n \in \mathbb{N}$. Seja $b \in A$ tal que $(n+1)b = a$ e seja $f(b) - g(b) = m \in \mathbb{Z}$. Temos que $(n+1)f(b) - (n+1)g(b) = n$, ou seja, $(n+1)m = n$. Se $n \neq 0$, então $n+1$ divide n, absurdo, logo $f(a) = g(a)$. Uma vez que $a \in A$ é genérico, $f = g$.* ◀

Exemplo 2.1.13 (Epimorfismo não-sobrejetor)**.** *Na categoria $\mathscr{R}$ dos anéis tem-se que todo morfismo sobrejetor é um epimorfismo. Afirmamos que a aplicação inclusão $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$, que não é sobrejetora, é um epimorfismo na categoria $\mathscr{R}$. Seja $R \in \mathscr{R}$. Se $f, g : \mathbb{Q} \to R$ são homomorfismos de anéis tais que $f|_{\mathbb{Z}} = g|_{\mathbb{Z}}$, então, para todo $m \in \mathbb{Z}$ e para todo $n \in \mathbb{Z}^*$, temos que $f(\frac{m}{n}) = f(m) \cdot f(\frac{1}{n}) = g(m) \cdot f(\frac{1}{n}) = g(n \cdot \frac{m}{n}) \cdot f(\frac{1}{n}) = g(n) \cdot g(\frac{m}{n}) \cdot f(\frac{1}{n}) = f(n) \cdot g(\frac{m}{n}) \cdot f(\frac{1}{n}) = g(\frac{n}{m}) \cdot f(1) = g(\frac{n}{m}) \cdot g(1) = g(\frac{n}{m})$. Donde segue a afirmação.* ◀

Definição 2.1.8 (Objeto zero)**.** *Seja $\mathscr{C}$ uma categoria. Um objeto $0 \in \mathscr{C}$ é dito **objeto zero** caso ele seja, concomitantemente, um objeto universal e um objeto couniversal (vide Definição 2.1.6).* ▶

A Categoria Universal $\mathscr{U}$ não possui objetos zero. Já a categoria $\mathscr{M}_l^R$ dos R-módulos à esquerda possui o R-módulo trivial como objeto zero. Também a categoria $\mathscr{G}$ dos grupos e a categoria $\mathscr{R}$ dos anéis têm como objetos zero o grupo trivial e o anel trivial, respectivamente.

Sejam $\mathscr{C}$ uma categoria e $B \in \mathscr{C}$. Como demonstrado na Sub-subseção 2.1.4, quaisquer dois objetos universais (respectivamente, couniversais) de $\mathscr{C}$ são isomorfos. Portanto, em particular, quaisquer dois objetos zero são isomorfos. Assim, se $0 \in \mathscr{C}$ é um objeto zero, então o único morfismo $0 \to B$ é um monomorfismo e o único morfismo $B \to 0$ é um epimorfismo.

Proposição 2.1.6. *Seja $\mathscr{C}$ uma categoria. Se $0 \in \mathscr{C}$ é um objeto zero, então existe, para cada par de objetos $C, D \in \mathscr{C}$, um único morfismo $0_{C,D} : C \to D$, chamado de **morfismo zero**, tal que*

$$f \circ 0_{C,D} = 0_{C,E} \text{ e que } 0_{C,D} \circ g = 0_{B,D}$$

para todo $f \in Hom_{\mathscr{C}}(D, E)$ e para todo $g \in Hom_{\mathscr{C}}(B, C)$.

Demonstração. (Unicidade) Se $\{0'_{C,D}\}$ e $\{0_{C,D}\}$ são duas famílias de morfismos com as propriedades estabelecidas, então, para cada par (C, D), temos que

$$0_{C,D} = 0'_{D,D} \circ 0_{C,D} = 0'_{C,D}.$$

(Existência) Para cada objeto $A \in \mathscr{C}$, tomamos $\iota_A : 0 \to A$ e $\pi_A : A \to 0$ os únicos morfismos entre os objetos 0 e A. Para todo $f \in Hom_{\mathscr{C}}(D, E)$, segue que $f \circ \iota_D : 0 \to E$ coindice com $\iota_E : 0 \to E$. Também, para todo $g \in Hom_{\mathscr{C}}(B, C)$, segue que $\pi_C \circ g : B \to 0$ coincide com $\pi_B : B \to 0$. Definimos $0_{C,D}$ como sendo a composição $\iota_D \circ \pi_C : C \to D$. Então, para todo $f \in Hom_{\mathscr{C}}(D, E)$, temos que $f \circ 0_{C,D} = f \circ \iota_D \circ \pi_C = \iota_E \circ \pi_C = 0_{C,E}$. Similarmente, para todo $g \in Hom_{\mathscr{C}}(B, C)$, temos que $0_{C,D} \circ g = 0_{B,D}$. ■

O último passo na extensão das propriedades de morfismos de categorias usuais para morfismos de categorias arbitrárias consiste em desenvolver definições apropriadas de núcleo e conúcleo.

Definição 2.1.9 (Equalizador e Coequalizador)**.** *Sejam $\mathscr{C}$ uma categoria e $f, g : C \to D$ morfismos de $\mathscr{C}$. Dizemos que um morfismo $i : B \to C$ de $\mathscr{C}$ é o **equalizador** do par (f, g) se $f \circ i = g \circ i$ e se, para todo morfismo $h : A \to C$ de $\mathscr{C}$ tal que $f \circ h = g \circ h$, existir um único morfismo $\bar{h} : A \to B$ de modo que $i \circ \bar{h} = h$. Dizemos também que um morfismo $j : D \to E$ de $\mathscr{C}$ é o **coequalizador** do par (f, g) se $j \circ f = j \circ g$ e se, para todo morfismo $k : D \to F$ de $\mathscr{C}$ tal que $k \circ f = k \circ g$, existir um único morfismo $\bar{k} : E \to F$ tal que $\bar{k} \circ j = k$.* ▶

Na Categoria Universal o equalizador das aplicações $f, g : C \to D$ é a inclusão $\iota : B \to C$ onde $B = \{c \in C : f(c) = g(c)\}$. A mesma construção mostra que todo par de morfismos na categoria dos grupos, dos anéis e dos R-módulos à esquerda admite equalizador. Sejam agora $\varphi_1, \varphi_2 \in Hom_{\mathscr{G}}(G_1, G_2)$ onde $\mathscr{G}$ é a categoria dos grupos. Seja N o menor subgrupo normal de G_2 que contém $\{\varphi_1(g)\varphi_2(g)^{-1} : g \in G_1\}$. O epimorfismo $\pi : G_2 \to {G_2}/{N}$ é o coequalizador do par (φ_1, φ_2).

Proposição 2.1.7. *Sejam $\mathscr{C}$ uma categoria e $f, g : C \to D$ morfismos de $\mathscr{C}$. Se $i : B \to C$ é um equalizador do par (f, g), então i é um morfismo mônico. Também, se $i : B \to C$ e $j : A \to C$ são equalizadores do par (f, g), então existe um único isomorfismo $h : A \to B$ de sorte que $i \circ h = j$.*

Demonstração. Sejam $h, k : F \to B$ morfismos de $\mathscr{C}$ tais que $i \circ h = i \circ k$. Então $f \circ (i \circ h) = (f \circ i) \circ h = (g \circ i) \circ h = g \circ (i \circ h)$. Como, por hipótese, i é um equalizador do par (f, g), temos que existe um único morfismo $t : F \to B$ de modo que $i \circ t = i \circ h$. Entretanto $t = h$ e $t = k$ satisfazem esta condição e, portanto, $h = k$. Destarte i é um morfismo mônico.

Agora, por hipótese, existem únicos morfismos $h : A \to B$ e $k : B \to A$ tais que $i \circ h = j$ e $j \circ k = i$, respectivamente. Consequentemente $i \circ h \circ k = j \circ k = i = i \circ id_B$ e $j \circ k \circ h = i \circ h = j = j \circ id_A$. Como visto, i e j são monomorfismos e, portanto, $h \circ k = id_B$ e $k \circ h = id_A$. Logo h é um isomorfismo. ■

Proposição 2.1.8. *Sejam $\mathscr{C}$ uma categoria e $f, g : C \to D$ morfismos de $\mathscr{C}$. Se $j : D \to E$ é um equalizador do par (f, g), então j é um morfismo épico. Também, se $j : D \to E$ e $k : D \to F$ são equalizadores do par (f, g), então existe um único isomorfismo $h : E \to F$ de sorte que $h \circ j = k$.* ■

Seja $\mathscr{C}$ uma categoria em que 0 é um seu objeto zero. Devido à Proposição 2.1.6, $\mathscr{C}$ possui morfismos zero. Definimos o **núcleo** do morfismo $f : C \to D$ de $\mathscr{C}$ como sendo o equalizador do par $(f, 0_{C,D})$. Usualmente denotamos o núcleo do morfismo f por $Ker(f)$. A Definição 2.1.9 e as Proposições 2.1.6 e 2.1.7 mostram que $k : K \to C$ é o núcleo de $f : C \to D$ se, e somente se, k for um monomorfismo tal que $f \circ k = 0_{C,D}$ e, para todo $h : B \to C$ de sorte que $f \circ h = o_{B,D}$, existir um único morfismo $\bar{h} : B \to K$ de $\mathscr{C}$ de modo que $k \circ \bar{h} = h$.

O **conúcleo** $t : D \to E$ de um morfismo $f : C \to D$ de $\mathscr{C}$ é o coequalizador do par $(f, 0_{C,D})$. Usualmente denotamos o conúcleo do morfismo f por $Coker(f)$. Como no parágrafo anterior, o conúcleo t é caracterizado por ser um epimorfismo tal que $t \circ f = 0_{C,E}$ e por, para todo $g : D \to F$ de sorte que $g \circ f = 0_{C,F}$, existir um único morfismo $\bar{g} : E \to F$ de modo que $\bar{g} \circ t = g$.

Nas categorias dos grupos, dos anéis e dos R-módulos à esquerda temos que o núcleo de um morfismo $f : C \to D$ é a aplicação inclusão $\iota : Ker(f) \to C$ onde $Ker(f) = \{c \in C : f(c) = 0\}$. Na categoria dos R-módulos à esquerda o epimorfismo $\pi :\to D \to {}^{D}\!/_{Im(f)}$ é o conúcleo de f.

2.2 Produto e coproduto

Geralmente consideramos o produto cartesiano de dois ou mais objetos como, por exemplo, de conjuntos, de espaços topológicos, de grupos, dentre outros. Também consideramos as noções de soma direita de grupos, uniões disjuntas de conjuntos, dentre outras. As noções categoriais de produto e de coproduto tentam captar a essência de todos esses casos.

Definição 2.2.1 (Produto de dois objetos)**.** *Sejam $\mathscr{C}$ uma categoria e $A,\, B \in \mathscr{C}$. Se existir um objeto $A \times B \in \mathscr{C}$ e morfismos $\pi_A : A \times B \to A$ e $\pi_B : A \times B \to B$ de modo que, para todo $C \in \mathscr{C}$ e para todos $f : C \to A$ e $g : C \to B$, existe um único morfismo $\langle f,\, g\rangle : C \to A \times B$ de forma que o Diagrama (2.2.1) é comutativo, dizemos que $(A \times B, \pi_A, \pi_B)$ é um* ***produto*** *para A e B em $\mathscr{C}$.*

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] \arrow[dd, dashed, "\langle f, g\rangle"] & \\ A & & B \\ & A \times B \arrow[ul, "\pi_A"] \arrow[ur, "\pi_B"'] & \end{tikzcd} \tag{2.2.1}$$

▶

Exemplo 2.2.1 (Produto na categoria $\mathscr{G}$)**.** *Sejam $\mathscr{G}$ a categoria dos grupos e $G_1,\, G_2 \in \mathscr{G}$. Consideramos o grupo produto $G_1 \times G_2$ com a operação binária clássica. Isto é, para todos $(g_1,\, g_2),\, (g_3,\, g_4) \in G_1 \times G_2$, definimos*

$$(g_1,\, g_2)(g_3,\, g_4) := (g_1g_3,\, g_2g_4).$$

Sejam $\pi_1 : G_1 \times G_2 \to G_1$, $(g_1,\, g_2) \mapsto g_1$, e $\pi_2 : G_1 \times G_2 \to G_2$, $(g_1,\, g_2) \mapsto g_2$. Afirmamos que a tripla $(G_1 \times G_2, \pi_1, \pi_2)$ é um produto na categoria $\mathscr{G}$. Vejamos inicialmente que π_1 e π_2 são morfismos na categoria $\mathscr{G}$; faremos a verificação disso somente para uma delas, pois para a outra a prova é análoga. Se $(g_1,\, g_2),\, (g_3,\, g_4) \in G_1 \times G_2$, então $\pi_1((g_1,\, g_2)(g_3,\, g_4)) = \pi_1((g_1g_3,\, g_2g_4)) = g_1g_3 = \pi_1((g_1,\, g_2))\pi_1((g_3,\, g_4))$.

(Existência) Dados $G \in \mathscr{G}$ e morfismos $f : G \to G_1$ e $h : G \to G_2$, definimos $\langle f,\, h\rangle : G \to G_1 \times G_2$, $g \mapsto (f(g),\, h(g))$. Devemos mostrar que $\langle f,\, h\rangle$ é um morfismo em $\mathscr{G}$. De fato, se $g_1,\, g_2 \in G$, temos

$$\begin{aligned} \langle f,\, h\rangle(g_1g_2) &= (f(g_1g_2),\, h(g_1g_2)) = (f(g_1)f(g_2),\, h(g_1)h(g_2)) \\ &= (f(g_1),\, h(g_1))(f(g_2),\, h(g_2)) \\ &= \langle f,\, h\rangle(g_1)\,\langle f,\, h\rangle(g_2). \end{aligned}$$

É verdade que $\pi_1 \circ \varphi : G \to G_1$ é igual a f pois para todo $g \in G$ temos que $\pi_1 \circ \langle f,\, h\rangle(g) = \pi_1(f(g),\, h(g)) = f(g)$; também $\pi_2 \circ \langle f,\, h\rangle : G \to G_2$ é igual a h pois para todo $g \in G$ temos que $\pi_2 \circ \langle f,\, h\rangle(g) = \pi_2(f(g),\, h(g)) = h(g)$.

(Unicidade) A forma de $\langle f,\, h\rangle$ fica completamente estabelecida pela necessidade de o Diagrama (2.2.1) ser comutativo. De fato, se existir $\langle f,\, h\rangle' : G \to G_1 \times G_2$ e $g \in G$ tais que $\langle f,\, h\rangle'(g) \neq \langle f,\, h\rangle(g) = (f(g),\, h(g))$, então $\pi_1 \circ \langle f,\, h\rangle'(g) \neq f(g)$ ou $\pi_2 \circ \langle f,\, h\rangle'(g) \neq h(g)$. Ou seja, $\langle f,\, h\rangle'$ não pode fazer o Diagrama (2.2.1) comutativo. Sendo assim, a aplicação $\langle f,\, h\rangle$ definida acima é única. ◀

Definição 2.2.2 (Coproduto de dois objetos)**.** *Sejam $\mathscr{C}$ uma categoria e $A,\, B \in \mathscr{C}$. Se existir um objeto $A \coprod B \in \mathscr{C}$ e morfismos $i_A : A \to A \coprod B$ e $i_B : B \to A \coprod B$ de modo que, para todo $C \in \mathscr{C}$ e para todos $f : A \to C$ e $g : B \to C$, existe um único* *morfismo* $\rangle f,\, g\langle : A \coprod B \to C$ *de forma que o Diagrama (2.2.2) é comutativo, dizemos que* $(A \coprod B, i_A, i_B)$ *é um* ***coproduto*** *para* A *e* B *em* $\mathscr{C}$.

$$
\begin{tikzcd}
 & \boldsymbol{C} & \\
\boldsymbol{A} \arrow[ur, "\boldsymbol{f}"] \arrow[dr, "\boldsymbol{i_A}"'] & & \boldsymbol{B} \arrow[ul, "\boldsymbol{g}"'] \arrow[dl, "\boldsymbol{i_B}"] \\
 & \boldsymbol{A \coprod B} \arrow[uu, dashed, "\boldsymbol{\varphi}"] &
\end{tikzcd}
\tag{2.2.2}
$$

▶

Exemplo 2.2.2 (Coproduto na categoria $\mathscr{G}_{ab}$)**.** *Sejam* $\mathscr{G}_{ab}$ *a categoria dos grupos abelianos e* $G_1,\, G_2 \in \mathscr{G}_{ab}$*. Consideramos o grupo abeliano soma direta* $G_1 \oplus G_2$ *com a operação binária clássica. Isto é, para todos* $(a_1,\, b_1),\, (a_2,\, b_2) \in G_1 \oplus G_2$*, definimos*

$$(a_1,\, b_1) \oplus (a_2,\, b_2) := (a_1 + a_2,\, b_1 + b_2).$$

Sejam $i_1 : G_1 \to G_1 \oplus G_2,\ a \mapsto (a,\, 0)$*, e* $i_2 : G_2 \to G_1 \oplus G_2,\ b \mapsto (0,\, b)$*. Afirmamos que a tripla* $(G_1 \oplus G_2, i_1, i_2)$ *é um coproduto na categoria* $\mathscr{G}_{ab}$*. Vejamos inicialmente que* i_1 *e* i_2 *são morfismos na categoria* $\mathscr{G}_{ab}$*; faremos a verificação disso somente para uma delas, pois para a outra a prova é análoga. Se* $a,\, b \in G_1$*, então* $i_1(a+b) = (a+b,\, 0) = (a,\, 0) \oplus (b,\, 0) = i_1(a) \oplus i_1(b)$.

(Existência) Dados $G \in \mathscr{G}_{ab}$ *e morfismos* $f : G_1 \to G$ *e* $g : G_2 \to G$*, definimos* $\rangle f,\, g\langle : G_1 \oplus G_2 \to G,\ (a,\, b) \mapsto f(a) + g(b)$*. Devemos mostrar que* $\rangle f,\, g\langle$ *é um morfismo em* $\mathscr{G}_{ab}$*. De fato, se* $(a_1,\, b_1),\, (a_2,\, b_2) \in G_1 \oplus G_2$ *temos*

$$
\begin{aligned}
\rangle f,\, g\langle\, ((a_1,\, b_1) \oplus (a_2,\, b_2)) &= \rangle f,\, g\langle\, (a_1 + a_2,\, b_1 + b_2) = f(a_1 + a_2) + g(b_1 + b_2) \\
&= (f(a_1) + f(a_2)) + (g(b_1) + g(b_2)) \\
&= (f(a_1) + g(b_1)) + (f(a_2) + g(b_2)) \\
&= \rangle f,\, g\langle\, (a_1,\, b_1) + \rangle f,\, g\langle\, (a_2,\, b_2).
\end{aligned}
$$

Lembramos aqui que, sendo f *e* g *morfismos em* $\mathscr{G}_{ab}$*, tem-se* $f(0) = g(0) = 0$*. Logo* $\rangle f,\, g\langle \circ i_1 : G_1 \to G$ *é idêntico a* f *pois, para todo* $a \in G_1$*, temos que* $\rangle f,\, g\langle \circ i_1(a) = \rangle f,\, g\langle\, (a, 0) = f(a) + g(0) = f(a)$*. Analogamente* $\rangle f,\, g\langle \circ i_2 : G_2 \to G$ *é igual a* g *pois, para todo* $b \in G_2$*, temos que* $\rangle f,\, g\langle \circ i_2(b) = \varphi(0, b) = f(0) + g(b) = g(b)$.

(Unicidade) A exigência de que o Diagrama (2.2.2) seja comutativo faz $\big(\rangle f,\, g\langle \circ i_1 = f,\ \ \rangle f,\, g\langle \circ i_2 = g\big) \Rightarrow \big(\forall a \in G_1, \forall b \in G_2, \rangle f,\, g\langle\, (a,\, 0) = f(a)$ *e* $\rangle f,\, g\langle\, (0,\, b) = g(b)\big)$*. Sendo assim, a forma de* $\rangle f,\, g\langle$ *fica completamente determinada pelo Diagrama (2.2.2) pois devemos ter* $\rangle f,\, g\langle\, (a,\, b) = \rangle f,\, g\langle\, (a,\, 0) + \rangle f,\, g\langle\, (0,\, b) = f(a) + g(b)$*. Logo, a aplicação* $\rangle f,\, g\langle$ *definida acima é única.* ◀

Observamos que a soma direta $G_1 \oplus G_2$ do Exemplo 2.2.2 é um caso particular do grupo produto $G_1 \times G_2$ do Exemplo 2.2.1. Basta observar a prova de que $G_1 \oplus G_2$ é um coproduto na categoria $\mathscr{G}_{ab}$ dos grupos abelianos para ver que, em geral, não é um coproduto na categoria $\mathscr{G}$ dos grupos. Entretanto, $G_1 \times G_2$ é tanto um produto na categoria $\mathscr{G}$ quanto na categoria $\mathscr{G}_{ab}$.

Seja $\mathscr{C}$ uma categoria. Dados dois morfismos $f : C \to A$ e $g : D \to B$ de $\mathscr{C}$, se existirem os produtos $(C \times D, \pi_C, \pi_D)$ e $(A \times B, \pi_A, \pi_B)$, fica definido o único morfismo $f \times g : C \times D \to A \times B$ que verifica $\pi_A \circ (f \times g) = f \circ \pi_C$ e $\pi_B \circ (f \times g) = g \circ \pi_D$. De fato, basta aplicar a Definição 2.2.1 tomando os morfismos $f \circ \pi_C : C \times D \to A$ e $g \circ \pi_D : C \times D \to B$. Vide Diagrama (2.2.3).

$$\begin{tikzcd} C \arrow[d, "f"'] & C \times D \arrow[l, "\pi_C"'] \arrow[r, "\pi_D"] \arrow[d, dashed, "f \times g"] & D \arrow[d, "g"] \\ A & A \times B \arrow[l, "\pi_A"] \arrow[r, "\pi_B"'] & B \end{tikzcd} \tag{2.2.3}$$

Analogamente, se existirem os coprodutos $(C \coprod D, i_C, i_D)$ e $(A \coprod B, i_A, i_B)$ fica definido o único morfismo $f \coprod g : C \coprod D \to A \coprod B$ tal que $(f \coprod g) \circ i_C = i_A \circ f$ e $(f \coprod g) \circ i_D = i_B \circ g$. De fato, basta aplicar a Definição 2.2.2 tomando os morfismos $i_A \circ f : C \to A \coprod B$ e $i_B \circ g : D \to A \coprod B$. Vide Diagrama (2.2.4).

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "i_C"] \arrow[d, "f"'] & C \coprod D \arrow[d, dashed, "f \coprod g"] & D \arrow[l, "i_D"'] \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "i_A"'] & A \coprod B & B \arrow[l, "i_B"] \end{tikzcd} \tag{2.2.4}$$

Nem sempre existem o produto ou o coproduto entre dois objetos de uma categoria $\mathscr{C}$, mas se existirem são únicos a menos de um único isomorfismo. Fazemos esta demonstração somente para o caso do produto, dado que a prova para o coproduto é análoga. Mais formalmente, sejam $A, B \in \mathscr{C}$ e $(A \times B, \pi_A, \pi_B)$ e $(A \times' B, \pi'_A, \pi'_B)$ dois produtos para estes objetos em $\mathscr{C}$. Os morfismos $\pi_A \times' \pi_B : A \times B \to A \times' B$ e $\pi'_A \times \pi'_B : A \times' B \to A \times B$ são os únicos isomorfismos, inversos entre si, que comutam com as projeções.

Demonstração. Conforme a notação da Definição 2.2.1 consideramos o objeto $C = A \times' B$ e os morfismos $f = \pi'_A$ e $g = \pi'_B$. Existe um único morfismo $\pi'_A \times \pi'_B : A \times' B \to A \times B$ tal que $\pi_A \circ (\pi'_A \times \pi'_B) = \pi'_A$ e $\pi_B \circ (\pi'_A \times \pi'_B) = \pi'_B$ (vide Diagrama (2.2.5)). Da mesma forma, trocando o papel dos produtos, existe um único morfismo $\pi_A \times' \pi_B : A \times B \to A \times' B$ tal que $\pi'_A \circ (\pi_A \times' \pi_B) = \pi_A$ e $\pi'_B \circ (\pi_A \times' \pi_B) = \pi_B$ (vide Diagrama (2.2.6)).

$$\begin{tikzcd} & A \times' B \arrow[dl, "\pi'_A"'] \arrow[dr, "\pi'_B"] \arrow[dd, dashed, "\pi'_A \times \pi'_B"] & \\ A & & B \\ & A \times B \arrow[ul, "\pi_A"] \arrow[ur, "\pi_B"'] & \end{tikzcd} \tag{2.2.5}$$

$$
\begin{tikzcd}
& \boldsymbol{A \times B} \arrow[ld, "\pi_A"'] \arrow[rd, "\pi_B"] \arrow[dd, dashed, "\pi_A \times' \pi_B"] & \\
\boldsymbol{A} & & \boldsymbol{B} \\
& \boldsymbol{A \times' B} \arrow[lu, "\pi'_A"] \arrow[ru, "\pi'_B"'] &
\end{tikzcd}
\tag{2.2.6}
$$

Assim fica definido o morfismo $(\pi_A \times' \pi_B) \circ (\pi'_A \times \pi'_B) : A \times' B \to A \times' B$ de modo que $\pi'_A \circ (\pi_A \times' \pi_B) \circ (\pi'_A \times \pi'_B) = \pi_A \circ (\pi'_A \times \pi'_B) = \pi'_A$ e $\pi'_B \circ (\pi_A \times' \pi_B) \circ (\pi'_A \times \pi'_B) = \pi_B \circ (\pi'_A \times \pi'_B) = \pi'_B$ (vide Diagrama (2.2.7)). Analogamente fica definida a composição $(\pi'_A \times \pi'_B) \circ (\pi_A \times' \pi_B) : A \times B \to A \times B$ de modo que $\pi_A \circ (\pi'_A \times \pi'_B) \circ (\pi_A \times' \pi_B) = \pi_A$ e $\pi_B \circ (\pi'_A \times \pi'_B) \circ (\pi_A \times' \pi_B) = \pi_B$ (vide Diagrama (2.2.8)).

$$
\begin{tikzcd}
& \boldsymbol{A \times' B} \arrow[ld, "\pi'_A"'] \arrow[rd, "\pi'_B"] \arrow[d, dashed, "\pi'_A \times \pi'_B"] & \\
\boldsymbol{A} & \boldsymbol{A \times B} \arrow[l, "\pi_A"'] \arrow[r, "\pi_B"] \arrow[d, dashed, "\pi_A \times' \pi_B"] & \boldsymbol{B} \\
& \boldsymbol{A \times' B} \arrow[lu, "\pi'_A"] \arrow[ru, "\pi'_B"'] &
\end{tikzcd}
\tag{2.2.7}
$$

$$
\begin{tikzcd}
& \boldsymbol{A \times B} \arrow[ld, "\pi_A"'] \arrow[rd, "\pi_B"] \arrow[d, dashed, "\pi_A \times' \pi_B"] & \\
\boldsymbol{A} & \boldsymbol{A \times' B} \arrow[l, "\pi'_A"'] \arrow[r, "\pi'_B"] \arrow[d, dashed, "\pi'_A \times \pi'_B"] & \boldsymbol{B} \\
& \boldsymbol{A \times B} \arrow[lu, "\pi_A"] \arrow[ru, "\pi_B"'] &
\end{tikzcd}
\tag{2.2.8}
$$

Novamente usando a notação da Definição 2.2.1, consideramos $C = A \times B$ e os morfismos $f = \pi_A$ e $g = \pi_B$. Como mostrado anteriormente, o morfismo $\pi_A \times \pi_B : A \times B \to A \times B$ que torna o Diagrama (2.2.9) comutativo é único e, portanto, $\pi_A \times \pi_B = (\pi'_A \times \pi'_B) \circ (\pi_A \times' \pi_B)$. Substituindo $\pi_A \times \pi_B$ por $id_{A \times B}$ temos que o Diagrama (2.2.9) continua sendo comutativo. Logo, $(\pi'_A \times \pi'_B) \circ (\pi_A \times' \pi_B) = id_{A \times B}$.

$$
\begin{tikzcd}
& \boldsymbol{A \times B} \arrow[ld, "\pi_A"'] \arrow[rd, "\pi_B"] \arrow[dd, dashed, "\pi_A \times \pi_B"] & \\
\boldsymbol{A} & & \boldsymbol{B} \\
& \boldsymbol{A \times B} \arrow[lu, "\pi_A"] \arrow[ru, "\pi_B"'] &
\end{tikzcd}
\tag{2.2.9}
$$

Analogamente mostra-se que $\pi'_A \times' \pi'_B = (\pi_A \times' \pi_B) \circ (\pi'_A \times \pi'_B) = id_{A \times' B}$. Desta forma a afirmação está demonstrada. ∎

As noções de produto e coproduto em uma categoria $\mathscr{C}$ podem ser estendidas para uma família qualquer de objetos como na Definição 2.2.3 e na Definição 2.2.4. Continua valendo para famílias arbitrárias de objetos da categoria $\mathscr{C}$ que nem sempre existem o produto ou o coproduto, mas que se existirem são únicos a menos de um único isomorfismo. A prova para este fato é análoga à prova dada acima para o produto de dois objetos.

Definição 2.2.3 (Produto de uma família genérica). *Sejam $\mathscr{C}$ uma categoria, J um conjunto de índices e $\{A_j\}_{j\in J} \subset \mathscr{C}$. Um* ***produto*** *em $\mathscr{C}$ para a família $\{A_j\}_{j\in J}$ é um objeto de $\mathscr{C}$, denotado por $\prod_{j\in J} A_j$, junto com uma família de morfismos $\pi_j : \prod_{j\in J} A_j \to A_j$ tais que, para todo $B \in \mathscr{C}$ e para toda família de morfismos $f_j : B \to A_j$, existe um único morfismo $f : B \to \prod_{j\in J} A_j$ de modo que $\pi_j \circ f = f_j$ para todo $j \in J$.* ▶

Exemplo 2.2.3 (Produto na Categoria Universal). *Seja $\mathscr{U}$ a Categoria Universal, J um conjunto de índices e $\{A_j\}_{j\in J} \subset \mathscr{U}$. Definimos o* ***produto cartesiano*** *da família $\{A_j\}_{j\in J}$, denotado por $\prod_{j\in J} A_j$, como sendo o conjunto de todas as funções $(a) : I \to \bigcup_{j\in J} A_j$ tal que $(a)(j) \in A_j$ para todo $j \in J$. Um produto para a família $\{A_j\}_{j\in J}$ na categoria $\mathscr{U}$ é $\prod_{j\in J} A_j$ equipado com a família de morfismos $\pi_j : \prod_{j\in J} A_j \to A_j$, $(a) \mapsto (a)(j)$.* ◀

Definição 2.2.4 (Coproduto de uma família genérica). *Sejam $\mathscr{C}$ uma categoria, J um conjunto de índices e $\{A_j\}_{j\in J} \subset \mathscr{C}$. Um* ***coproduto*** *em $\mathscr{C}$ para a família $\{A_j\}_{j\in J}$ é um objeto de $\mathscr{C}$, denotado por $\coprod_{j\in J} A_j$, junto com uma família de morfismos $i_j : A_j \to \coprod_{j\in J} A_j$ tais que, para todo $B \in \mathscr{C}$ e para toda família de morfismos $f_j : A_j \to B$, existe um único morfismo $f : \coprod_{j\in J} A_j \to B$ de modo que $f \circ i_j = f_j$ para todo $j \in J$.* ▶

Exemplo 2.2.4 (Coproduto na Categoria Universal). *Sejam $\mathscr{U}$ a Categoria Universal, J um conjunto de índices e $\{A_j\}_{j\in J} \subset \mathscr{U}$. Afirmamos que o conjunto*

$$\bigsqcup_{j\in J} A_j := \{(a, j) \in (\bigcup_{j\in J} A_j) \times J : a \in A_j\},$$

junto com a família de morfismos $i_j : A_j \to \bigsqcup_{j\in J} A_j$, $a \mapsto (a, j)$, é um coproduto para a família $\{A_j\}_{j\in J}$ na categoria $\mathscr{U}$. O conjunto $\bigsqcup_{j\in J} A_j$ é chamado de ***união disjunta*** *dos conjuntos A_j.*

Seja $B \in \mathscr{U}$ e $\{f_j : A_j \to B\}_{j\in J}$ uma família de morfismos em $\mathscr{U}$. Defina $f : \bigsqcup_{j\in J} A_j \to B$, $(a, j) \mapsto f_j(a)$. Uma vez que $(a, j) \in \bigsqcup_{j\in J} A_j$ implica que $a \in A_j$ temos que f está bem-definida e, portanto, que é um morfismo em $\mathscr{U}$. É imediato que para todo $j \in J$ temos $f \circ i_j = f_j$, pois para todo $a \in A_j$ tem-se $f \circ i_j(a) = f(a, j) = f_j(a)$. Com o mesmo argumento que usamos no Exemplo 2.2.1 garantimos que f é única, pois está completamente determinada pelas equações $f \circ i_j = f_j$, $j \in J$. ◀

Seja $\mathscr{C}$ uma categoria na qual quaisquer dois objetos admitam um produto. Dados $A, B, C \in \mathscr{C}$ sabemos que os produtos $A \times B$ e $(A \times B) \times C$ existem e que lhes estão associadas as projeções $\pi_A : A\times B \to A$, $\pi_B : A\times B \to B$, $\pi_{A\times B} : (A\times B)\times C \to A\times B$ e $\pi_C : (A \times B) \times C \to C$. Afirmamos que $A \times B \times C$ equipado com as projeções $\pi_A \circ \pi_{A\times B} : A \times B \times C \to A$, $\pi_B \circ \pi_{A\times B} : A \times B \times C \to B$ e $\pi_C : A \times B \times C \to C$ é um produto para A, B e C na categoria $\mathscr{C}$.

Demonstração. Dados morfismos $f_1 : D \to A$, $f_2 : D \to B$ e $f_3 : D \to C$ definimos unicamente $\langle f_1,\, f_2\rangle : D \to A \times B$ de modo que $\pi_A \circ \langle f_1,\, f_2\rangle = f_1$ e $\pi_B \circ \langle f_1,\, f_2\rangle = f_2$. Isto é sempre possível graças à propriedade do produto $A \times B$ representada no lado esquerdo do Diagrama (2.2.10).

$$\begin{tikzcd}
 & A & & D \arrow[dl, "\langle f_1, f_2\rangle"'] \arrow[dr, "f_3"] \arrow[dd, dashed, "\langle\langle f_1, f_2\rangle, f_3\rangle"] & \\
D \arrow[ur, "f_1"] \arrow[dr, "f_2"'] \arrow[rr, "\langle f_1, f_2\rangle"] & & A \times B \arrow[ul, "\pi_A"'] \arrow[dl, "\pi_B"] & & C \\
 & B & & (A \times B) \times C \arrow[ul, "\pi_{A\times B}"] \arrow[ur, "\pi_C"'] &
\end{tikzcd} \tag{2.2.10}$$

Daí definimos $\langle\langle f_1,\, f_2\rangle,\, f_3\rangle : D \to (A \times B) \times C$ de sorte que $\pi_{A\times B} \circ \langle\langle f_1,\, f_2\rangle,\, f_3\rangle = \langle f_1,\, f_2\rangle$ e que $\pi_C \circ \langle\langle f_1,\, f_2\rangle,\, f_3\rangle = f_3$, usando a propriedade do produto $(A \times B) \times C$. Temos então que $\pi_A\circ\pi_{A\times B}\circ\langle\langle f_1,\, f_2\rangle,\, f_3\rangle = \pi_A\circ\langle f_1,\, f_2\rangle = f_1$, $\pi_B\circ\pi_{A\times B}\circ\langle\langle f_1,\, f_2\rangle,\, f_3\rangle = \pi_B \circ \langle f_1,\, f_2\rangle = f_2$ e que $\pi_C \circ \langle\langle f_1,\, f_2\rangle,\, f_3\rangle = f_3$.

Precisamos somente verificar a unicidade de $\langle\langle f_1,\, f_2\rangle,\, f_3\rangle$ para terminar a demonstração. Suponhamos que exista $\langle\langle f_1,\, f_2\rangle,\, f_3\rangle' : D \to A \times B \times C$ de forma que $\pi_A \circ \pi_{A\times B} \circ \langle\langle f_1,\, f_2\rangle,\, f_3\rangle = \pi_A \circ \pi_{A\times B} \circ \langle\langle f_1,\, f_2\rangle,\, f_3\rangle'$, $\pi_B \circ \pi_{A\times B} \circ \langle\langle f_1,\, f_2\rangle,\, f_3\rangle = \pi_B \circ \pi_{A\times B} \circ \langle\langle f_1,\, f_2\rangle,\, f_3\rangle'$ e que $\pi_C \circ \langle\langle f_1,\, f_2\rangle,\, f_3\rangle = \pi_C \circ \langle\langle f_1,\, f_2\rangle,\, f_3\rangle'$. As duas primeiras equações garantem que os Diagramas (2.2.11) são comutativos e, portanto, graças à propriedade de unicidade relativa ao produto $A \times B$ temos que $\pi_{A\times B} \circ \langle\langle f_1,\, f_2\rangle,\, f_3\rangle = \langle f_1,\, f_2\rangle = \pi_{A\times B} \circ \langle\langle f_1,\, f_2\rangle,\, f_3\rangle'$. Mas também vale $\pi_C \circ \langle\langle f_1,\, f_2\rangle,\, f_3\rangle = \pi_C \circ \langle\langle f_1,\, f_2\rangle,\, f_3\rangle'$ e, pela propriedade de unicidade relativa ao produto $(A \times B) \times C$, segue que $\langle\langle f_1,\, f_2\rangle,\, f_3\rangle = \langle\langle f_1,\, f_2\rangle,\, f_3\rangle'$.

$$\begin{tikzcd}
 & D \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dr, "f_2"] \arrow[dd, dashed, "\pi_{A\times B}\circ\langle\langle f_1, f_2\rangle, f_3\rangle"] & & & D \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dr, "f_2"] \arrow[dd, dashed, "\pi_{A\times B}\circ\langle\langle f_1, f_2\rangle, f_3\rangle'"] & \\
A & & B & A & & B \\
 & A \times B \arrow[ul, "\pi_A"] \arrow[ur, "\pi_B"'] & & & A \times B \arrow[ul, "\pi_A"] \arrow[ur, "\pi_B"'] &
\end{tikzcd} \tag{2.2.11}$$

■

Pelo fato de que $(A \times B) \times C$ e $A \times (B \times C)$ são produtos para A, B e C na categoria $\mathscr{C}$, existem únicos isomorfismos $(A \times B) \times C \cong A \times B \times C \cong A \times (B \times C)$. Indutivamente, qualquer família finita de objetos da categoria $\mathscr{C}$ admite um produto. As mesmas observações valem para o coproduto. Isto é, se $\mathscr{C}$ é uma categoria na qual quaisquer dois objetos admitem um coproduto, então fica bem-definido o coproduto em $\mathscr{C}$ de uma qualquer família finita de objetos.

2.3 Produto e coproduto fibrados

Definição 2.3.1 (Produto fibrado)**.** *Sejam $\mathscr{C}$ uma categoria, A, B, $C \in \mathscr{C}$ e $g_1 : A \to C$ e $g_2 : B \to C$. Se existir um objeto $A \times_C B \in \mathscr{C}$ e morfismos $\pi_A : A \times_C B \to A$ e $\pi_B : A \times_C B \to B$ de modo que, para todo $D \in \mathscr{C}$ e para todos $f_1 : D \to A$ e $f_2 : D \to B$ tais que $g_1 \circ f_1 = g_2 \circ f_2$, existe um único morfismo $f_1 \times_C f_2 : D \to A \times_C B$ que torna o Diagrama (2.3.1) comutativo, dizemos que $(A \times_C B, \pi_A, \pi_B)$ é um* ***produto fibrado****, ou* ***pull-back****, de g_1 através de g_2 em $\mathscr{C}$.*

$$\begin{tikzcd}
 & D \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[d, dashed, "f_1 \times_C f_2"] \arrow[dr, "f_2"] & \\
A \arrow[dr, "g_1"'] & A \times_C B \arrow[l, "\pi_A"] \arrow[r, "\pi_B"'] & B \arrow[dl, "g_2"] \\
 & C &
\end{tikzcd} \tag{2.3.1}$$

▶

Exemplo 2.3.1 (Produto fibrado na categoria Top dos espaços topológicos)**.** *Sejam X, Y, $Z \in$ Top. Dadas aplicações contínuas $g_1 : X \to Z$ e $g_2 : Y \to Z$, temos que o produto fibrado $X \times_Z Y$ é o subespaço topológico de $X \times Y$ formado pelos pares (x, y) tais que $g_1(x) = g_2(y)$ com as projeções naturais $\pi_X : X \times_Z Y \to X$, $(x, y) \mapsto x$, e $\pi_Y : X \times_Z Y \to Y$, $(x, y) \mapsto y$. Enfaticamente, sendo $W \in$ Top e $f_1 : W \to X$ e $f_2 : W \to Y$ aplicações contínuas tais que $g_1 \circ f_1 = g_2 \circ f_2$, segue que $f_1 \times_Z f_2 : W \to X \times_Z Y$, $w \mapsto (f_1(w), f_2(w))$, é a única aplicação contínua de W a $X \times_Z Y$ que torna o Diagrama 2.3.1 comutativo.* ◀

Observação 2.3.1. *Pode-se mostrar, a partir do Exemplo 2.3.1, que*

- *sendo (X, x_0), (Y, y_0), $(Z, z_0) \in Top_+$ e dadas duas aplicações contínuas $g_1 : (X, x_0) \to (Z, z_0)$ e $g_2 : (Y, y_0) \to (Z, z_0)$, o produto fibrado $(X, x_0) \times_{(Z, z_0)} (Y, y_0)$ coincide com $(X \times_Z Y, (x_0, y_0))$ e as projeções naturais.*
- *sendo $(X, A_1, \cdots, A_{n-1})$, $(Y, B_1, \cdots, B_{n-1})$, $(Z, C_1, \cdots, C_{n-1}) \in Top_n$, o produto fibrado $(X, A_1, \cdots, A_{n-1}) \times_{(Z, C_1, \cdots, C_{n-1})} (Y, B_1, \cdots, B_{n-1})$ coincide com $(X \times_Z Y, A_1 \times_{C_1} B_1, \cdots, A_{n-1} \times_{C_{n-1}} B_{n-1})$ e as projeções naturais.*
- *sendo $(X, A_1, \cdots, A_{n-1}, x_0)$, $(Y, B_1, \cdots, B_{n-1}, y_0)$, $(Z, C_1, \cdots, C_{n-1}, z_0) \in Top_{n+}$, o produto fibrado $(X, A_1, \cdots, A_{n-1}, x_0) \times_{(Z, C_1, \cdots, C_{n-1}, z_0)} (Y, B_1, \cdots, B_{n-1}, y_0)$ coincide com $(X \times_Z Y, A_1 \times_{C_1} B_1, \cdots, A_{n-1} \times_{C_{n-1}} B_{n-1}, (x_0, y_0))$ e as projeções naturais.* ◀

Definição 2.3.2 (Coproduto fibrado)**.** *Sejam $\mathscr{C}$ uma categoria, A, B, $C \in \mathscr{C}$ e $g_1 : C \to A$ e $g_2 : C \to B$. Se existir um objeto $A \coprod_C B \in \mathscr{C}$ e morfismos $i_A : A \to A \coprod_C B$ e $i_B : B \to A \coprod_C B$ de modo que, para todo $D \in \mathscr{C}$ e para todos $f_1 : A \to D$ e $f_2 : B \to D$ tais que $f_1 \circ g_1 = f_2 \circ g_2$, existe um único morfismo $f_1 \coprod_C f_2$:*

*$A\coprod_C B \to D$ que torna o Diagrama (2.3.2) comutativo, dizemos que $(A\coprod_C B, i_A, i_B)$ é um **coproduto fibrado**, ou **push-forward**, de g_1 através de g_2 em $\mathscr{C}$.*

$$\begin{tikzcd}
 & \boldsymbol{D} & \\
\boldsymbol{A} \arrow[ur, "f_1"] \arrow[r, "i_A"'] & \boldsymbol{A\coprod_C B} \arrow[u, dashed, "f_1\coprod_C f_2"] & \boldsymbol{B} \arrow[ul, "f_2"'] \arrow[l, "i_B"] \\
 & \boldsymbol{C} \arrow[ul, "g_1"] \arrow[ur, "g_2"'] &
\end{tikzcd} \tag{2.3.2}$$

►

Exemplo 2.3.2 (Coproduto fibrado na categoria Top dos espaços topológicos)**.** *Sejam $X, Y, Z \in Top$. Dadas aplicações contínuas $g_1 : Z \to X$ e $g_2 : Z \to Y$, temos que o coproduto fibrado $X\coprod_Z Y$ é o quociente topológico de $X \sqcup Y$ pela relação $\sim$, sendo $g_1(z) \sim g_2(z)$ para todo $z \in Z$, com as inclusões naturais $i_X : X \to X\coprod_Z Y$, $x \mapsto [x]$, e $i_Y : Y \to X\coprod_Z Y$, $y \mapsto [y]$. Enfaticamente, sendo $W \in Top$ e $f_1 : X \to W$ e $f_2 : Y \to W$ aplicações contínuas tais que $f_1 \circ g_1 = f_2 \circ g_2$, segue que $f_1\coprod_Z f_2 : X\coprod_Z Y \to W$, $[x] \mapsto f_1(x)$, $[y] \mapsto f_2(y)$, é a única aplicação contínua de $X\coprod_Z Y$ a W que torna o Diagrama 2.3.2 comutativo.* ◄

Observação 2.3.2. *Pode-se mostrar, a partir do Exemplo 2.3.2, que*

- *sendo (X, x_0), (Y, y_0), $(Z, z_0) \in Top_+$, dadas duas aplicações contínuas $g_1 : (Z, z_0) \to (X, x_0)$ e $g_2 : (Z, z_0) \to (Y, y_0)$, o coproduto fibrado $(X, x_0)\coprod_{(Z,z_0)}(Y, y_0)$ é dado por $(X\coprod_Z Y, [g_1(z_0)])$, sendo $[g_1(z_0)] = [g_2(z_0)]$, e as inclusões naturais.*

- *sendo $(X, A_1, \cdots, A_{n-1})$, $(Y, B_1, \cdots, B_{n-1})$, $(Z, C_1, \cdots, C_{n-1}) \in Top_n$, o coproduto fibrado $(X, A_1, \cdots, A_{n-1})\sqcup_{(Z,C_1,\cdots,C_{n-1})}(Y, B_1, \cdots, B_{n-1})$ coincide com $(X\sqcup_Z Y, A_1 \sqcup_{C_1} B_1, \cdots, A_{n-1} \sqcup_{C_{n-1}} B_{n-1})$ e as inclusões naturais.*

- *sendo $(X, A_1, \cdots, A_{n-1}, x_0)$, $(Y, B_1, \cdots, B_{n-1}, y_0)$, $(Z, C_1, \cdots, C_{n-1}, z_0) \in Top_{n+}$, dadas duas aplicações contínuas $g_1 : (Z, C_1, \cdots, C_{n-1}, z_0) \to (X, A_1, \cdots, A_{n-1}, x_0)$ e $g_2 : (Z, C_1, \cdots, C_{n-1}, z_0) \to (Y, B_1, \cdots, B_{n-1}, y_0)$, temos que o coproduto fibrado $(X, A_1, \cdots, A_{n-1}, x_0) \sqcup_{(Z,C_1,\cdots,C_{n-1},z_0)} (Y, B_1, \cdots, B_{n-1}, y_0)$ coincide com o coproduto fibrado componente por componente $(X\sqcup_Z Y, A_1\sqcup_{C_1} B_1, \cdots, A_{n-1}\sqcup_{C_{n-1}} B_{n-1}, [g_1(z_0)])$, sendo $[g_1(z_0)] = [g_2(z_0)]$, e as inclusões naturais.* ◄

As notações $A \times_C B$ e $A\coprod_C B$ apresentadas, respectivamente, na Definição 2.3.1 e na Definição 2.3.2, não são suficientemente precisas dado que o produto e o coproduto fibrados dependem não só de C mas também dos morfismos g_1 e g_2. No entanto, trata-se da notação mais comumente usada e, por isso, a empregamos aqui. Nem sempre existem o produto ou o coproduto fibrados entre dois objetos de uma categoria $\mathscr{C}$, mas se existirem são únicos a menos de um único isomorfismo. Faz-se a prova para esta afirmação essencialmente com os mesmos passos já vistos na prova da afirmação análoga para produtos e coprodutos presente na Seção 2.2.

Exemplo 2.3.3 (Produto e coproduto fibrados na Categoria Universal $\mathscr{U}$). *Sejam A, B e C objetos na Categoria Universal. Temos que $A \times_C B = \{(a,b) \in A \times B : g_1(a) = g_2(b)\}$ com as projeções naturais e $A \coprod_C B = {A \sqcup B}/{\sim}$ com as inclusões naturais, sendo $g_1(c) \sim g_2(c)$ para todo $c \in C$. Observamos que se $C = A \cap B$ e se $g_1 : C \to A$ e $g_2 : C \to B$ são as inclusões, então $A \coprod_C B = A \cup B$. Também, se C for um conjunto unitário, temos que $A \times_C B = A \times B$ e se C for o conjunto vazio, então $A \coprod_C B = A \sqcup B$.* ◀

As noções de produto e coproduto fibrados se estendem a uma família qualquer de objetos de uma categoria $\mathscr{C}$. Podemos considerar, por exemplo, uma extensão do conceito de produto fibrado para uma família $\{A_j\}_{j \in J} \subset \mathscr{C}$ da seguinte maneira: fixamos $B \in \mathscr{C}$ e uma família de morfismos $g_j : A_j \to B$; se existir um objeto $(\prod_B)_{j \in J} A_j \in \mathscr{C}$ e uma família de morfismos $\pi_j : (\prod_B)_{j \in J} A_j \to A_j$ de modo que, para todo $C \in \mathscr{C}$ e para toda família de morfismos $f_j : C \to A_j$ tal que $g_i \circ f_i = g_j \circ f_j$ para todos $i, j \in J$, existe um único morfismo $f : C \to (\prod_B)_{j \in J} A_j$ de forma que $\pi_j \circ f = f_j$ para todo $j \in J$, dizemos que $\big((\prod_B)_{j \in J} A_j, \{\pi_j\}_{j \in J}\big)$ é um produto fibrado para a família $\{A_j\}_{j \in J}$ em $\mathscr{C}$.

De forma análoga à feita na parágrafo acima, podemos estender a noção de coproduto fibrado para uma família $\{A_j\}_{j \in J} \subset \mathscr{C}$. Entretanto, podemos estender de forma mais geral estas ideias. A seguir vemos que é possível considerar um objeto $B_{ij} \in \mathscr{C}$ para cada par de índices $i, j \in J$ em vez de fixar um único objeto B.

Definição 2.3.3 (Tripla cartesiana). *Sejam $\mathscr{C}$ uma categoria e J um conjunto de índices. Dadas uma família $\{A_j\}_{j \in J} \subset \mathscr{C}$, uma família $\{A_{ij}\}_{i,j \in J} \subset \mathscr{C}$ de modo que $A_{ij} = A_{ji}$ para todos $i, j \in J$, e uma família de morfismos $g_{ij} : A_i \to A_{ij}$ de $\mathscr{C}$, dizemos que $(\{A_j\}, \{A_{ij}\}, \{g_{ij}\})$ é uma **tripla cartesiana** em $\mathscr{C}$ com índices em J.* ▶

A imposição na Definição 2.3.3 de que $A_{ij} = A_{ji}$ para todos $i, j \in J$ é feita a fim de garantir que os morfismos g_{ij} e g_{ji} tenham o mesmo contradomínio para todos $i, j \in J$. Podemos conceber uma tripla cartesiana como no Diagrama (2.3.3).

$$
\begin{tikzcd}
 & & & \boldsymbol{A_{ik}} & & & \\
\cdots & \boldsymbol{A_i} \arrow[urr, "g_{ik}"] \arrow[d, "g_{ij}"'] & & \boldsymbol{A_j} \arrow[dll, "g_{ji}"] \arrow[drr, "g_{jk}"'] & & \boldsymbol{A_k} \arrow[ull, "g_{ki}"'] \arrow[d, "g_{kj}"] & \cdots \\
 & \boldsymbol{A_{ij}} & & & & \boldsymbol{A_{jk}} &
\end{tikzcd}
\tag{2.3.3}
$$

Definição 2.3.4 (Produto fibrado de uma família genérica). *Sejam $\mathscr{C}$ uma categoria, J um conjunto de índices e $\Omega = (\{A_j\}, \{A_{ij}\}, \{g_{ij}\})$ uma tripla cartesiana em $\mathscr{C}$ com índices em J. Um **produto fibrado** em $\mathscr{C}$ para a tripla Ω é um objeto de $\mathscr{C}$, denotado por $\prod_\Omega A_j$, junto com uma família de morfismos $\pi_j : \prod_\Omega A_j \to A_j$ tais que, para todo $B \in \mathscr{C}$ e toda família de morfismos $f_j : B \to A_j$ de modo que $g_{ij} \circ f_i = g_{ji} \circ f_j$ para todo $i, j \in J$, existe um único morfismo $f : B \to \prod_\Omega A_j$ de modo que $\pi_j \circ f = f_j$ para todo $j \in J$.* ▶

Exemplo 2.3.4 (Produto fibrado genérico na Categoria Universal)**.** *Sejam J um conjunto de índices e $\Omega = (\{A_j\}, \{A_{ij}\}, \{g_{ij}\})$ uma tripla cartesiana em $\mathscr{U}$ com índices em J. O produto fibrado $\prod_{\Omega} A_j$ é o subconjunto do produto cartesiano $\prod_{j \in J} A_j$ formado pelos elementos $\{a_j\}$ tais que $g_{ij}(a_j) = g_{ji}(a_i)$ para todos $i, j \in J$.* ◀

Definição 2.3.5 (Tripla cocartesiana)**.** *Sejam $\mathscr{C}$ uma categoria e J um conjunto de índices. Dadas uma família $\{A_j\}_{j \in J} \subset \mathscr{C}$, uma família $\{A_{ij}\}_{i,j \in J} \subset \mathscr{C}$ de modo que $A_{ij} = A_{ji}$ para todos $i, j \in J$, e uma família de morfismos $g_{ij} : A_{ij} \to A_i$ de $\mathscr{C}$, dizemos que $(\{A_j\}, \{A_{ij}\}, \{g_{ij}\})$ é uma **tripla cocartesiana** em $\mathscr{C}$ com índices em J.* ▶

A imposição na Definição 2.3.5 de que $A_{ij} = A_{ji}$ para todos $i, j \in J$ é feita a fim de garantir que os morfismos g_{ij} e g_{ji} tenham o mesmo domínio para todos $i, j \in J$. Podemos conceber uma tripla cocartesiana como no Diagrama (2.3.4).

$$\begin{tikzcd}
 & & \boldsymbol{A_{ik}} \arrow[dl, "g_{ik}"'] \arrow[dr, "g_{ki}"] & & \\
\cdots & \boldsymbol{A_i} & \boldsymbol{A_j} & \boldsymbol{A_k} & \cdots \\
 & \boldsymbol{A_{ij}} \arrow[u, "g_{ij}"] \arrow[ur, "g_{ji}"'] & & \boldsymbol{A_{jk}} \arrow[ul, "g_{jk}"] \arrow[u, "g_{kj}"'] &
\end{tikzcd} \tag{2.3.4}$$

Definição 2.3.6 (Coproduto fibrado de uma família genérica)**.** *Sejam $\mathscr{C}$ uma categoria, J um conjunto de índices e $\Omega = (\{A_j\}, \{A_{ij}\}, \{g_{ij}\})$ uma tripla cocartesiana em $\mathscr{C}$ com índices em J. Um **coproduto fibrado** em $\mathscr{C}$ para a tripla Ω é um objeto de $\mathscr{C}$, denotado por $\coprod_{\Omega} A_j$, junto com uma família de morfismos $i_j : A_j \to \coprod_{\Omega} A_j$ tais que, para todo $B \in \mathscr{C}$ e toda família de morfismos $f_j : A_j \to B$ de modo que $f_i \circ g_{ij} = f_j \circ g_{ji}$ para todo $i, j \in J$, existe um único morfismo $f : \coprod_{\Omega} A_j \to B$ de modo que $f \circ i_j = f_j$ para todo $j \in J$.* ▶

Exemplo 2.3.5 (Coproduto fibrado genérico na Categoria Universal)**.** *Sejam J um conjunto de índices e $\Omega = (\{A_j\}, \{A_{ij}\}, \{g_{ij}\})$ uma tripla cocartesiana em $\mathscr{U}$ com índices em J. O coproduto fibrado $\coprod_{\Omega} A_j$ é o quociente da união disjunta $\bigsqcup_{j \in J} A_j$ pela relação de equivalência $g_{ij}(a_{ij}) \sim g_{ji}(a_{ij})$ para todo $a_{ij} \in A_{ij}$ e todos $i, j \in J$.* ◀

Pode-se mostrar que se uma categoria $\mathscr{C}$ admite (co)produtos fibrados finitos para quaisquer dois objetos seus, então $\mathscr{C}$ admite (co)produtos fibrados finitos quaisquer. Não provamos aqui esta afirmação pois os passos necessários para a demonstração são essencialmente os mesmos passos já vistos na prova da afirmação análoga para produtos e coprodutos presente na Seção 2.2.

Proposição 2.3.1. *Seja $\mathscr{C}$ uma categoria. Se $\mathscr{C}$ tem produtos fibrados finitos e objetos finais, então $\mathscr{C}$ tem produtos finitos e equalizadores.*

Demonstração. (Produtos finitos) Sejam $F \in \mathscr{C}$ um objeto final e $A,\ B \in \mathscr{C}$. Existem únicos morfismos $f_A : A \to F$ e $f_B : B \to F$ em $\mathscr{C}$. Sendo assim, definimos o produto de A e B em $\mathscr{C}$ como sendo o produto fibrado de f_A através de f_B em $\mathscr{C}$. Ou seja, um produto para A e B em $\mathscr{C}$ é a tripla $(A \times_F B,\ \pi_A,\ \pi_B)$. Lembramos que uma categoria tem produtos binários se, e somente se, tem produtos finitos quaisquer.

(Equalizadores) Sejam $f, g : A \to B$ morfismos de $\mathscr{C}$. Como há produtos finitos em $\mathscr{C}$, existem únicos morfismos $\langle id_A,\ f\rangle$ e $\langle id_A,\ g\rangle$ de $\mathscr{C}$ de sorte que os Diagramas (2.3.5) são comutativos. Ou seja, existem únicos morfismos de modo que $\pi_A \circ \langle id_A,\ f\rangle = id_A$, $\pi_B \circ \langle id_A,\ f\rangle = f$, $\pi_A \circ \langle id_A,\ g\rangle = id_A$ e que $\pi_B \circ \langle id_A,\ g\rangle = g$.

$$
\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, "id_A"'] \arrow[dr, "f"] \arrow[dd, dashed, "{\langle id_A, f\rangle}"] & \\
A & & B \\
 & A \times B \arrow[ul, "\pi_A"] \arrow[ur, "\pi_B"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, "id_A"'] \arrow[dr, "g"] \arrow[dd, dashed, "{\langle id_A, g\rangle}"] & \\
A & & B \\
 & A \times B \arrow[ul, "\pi_A"] \arrow[ur, "\pi_B"'] &
\end{tikzcd}
\tag{2.3.5}
$$

Seja $(A \times_{A\times B} A, \pi_1, \pi_2)$ o produto fibrado de $\langle id_A,\ f\rangle$ através de $\langle id_A,\ g\rangle$. Uma vez que o Diagrama (2.3.6) é comutativo porque $\pi_A \circ \langle id_A,\ f\rangle = id_A$ e $\pi_A \circ \langle id_A,\ g\rangle = id_A$, temos que $\pi_1 = id_A \circ \pi_1 = id_A \circ \pi_2 = \pi_2$.

$$
\begin{tikzcd}
 & A \times_{A\times B} A \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\
A \arrow[r, "{\langle id_A, f\rangle}"] \arrow[dr, "id_A"'] & A \times B \arrow[d, "\pi_A"] & A \arrow[l, "{\langle id_A, g\rangle}"'] \arrow[dl, "id_A"] \\
 & A &
\end{tikzcd}
\tag{2.3.6}
$$

Sejam $E := A \times_{A\times B} A$ e $\pi := \pi_1 = \pi_2$. Afirmamos que $\pi : E \to A$ é o equalizador do par (f, g). Precisamos verificar que, para todo $C \in \mathscr{C}$ e para todo morfismo $h : C \to A$ de $\mathscr{C}$ tal que $f \circ h = g \circ h$, existe um único morfismo $k : C \to E$ de sorte que $\pi \circ k = h$.

$$
\begin{tikzcd}
 & E \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\pi"] & \\
A \arrow[r, "{\langle id_A, f\rangle}"] \arrow[dr, "f"'] & A \times B \arrow[d, "\pi_B"] & A \arrow[l, "{\langle id_A, g\rangle}"'] \arrow[dl, "g"] \\
 & A &
\end{tikzcd}
\tag{2.3.7}
$$

Uma vez que o Diagrama (2.3.7) é comutativo porque $\pi_B \circ \langle id_A,\ f\rangle = f$ e $\pi_B \circ \langle id_A,\ g\rangle = g$, temos que $f \circ \pi = g \circ \pi$. Daí temos que $\langle id_A,\ f\rangle \circ h = \langle h,\ f \circ h\rangle = \langle h,\ g \circ h\rangle = \langle id_A,\ g\rangle \circ h$. Portanto, devido à definição de produto fibrado, existe um único morfismo $h \times_{A\times B} h : C \to E$ de $\mathscr{C}$ de modo que o Diagrama (2.3.8) é comutativo.

Logo, $\pi \circ (h \times_{A\times B} h) = h$. Escrevendo $k = h \times_{A\times B} h$ terminamos a prova.

$$\begin{tikzcd}
& \boldsymbol{C} \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, dashed, "h\times_{A\times B}h"] \arrow[dr, "h"] & \\
\boldsymbol{A} \arrow[dr, "\langle id_A, f\rangle"'] & \boldsymbol{E} \arrow[l, "\pi"'] \arrow[r, "\pi"] & \boldsymbol{A} \arrow[dl, "\langle id_A, g\rangle"] \\
& \boldsymbol{A \times B} &
\end{tikzcd} \tag{2.3.8}$$

■

Observação 2.3.3 (Uma categoria com produtos finitos e equalizadores mas sem objetos finais)**.** *Seja $\mathscr{R}_u^*$ a categoria dos anéis unitários, com exceção do anel trivial, cujos morfismos são os homomorfismos de anéis unitários. Esta categoria possui produtos quaisquer e, portanto, em particular, possui todos os produtos finitos. Além disso, dados dois morfismos $f, g : B \to C$ de $\mathscr{R}_u^*$, a aplicação inclusão $\iota : A \to B$, em que $A = \{b \in B : f(b) = g(b)\}$, é o equalizador do par (f, g). Uma vez que todo homomorfismo de anéis unitários fixa o elemento neutro da soma e a identidade multiplicativa do anel, segue que $A \in \mathscr{R}_u^*$. Entretanto $\mathscr{R}_u^*$ não possui objetos finais dado que o único candidato, a menos de isomorfismo, seria o anel trivial.* ◀

Proposição 2.3.2. *Seja $\mathscr{C}$ uma categoria. Se $\mathscr{C}$ tem produtos finitos e equalizadores, então $\mathscr{C}$ tem produtos fibrados finitos.*

Demonstração. Sejam A, B e C objetos de $\mathscr{C}$ e $g_1 : A \to C$ e $g_2 : B \to C$ morfismos de $\mathscr{C}$. Seja $(A \times B, \pi_A, \pi_B)$ um produto para A e B em $\mathscr{C}$. Existe $e : E \to A \times B$ o equalizador do par $(g_1 \circ \pi_A,\ g_2 \circ \pi_B)$, sendo $E \in \mathscr{C}$. Afirmamos que $(E,\ \pi_A \circ e,\ \pi_B \circ e)$ é um produto fibrado de g_1 através de g_2 em $\mathscr{C}$.

$$\begin{tikzcd}
& \boldsymbol{D} \arrow[rr, dashed, bend left, "f_1\times_C f_2"] \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dr, "\langle f_1, f_2\rangle"] \arrow[drrr, "f_2"] & & \boldsymbol{E} \arrow[dlll, "\pi_A\circ e"'] \arrow[dl, "e"] \arrow[dr, "\pi_B\circ e"] & \\
\boldsymbol{A} \arrow[drr, "g_1"'] & & \boldsymbol{A \times B} \arrow[ll, "\pi_A"'] \arrow[rr, "\pi_B"] & & \boldsymbol{B} \arrow[dll, "g_2"] \\
& & \boldsymbol{C} & &
\end{tikzcd} \tag{2.3.9}$$

Precisamos mostrar que, para todo $D \in \mathscr{C}$ e para todos $f_1 : D \to A$ e $f_2 : D \to B$ tais que $g_1 \circ f_1 = g_2 \circ f_2$, existe um único morfismo $f_1 \times_C f_2 : D \to E$ que torna o Diagrama (2.3.9) comutativo.

(Existência) Sendo $(A \times B, \pi_A, \pi_B)$ um produto para A e B em $\mathscr{C}$, existe um único morfismo $\langle f_1,\ f_2\rangle : D \to A \times B$ de sorte que $(g_1 \circ \pi_A) \circ \langle f_1,\ f_2\rangle = (g_2 \circ \pi_B) \circ \langle f_1,\ f_2\rangle$. Mas então, como $e : E \to A \times B$ é o equalizador do par $(g_1 \circ \pi_A,\ g_2 \circ \pi_B)$, existe

$f_1 \times_C f_2 : D \to E$ tal que $e \circ (f_1 \times_C f_2) = \langle f_1, f_2 \rangle$. Temos que $(\pi_A \circ e) \circ (f_1 \times_C f_2) = \pi_A \circ \langle f_1, f_2 \rangle = f_1$ e que $(\pi_B \circ e) \circ (f_1 \times_C f_2) = \pi_B \circ \langle f_1, f_2 \rangle = f_2$.

(Unicidade) Se $(f_1 \times_C f_2)' : D \to E$ é tal que $\pi_A \circ (f_1 \times_C f_2)' = f_1$ e que $\pi_B \circ (f_1 \times_C f_2)' = f_2$, então $e \circ (f_1 \times_C f_2)' = \langle f_1, f_2 \rangle = e \circ (f_1 \times_C f_2)$. Uma vez que todo equalizador é um morfismo mônico, $(f_1 \times_C f_2)' = (f_1 \times_C f_2)$. ■

Nas Proposições 2.3.1 e 2.3.2 assumimos sempre, como em todo texto, que os produtos e produtos fibrados não se dão sobre famílias vazias. No caso em que esta possibilidade é aceita temos que uma categoria $\mathscr{C}$ tem produtos finitos e equalizadores se, e somente se, $\mathscr{C}$ tem produtos fibrados finitos e objetos finais.

2.4 Funtores

Funtores generalizam para categorias a noção de aplicações. Os funtores podem ser pensados como uma "flecha" de uma categoria a outra bem como um morfismo é uma "flecha" de um objeto a outro dentro de uma categoria fixada. Muitas vezes os funtores preservam estruturas adicionais das categorias em questão.

2.4.1 Funtores covariantes

Definição 2.4.1 (Funtor covariante). *Sejam $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ categorias. Dizemos que um **funtor covariante** $T : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ é um par de funções, ambas denotadas por T, sendo uma função entre objetos que associa a cada $A \in \mathscr{C}$ um objeto $T(A) \in \mathscr{D}$ e uma função entre morfismos que associa a cada $f : B \to C$ de $\mathscr{C}$ um morfismo $T(f) : T(B) \to T(C)$ de $\mathscr{D}$ de modo que $T(id_A) = id_{T(A)}$ para todo $A \in \mathscr{C}$ e que $T(g \circ f) = T(g) \circ T(f)$ para todos morfismos $f, g \in \mathscr{C}$ cuja composição esteja definida.* ▶

Observação 2.4.1. *Sejam $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ categorias. Um funtor covariante $T : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ aplica cada isomorfismo (vide Definição 2.1.3) de $\mathscr{C}$ em um isomorfismo de $\mathscr{D}$. De fato, se $f : A \to B$ é um isomorfismo em $\mathscr{C}$, então existe $f^{-1} : B \to A$ de sorte que $f^{-1} \circ f = id_A$ e $f \circ f^{-1} = id_B$. Mas então $T(f^{-1}) \circ T(f) = T(f^{-1} \circ f) = T(id_A) = id_{T(A)}$ e $T(f) \circ T(f^{-1}) = T(f \circ f^{-1}) = T(id_B) = id_{T(B)}$. Notamos que $T(f^{-1}) = T(f)^{-1}$, consequentemente.* ◀

Sejam $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ categorias e $T : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ um funtor covariante. Dizemos que a **imagem do funtor** T, que denotamos por $Im(T)$, consiste dos objetos $T(A)$, $A \in \mathscr{C}$, e dos morfismos $T(f)$, f morfismo de $\mathscr{C}$.

Observação 2.4.2 ($Im(T)$ não é necessariamente uma subcategoria). *Sejam $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ categorias e $T : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ um funtor covariante. Nem sempre $Im(T)$ é uma subcategoria de $\mathscr{D}$. Consideramos $\mathscr{C}$ uma categoria com quatro objetos distintos (A_1, A_2, A_3 e A_4), $\mathscr{D}$ uma categoria com três objetos distintos (B_1, B_2 e B_3) e, para além dos morfismos identidade, consideramos $f_1 : A_1 \to A_2$ e $f_2 : A_3 \to A_4$ os únicos morfismos de $\mathscr{C}$ e $g_1 : B_1 \to B_2$, $g_2 : B_2 \to B_3$ e $g_3 : B_1 \to B_3$ os únicos morfismos de $\mathscr{D}$. Definimos um funtor covariante $T : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ de modo que*

$$T(A_1) = B_1,\ T(A_2) = T(A_3) = B_2 \ \text{ e } \ T(A_4) = B_3.$$

Aqui $Im(T)$ não é uma categoria porque a composição $T(f_2) \circ T(f_1)$ não está definida. De fato, sendo $T(f_1) = g_1$ e $T(f_2) = g_2$, deveríamos ter $T(f_2) \circ T(f_1) = g_3$. Entretanto g_3 não pertence a $Im(T)$. ◀

Proposição 2.4.1. *Sejam $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ categorias. Se $T : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ é um funtor covariante cuja função entre objetos é injetora, então $Im(T)$ é necessariamente uma subcategoria de $\mathscr{D}$.*

Demonstração. Devido à Definição 2.1.2, precisamos verificar que $Im(T)$ é fechada ante a composição de seus morfismos e que $Hom_{Im(T)}(A, B) \subset Hom_{\mathscr{D}}(A, B)$ para todos $A, B \in Im(T)$. Notamos que este último fato decorre diretamente da definição de $Im(T)$. Sejam $T(f) : T(A) \to T(B)$ e $T(g) : T(B) \to T(C)$ morfismos em $Im(T)$. Como a função entre objetos $T : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ é injetora, necessariamente temos que o contradomínio de f coincide com o domínio de g. Logo, existe a composição $g \circ f : A \to C$ em $\mathscr{C}$. Destarte, sendo T um funtor covariante, $T(g) \circ T(f) = T(g \circ f)$. Isto prova que a composição $T(g) \circ T(f)$ está definida em $Im(T)$. Portanto $Im(T)$ é uma subcategoria de $\mathscr{D}$. ■

Observação 2.4.3. *Sejam $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ categorias. Vejamos que a recíproca da afirmação presente na Proposição 2.4.1 não é necessariamente verdadeira. Isto é, existem funtores covariantes entre $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ cuja imagem de $\mathscr{C}$ por eles é uma subcategoria de $\mathscr{D}$ e tais que a sua função entre objetos não é injetora. Seja $\mathscr{C}$ uma categoria com pelo menos dois objetos distintos e seja $\mathscr{D}$ uma categoria não-vazia. Para cada $D \in \mathscr{D}$, definimos o funtor covariante $T_D : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ que aplica cada $C \in \mathscr{C}$ em D e que aplica cada morfismo de $\mathscr{C}$ no morfismo identidade id_D. Claramente $Im(T_D)$ é uma subcategoria de $\mathscr{D}$ e a função entre objetos de T não é injetora.* ◀

Exemplo 2.4.1 (Funtor covariante identidade)**.** *Seja $\mathscr{C}$ uma categoria. Dizemos que $Id_{\mathscr{C}} : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$, que a cada objeto $A \in \mathscr{C}$ fornece $Id_{\mathscr{C}}(A) = A$ e que a cada morfismo $f \in \mathscr{C}$ fornece $Id_{\mathscr{C}}(f) = f$, é o* ***funtor covariante identidade*** *da categoria $\mathscr{C}$ em si mesma. Temos que, para todo $A \in \mathscr{C}$, $Id_{\mathscr{C}}(id_A) = id_A = id_{Id_{\mathscr{C}}(A)}$. Além disso, para todos morfismos $f, g \in \mathscr{C}$ cuja composição esteja definida, $T(g \circ f) = g \circ f = T(g) \circ T(f)$.* ◀

Exemplo 2.4.2 (Funtor covariante entre $\mathscr{M}_l^R$ e $\mathscr{G}_{ab}$)**.** *Sejam R um anel e $A \in \mathscr{M}_l^R$ fixado. Lembramos que na Subseção 2.1 encontram-se definidas as categorias $\mathscr{M}_l^R$ dos R-módulos à esquerda e $\mathscr{G}_{ab}$ dos grupos abelianos. Se $f : B \to C$ é um morfismo em $\mathscr{M}_l^R$, então a aplicação $h_f : Hom_{\mathscr{M}_l^R}(A, B) \to Hom_{\mathscr{M}_l^R}(A, C)$, $\varphi \mapsto f \circ \varphi$, é um morfismo de $\mathscr{G}_{ab}$. Enfaticamente, para todos $\varphi_1, \varphi_2 \in Hom_{\mathscr{M}_l^R}(A, B)$ e para todo $a \in A$, temos que*

$$\begin{aligned} h_f(\varphi_1 + \varphi_2)(a) &= (f \circ (\varphi_1 + \varphi_2))(a) = f(\varphi_1(a) + \varphi_2(a)) = f(\varphi_1(a)) + f(\varphi_2(a)) \\ &= (f \circ \varphi_1)(a) + (f \circ \varphi_2)(a) = h_f(\varphi_1)(a) + h_f(\varphi_2)(a) \\ &= (h_f(\varphi_1) + h_f(\varphi_2))(a). \end{aligned}$$

Assim a igualdade $h_f(\varphi_1 + \varphi_2) = h_f(\varphi_1) + h_f(\varphi_2)$ garante que h_f é um homomorfismo de grupos abelianos e, pois, que é um morfismo de $\mathscr{G}_{ab}$.

Definimos então o funtor covariante $T : \mathscr{M}_l^R \to \mathscr{G}_{ab}$, $B \mapsto Hom_{\mathscr{M}_l^R}(A,B)$, $f \mapsto h_f$, *entre as categorias* $\mathscr{M}_l^R$ *e* $\mathscr{G}_{ab}$. *Vejamos que* T *é realmente um funtor covariante entre estas duas categorias. Temos que, para todo* $B \in \mathscr{M}_l^R$, $T(id_B) : Hom_{\mathscr{M}_l^R}(A,B) \to Hom_{\mathscr{M}_l^R}(A,B)$, $\varphi \mapsto id_B \circ \varphi = \varphi$, *e, pois,* $T(id_B) = id_{Hom_{\mathscr{M}_l^R}(A,B)} = id_{T(B)}$. *Além disso, dados* $f : B \to C$ *e* $g : C \to D$ *morfismos em* $\mathscr{M}_l^R$, *temos por definição que* $T(g \circ f) : Hom_{\mathscr{M}_l^R}(A,B) \to Hom_{\mathscr{M}_l^R}(A,D)$, $\varphi \mapsto (g \circ f) \circ \varphi$. *Uma vez que* $(g \circ f) \circ \varphi = g \circ (f \circ \varphi)$ *para todo* $\varphi \in Hom_{\mathscr{M}_l^R}(A,B)$, *segue-se* $T(g \circ f) = T(g) \circ T(f)$. ◀

Exemplo 2.4.3 (Funtor covariante hom_A)**.** *Sejam* $\mathscr{C}$ *uma categoria e* $A \in \mathscr{C}$ *fixado. Lembramos que também na Subseção 2.1 encontra-se definida a Categoria Universal* $\mathscr{U}$ *dos conjuntos. Se* $f : B \to C$ *é um morfismo em* $\mathscr{C}$, *então a aplicação* $h_f : Hom_{\mathscr{C}}(A,B) \to Hom_{\mathscr{C}}(A,C)$, $\varphi \mapsto f \circ \varphi$, *é um morfismo na Categoria Universal. Esta afirmação é imediata dado que não há necessidade, como no Exemplo 2.4.2, de que* h_f *preserve alguma estrutura adicional.*

Definimos então o funtor covariante $hom_A : \mathscr{C} \to \mathscr{U}$, $B \mapsto Hom_{\mathscr{C}}(A,B)$, $f \mapsto h_f$, *entre as categorias* $\mathscr{C}$ *e* $\mathscr{U}$. *Vejamos que* hom_A *é realmente um funtor covariante entre estas duas categorias. Temos que, para todo* $B \in \mathscr{C}$, $hom_A(id_B) : Hom_{\mathscr{C}}(A,B) \to Hom_{\mathscr{C}}(A,B)$, $\varphi \mapsto id_B \circ \varphi = \varphi$, *e, pois,* $hom_A(id_B) = id_{Hom_{\mathscr{C}}(A,B)} = id_{hom_A(B)}$. *Além disso, dados* $f : B \to C$ *e* $g : C \to D$ *morfismos em* $\mathscr{C}$, *temos por definição que* $hom_A(g \circ f) : Hom_{\mathscr{C}}(A,B) \to Hom_{\mathscr{C}}(A,D)$, $\varphi \mapsto (g \circ f) \circ \varphi$. *Uma vez que* $(g \circ f) \circ \varphi = g \circ (f \circ \varphi)$ *para todo* $\varphi \in Hom_{\mathscr{C}}(A,B)$, *segue-se* $hom_A(g \circ f) = hom_A(g) \circ hom_A(f)$. ◀

Exemplo 2.4.4 (Funtor covariante compactificação a um ponto)**.** *Lembramos, do Exemplo 2.1.5, que*

- $TopHd$ *é a categoria cujos objetos são os espaços topológicos de Hausdorff e cujos morfismos são as aplicações contínuas;*
- $TopLocCptP$ *é a categoria cujos objetos são os espaços topológicos localmente compactos e cujos morfismos são as aplicações contínuas e próprias.*

Definimos $T : TopLocCptP \to TopHd$ *como sendo o* ***funtor covariante compactificação a um ponto*** *que associa a cada* $X \in TopLocCptP$ *sua compactificação a um ponto* $X^+ := X \sqcup \{\infty\} \in TopHd$ *e que a cada morfismo* $f : Y \to Z$ *de* $TopLocCptP$ *associa o morfismo* $f^+ : Y^+ \to Z^+$, $y \mapsto f(y)$, $\infty \mapsto \infty$, *de* $TopHd$. *Este funtor é bem-definido pois* f^+ *é uma aplicação contínua se, e somente se,* f *é uma aplicação contínua e própria.* ◀

Exemplo 2.4.5 (Funtor covariante esquecedor)**.** *Seja* $(\mathscr{C}, \sigma)$ *uma categoria concreta (vide Definição 2.1.4). O* ***funtor covariante esquecedor*** T *entre* $\mathscr{C}$ *e a Categoria Universal* $\mathscr{U}$ *é aquele que associa a cada objeto* $A \in \mathscr{C}$ *seu conjunto subjacente* $\sigma(A)$ *e a cada morfismo* $f : A \to B$ *em* $\mathscr{C}$ *o morfismo* $\sigma(f)$ *em* $\mathscr{U}$. *Vejamos que* T *é realmente um funtor covariante. Temos que, para todo* $A \in \mathscr{C}$, $T(id_A) = \sigma(id_A) = id_{\sigma(A)} = id_{T(A)}$. *Além disso, para todos* $f, g \in \mathscr{C}$ *cuja composição esteja definida,* $T(g) \circ T(f) = \sigma(g) \circ \sigma(f) = \sigma(g \circ f) = T(g \circ f)$. ◀

O funtor covariante esquecedor do Exemplo 2.4.5 “esquece” toda e qualquer estrutura que a categoria concreta $(\mathscr{C}, \sigma)$ possa ter. Podemos, entretanto, definir outros funtores esquecedores que “se lembram” de algumas propriedades mas não de outras. Por exemplo, podemos definir o funtor covariante $T : \mathscr{M}_l^R \to \mathscr{G}_{ab}$ que associa a cada R-módulo à esquerda seu grupo abeliano subjacente e que a cada homomorfismo de R-módulos associa o mesmo morfismo pensado como homomorfismo de grupos abelianos. Este funtor “se lembra” somente da estrutura aditiva de grupos mas não da estrutura de multiplicação externa de R-módulo.

2.4.2 Funtores contravariantes

Definição 2.4.2 (Funtor contravariante). *Sejam $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ categorias. Dizemos que um **funtor contravariante** $S : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ é um par de funções, ambas denotadas por S, sendo uma função entre objetos que associa a cada $A \in \mathscr{C}$ um objeto $S(A) \in \mathscr{D}$ e uma função entre morfismos que associa a cada $f : B \to C$ de $\mathscr{C}$ um morfismo $S(f) : S(B) \to S(C)$ de $\mathscr{D}$ de modo que $S(id_A) = id_{S(A)}$ para todo $A \in \mathscr{C}$ e que $S(g \circ f) = S(f) \circ S(g)$ para todos morfismos $f, g \in \mathscr{C}$ cuja composição esteja definida.* ▶

Exemplo 2.4.6 (Funtor contravariante entre $\mathscr{M}_l^R$ e $\mathscr{G}_{ab}$). *Sejam R um anel e $A \in \mathscr{M}_l^R$ fixado. Se $f : B \to C$ é um morfismo em $\mathscr{M}_l^R$, então a aplicação $h^f : Hom_{\mathscr{M}_l^R}(C, A) \to Hom_{\mathscr{M}_l^R}(B, A)$, $\varphi \mapsto \varphi \circ f$, é um morfismo de $\mathscr{G}_{ab}$. Enfaticamente, para todos $\varphi_1, \varphi_2 \in Hom_{\mathscr{M}_l^R}(C, A)$ e para todo $b \in B$, temos que*

$$\begin{aligned} h^f(\varphi_1 + \varphi_2)(b) &= ((\varphi_1 + \varphi_2) \circ f)(b) = (\varphi_1 + \varphi_2)(f(b)) \\ &= \varphi_1(f(b)) + \varphi_2(f(b)) = h^f(\varphi_1)(b) + h^f(\varphi_2)(b) \\ &= (h^f(\varphi_1) + h^f(\varphi_2))(b). \end{aligned}$$

Assim a igualdade $h^f(\varphi_1 + \varphi_2) = h^f(\varphi_1) + h^f(\varphi_2)$ garante que h^f é um homomorfismo de grupos abelianos e, pois, que é um morfismo de $\mathscr{G}_{ab}$.

Definimos então o funtor covariante $S : \mathscr{M}_l^R \to \mathscr{G}_{ab}$, $B \mapsto Hom_{\mathscr{M}_l^R}(B, A)$, $f \mapsto h^f$, entre as categorias $\mathscr{M}_l^R$ e $\mathscr{G}_{ab}$. Vejamos que S é realmente um funtor contravariante entre estas duas categorias. Temos que, para todo $B \in \mathscr{M}_l^R$, $S(id_B) : Hom_{\mathscr{M}_l^R}(B, A) \to Hom_{\mathscr{M}_l^R}(B, A)$, $\varphi \mapsto \varphi \circ id_B = \varphi$, e, pois, $S(id_B) = id_{Hom_{\mathscr{M}_l^R}(B,A)} = id_{S(B)}$. Além disso, dados $f : B \to C$ e $g : C \to D$ morfismos em $\mathscr{M}_l^R$, temos por definição que $T(g \circ f) : Hom_{\mathscr{M}_l^R}(D, A) \to Hom_{\mathscr{M}_l^R}(B, A)$, $\varphi \mapsto \varphi \circ (g \circ f)$. Uma vez que $\varphi \circ (g \circ f) = (\varphi \circ g) \circ f$ para todo $\varphi \in Hom_{\mathscr{M}_l^R}(B, A)$, segue-se $S(g \circ f) = S(f) \circ S(g)$. ◀

Exemplo 2.4.7 (Funtor contravariante hom^A). *Sejam $\mathscr{C}$ uma categoria e $A \in \mathscr{C}$ fixado. Se $f : B \to C$ é um morfismo em $\mathscr{C}$, então a aplicação $h^f : Hom_{\mathscr{C}}(C, A) \to Hom_{\mathscr{C}}(B, A)$, $\varphi \mapsto \varphi \circ f$, é um morfismo na Categoria Universal. Esta afirmação é imediata dado que não há necessidade, como no Exemplo 2.4.6, de que h^f preserve alguma estrutura adicional.*

Definimos então o funtor contravariante $hom^A : \mathscr{C} \to \mathscr{U}$, $B \mapsto Hom_{\mathscr{C}}(B, A)$, $f \mapsto h^f$, entre as categorias $\mathscr{C}$ e $\mathscr{U}$. Vejamos que hom^A é realmente um funtor contravariante entre estas duas categorias. Temos que, para todo $B \in \mathscr{C}$, $hom^A(id_B)$:

$Hom_{\mathscr{C}}(B,A) \to Hom_{\mathscr{C}}(B,A)$, $\varphi \mapsto \varphi \circ id_B = \varphi$, e, pois, $hom^A(id_B) = id_{Hom_{\mathscr{C}}(B,A)} = id_{hom^A(B)}$. Além disso, dados $f : B \to C$ e $g : C \to D$ morfismos em $\mathscr{C}$, temos por definição que $hom^A(g \circ f) : Hom_{\mathscr{C}}(D,A) \to Hom_{\mathscr{C}}(B,A)$, $\varphi \mapsto \varphi \circ (g \circ f)$. Uma vez que $\varphi \circ (g \circ f) = (\varphi \circ g) \circ f$ para todo $\varphi \in Hom_{\mathscr{C}}(B,A)$, segue-se $hom^A(g \circ f) = hom^A(f) \circ hom^A(g)$. ◀

2.4.3 Composição de funtores

Definição 2.4.3 (Composição de funtores)**.** *Sejam $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$ e $\mathscr{E}$ categorias e $T_1 : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ e $T_2 : \mathscr{D} \to \mathscr{E}$ funtores. Definimos a* ***composição*** *de T_1 e T_2 como sendo $T_2 \circ T_1 : \mathscr{C} \to \mathscr{E}$, $A \mapsto T_2(T_1(A))$, $f \mapsto T_2(T_1(f))$.* ▶

A composição de T_1 e T_2 definida assim gera um novo funtor que é covariante se estes funtores são ambos covariantes ou contravariantes e contravariante caso contrário. De fato, vejamos inicialmente que $(T_2 \circ T_1)(id_A) = id_{(T_2 \circ T_1)(A)}$ para todo $A \in \mathscr{C}$. De fato, $(T_2 \circ T_1)(id_A) = T_2(T_1(id_A)) = T_2(id_{T_1(A)}) = id_{T_2(T_1(A))} = id_{(T_2 \circ T_1)(A)}$. Para verificar a segunda condição que exigimos sobre um funtor consideramos os casos (i) T_1 e T_2 covariantes, (ii) T_1 e T_2 contravariantes e (iii) T_1 covariante e T_2 contravariante. O caso T_1 contravariante e T_2 covariante é tratado de forma análoga ao caso (iii).

Sejam $f, g \in \mathscr{C}$ morfismos cuja composição $g \circ f$ esteja definida. Então (i) $(T_2 \circ T_1)(g \circ f) = T_2(T_1(g \circ f)) = T_2(T_1(g) \circ T_1(f)) = T_2(T_1(g)) \circ T_2(T_1(f)) = (T_2 \circ T_1)(g) \circ (T_2 \circ T_1)(f)$, (ii) $(T_2 \circ T_1)(g \circ f) = T_2(T_1(g \circ f)) = T_2(T_1(f) \circ T_1(g)) = T_2(T_1(g)) \circ T_2(T_1(f)) = (T_2 \circ T_1)(g) \circ (T_2 \circ T_1)(f)$ e (iii) $(T_2 \circ T_1)(g \circ f) = T_2(T_1(g \circ f)) = T_2(T_1(g) \circ T_1(f)) = T_2(T_1(f)) \circ T_2(T_1(g)) = (T_2 \circ T_1)(f) \circ (T_2 \circ T_1)(g)$.

2.4.4 Funtores: covariância e contravariância

Sejam $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ categorias. Vamos verificar agora que a todo funtor contravariante $S : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ está associado um funtor covariante $T_S : \mathscr{C}^{op} \to \mathscr{D}$ e vice-versa. Lembramos que a noção de categoria oposta foi introduzida no Exemplo 2.1.1 e que aqui denotamos por f^{op} um morfismo $f \in Hom_{\mathscr{C}}(A,B)$ quando pensado como morfismo pertencente ao conjunto $Hom_{\mathscr{C}^{op}}(B,A)$.

A partir de um funtor contravariante S definimos unicamente o funtor covariante T_S do seguinte modo: $A \in \mathscr{C}^{op} \mapsto S(A) \in \mathscr{D}$ e $f^{op} \in \mathscr{C}^{op} \mapsto S(f) \in \mathscr{D}$. Vejamos que T_S é realmente um funtor covariante entre as categorias $\mathscr{C}^{op}$ e $\mathscr{D}$. Temos que, para todo $A \in \mathscr{C}^{op}$, $T_S(id_A) = S(id_A) = id_{S(A)} = id_{T_S(A)}$. Além disso, para todos $f, g \in \mathscr{C}$ cuja composição $g \circ f$ esteja definida, $T_S(f^{op} \circ g^{op}) = T_S((g \circ f)^{op}) = S(g \circ f) = S(f) \circ S(g) = T_S(f^{op}) \circ T_S(g^{op})$. Analogamente verifica-se que a cada funtor covariante $T : \mathscr{C}^{op} \to \mathscr{D}$ está associado um funtor contravariante $S_T : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$.

Muitas vezes em afirmações envolvendo objetos e morfismos de uma categoria obtemos resultados duais invertendo a ordem das setas nos morfismos, nos diagramas, *et reliqua*. Desta forma, uma afirmação é verdadeira em uma categoria $\mathscr{C}$ se, e somente se, sua assertiva dual for verdadeira em $\mathscr{C}^{op}$. Por esta razão e pelo que discutimos nos dois parágrafos precedentes, a maioria dos resultados que enunciamos e demonstramos a seguir é feita considerando somente funtores covariantes.

2.4.5 Funtores de duas variáveis

Definição 2.4.4 (Funtor de duas variáveis). *Sejam $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$ e $\mathscr{E}$ categorias. Dizemos que um* ***funtor de duas variáveis*** $T : \mathscr{C} \times \mathscr{D} \to \mathscr{E}$ *é um par de funções, ambas denotadas por T, sendo uma função entre objetos que associa a cada $(A_1, A_2) \in \mathscr{C} \times \mathscr{D}$ um objeto $T(A_1, A_2) \in \mathscr{E}$ e uma função entre morfismos que associa a cada $(f_1, f_2) : (B_1, B_2) \to (C_1, C_2)$ de $\mathscr{C} \times \mathscr{D}$ um morfismo $T(f_1, f_2) : T(B_1, B_2) \to T(C_1, C_2)$ de $\mathscr{D}$ de modo que $T(id_{A_1}, id_{A_2}) = id_{T(A_1,A_2)}$ para todo $(A_1, A_2) \in \mathscr{C} \times \mathscr{D}$ e que $T(f_2 \circ f_1, g_2 \circ g_1) = T(f_1, g_2) \circ T(f_2, g_1)$ para todos morfismos $(f_1, g_1), (f_2, g_2) \in \mathscr{C} \times \mathscr{D}$ cuja composição esteja definida.* ▶

Observação 2.4.4. *A condição $T(f_2 \circ f_1, g_2 \circ g_1) = T(f_1, g_2) \circ T(f_2, g_1)$ diz que, para todo $A \in \mathscr{C}$ fixado, o par $(T(A, -), T(id_A, -))$ é um funtor covariante $T : \mathscr{D} \to \mathscr{E}$. Analogamente, para todo $B \in \mathscr{D}$ fixado, o par $(T(-, B), T(-, id_B))$ é um funtor contravariante $T : \mathscr{C} \to \mathscr{E}$.* ◀

Exemplo 2.4.8 (Funtor entre $\mathscr{M}_l^R \times \mathscr{M}_l^R$ e $\mathscr{G}_{ab}$). *Seja R um anel. Se $f : A \to B$ e $g : C \to D$ são morfismos na categoria $\mathscr{M}_l^R$ dos R-módulos à esquerda, então a aplicação $h_g^f : Hom_{\mathscr{M}_l^R}(B, C) \to Hom_{\mathscr{M}_l^R}(A, D)$, $\varphi \mapsto g \circ \varphi \circ f$, é um morfismo de $\mathscr{G}_{ab}$. Enfaticamente, para todos $\varphi_1, \varphi_2 \in Hom_{\mathscr{M}_l^R}(C_1, B_2)$ e para todo $a \in A$, temos que*

$$\begin{aligned}
h_g^f(\varphi_1 + \varphi_2)(a) &= (g \circ (\varphi_1 + \varphi_2) \circ f)(a) = (g \circ (\varphi_1 + \varphi_2))(f(a)) \\
&= g(\varphi_1(f(a)) + \varphi_2(f(a))) = g(\varphi_1(f(a))) + g(\varphi_2(f(a))) \\
&= h_g^f(\varphi_1)(a) + h_g^f(\varphi_2)(a) = (h_g^f(\varphi_1) + h_g^f(\varphi_2))(a).
\end{aligned}$$

Assim a igualdade $h_g^f(\varphi_1 + \varphi_2) = h_g^f(\varphi_1) + h_g^f(\varphi_2)$ garante que h_g^f é um homomorfismo de grupos abelianos e, pois, que é um morfismo de $\mathscr{G}_{ab}$. Definimos então o funtor de duas variáveis $T : \mathscr{M}_l^R \times \mathscr{M}_l^R \to \mathscr{G}_{ab}$, $(A, B) \mapsto Hom_{\mathscr{M}_l^R}(A, B)$, $(f, g) \mapsto h_g^f$. Graças aos Exemplos 2.4.2 e 2.4.6 vemos que T é realmente um funtor de duas variáveis e que é contravariante na primeira variável e covariante na segunda variável. ◀

Exemplo 2.4.9 (Funtor $hom_{\mathscr{C}}$). *Seja $\mathscr{C}$ uma categoria. Se $f : A \to B$ e $g : C \to D$ são morfismos na categoria $\mathscr{C}$, então a aplicação $h_g^f : Hom_{\mathscr{C}}(B, C) \to Hom_{\mathscr{C}}(A, D)$, $\varphi \mapsto g \circ \varphi \circ f$, é um morfismo na categoria $\mathscr{C}$. Definimos então o funtor de duas variáveis $hom_{\mathscr{C}} : \mathscr{C} \times \mathscr{C} \to \mathscr{U}$, $(A, B) \mapsto Hom_{\mathscr{C}}(A, B)$, $(f, g) \mapsto h_g^f$. Graças aos Exemplos 2.4.3 e 2.4.7 vemos que $hom_{\mathscr{C}}$ é um funtor contravariante na primeira variável e covariante na segunda variável.* ◀

2.5 Transformações naturais

Bem como os funtores ligam duas categorias, podemos ligar dois funtores entre duas categorias fixadas graças à noção de transformação natural. Uma transformação natural pode ser considerada um "morfismo de funtores".

Definição 2.5.1 (Transformações naturais)**.** *Sejam $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ categorias e $T_1, T_2 : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ funtores covariantes.*

$$\begin{tikzcd} T_1(B) \arrow[r, "\alpha_B"] \arrow[d, "T_1(f)"'] & T_2(B) \arrow[d, "T_2(f)"] \\ T_1(C) \arrow[r, "\alpha_C"'] & T_2(C) \end{tikzcd} \tag{2.5.1}$$

*Uma **transformação natural** ou **morfismo canônico** $\alpha : T_1 \to T_2$ é uma função que associa a cada objeto $A \in \mathscr{C}$ um morfismo $\alpha_A : T_1(A) \to T_2(A)$ de $\mathscr{D}$ de modo que, para todo morfismo $f : B \to C$ de $\mathscr{C}$, o Diagrama (2.5.1) seja comutativo.* ▶

Definimos uma transformação natural $\beta : S_1 \to S_2$ entre os funtores contravariantes $S_1, S_2 : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ como na Definição 2.5.1, porém, trocando o Diagrama (2.5.1) pelo Diagrama (2.5.2).

$$\begin{tikzcd} S_1(B) \arrow[r, "\beta_B"] & S_2(B) \\ S_1(C) \arrow[r, "\beta_C"'] \arrow[u, "S_1(f)"] & S_2(C) \arrow[u, "S_2(f)"'] \end{tikzcd} \tag{2.5.2}$$

Exemplo 2.5.1 (Transformação natural identidade)**.** *Sejam $\mathscr{C}$ uma categoria e $T : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ um funtor. Afirmamos que a aplicação que associa a cada $A \in \mathscr{C}$ o morfismo identidade $id_{T(A)}$ é uma transformação natural de T a si mesmo. Esta transformação natural, denotada por $Id_T : T \to T$, é chamada de **transformação natural identidade**.*

$$\begin{tikzcd} T(B) \arrow[r, "id_B"] \arrow[d, "T(f)"'] & T(B) \arrow[d, "T(f)"] \\ T(C) \arrow[r, "id_C"'] & T(C) \end{tikzcd} \tag{2.5.3}$$

Para todo morfismo $f : B \to C$ em $\mathscr{C}$, temos que $id_C \circ T(f) = T(f) \circ id_B$. Ou seja, o Diagrama (2.5.3) é comutativo. Destarte Id_T é realmente uma transformação natural de T a si mesmo. ◀

Definição 2.5.2 (Composição de transformações naturais)**.** *Sejam $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$ e $\mathscr{E}$ categorias, $T_1, T_2, T_3 : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ funtores covariantes e $\alpha_1 : T_1 \to T_2$ e $\alpha_2 : T_2 \to T_3$ transformações naturais. Definimos a **composição** de α_1 e α_2 por $(\alpha_2 \circ \alpha_1)_A := (\alpha_2)_A \circ (\alpha_1)_A$ para todo $A \in \mathscr{C}$.* ▶

Por causa da Definição 2.5.2, os funtores entre duas categorias fixadas são eles mesmos objetos de uma categoria. Os morfismos desta nova categoria são as transformações naturais entre os funtores que são seus objetos. Assim, em particular, dois funtores $T_1, T_2 : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ são isomorfos se existirem duas transformações naturais $\alpha_1 : T_1 \to T_2$ e $\alpha_2 : T_2 \to T_1$ de forma que $\alpha_1 \circ \alpha_2 = Id_{T_2}$ e que $\alpha_2 \circ \alpha_1 = Id_{T_1}$ (vide Exemplo 2.5.2). Neste caso dizemos que α_1 e α_2 são **isomorfismos naturais** entre T_1 e T_2, dizemos que T_1 é **naturalmente isomorfo** a T_2 e escrevemos $T_1 \simeq T_2$.

Proposição 2.5.1. *Sejam $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ categorias e $T_1, T_2 : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ funtores covariantes. Uma transformação natural $\alpha : T_1 \to T_2$ é um isomorfismo natural se, e somente se, $\alpha_A : T_1(A) \to T_2(A)$ é um isomorfismo em $\mathscr{D}$ para todo $A \in \mathscr{C}$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Se a transformação natural $\alpha : T_1 \to T_2$ é um isomorfismo natural, então seu inverso $\alpha^{-1} : T_2 \to T_1$ e a Definição 2.5.2 garantem que $\alpha_A^{-1} \circ \alpha_A = id_{T_1(A)}$ e que $\alpha_A \circ \alpha_A^{-1} = id_{T_2(A)}$ para todo $A \in \mathscr{C}$. Desta forma, α_A é um isomorfismo em $\mathscr{D}$ cujo inverso é α_A^{-1} para todo $A \in \mathscr{C}$. ($\Leftarrow$) Precisamos verificar que, para todo morfismo $f : B \to C$ de $\mathscr{C}$, o Diagrama (2.5.4) seja comutativo.

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{T_2(B)} \arrow[r, "\boldsymbol{\alpha_B^{-1}}"] \arrow[d, "\boldsymbol{T_2(f)}"'] & \boldsymbol{T_1(B)} \arrow[d, "\boldsymbol{T_1(f)}"] \\
\boldsymbol{T_2(C)} \arrow[r, "\boldsymbol{\alpha_C^{-1}}"'] & \boldsymbol{T_1(C)}
\end{tikzcd} \tag{2.5.4}$$

Sendo α uma transformação natural, o Diagrama (2.5.1) é comutativo. Ou seja, $\alpha_C \circ T_1(f) = T_2(f) \circ \alpha_B$. Compondo ambos os lados desta igualdade, à esquerda com α_C^{-1} e à direta com α_B^{-1}, obtemos que $\alpha_C^{-1} \circ T_2(f) = T_1(f) \circ \alpha_B^{-1}$. Isto prova que o Diagrama (2.5.4) é comutativo para todo $A \in \mathscr{C}$. Destarte α é invertível e, portanto, é um isomorfismo natural entre T_1 e T_2. ■

Exemplo 2.5.2 (Isomorfismo natural identidade). *Sejam $\mathscr{C}$ uma categoria, $T : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ um funtor e $Id_T : T \to T$ a transformação natural identidade do Exemplo 2.5.2 que associa a cada $A \in \mathscr{C}$ o morfismo identidade $id_{T(A)}$. Graças à Proposição 2.5.1, Id_T é um isomorfismo natural de T a si mesmo. Este isomorfismo natural é chamado de **isomorfismo natural identidade**.* ◀

2.6 Isomorfismos, mergulhos e equivalências de categorias

Definição 2.6.1 (Isomorfismo de categorias). *Sejam $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ categorias. Dizemos que $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ são **categorias isomorfas** se existirem dois funtores $T_1 : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ e $T_2 : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ de modo que $T_2 \circ T_1 = Id_{\mathscr{C}}$ e que $T_1 \circ T_2 = Id_{\mathscr{D}}$. Caso $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ sejam categorias isomorfas escrevemos $\mathscr{C} \simeq \mathscr{D}$ e dizemos que T_1 e T_2 são **isomorfismos de categorias** inversos entre si.* ▶

Exemplo 2.6.1 (Top$D \simeq \mathscr{U}$). *Sejam TopD a categoria dos espaços topológicos munidos da topologia discreta. Definimos o funtor $T : \mathscr{U} \to TopD$ que associa a cada conjunto X o espaço topológico $(X, \mathscr{P}(X))$ e que a cada função $f : X \to Y$ em $\mathscr{U}$ associa a mesma função em TopD pensada como aplicação contínua entre os espaços $(X, \mathscr{P}(X))$ e $(Y, \mathscr{P}(Y))$. As categorias TopD e $\mathscr{U}$ são isomorfas pois o funtor covariante esquecedor $T^{-1} : TopD \to \mathscr{U}$ é o inverso do funtor T.* ◀

Existe uma dicotomia que diferencia as categorias cuja classe de objetos são conjuntos daquelas cuja classe de objetos são classes próprias. As primeiras são chamadas de **categorias pequenas** e, as segundas, de **categorias grandes**.

Não podemos pensar em uma categoria cujos objetos sejam as categorias grandes e cujos morfismos sejam os funtores entre elas pois a coleção de todas as categorias grandes não é uma classe. Desta forma, com mais razão, não podemos falar na categoria de todas as categorias. Entretanto, podemos tratar sobre a categoria de todas as categorias pequenas. Ou seja, podemos considerar a categoria $\mathscr{U}_{\mathscr{C}}$ cujos objetos são as categorias pequenas, cujos morfismos são os funtores entre estas e cuja lei de composição de morfismos é a lei de composição de funtores previamente definida.

Proposição 2.6.1. *Sejam $\mathscr{U}_{\mathscr{C}}$ a categoria das categorias pequenas e $\mathscr{C}, \mathscr{D} \in \mathscr{U}_{\mathscr{C}}$. Dizemos que $\mathscr{C}$ está relacionada com $\mathscr{D}$ se, e somente se, $\mathscr{C} \simeq \mathscr{D}$. Esta relação é uma relação de equivalência na classe $\mathscr{U}_{\mathscr{C}}$.*

Demonstração. Precisamos verificar que a relação de isomorfismo de categorias pequenas seja reflexiva, simétrica e transitiva para que seja uma relação de equivalência na classe $\mathscr{U}_{\mathscr{C}}$. Sejam $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$, $\mathscr{E} \in \mathscr{U}_{\mathscr{C}}$.

(*i*) (Reflexividade) Considerando o funtor identidade $Id_{\mathscr{C}} : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ tem-se $\mathscr{C} \simeq \mathscr{C}$.

(*ii*) (Simetria) Se $\mathscr{C} \simeq \mathscr{D}$, então, por definição, existem funtores $T_1 : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ e $T_2 : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ em $\mathscr{U}_{\mathscr{C}}$ de modo que $T_2 \circ T_1 = Id_{\mathscr{C}}$ e que $T_1 \circ T_2 = Id_{\mathscr{D}}$. Novamente, por definição, $\mathscr{D} \simeq \mathscr{C}$.

(*iii*) (Transitividade) Se $\mathscr{C} \simeq \mathscr{D}$ e $\mathscr{D} \simeq \mathscr{E}$, então existem funtores $T_1 : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ e $T_2 : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ tais que $T_2 \circ T_1 = Id_{\mathscr{C}}$ e que $T_1 \circ T_2 = Id_{\mathscr{D}}$ e funtores $T_3 : \mathscr{D} \to \mathscr{E}$ e $T_4 : \mathscr{E} \to \mathscr{D}$ de sorte que $T_4 \circ T_3 = Id_{\mathscr{D}}$ e que $T_3 \circ T_4 = Id_{\mathscr{E}}$. Os funtores $T_3 \circ T_1 : \mathscr{C} \to \mathscr{E}$ e $T_2 \circ T_4 : \mathscr{E} \to \mathscr{C}$ são tais que

$$\begin{aligned}(T_2 \circ T_4) \circ (T_3 \circ T_1) &= T_2 \circ (T_4 \circ T_3) \circ T_1 = T_2 \circ Id_{\mathscr{D}} \circ T_1 \\ &= T_2 \circ T_1 = Id_{\mathscr{C}}.\end{aligned}$$

e que

$$\begin{aligned}(T_3 \circ T_1) \circ (T_2 \circ T_4) &= T_3 \circ (T_1 \circ T_2) \circ T_4 = T_3 \circ Id_{\mathscr{D}} \circ T_4 \\ &= T_3 \circ T_4 = Id_{\mathscr{E}}.\end{aligned}$$

Desta forma temos que $\mathscr{C} \simeq \mathscr{E}$. ■

Definição 2.6.2 (Mergulho de categorias)**.** *Sejam $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ categorias e $T : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ um funtor covariante. Dizemos que T é um **mergulho de categorias** se a função entre objetos $T : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ for injetora e se a função entre morfismos $T : Hom_{\mathscr{C}}(A, B) \to Hom_{\mathscr{D}}(T(A), T(B))$ for injetora para todos $A, B \in \mathscr{C}$. Ainda, se $T : Hom_{\mathscr{C}}(A, B) \to Hom_{\mathscr{D}}(T(A), T(B))$ for sobrejetora para todos $A, B \in \mathscr{C}$, dizemos que T é um **mergulho cheio**. Caso exista um mergulho de $\mathscr{C}$ em $\mathscr{D}$ escrevemos $\mathscr{C} \hookrightarrow \mathscr{D}$.* ▶

Exemplo 2.6.2 ($\mathscr{G}_{ab} \hookrightarrow \mathscr{M}_l$)**.** *Consideramos a categoria $\mathscr{M}_l$ dos módulos à esquerda definida da seguinte maneira:*

- *sendo R um anel comutativo e M um R-módulo à esquerda, os objetos de $\mathscr{M}_l$ são os pares (M, R);*
- *sendo $f : M_1 \to M_2$ um morfismo de grupos abelianos, $\varphi : R_1 \to R_2$ um morfismo de anéis e (M_1, R_1), $(M_2, R_2) \in \mathscr{M}_l$, os morfismos de $\mathscr{M}_l$ são pares (f, φ) tais que $f(rm) = \varphi(r)f(m)$ para todo $r \in R_1$ e para todo $m \in M_1$;*

- *sendo* (M_1, R_1), (M_2, R_2), $(M_3, R_3) \in \mathscr{M}_l$, *a lei de composição de morfismos em* $\mathscr{M}_l$ *é definida por*

$$\circ : Hom_{\mathscr{M}_l}((M_1, R_1), (M_2, R_2)) \times Hom_{\mathscr{M}_l}((M_2, R_2), (M_3, R_3))$$
$$\to Hom_{\mathscr{M}_l}((M_1, R_1), (M_3, R_3)),$$
$$((f_1, \varphi_1), (f_2, \varphi_2)) \mapsto (f_2 \circ f_1, \varphi_2 \circ \varphi_1).$$

Definimos então o funtor covariante $T : \mathscr{G}_{ab} \to \mathscr{M}_l$, $G \mapsto (G, \mathbb{Z})$, $f \mapsto (f, id_{\mathbb{Z}})$. *Este funtor é um mergulho cheio de categorias. De fato, é imediato que a função entre objetos* $T : \mathscr{G}_{ab} \to \mathscr{M}_l$ *é injetora e que, para todos* $A, B \in \mathscr{G}_{ab}$, *a função entre morfismos* $T : Hom_{\mathscr{G}_{ab}}(A, B) \to Hom_{\mathscr{M}_l}(T(A), T(B))$ *é também injetora. Além disso, como o único automorfismo de* $\mathbb{Z}$ *é a aplicação identidade* $id_{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, *a aplicação* $T : Hom_{\mathscr{G}_{ab}}(A, B) \to Hom_{\mathscr{M}_l}(T(A), T(B))$ *é sobrejetora para todos* $A, B \in \mathscr{G}_{ab}$. ◀

Exemplo 2.6.3 ($\mathrm{Top}_{n+} \hookrightarrow \mathrm{Top}_{n+1}$)**.** *Definimos um funtor entre* Top_{n+} *e* Top_{n+1} *da seguinte forma: o funtor age sobre os objetos considerando o ponto marcado como um subespaço e age sobre os morfismos como a identidade. Isto é, o funtor é tal que*

$$(X, A_1, \cdots, A_{n-1}, x_0) \mapsto (X, A_1, \cdots, A_{n-1}, \{x_0\})$$

e que o morfismo $f : (X, A_1, \cdots, A_{n-1}, x_0) \to (Y, B_1, \cdots, B_{n-1}, y_0)$ *de* Top_{n+} *é aplicado no morfismo* $f : (X, A_1, \cdots, A_{n-1}, \{x_0\}) \to (Y, B_1, \cdots, B_{n-1}, \{y_0\})$ *de* Top_{n+1}. *O fato de que este funtor seja injetor entre os objetos e entre os morfismos é imediato a partir de sua definição. Já o fato de que seja sobrejetor sobre os morfismos dá-se porque a condição* $f(\{x_0\}) \subset \{y_0\}$ *ocorre se, e somente se,* $f(x_0) = y_0$. *Portanto o funtor assim definido é de fato um mergulho cheio entre as categorias* Top_{n+} *e* Top_{n+1}. ◀

Exemplo 2.6.4 ($\mathrm{Top}_n \hookrightarrow \mathrm{Top}_{n+}$)**.** *Sendo* X *um espaço topológico, consideramos o espaço topológico união disjunta* $X_+ := X \sqcup \{\infty\}$, *em que* ∞ *trata-se de uma componente conexa aberta e fechada em* X. *Definimos um funtor entre* Top_n *e* Top_{n+} *da seguinte forma: o funtor age sobre os objetos aplicando* $(X, A_1, \cdots, A_{n-1}) \in Top_n$ *em* $(X_+, (A_1)_+, \cdots, (A_{n-1})_+, \infty) \in Top_{n+}$ *e age sobre os morfismos aplicando* $f : (X, A_1, \cdots, A_{n-1}) \to (Y, B_1, \cdots, B_{n-1})$ *a sua extensão*

$$f : (X_+, (A_1)_+, \cdots, (A_{n-1})_+, \infty) \to (Y_+, (B_1)_+, \cdots, (B_{n-1})_+, \infty)$$

tal que $f(\infty) = \infty$. *O fato de que este funtor seja injetor entre os objetos e entre os morfismos é imediato a partir de sua definição. Já o fato de que seja sobrejetor sobre os morfismos dá-se porque a condição* $f(\infty) = \infty$ *pode tanto ser acrescentada quanto retirada de* f *sem que haja prejuízo à continuidade e às inclusões que este morfismo deve verificar. Portanto o funtor assim definido é de fato um mergulho cheio entre as categorias* Top_n *e* Top_{n+}. ◀

Observação 2.6.1. *Através da composição dos mergulhos cheios dos Exemplos 2.6.3 e 2.6.4 fica definido um mergulho não-cheio* $Top_n \hookrightarrow Top_{n+1}$. *Também existem outros mergulhos como* $Top_n \hookrightarrow Top_{n+1}$, $(X, A_1, \cdots, A_{n-1}) \mapsto (X, A_1, \cdots, A_{n-1}, \emptyset)$ *e* $Top_{n+} \hookrightarrow Top_{(n+1)+}$, $(X, A_1, \cdots, A_{n-1}, x_0) \mapsto (X, A_1, \cdots, A_{n-1}, \{x_0\}, x_0)$, *que agem como a identidade sobre os morfismos.* ◀

Exemplo 2.6.5 ($\mathrm{Top}_2 \hookrightarrow \mathrm{Hom}(\mathrm{Top})$)**.** *Seja $\iota : Top_2 \hookrightarrow Hom(Top)$ o funtor covariante que associa ao objeto (X, A) o objeto $i : A \hookrightarrow X$, sendo i a aplicação inclusão, e que associa ao morfismo $f : (X, A) \to (Y, B)$ o morfismo $(f, f\ |_A)$. Este funtor é um mergulho cheio pois, se $i : A \hookrightarrow X$ e $j : B \hookrightarrow Y$ são inclusões, então, dado um morfismo $(f, g) : i \to j$, temos que $g(a) = g \circ i(a) = j \circ f(a) = f(a)$ para todo $a \in A$. Portanto $g = f\ |_A$.*

Mais geralmente temos o mergulho cheio $\iota : Top_n \hookrightarrow Hom_n(Top)$ que associa ao objeto $(X, A_1, \cdots, A_{n-1})$ a sequência de inclusões $A_{n-1} \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow A_1 \hookrightarrow X$ e que associa ao morfismo $f : (X, A_1, \cdots, A_{n-1}) \to (Y, B_1, \cdots, B_{n-1})$ o morfismo $(f, f\ |_{A_1}, \cdots, f\ |_{A_{n-1}})$. ◀

Se $\mathscr{C}'$ é uma subcategoria de uma categoria $\mathscr{C}$, então o funtor inclusão $\mathscr{C}' \hookrightarrow \mathscr{C}$ é um mergulho de categorias, o qual é cheio se, e somente se, $\mathscr{C}'$ é uma subcategoria cheia de $\mathscr{C}$.

Sejam $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ categorias e $T : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ um mergulho de categorias. Alguns fatos imediatos são: (i) a imagem $T(\mathscr{C})$ do mergulho T é uma subcategoria de $\mathscr{D}$ isomorfa a $\mathscr{C}$, a qual é cheia se, e somente se, T é um mergulho cheio de categorias e (ii) um funtor T é um isomorfismo de categorias se, e somente, for um mergulho cheio e a função $T : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ entre objetos for também sobrejetora.

Definição 2.6.3 (Equivalência de categorias)**.** *Sejam $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ categorias. Dizemos que $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ são **categorias equivalentes** se existirem dois funtores $T_1 : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ e $T_2 : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ de modo que $T_2 \circ T_1 \simeq Id_{\mathscr{C}}$ e que $T_1 \circ T_2 \simeq Id_{\mathscr{D}}$. Caso $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ sejam categorias equivalentes escrevemos $\mathscr{C} \cong \mathscr{D}$ e dizemos que T_1 e T_2 são **equivalências de categorias** inversas entre si.* ▶

Proposição 2.6.2. *Sejam $\mathscr{U}_{\mathscr{C}}$ a categoria das categorias pequenas e $\mathscr{C}, \mathscr{D} \in \mathscr{U}_{\mathscr{C}}$. Dizemos que $\mathscr{C}$ está relacionada com $\mathscr{D}$ se, e somente se, $\mathscr{C} \cong \mathscr{D}$. Esta relação é uma relação de equivalência na classe $\mathscr{U}_{\mathscr{C}}$.* ■

Se duas categorias são isomorfas, então elas são equivalentes. De fato, se $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ são categorias isomorfas, então existem dois funtores $T_1 : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ e $T_2 : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ de modo que $T_2 \circ T_1 = Id_{\mathscr{C}} \simeq Id_{\mathscr{C}}$ e que $T_1 \circ T_2 = Id_{\mathscr{D}} \simeq Id_{\mathscr{D}}$. A noção de equivalência de categorias, entretanto, é bem mais útil do que a de isomorfismo de categorias pois é bem mais comum a composição de dois funtores ser isomorfa à identidade do que coincidir com esta.

Definição 2.6.4 (Funtores fiéis e cheios)**.** *Sejam $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ categorias e $T : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ um funtor covariante. Dizemos que T é um **funtor fiel** se, para todos $A, B \in \mathscr{C}$, a função entre morfismos $T : Hom_{\mathscr{C}}(A, B) \to Hom_{\mathscr{D}}(T(A), T(B))$ for injetora. Dizemos, também, que T é um **funtor cheio** se, para todos $A, B \in \mathscr{C}$, a função entre morfismos $T : Hom_{\mathscr{C}}(A, B) \to Hom_{\mathscr{D}}(T(A), T(B))$ for sobrejetora.* ▶

Um mergulho de categorias é um funtor fiel, por definição. Todavia um funtor ser fiel ou cheio independe do fato de ser injetor ou sobrejetor entre os objetos.

Exemplo 2.6.6 (Funtor não-injetor fiel)**.** *Definimos o funtor covariante esquecedor* $T : \mathscr{G} \to \mathscr{U}$ *em que* $\mathscr{G}$ *é a categoria dos grupos. Este funtor não é injetor entre os objetos pois um mesmo conjunto pode admitir várias estruturas de grupo. Entretanto* T *é um funtor fiel pois um morfismo de grupos é, em particular, uma função entre conjuntos.* ◀

Exemplo 2.6.7 (Funtor não-sobrejetor cheio)**.** *Seja* $\mathscr{V}$ *a categoria dos espaços vetorias cujos objetos são os pares* $(V, \mathbb{K})$*, onde* $\mathbb{K}$ *é um corpo e* V *é um* $\mathbb{K}$*-espaço vetorial, e cujos morfismos entre* $(V, \mathbb{K})$ *e* $(V', \mathbb{K}')$ *são os pares* (f, φ) *em que* $\varphi : \mathbb{K} \to \mathbb{K}'$ *é um homomorfismo de corpos e* $f : V \to V'$ *é uma aplicação tal que* $f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \varphi(\lambda_1) f(v_1) + \varphi(\lambda_2) f(v_2)$ *para todos* $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ *e para todos* $v_1, v_2 \in V$*. Definimos a composição dos pares* $(f_1, \varphi_1) : (V_1, \mathbb{K}_1) \to (V_2, \mathbb{K}_2)$ *e* $(f_2, \varphi_2) : (V_2, \mathbb{K}_2) \to (V_3, \mathbb{K}_3)$ *como sendo* $(f_2, \varphi_2) \circ (f_1, \varphi_1) := (f_2 \circ f_1, \varphi_2 \circ \varphi_1)$*. Lembramos que* $\mathscr{R}_u$ *é a categoria dos anéis unitários cujos morfismos são os homomorfismos de anéis que preservam as unidades.*

Definimos então o funtor covariante $T : \mathscr{V} \to \mathscr{R}_u$ *que associa a cada par* $(V, \mathbb{K})$ *o anel unitário* $\mathbb{K}$ *e que a cada par* (f, φ) *associa o morfismo* φ *pensado como homomorfismo de anéis unitários. Este funtor é cheio pois, para todos* $(V, \mathbb{K})$, $(V', \mathbb{K}') \in \mathscr{V}$*, todo morfismo* $\varphi : \mathbb{K} \to \mathbb{K}'$ *de* $\mathscr{R}_u$ *é a imagem do morfismo* $(\{0\}, \varphi)$ *de* $\mathscr{V}$*. Entretanto este funtor não é sobrejetor entre os objetos.* ◀

Teorema 2.6.1. *Sejam* $\mathscr{C}$ *e* $\mathscr{D}$ *categorias e* $T : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ *um funtor. Então* T *é uma equivalência de categorias se, e somente se,* T *for um funtor fiel e cheio e, para todo* $B \in \mathscr{D}$*, existir* $A \in \mathscr{C}$ *de modo que* $B \simeq T(A)$*.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Sejam $S : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ uma equivalência de categorias inversa a T e $\alpha : S \circ T \to Id_{\mathscr{C}}$ um isomorfismo de funtores. Temos que o Diagrama (2.6.1) é comutativo para todos $A, B \in \mathscr{C}$. Isto mostra que $(S \circ T)(f) = \alpha_B^{-1} \circ f \circ \alpha_A$. Portanto

$$S \circ T : Hom_{\mathscr{C}}(A, B) \to Hom_{\mathscr{C}}((S \circ T)(A), (S \circ T)(B)),$$

$$f \mapsto \alpha_B^{-1} \circ f \circ \alpha_A$$

é uma aplicação bijetora uma vez que α_A e α_B são isomorfismos. Destarte $T : Hom_{\mathscr{C}}(A, B) \to Hom_{\mathscr{D}}(T(A), T(B))$ é injetora e, pois, T é um funtor fiel.

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{A} \arrow[d, "\boldsymbol{f}"] & \boldsymbol{T(A)} \arrow[d, "\boldsymbol{T(f)}"] & \boldsymbol{(S \circ T)(A)} \arrow[d, "\boldsymbol{(S \circ T)(f)}"] \arrow[ll, bend right, "\boldsymbol{\alpha_A}"'] \\
\boldsymbol{B} & \boldsymbol{T(B)} & \boldsymbol{(S \circ T)(B)} \arrow[ll, bend left, "\boldsymbol{\alpha_B}"]
\end{tikzcd} \tag{2.6.1}$$

Seja $\beta : T \circ S \to Id_{\mathscr{D}}$ um isomorfismo de funtores. Temos analogamente que o Diagrama (2.6.2) é comutativo para todos $A, B \in \mathscr{C}$. Isto mostra que $(T \circ S)(g) = \beta_{T(B)}^{-1} \circ g \circ \beta_{T(A)}$. Portanto

$$T \circ S : Hom_{\mathscr{D}}(T(A), T(B)) \to Hom_{\mathscr{D}}((T \circ S \circ T)(A), (T \circ S \circ T)(B)),$$

$$g \mapsto \beta_{T(B)}^{-1} \circ g \circ \beta_{T(A)}$$

é uma aplicação bijetora uma vez que $\beta_{T(A)}$ e $\beta_{T(B)}$ são isomorfismos. Destarte $T : Hom_{\mathscr{C}}((S \circ T)(A), (S \circ T)(B)) \to Hom_{\mathscr{D}}((T \circ S \circ T)(A), (T \circ S \circ T)(B))$ é sobrejetora. Graças à Proposição 2.1.2, os isomorfismos α_A e α_B induzem uma bijeção entre $Hom_{\mathscr{C}}((S \circ T)(A), (S \circ T)(B))$ e $Hom_{\mathscr{C}}(A, B)$. Analogamente, os isomorfismos $\beta_{T(A)}$ e $\beta_{T(B)}$ induzem uma bijeção entre $Hom_{\mathscr{D}}((T \circ S \circ T)(A), (T \circ S \circ T)(B))$ e $Hom_{\mathscr{D}}(T(A), T(B))$. Portanto $T : Hom_{\mathscr{C}}(A, B) \to Hom_{\mathscr{D}}(T(A), T(B))$ é sobrejetora e, pois, T é um funtor cheio.

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{T(A)} \arrow[d, "\boldsymbol{g}"] & \boldsymbol{(S \circ T)(A)} \arrow[d, "\boldsymbol{S(g)}"] & \boldsymbol{(T \circ S \circ T)(A)} \arrow[d, "\boldsymbol{(T \circ S)(g)}"] \arrow[ll, bend right, "\boldsymbol{\beta_{T(A)}}"'] \\
\boldsymbol{T(B)} & \boldsymbol{(S \circ T)(B)} & \boldsymbol{(T \circ S \circ T)(B)} \arrow[ll, bend left, "\boldsymbol{\beta_{T(B)}}"]
\end{tikzcd} \tag{2.6.2}$$

Enfim, para todo objeto $B \in \mathscr{D}$ fixado, definimos $A := S(B)$. Destarte fica definido o isomorfismo β_B entre $T(A)$ e B.

($\Leftarrow$) Vamos mostrar que existe um funtor $S : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ de sorte que $S \circ T \simeq Id_{\mathscr{C}}$ e que $T \circ S \simeq Id_{\mathscr{D}}$. Para cada $B \in \mathscr{D}$, fixamos $A \in \mathscr{C}$ de modo que $B \simeq T(A)$ e definimos $S(Y) := A$, fixando um isomorfismo $\eta_{A,B} : T(A) \to B$. Dado um morfismo $f : B \to B'$ em $\mathscr{D}$, sejam $A = S(B)$ e $A' = S(B')$. Definimos $\varphi := \eta_{A',B'}^{-1} \circ f \circ \eta_{A,B} : T(A) \to T(A')$. Dado que T é um funtor fiel e cheio, existe um único morfismo $\xi : A \to A'$ tal que $T(\xi) = \varphi$. Definimos então $S(f) := \xi$. ■

Sejam $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ categorias e $T : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ um funtor fiel e cheio. Se $\mathscr{D}'$ é a subcategoria cheia de $\mathscr{D}$ formada pelos objetos B tais que existe $A \in \mathscr{C}$ de modo que $B \simeq T(A)$, então o Teorema 2.6.1 garante que T é uma equivalência entre as categorias $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}'$. Desta forma podemos dizer que um funtor fiel e cheio é um "mergulho a menos de equivalência".

Exemplo 2.6.8 (Equivalência que não é um isomorfismo entre categorias)**.** *Seja $\bar{\mathscr{V}}_f^{\mathbb{K}}$ a subcategoria cheia de $\mathscr{V}_f^{\mathbb{K}}$ cujos objetos são somente os espaços vetoriais $\mathbb{K}^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Segue imediatamente do Teorema 2.6.1 que o mergulho de $\bar{\mathscr{V}}_f^{\mathbb{K}}$ em $\mathscr{V}_f^{\mathbb{K}}$ é uma equivalência de categorias. Obviamente este mergulho não é um isomorfismo de categorias dado que não é sobrejetor entre os objetos.* ◀

2.7 Funtores representáveis

Definição 2.7.1 (Funtores covariantes e contravariantes representáveis)**.** *Sejam $\mathscr{C}$ uma categoria, $\mathscr{U}$ a Categoria Universal, $T : \mathscr{C} \to \mathscr{U}$ um funtor covariante e $S : \mathscr{C} \to \mathscr{U}$ um funtor contravariante. Dizemos que T é um **funtor representável** se existir $A \in \mathscr{C}$ de modo que haja um isomorfismo natural α entre o funtor covariante hom_A*

(vide Exemplo 2.4.3) e o funtor T. Dizemos também que S é um ***funtor representável*** *se existir $B \in \mathscr{C}$ de modo que haja um isomorfismo natural β entre o funtor contravariante hom^B (vide Exemplo 2.4.7) e o funtor S. Os pares (A, α) e (B, β) são ditos* ***representações*** *de T e de S, respectivamente. Além disso, T é dito representado pelo objeto A e S é dito representado pelo objeto B.* ▶

Exemplo 2.7.1 (Funtor contravariante representável). *Sejam $\mathscr{U}$ a Categoria Universal e $S : \mathscr{U} \to \mathscr{U}$ o funtor contravariante que associa a cada conjunto X seu conjunto das partes $\mathscr{P}(X)$ e que a cada função $f : X \to Y$ associa a função $S(f) : S(Y) \to S(X)$, $A \mapsto f^{-1}(A)$. Seja $B := \{0, 1\}$. Afirmamos que a aplicação β que associa a cada conjunto X a função $\beta_X : Hom_{\mathscr{C}}(X, B) \to S(X)$, $g \mapsto g^{-1}(1)$, é um isomorfismo natural entre os funtores hom^B e S. Vejamos inicialmente que β é uma transformação natural. Ou seja, vejamos que, para toda função $f : X \to Y$, o Diagrama (2.7.1) é comutativo.*

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{hom^B(X)} \arrow[r, "\beta_X"] & \boldsymbol{S(X)} \\
\boldsymbol{hom^B(Y)} \arrow[u, "h^f"] \arrow[r, "\beta_Y"'] & \boldsymbol{S(Y)} \arrow[u, "S(f)"']
\end{tikzcd} \tag{2.7.1}$$

De fato, para toda função $f : X \to Y$, temos que

$$\begin{aligned}
(S(f) \circ \beta_Y)(g) &= S(f)(g^{-1}(1)) = f^{-1}(g^{-1}(1)) \\
&= (g \circ f)^{-1}(1) = \beta_X(g \circ f) \\
&= (\beta_X \circ h^f)(g).
\end{aligned}$$

Uma vez que, para todo $X \in \mathscr{U}$, β_X é um isomorfismo em $\mathscr{U}$, a Proposição 2.5.1 diz que β se trata de um isomorfismo natural. Destarte S é um funtor contravariante representável e (B, β) é uma sua representação. ◀

Como na Definição 2.7.1, seja (A, α) uma representação de um funtor covariante $T : \mathscr{C} \to \mathscr{U}$. Denotamos por $\mathscr{C}_T$ a categoria cujos objetos são os pares (C, s), em que C é um objeto de $\mathscr{C}$ e $s \in T(C)$. Um morfismo entre dois objetos (C_1, s_1) e (C_2, s_2) de $\mathscr{C}_T$ é um morfismo $f : C_1 \to C_2$ de $\mathscr{C}$ tal que $T(f)(s_1) = s_2$. É imediato que f é um isomorfismo em $\mathscr{C}_T$ se, e somente se, f é um isomorfismo em $\mathscr{C}$. Chamamos de **elemento universal** do funtor T a um objeto universal (vide Definição 2.1.6) na categoria $\mathscr{C}_T$.

Lema 2.7.1. *Sejam $\mathscr{C}$ uma categoria, $A \in \mathscr{C}$ fixado e $T : \mathscr{C} \to \mathscr{U}$ um funtor covariante. Se $\alpha : hom_A \to T$ é uma transformação natural, então*

$$\alpha_C(g) = T(g)(\alpha_A(id_A))$$

para todo $C \in \mathscr{C}$ e para todo $g \in Hom_{\mathscr{C}}(A, C)$.

Demonstração. Como α é uma transformação natural, temos que o Diagrama (2.7.2) é comutativo para todo $C \in \mathscr{C}$ e todo $g \in Hom_{\mathscr{C}}(A, C)$.

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{hom_A(A)} \arrow[r, "\alpha_A"] \arrow[d, "hom_A(g)"'] & \boldsymbol{T(A)} \arrow[d, "T(g)"] \\
\boldsymbol{hom_A(C)} \arrow[r, "\alpha_C"'] & \boldsymbol{T(C)}
\end{tikzcd} \tag{2.7.2}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}\alpha_C(g) &= \alpha_C(hom_A(g)(id_A)) \\ &= (\alpha_C \circ hom_A(g))(id_A) = (T(g) \circ \alpha_A)(id_A) \\ &= T(g)(\alpha_A(id_A))\end{aligned}$$

para todo $C \in \mathscr{C}$ e todo $g \in Hom_{\mathscr{C}}(A, C)$. ■

Lema 2.7.2. *Sejam $\mathscr{C}$ uma categoria, $A \in \mathscr{C}$ fixado e $T : \mathscr{C} \to \mathscr{U}$ um funtor covariante. Se $u \in T(A)$ e, para todo $C \in \mathscr{C}$, $\beta_C : Hom_{\mathscr{C}}(A, C) \to T(C)$, $g \mapsto T(g)(u)$, então $\beta : hom_A \to T$ é uma transformação natural tal que $\beta_A(id_A) = u$.*

Demonstração. Precisamos mostrar que, para todo morfismo $h : B \to C$ de $\mathscr{C}$, o Diagrama (2.7.3) é comutativo.

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{hom_A(B)} \arrow[r, "\beta_B"] \arrow[d, "hom_A(h)"'] & \boldsymbol{T(B)} \arrow[d, "T(h)"] \\ \boldsymbol{hom_A(C)} \arrow[r, "\beta_C"'] & \boldsymbol{T(C)} \end{tikzcd} \tag{2.7.3}$$

Dado que para todo $f \in Hom_{\mathscr{C}}(A, B)$ temos que

$$\begin{aligned}(\beta_C \circ hom_A(h))(f) &= \beta_C(h \circ f) = T(h \circ f)(u) = (T(h) \circ T(f))(u) \\ &= T(h)(T(f)(u)) = T(h)(\beta_B(f)) \\ &= (T(h) \circ \beta_B)(f).\end{aligned}$$

Desta forma, β é realmente uma transformação natural. Além disso

$$\beta_A(id_A) = T(id_A)(u) = id_{T(A)}(u) = u,$$

como afirmado. ■

Teorema 2.7.1. *Sejam $\mathscr{C}$ uma categoria e $T : \mathscr{C} \to \mathscr{U}$ um funtor covariante. Existe uma correspondência biunívoca entre a classe de representações de T e a classe de elementos universais de T.*

Demonstração. Sejam $Rep(T)$ a classe das representações de T e $E(T)$ a classe dos elementos universais de T. Temos que, para todo $A \in \mathscr{C}$, $\alpha_A(id_A)$ é um elemento de $T(A)$. Afirmamos que a aplicação $\Phi_T : Rep(T) \to E(T)$, $(A, \alpha) \mapsto (A, \alpha_A(id_A))$, é uma bijeção entre as classes $Rep(T)$ e $E(T)$.

Seja $(A, \alpha) \in Rep(T)$. Suponhamos que $(B, s) \in \mathscr{C}_T$. Como $\alpha_B : hom_A(B) \to T(B)$ é uma bijeção, $s = \alpha_B(f)$ para um único morfismo $f : A \to B$ de $\mathscr{C}$. Graças ao Lema 2.7.1, sabemos que $T(f)(\alpha_A(id_A)) = \alpha_B(f) = s$. Portanto, f é um morfismo em $\mathscr{C}_T$ entre $(A, \alpha_A(id_A))$ e (B, s). Caso g seja outro morfismo entre estes dois objetos de $\mathscr{C}_T$ temos que $g \in Hom_{\mathscr{C}}(A, B)$ e que $T(g)(\alpha_A(id_A)) = s$. Destarte, novamente pelo Lema 2.7.1, $\alpha_B(g) = T(g)(\alpha_A(id_A)) = s = \alpha_B(f)$. Sendo α_B uma bijeção, necessariamente $f = g$. Desta forma, f é o único morfismo de $\mathscr{C}_T$ entre

$(A, \alpha_A(id_A))$ e (B, s) e, pois, $(A, \alpha_A(id_A))$ é um objeto universal em $\mathscr{C}_T$. Equivalentemente, $(A, \alpha_A(id_A)) \in E(T)$.

Sejam $(A, u) \in E(T)$ e $\beta : hom_A \to T$ a transformação natural do Lema 2.7.2 que é tal que $\beta_C : Hom_{\mathscr{C}}(A, C) \to T(C)$, $f \mapsto T(f)(u)$, para todo $C \in \mathscr{C}$. Se $s \in T(C)$, então $(C, s) \in \mathscr{C}_T$. Uma vez que (A, u) é um objeto universal em $\mathscr{C}_T$, existe $f \in Hom_{\mathscr{C}}(A, C)$ de sorte que $s = T(f)(u) = \beta_C(f)$. Portanto, β_C é sobrejetiva. Se $\beta_C(f_1) = \beta_C(f_2)$, então $T(f_1)(u) = \beta_C(f_1) = \beta_C(f_2) = T(f_2)(u)$. Ou seja, f_1 e f_2 são ambos morfismos em $\mathscr{C}_T$ entre (A, u) e $(C, T(f_1)(u)) = (C, T(f_2)(u))$. Assim, como (A, u) é um objeto universal em $\mathscr{C}_T$, necessariamente $f_1 = f_2$. Destarte β_C é também injetiva e, pois, um isomorfismo na Categoria Universal. Desta forma β é um isomorfismo natural e, portanto, $(A, \beta) \in Rep(T)$.

Definimos $\Psi_T : E(T) \to Rep(T)$, $(A, u) \mapsto (A, \beta)$, em que β é o isomorfismo natural do parágrafo precedente. Para terminar a demonstração, basta ver que $\Phi_T \circ \Psi_T = id_{E(T)}$ e que $\Psi_T \circ \Phi_T = id_{Rep(T)}$. Enfaticamente, sendo $(A, u) \in E(T)$, temos que

$$\Phi_T \circ \Psi_T(A, u) = \Phi_T(A, \beta) = (A, \beta_A(id_A)).$$

Mas, pelo Lema 2.7.2, $\beta_A(id_A) = u$. Também, sendo $(B, \alpha) \in Rep(T)$, temos que

$$\Psi_T \circ \Phi_T(B, \alpha) = \Psi_T(B, \alpha_B(id_B)) = (B, \beta),$$

em que $\beta : hom_B \to T$ é tal que, para todo $C \in \mathscr{C}$, $\beta_C : Hom_{\mathscr{C}}(A, C) \to T(C)$, $f \mapsto T(f)(\alpha_B(id_B))$. Mas, pelo Lema 2.7.1, $T(f)(\alpha_B(id_B)) = \alpha_C(f)$. Logo $\beta_C = \alpha_C$ para todo $C \in \mathscr{C}$ e, pois, $\alpha = \beta$. ∎

Lembramos que se $f : A_1 \to A_2$ é um morfismo numa categoria $\mathscr{C}$, então a aplicação $h^f_{id_C} : Hom_{\mathscr{C}}(A_2, C) \to Hom_{\mathscr{C}}(A_1, C)$, $\varphi \mapsto id_C \circ \varphi \circ f$, foi definida e estudada em detalhes no Exemplo 2.4.9.

Corolário 2.7.1. *Sejam $\mathscr{C}$ uma categoria e $T : \mathscr{C} \to \mathscr{U}$ um funtor covariante. Se (A, α) e (B, β) são representações de T, então existe um único isomorfismo $f : A \to B$ em $\mathscr{C}$ de sorte que, para todo $C \in \mathscr{C}$, seja comutativo o Diagrama (2.7.4).*

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{T(C)} & \boldsymbol{Hom_{\mathscr{C}}(B, C)} \arrow[l, "\beta_C"'] \arrow[dl, "h^f_{id_C}"] \\ \boldsymbol{Hom_{\mathscr{C}}(A, C)} \arrow[u, "\alpha_C"] & \end{tikzcd} \tag{2.7.4}$$

Demonstração. Seja $u := \alpha_A(id_A)$ e $v := \beta_B(id_B)$. Graças ao Teorema 2.7.1, temos que (A, u) e (B, v) são elementos universais de T e, portanto, existe um único isomorfismo $f : A \to B$ em $\mathscr{C}$ de modo que $T(f)(u) = v$. O Lema 2.7.1 implica que se $C \in \mathscr{C}$ e se $g \in Hom_{\mathscr{C}}(B, C)$, então

$$\begin{aligned} (\alpha_C \circ h^f_{id_C})(g) &= \alpha_C(g \circ f) = T(g \circ f)(u) \\ &= (T(g) \circ T(f))(u) = T(g)(T(f)(u)) = T(g)(v) \\ &= \beta_C(g). \end{aligned}$$

Portanto, o Diagrama (2.7.4) é comutativo para todo $C \in \mathscr{C}$ e para todo $g \in Hom_{\mathscr{C}}(B, C)$. Além disso, se $f' : A \to B$ é outro isomorfismo que torna o Diagrama (2.7.4) comutativo, então tomando $C = B$ e $g = id_B$ temos que

$$T(f')(u) = \alpha_B(f') = (\alpha_B \circ h^{f'}_{id_B})(id_B) = \beta_B(id_B) = v.$$

Como f é o único isomorfismo entre A e B em $\mathscr{C}$ tal que $T(f)(u) = v$, segue que $f = f'$. ■

Corolário 2.7.2 (Lema de Yoneda). *Sejam $\mathscr{C}$ uma categoria, $T : \mathscr{C} \to \mathscr{U}$ um funtor covariante e $A \in \mathscr{C}$ fixado. Existe uma correspondência biunívoca entre o conjunto $T(A)$ e o conjunto $Nat(hom_A, T)$ das transformações naturais do funtor covariante hom_A ao funtor T. Esta bijeção é natural em A e em T.*

Demonstração. Definimos $\Phi_A : Nat(hom_A, T) \to T(A)$, $\alpha \mapsto \alpha_A(id_A)$ e $\Psi_A : T(A) \to Nat(hom_A, T)$, $u \mapsto \beta$, em que $\beta : hom_A \to T$ é a transformação natural do Lema 2.7.2 que é tal que $\beta_C : Hom_{\mathscr{C}}(A, C) \to T(C)$, $f \mapsto T(f)(u)$, para todo $C \in \mathscr{C}$. Da mesma forma que fizemos na demonstração do Teorema 2.7.1, verifica-se que $\Phi_A \circ \Psi_A = id_{T(A)}$ e que $\Psi_A \circ \Phi_A = id_{Nat(hom_A, T)}$. Logo Φ_A é uma bijeção entre o conjunto $Nat(hom_A, T)$ e o conjunto $T(A)$.

$$\begin{array}{ccc} Nat(hom_A, T_1) & \xrightarrow{\Phi_A} & T_1(A) \\ {\scriptstyle N^*(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle T_1(f)} \\ Nat(hom_B, T_1) & \xrightarrow[\Phi_B]{} & T_1(B) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} Nat(hom_A, T_1) & \xrightarrow{\Phi_A} & T_1(A) \\ {\scriptstyle N_*(\alpha)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_A} \\ Nat(hom_A, T_2) & \xrightarrow[\Phi_A]{} & T_2(A) \end{array} \tag{2.7.5}$$

A afirmação sobre a naturalidade da bijeção Φ_A significa que os Diagramas (2.7.5) são comutativos. Aqui $f : A \to B$ é um morfismo de $\mathscr{C}$, $\alpha : T_1 \to T_2$ é uma transformação natural de funtores e $N^*(f)$ e $N_*(f)$ são definidas a seguir. Para todo $C \in \mathscr{C}$ e para todo $\beta \in Nat(hom_A, T_1)$, $N^*(f)(\beta)_C : hom_B(C) = Hom_{\mathscr{C}}(B, C) \to T_1(C)$, $g \mapsto \beta_C(g \circ f)$, e $N_*(\alpha) : Nat(hom_A, T_1) \to Nat(hom_A, T_2)$, $\beta \mapsto \alpha \circ \beta$. ■

Sejam $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ categorias. Um funtor representável é um funtor $T : \mathscr{C} \to \mathscr{U}$ de uma variável que, para algum $A \in \mathscr{C}$, é naturalmente isomorfo ao funtor covariante hom_A ou ao funtor contravariante hom^A. O Teorema 2.7.2 estabelece condições para que um funtor $T : \mathscr{C} \times \mathscr{D} \to \mathscr{U}$ de duas variáveis seja naturalmente isomorfo ao funtor $hom_{\mathscr{D}}$ (vide Exemplo 2.4.9).

Teorema 2.7.2. *Sejam $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ categorias e $T : \mathscr{C} \times \mathscr{D} \to \mathscr{U}$ um funtor, contravariante na primeira variável e covariante na segunda, tal que, para todo $C \in \mathscr{C}$, o funtor covariante $T(C, -) : \mathscr{D} \to \mathscr{U}$ tenha uma representação (A_C, α^C). Então existe um único funtor covariante $S : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ de sorte que $S(C) = A_C$ e existe um isomorfismo natural entre $hom_{\mathscr{D}}(S(-), -)$ e T dado por $\alpha^C_D : hom_{\mathscr{D}}(S(C), D) \to T(C, D)$.*

Demonstração. A função entre objetos $S : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ é definida como $S(C) = A_C$ para todo $C \in \mathscr{C}$. Já a função entre morfismos do funtor S é definida como a seguir. Para cada $C \in \mathscr{C}$, temos que $\alpha^C_{A_C} : hom_{\mathscr{D}}(A_C, A_C) \to T(C, A_C)$ e que $u_C := \alpha^C_{A_C}(id_{A_C}) \in T(C, A_C)$. Graças ao Teorema 2.7.1, (A_C, u_C) é um elemento universal do funtor $T(C, -)$. Se $f : C \to C'$ é um morfismo de $\mathscr{C}$, tomamos $v := T(f, id_{A_{C'}})(u_{C'}) \in T(C, A_{C'})$. Pela universalidade de (A_C, u_C) em $\mathscr{D}$, existe um único morfismo $\bar{f} : A_C \to A_{C'}$ em $\mathscr{D}$ de sorte que

$$T(id_C, \bar{f})(u_C) = v = T(f, id_{A_{C'}})(u_{C'}).$$

Definimos $S(f)$ como sendo o morfismo $\bar{f}$.

Claramente $S(id_C) = id_{A_C} = id_{S(C)}$. Se $C \overset{f}{\to} C' \overset{g}{\to} C''$ são morfismos de $\mathscr{C}$, então por definição $S(g)$ é o único morfismo $\bar{g} : A_{C'} \to A_{C''}$ tal que $T(id_{C'}, \bar{g})(u_{C'}) = T(g, id_{A_{C''}}(u_{C''})$. Similarmente, $S(g \circ f)$ é o único morfismo $\bar{h} : A_C \to A_{C''}$ tal que $T(id_C, \bar{h})(u_C) = T(g \circ f, id_{A_{C''}})(u_{C''})$. Consequentemente $S(g) \circ S(f) = \bar{g} \circ \bar{f}$ é um morfismo $A_C \to A_{C''}$ tal que

$$\begin{aligned}
T(id_C, \bar{g} \circ \bar{f})(u_C) &= (T(id_C, \bar{g}) \circ T(id_C, \bar{f}))(u_C) = T(id_C, \bar{g})T(id_C, \bar{f})(u_C) \\
&= T(id_C, \bar{g})T(f, id_{A_{C'}})(u_{C'}) = T(f, \bar{g})(u_{C'}) \\
&= (T(f, id_{A_{C''}}) \circ T(id_{C'}, \bar{g}))(u_{C'}) = T(f, id_{A_{C''}})T(id_{C'}, \bar{g})(u_{C'}) \\
&= T(f, id_{A_{C''}})T(g, id_{A_{C''}})(u_{C''}) = T(g \circ f, id_{A_{C''}})(u_{C''}) \\
&= T(id_C, \bar{h})(u_C).
\end{aligned}$$

Desta forma, pela universalidade de objetos universais em $\mathscr{D}_{T(C,-)}$, devemos ter

$$S(g) \circ S(f) = \bar{g} \circ \bar{f} = \bar{h} = S(g \circ f)$$

e, portanto, $S : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ é um funtor covariante.

A fim de mostrar que $\alpha : hom_{\mathscr{D}}(S(-), -) \to T$ é um isomorfismo natural, precisamos verificar somente que, para todo morfismo $f : C \to C'$ de $\mathscr{C}$ e para todo morfismo $g : D \to D'$ de $\mathscr{D}$, o Diagrama (2.7.6) é comutativo.

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{hom_{\mathscr{D}}(A_{C'}, D)} \arrow[r, "\alpha_D^{C'}"] \arrow[d, "h_{id_D}^{S(f)}"'] & \boldsymbol{T(C', D)} \arrow[d, "T(f, id_D)"] \\
\boldsymbol{hom_{\mathscr{D}}(A_C, D)} \arrow[r, "\alpha_D^C"'] \arrow[d, "h_g^{id_{A_C}}"'] & \boldsymbol{T(C, D)} \arrow[d, "T(id_C, g)"] \\
\boldsymbol{hom_{\mathscr{D}}(A_C, D')} \arrow[r, "\alpha_{D'}^C"'] & \boldsymbol{T(C, D')}
\end{tikzcd} \tag{2.7.6}$$

O quadrado inferior do Diagrama (2.7.6) é comutativo porque, para cada C fixado, por hipótese, $\alpha^C : hom_{\mathscr{D}}(A_C, -) \to T(C, -)$ é um isomorfismo natural. Vejamos então a comutatividade do quadrado superior do Diagrama (2.7.6). Sendo $k \in hom_{\mathscr{D}}(A_{C'}, D)$, temos que

$$\begin{aligned}
T(f, id_D)\alpha_D^{C'}(k) &= T(f, id_D)T(id_{C'}, k)(u_{C'}) = T(f, k)(u_{C'}) \\
&= T(id_C, k)T(f, id_{A_{C'}})(u_{C'}) = T(id_C, k)T(id_C, \bar{f})(u_C) \\
&= T(id_C, k \circ \bar{f})(u_C) = T(id_C, k \circ S(f))(u_C) \\
&= \alpha_{D'}^C(k \circ S(f)) = \alpha_{D'}^C h_{id_D}^{S(f)}(k),
\end{aligned}$$

graças ao Lema 2.7.1. ■

2.8 Adjunção

Sejam $\mathscr{C}$ uma categoria e $\mathscr{U}$ a Categoria Universal. Lembramos aqui do Exemplo 2.4.9 onde definimos $h_g^f : Hom_{\mathscr{C}}(B, C) \to Hom_{\mathscr{C}}(A, D)$, $\varphi \mapsto g \circ \varphi \circ f$, sendo $f : A \to B$ e $g : C \to D$ morfismos de $\mathscr{C}$, e onde definimos o funtor $hom_{\mathscr{C}} : \mathscr{C} \times \mathscr{C} \to \mathscr{U}$,

$(A,B) \mapsto Hom_{\mathscr{C}}(A,B)$, $(f,g) \mapsto h_g^f$. Este funtor é contravariante na primeira variável e covariante na segunda.

Definição 2.8.1 (Funtores adjuntos)**.** *Sejam $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ categorias e $S : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ e $T : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ funtores covariantes. Dizemos que S é* ***adjunto à esquerda*** *a T, ou ainda que T é* ***adjunto à direita*** *a S, se existir um isomorfismo natural entre os funtores $hom_{\mathscr{D}}(S(-),-)$ e $hom_{\mathscr{C}}(-,T(-))$. Caso S seja adjunto à esquerda a T dizemos que (S,T) é um* ***par adjunto****.* ▶

Com a notação da Definição 2.8.1, esclarecemos que o funtor de duas variáveis $hom_{\mathscr{D}}(S(-),-) : \mathscr{C} \times \mathscr{D} \to \mathscr{U}$ associa a cada (A,B) o conjunto $hom_{\mathscr{D}}(S(A),B) = Hom_{\mathscr{D}}(S(A),B)$ e que associa cada par de morfismos (f,g) à função $hom_{\mathscr{D}}(S(f),g) = h_g^{S(f)}$. Da mesma forma, $hom_{\mathscr{C}}(-,T(-)) : \mathscr{C} \times \mathscr{D} \to \mathscr{U}$, $(A,B) \mapsto hom_{\mathscr{C}}(A,T(B)) = Hom_{\mathscr{C}}(A,T(B))$, $(f,g) \mapsto hom_{\mathscr{C}}(f,T(g)) = h_{T(g)}^f$. Observamos, também, que ambos $hom_{\mathscr{D}}(S(-),-)$ e $hom_{\mathscr{C}}(-,T(-))$ são funtores contravariantes na primeira variável e covariantes na segunda. Por fim, graças à Proposição 2.5.1, S é adjunto à esquerda a T se, e somente se, para todo $A \in \mathscr{C}$ e para todo $B \in \mathscr{D}$, existe uma bijeção $\alpha_{A,B} : Hom_{\mathscr{D}}(S(A),B) \to Hom_{\mathscr{C}}(A,T(B))$ que é natural em A e em B. Lembramos aqui que esta bijeção ser natural em A e em B significa que o Diagrama (2.8.1) é comutativo para todo morfismo $(f,g) : (A,B) \to (A',B')$.

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{Hom_{\mathscr{D}}(S(A),B)} \arrow[r, "\alpha_{A,B}"] \arrow[d, "h_g^{S(f)}"'] & \boldsymbol{Hom_{\mathscr{C}}(A,T(B))} \arrow[d, "h_{T(g)}^f"] \\ \boldsymbol{Hom_{\mathscr{D}}(S(A'),B')} \arrow[r, "\alpha_{A',B'}"'] & \boldsymbol{Hom_{\mathscr{C}}(A',T(B'))} \end{tikzcd} \tag{2.8.1}$$

Exemplo 2.8.1 (O produto e o coproduto definem adjunções)**.** *Seja $\mathscr{C}$ uma categoria com produto. Consideramos o funtor covariante $S : \mathscr{C} \to \mathscr{C} \times \mathscr{C}$ que associa a cada objeto $A \in \mathscr{C}$ o par $(A,A) \in \mathscr{C} \times \mathscr{C}$ e que a cada morfismo f de $\mathscr{C}$ associa o par de morfismos (f,f). Temos que S é adjunto à esquerda ao funtor covariante $T : \mathscr{C} \times \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ que associa a cada objeto $(A,B) \in \mathscr{C} \times \mathscr{C}$ o objeto $A \times B \in \mathscr{C}$ e que a cada morfismo $(f,g) : (A,B) \to (A',B')$ associa o morfismo $f \times g : A \times B \to A' \times B'$, definido na Subseção 2.2. Isto se dá porque um morfismo em $\mathscr{C} \times \mathscr{C}$ com domínio $A \times A$ e contradomínio $B \times C$ é equivalente a um par de morfismos $f : A \to B$ e $g : A \to C$. Portanto temos uma bijeção entre $Hom_{\mathscr{C}\times\mathscr{C}}(S(A),(B,C))$ e $Hom_{\mathscr{C}}(A,T(B,C))$ que é natural em A e em (B,C) para todo $A \in \mathscr{C}$ e para todo $(B,C) \in \mathscr{C} \times \mathscr{C}$. Destarte (S,T) é um par adjunto.*

Analogamente, sendo $\mathscr{C}$ uma categoria com coproduto, consideramos o funtor $T' : \mathscr{C} \times \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ que associa a cada objeto $(A,B) \in \mathscr{C} \times \mathscr{C}$ o objeto $A \coprod B \in \mathscr{C}$ e a cada morfismo $(f,g) : (A,B) \to (A',B')$ associa o morfismo $f \coprod g : A \coprod B \to A' \coprod B'$, também definido na Subseção 2.2. Da mesma forma, S é adjunto à direita a T' porque, para todo $(A,B) \in \mathscr{C} \times \mathscr{C}$ e para todo $C \in \mathscr{C}$, temos uma bijeção entre $Hom_{\mathscr{C}}(T'(A,B),C)$ e $Hom_{\mathscr{C}\times\mathscr{C}}((A,B),S(C))$ que é natural em (A,B) e em C. Por conseguinte (T',S) é um par adjunto. ◀

Exemplo 2.8.2 (Funtores adjuntos preservam (co)produto)**.** *Sejam $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ categorias e sejam $T : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ e $S : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ funtores covariantes. Alegamos que se (S,T)*

é um par adjunto e se $\{A_j\}_{j \in J} \subset \mathscr{C}$, sendo J um conjunto de índices, é tal que o produto $(\prod_{j \in J} A_j, \{\pi_j\}_{j \in J})$ está definido em $\mathscr{C}$, então $(T(\prod_{j \in J} A_j), \{T(\pi_j)\}_{j \in J})$ é um produto para a família $\{T(A_j)\}_{j \in J}$ em $\mathscr{D}$. Deste modo podemos escrever $T(\prod_{j \in J} A_j) = \prod_{j \in J} T(A_j)$.

Precisamos mostrar que, para todo $B \in \mathscr{D}$ e para toda família de morfismos $f_j : B \to T(A_j)$ de $\mathscr{D}$, existe um único morfismo $f : B \to T(\prod_{j \in J} A_j)$ de sorte que $T(\pi_j) \circ f = f_j$ para todo $j \in J$. Sendo que $Hom_{\mathscr{D}}(B, T(A_j))$ é naturalmente bijetivo a $Hom_{\mathscr{D}}(S(B), A_j)$ para todo $j \in J$, temos que à família $\{f_j\}_{j \in J}$ está associada uma única família $f'_j : S(B) \to A_j$ de $\mathscr{C}$. Assim, fica definido um único morfismo $(f'_j)_{j \in J} : S(B) \to \prod_{j \in J} A_j$ de modo que $\pi_j \circ (f'_j)_{j \in J} = f'_j$ para todo $j \in J$. Logo existe uma única aplicação $(f'_j)'_{j \in J} : B \to T(\prod_{j \in J} A_j)$ de forma que $T(\pi_j) \circ (f'_j)'_{j \in J} = f_j$ para todo $j \in J$.

Analogamente, se (S, T) é um par adjunto e se $\{A_j\}_{j \in J} \subset \mathscr{C}$, sendo J um conjunto de índices, é tal que o coproduto $(\coprod_{j \in J} A_j, \{i_j\}_{j \in J})$ está definido em $\mathscr{C}$, então $(T(\coprod_{j \in J} A_j), \{T(i_j)\}_{j \in J})$ é um coproduto para a família $\{T(A_j)\}_{j \in J}$ em $\mathscr{D}$. Deste modo podemos escrever $T(\coprod_{j \in J} A_j) = \coprod_{j \in J} T(A_j)$. ◀

Observação 2.8.1. *No Exemplo 2.8.2 a existência de um par adjunto (S, T) entre duas categorias $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ não assegura que estas admitam o mesmo tipo de produto e de coproduto. Isto significa que uma das categorias pode ter mais produtos ou coprodutos do que a outra. De fato, consideramos $\mathscr{C} = \mathscr{G}_f$ a subcategoria cheia de $\mathscr{G}$ cujos objetos são os grupos finitos e $\mathscr{D} = \mathscr{G}$ a categoria dos grupos. Sejam $T : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ e $S : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ os funtores que associam cada $C \in \mathscr{C}$ e cada $D \in \mathscr{D}$ ao grupo trivial e que associam a cada $f \in \mathscr{C}$ e a cada $g \in \mathscr{D}$ o único morfismo do grupo trivial em si mesmo. É fácil ver que (S, T) é um par adjunto. Todavia $\mathscr{G}_f$ só admite produtos de quantidades finitas de objetos ao passo que $\mathscr{G}$ admite produtos arbitrários.* ◀

Proposição 2.8.1. *Sejam $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ categorias e $T : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ um funtor covariante. Existe um funtor adjunto à esquerda a T se, e somente se, o funtor $hom_{\mathscr{C}}(A, T(-)) : \mathscr{D} \to \mathscr{U}$ for representável para todo $A \in \mathscr{C}$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Se $S : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ é um funtor covariante adjunto à esquerda a T, então existe, para todo $A \in \mathscr{C}$ e para todo $B \in \mathscr{D}$, uma bijeção $\alpha_{A,B} : hom_{\mathscr{D}}(S(A), B) \to hom_{\mathscr{C}}(A, T(B))$ que é natural em A e em B. Destarte, para cada $A \in \mathscr{C}$ fixado, $(S(A), \alpha_{A,-})$ é uma representação do funtor $hom_{\mathscr{C}}(A, T(-))$.

($\Leftarrow$) Reciprocamente, suponhamos que, para todo $C \in \mathscr{C}$, o funtor $hom_{\mathscr{C}}(C, T(-))$ seja representado pelo objeto $A_C \in \mathscr{D}$. Então pelo Teorema 2.7.2 temos que existe um funtor covariante $S : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ tal que $S(C) = A_C$ e que existe um isomorfismo natural entre os funtores $hom_{\mathscr{D}}(S(-), -)$ e $hom_{\mathscr{C}}(-, T(-))$. Portanto (S, T) é um par adjunto. ∎

Teorema 2.8.1. *Sejam $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ categorias e $T : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ um funtor covariante. Se (S_1, T) e (S_2, T) são pares adjuntos, então os funtores covariantes $S_1, S_2 : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ são naturalmente isomorfos.*

Demonstração. Se $S_1 : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ e $S_2 : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ são funtores adjuntos à esquerda a T, então existem isomorfismos naturais $\alpha : hom_{\mathscr{D}}(S_1(-), -) \to hom_{\mathscr{C}}(-, T(-))$ e

$\beta : hom_{\mathscr{D}}(S_2(-), -) \to hom_{\mathscr{C}}(-, T(-))$. Graças à Proposição 2.8.1, para todo objeto $C \in \mathscr{C}$, os objetos $S_1(C)$ e $S_2(C)$ de $\mathscr{D}$ representam o funtor $hom_{\mathscr{C}}(C, T(-))$. Consequentemente, para todo objeto $C \in \mathscr{C}$, o Corolário 2.7.1 garante a existência de um isomorfismo $f_C : S_1(C) \to S_2(C)$. Então, precisamos somente verificar que f_C é natural em C; ou seja, para todo morfismo $g : C \to C'$ de $\mathscr{C}$, precisamos mostrar que o Diagrama (2.8.2) é comutativo.

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{S_1(C)} & \xrightarrow{\boldsymbol{f_C}} & \boldsymbol{S_2(C)} \\ {\scriptstyle \boldsymbol{S_1(g)}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \boldsymbol{S_2(g)}} \\ \boldsymbol{S_1(C')} & \xrightarrow[\boldsymbol{f_{C'}}]{} & \boldsymbol{S_2(C')} \end{array} \tag{2.8.2}$$

Para tanto é suficiente verificar que o Diagrama (2.8.3) é comutativo.

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{hom_{\mathscr{D}}(S_1(C'), S_2(C'))} & \xleftarrow{\boldsymbol{h^{f_{C'}}_{id_{S_2(C')}}}} & \boldsymbol{hom_{\mathscr{D}}(S_2(C'), S_2(C'))} \\ {\scriptstyle \boldsymbol{h^{S_1(g)}_{id_{S_2(C')}}}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \boldsymbol{h^{S_2(g)}_{id_{S_2(C')}}}} \\ \boldsymbol{hom_{\mathscr{D}}(S_1(C), S_2(C'))} & \xleftarrow[\boldsymbol{h^{f_C}_{id_{S_2(C')}}}]{} & \boldsymbol{hom_{\mathscr{D}}(S_2(C), S_2(C'))} \end{array} \tag{2.8.3}$$

Isto se dá porque a imagem de $id_{S_2(C')}$ pelas composições do Diagrama (2.8.3) são $S_2(g) \circ f_C$ e $f_{C'} \circ S_1(g)$. Enfaticamente, temos que

$$\begin{aligned} (h^{f_C}_{id_{S_2(C')}} \circ h^{S_2(g)}_{id_{S_2(C')}})(id_{S_2(C')}) &= h^{f_C}_{id_{S_2(C')}}(id_{S_2(C')} \circ id_{S_2(C')} \circ S_2(g)) \\ &= h^{f_C}_{id_{S_2(C')}}(S_2(g)) = id_{S_2(C')} \circ S_2(g) \circ f_C \\ &= S_2(g) \circ f_C \end{aligned}$$

e que

$$\begin{aligned} (h^{S_1(g)}_{id_{S_2(C')}} \circ h^{f_{C'}}_{id_{S_2(C')}})(id_{S_2(C')}) &= h^{S_1(g)}_{id_{S_2(C')}}(id_{S_2(C')} \circ id_{S_2(C')} \circ f_{C'}) \\ &= h^{S_1(g)}_{id_{S_2(C')}}(f_{C'}) = id_{S_2(C')} \circ f_{C'} \circ S_1(g) \\ &= f_{C'} \circ S_1(g). \end{aligned}$$

Vejamos que o Diagrama 2.8.3 é o quadrado à esquerda do diagrama abaixo. Destarte mostrando que este é um diagrama comutativo teremos mostrado que o Diagrama 2.8.3 também o é.

Os triângulos superior e inferior do diagrama acima são comutativos pelo Corolário 2.7.1 e os quadrados à direita e à frente do mesmo também o são pois β e α, respectivamente, são isomorfismos naturais. Desta forma precisamos somente verificar que o quadrado à esquerda é comutativo a fim de que este diagrama também o seja. Temos que

$$\begin{aligned} \alpha_C \circ h^{S_1(g)}_{id_{S_2(C')}} \circ h^{f_{C'}}_{id_{S_2(C')}} &= h^{g}_{id_{S_2(C')}} \circ \alpha_{C'} \circ h^{f_{C'}}_{id_{S_2(C')}} \\ &= h^{g}_{id_{S_2(C')}} \circ \beta_{C'} = \beta_C \circ h^{S_2(g)}_{id_{S_2(C')}} \\ &= \alpha_C \circ h^{f_C}_{id_{S_2(C')}} \circ h^{S_2(g)}_{id_{S_2(C')}}. \end{aligned}$$

$$
\begin{tikzcd}
hom_{\mathscr{D}}(S_1(C'), S_2(C')) \arrow[d, "h^{S_1(g)}_{id_{S_2(C')}}"'] \arrow[rr, bend left, "\alpha_{C'}"] & hom_{\mathscr{D}}(S_2(C'), S_2(C')) \arrow[l, "h^{f_{C'}}_{id_{S_2(C')}}"'] \arrow[r, "\beta_{C'}"] \arrow[d, "h^{S_2(g)}_{id_{S_2(C')}}"'] & hom_{\mathscr{C}}(C', TS_2(C')) \arrow[d, "h^{g}_{id_{S_2(C')}}"] \\
hom_{\mathscr{D}}(S_1(C), S_2(C')) \arrow[rr, bend right, "\alpha_C"'] & hom_{\mathscr{D}}(S_2(C), S_2(C')) \arrow[l, "h^{f_C}_{id_{S_2(C')}}"] \arrow[r, "\beta_C"'] & hom_{\mathscr{C}}(C, TS_2(C'))
\end{tikzcd}
$$

Mas como $\alpha_C = \alpha_{C,S_2(C')}$ é, por hipótese, injetor, segue que $h^{S_1(g)}_{id_{S_2(C')}} \circ h^{f_{C'}}_{id_{S_2(C')}} = h^{f_C}_{id_{S_2(C')}} \circ h^{S_2(g)}_{id_{S_2(C')}}$. Assim terminamos a prova. ■

2.9 Limite direto e limite inverso

Seja $\mathscr{O}$ a categoria dos conjuntos parcialmente ordenados cujos morfismos são as aplicações entre conjuntos que respeitam a ordem. Isto é, se $(A, \leq_A)$ e $(B, \leq_B)$ são conjuntos parcialmente ordenados, então uma aplicação $f : A \to B$ é um morfismo em $\mathscr{O}$ se, e somente se, $\alpha \leq_A \beta \Rightarrow f(\alpha) \leq_B f(\beta)$, $\alpha, \beta \in A$.

Definição 2.9.1 (Conjunto direto)**.** *Seja $(\Lambda, \leq) \in \mathscr{O}$. Dizemos que $(\Lambda, \leq)$ é um* ***conjunto direto*** *se, para todos α, $\beta \in \Lambda$, existir $\gamma \in \Lambda$ de modo que $\alpha \leq \gamma$ e que $\beta \leq \gamma$.* ▶

Seja $(A, \leq) \in \mathscr{O}$. Dizemos que $\alpha \in A$ é um **elemento isolado** em A se ele só for comparável consigo mesmo. Todo conjunto unitário, equipado com a única ordem que lhe é possível, tem um elemento isolado e é um conjunto direto. Além disso, todo conjunto totalmente ordenado com pelo menos dois elementos não possui elemento isolado e é um conjunto direto. Pode-se mostrar que se A é um conjunto direto, então não existe nenhum seu elemento isolado. A recíproca desta afirmação não é necessariamente verdadeira.

Definição 2.9.2 (Sistema direto)**.** *Seja $\mathscr{C}$ uma categoria. Dizemos que uma tripla*

$$\big((\Lambda, \leq), \{A_\alpha\}, \{\iota_{\alpha\beta}\}\big)$$

é um ***sistema direto*** *em $\mathscr{C}$, sendo $(\Lambda, \leq) \in \mathscr{O}$ um conjunto direto, $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda} \subset \mathscr{C}$ uma coleção de objetos e $\{\iota_{\alpha\beta}\}$ uma coleção de morfismos $\iota_{\alpha\beta} : A_\alpha \to A_\beta$, com α, $\beta \in \Lambda$ e $\alpha \leq \beta$, de sorte que $\iota_{\alpha\alpha} = id_{A_\alpha}$ para todo $\alpha \in \Lambda$, e que $\iota_{\alpha\gamma} = \iota_{\beta\gamma} \circ \iota_{\alpha\beta}$ para todos α, β, $\gamma \in \Lambda$ com $\alpha \leq \beta \leq \gamma$.* ▶

Definição 2.9.3 (Limite direto)**.** *Sejam $\mathscr{C}$ uma categoria e $\big((\Lambda, \leq), \{A_\alpha\}, \{\iota_{\alpha\beta}\}\big)$ um sistema direto em $\mathscr{C}$. Dizemos que um objeto $\varinjlim A_\alpha \in \mathscr{C}$ é um* ***limite direto*** *deste sistema se existir uma família de morfismos $\{\iota_\alpha : A_\alpha \to \varinjlim A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ tal que*

1. *para todos α, $\beta \in \Lambda$ com $\alpha \leq \beta$, o Diagrama (2.9.1) é comutativo;*

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{A_\alpha} \arrow[d, "\iota_{\alpha\beta}"'] \arrow[dr, "\iota_\alpha"] & \\ \boldsymbol{A_\beta} \arrow[r, "\iota_\beta"'] & \varinjlim \boldsymbol{A_\alpha} \end{tikzcd} \tag{2.9.1}$$

2. *para todo $Y \in \mathscr{C}$ e para toda família de morfismos $\{\varphi_\alpha : A_\alpha \to Y\}_{\alpha \in \Lambda}$ de sorte que o Diagrama (2.9.2) é comutativo para α, $\beta \in \Lambda$ com $\alpha \leq \beta$, existe um único morfismo $\varphi : \varinjlim A_\alpha \to Y$ em $\mathscr{C}$ tal que o Diagrama (2.9.3) é comutativo para todo $\alpha \in \Lambda$.*

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{A_\alpha} \arrow[d, "\iota_{\alpha\beta}"'] \arrow[dr, "\varphi_\alpha"] & \\ \boldsymbol{A_\beta} \arrow[r, "\varphi_\beta"'] & \boldsymbol{Y} \end{tikzcd} \tag{2.9.2}$$

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{A_\alpha} \arrow[r, "\iota_\alpha"] \arrow[dr, "\varphi_\alpha"'] & \varinjlim \boldsymbol{A_\alpha} \arrow[d, dashed, "\varphi"] \\ & \boldsymbol{Y} \end{tikzcd} \tag{2.9.3}$$

▶

Pode-se mostrar que limites diretos são únicos a menos de um único isomorfismo. Por termos feito demonstrações neste sentido antes, não a fazemos aqui. Por conta disso, falamos doravante sobre o limite direto de um sistema direto.

Teorema 2.9.1. *Sejam $\mathscr{U}$ a Categoria Universal e $\big((\Lambda, \leq), \{A_\alpha\}, \{\iota_{\alpha\beta}\}\big)$ um sistema direto em $\mathscr{U}$. Sendo α, $\beta \in \Lambda$, $x \in A_\alpha$ e $y \in A_\beta$, dizemos que $x \sim y$ se, e somente se, existe $\gamma \in \Lambda$ de modo que $\iota_{\alpha\gamma}(x) = \iota_{\beta\gamma}(y)$. Esta relação é uma relação de equivalência em $\bigsqcup_{\alpha \in A} A_\alpha$. Além disso, o quociente de $\bigsqcup_{\alpha \in A} A_\alpha$ por esta relação de equivalência é o limite direto para o sistema direto inicial.* ■

Definição 2.9.4 (Sistema inverso)**.** *Seja $\mathscr{C}$ uma categoria. Dizemos que uma tripla*

$$\big((\Lambda, \leq), \{A_\alpha\}, \{\pi_{\beta\alpha}\}\big)$$

é um ***sistema inverso*** *em $\mathscr{C}$, sendo $(\Lambda, \leq) \in \mathscr{O}$ um conjunto direto, $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda} \subset \mathscr{C}$ uma coleção de objetos e $\{\pi_{\beta\alpha}\}$ uma coleção de morfismos $\pi_{\beta\alpha} : A_\beta \to A_\alpha$, com α, $\beta \in \Lambda$ e $\alpha \leq \beta$, de sorte que $\pi_{\alpha\alpha} = id_{A_\alpha}$ para todo $\alpha \in \Lambda$, e que $\pi_{\gamma\alpha} = \pi_{\beta\alpha} \circ \pi_{\gamma\beta}$ para todos α, β, $\gamma \in \Lambda$ com $\alpha \leq \beta \leq \gamma$.* ▶

Definição 2.9.5 (Limite inverso)**.** *Sejam $\mathscr{C}$ uma categoria e $\big((\Lambda,\, \leq),\, \{A_\alpha\},\, \{\pi_{\beta\alpha}\}\big)$ um sistema inverso em $\mathscr{C}$. Dizemos que um objeto $\varprojlim A_\alpha \in \mathscr{C}$ é um **limite inverso** deste sistema se existir uma família de morfismos $\{\pi_\alpha : \varprojlim A_\alpha \to A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ tal que*

1. *para todos $\alpha,\, \beta \in \Lambda$ com $\alpha \leq \beta$, o Diagrama (2.9.4) é comutativo;*

$$\begin{tikzcd} \varprojlim A_\alpha \arrow[d, "\pi_{\beta\alpha}"'] \arrow[dr, "\pi_\alpha"] & \\ A_\beta \arrow[r, "\pi_\beta"'] & A_\alpha \end{tikzcd} \tag{2.9.4}$$

2. *para todo $Y \in \mathscr{C}$ e para toda família de morfismos $\{\varphi_\alpha : Y \to A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ de sorte que o Diagrama (2.9.5) é comutativo para $\alpha,\, \beta \in \Lambda$ com $\alpha \leq \beta$, existe um único morfismo $\varphi : Y \to \varprojlim A_\alpha$ em $\mathscr{C}$ tal que o Diagrama (2.9.6) é comutativo para todo $\alpha \in \Lambda$.*

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[d, "\varphi_\beta"'] \arrow[dr, "\varphi_\alpha"] & \\ A_\beta \arrow[r, "\pi_{\beta\alpha}"'] & A_\alpha \end{tikzcd} \tag{2.9.5}$$

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, dashed, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi_\alpha"'] & \varprojlim A_\alpha \arrow[d, "\pi_\alpha"] \\ & A_\alpha \end{tikzcd} \tag{2.9.6}$$

▶

Como antes, pode-se mostrar também que limites inversos são únicos a menos de um único isomorfismo. Por conta disso, falamos doravante sobre o limite inverso de um sistema inverso.

Teorema 2.9.2. *Sejam $\mathscr{U}$ a Categoria Universal e $\big((\Lambda,\, \leq),\, \{A_\alpha\},\, \{\pi_{\beta\alpha}\}\big)$ um sistema inverso em $\mathscr{U}$. Então $\varprojlim A_\alpha$ é o conjunto dos $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda} \in \prod_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$ tais que $\pi_{\beta\alpha}(x_\beta) = x_\alpha$ para todos $\alpha,\, \beta \in \Lambda$ com $\alpha \leq \beta$.* ■

3 Álgebra Homológica

Antes de estudar a Homologia Singular, vamos introduzir as ferramentas de Álgebra Homológica das quais precisaremos. Apresentamos esses tópicos de maneira puramente algébrica para que possamos discutir, no próximo capítulo, as noções de Homologia Singular nos concentrando apenas em seus significados topológicos. Fazemos uso aqui e no próximo capítulo da linguagem categorial apresentada anteriormente. As referências usadas para este estudo são as notas de aula do orientador e [SPANIER].

3.1 Grupos de homologia

Definição 3.1.1 (Grupo diferencial). *Sejam C um grupo abeliano e ∂_C um seu endomorfismo tal que $\partial_C \circ \partial_C = 0$. Dizemos que o par (C, ∂_C) é um **grupo diferencial**. O endomorfismo ∂_C é chamado de **diferencial** ou **operador bordo**.* ▶

Quando o operador bordo de um grupo diferencial (C, ∂_C) estiver subentendido dizemos simplesmente que C é um grupo diferencial.

Definimos $\mathscr{G}_\partial$ como sendo a categoria dos grupos diferenciais cujos morfismos são homomorfismos de grupos abelianos que comutam com os operadores bordo. Mais formalmente, um homomorfismo de grupos abelianos $\varphi : C_1 \to C_2$ é um morfismo de $\mathscr{G}_\partial$ entre os grupos diferenciais (C_1, ∂_{C_1}) e (C_2, ∂_{C_2}) se o Diagrama (3.1.1) é comutativo.

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{C_1} \arrow[r, "\partial_{C_1}"] \arrow[d, "\varphi"'] & \boldsymbol{C_1} \arrow[d, "\varphi"] \\ \boldsymbol{C_2} \arrow[r, "\partial_{C_2}"'] & \boldsymbol{C_2} \end{tikzcd} \tag{3.1.1}$$

Definição 3.1.2 (Ciclos e bordos). *Seja $(C, \partial_C) \in \mathscr{G}_\partial$. Dizemos que $Z(C) := Ker(\partial_C)$ é o **subgrupo dos ciclos** de C e que $B(C) := Im(\partial_C)$ é o **subgrupo dos bordos** de C.* ▶

Observação 3.1.1. *Se $(C, \partial_C) \in \mathscr{G}_\partial$, então $B(C) \subset Z(C)$. De fato, se $b \in B(C)$, então existe $c \in C$ de modo que $\partial_C(c) = b$. Daí, $\partial_C(b) = \partial_C(\partial_C(c)) = (\partial_C \circ \partial_C)(c) = 0$. Destarte $b \in Z(C)$ e, pois, $B(C) \subset Z(C)$.* ◀

Definição 3.1.3 (Grupo de homologia). *Seja $(C, \partial_C) \in \mathscr{G}_\partial$. Definimos o **grupo de homologia** $H(C)$ como sendo*

$$H(C) := {}^{Z(C)}\!/\!_{B(C)}.$$

*Os elementos de $H(C)$ são chamados de **classes de homologia**. Denotamos a classe de homologia de $z \in Z(C)$ por $[z]$. Dizemos que $z_1,\ z_2 \in Z(C)$ são **ciclos homólogos** se $[z_1] = [z_2]$, isto é, se $z_1 - z_2 \in B(C)$.* ▶

Exemplo 3.1.1 (Grupos de homologia)**.** *Seja C um grupo abeliano.*

- *O endomorfismo nulo faz com que C seja um grupo diferencial. Neste caso, $Z(C) = C$ e $B(C) = \{0\}$. Portanto $H(C) \cong C$.*

- *Se A é um subgrupo de C e $f : A \to C$ é um homomorfismo de grupos abelianos, então*

$$\begin{array}{rcl} \partial^f_{A\oplus C} : A \oplus C & \to & A \oplus C, \\ (a, c) & \mapsto & (0, f(a)), \end{array}$$

  faz com que $(A \oplus C, \partial^f_{A\oplus C})$ seja um grupo diferencial. Neste caso, $Z(A \oplus C) = Ker(f) \oplus C$ e $B(A \oplus C) = \{0\} \oplus Im(f)$. Portanto $H(A \oplus C) \cong Ker(f) \oplus Coker(f)$. ◀

Observação 3.1.2. *Sejam $C_1, C_2 \in \mathscr{G}_\partial$ e $\varphi \in Hom_{\mathscr{G}_\partial}(C_1, C_2)$. Então*

- *$\varphi(Z(C_1)) \subset Z(C_2)$. De fato, se $z \in Z(C_1)$, então $\partial_{C_2}(\varphi(z)) = (\partial_{C_2} \circ \varphi)(z) = (\varphi \circ \partial_{C_1})(z) = \varphi(\partial_{C_1}(z)) = \varphi(0) = 0$. Daí $\varphi(z) \in Z(C_2)$;*

- *$\varphi(B(C_1)) \subset B(C_2)$. De fato, se $b \in B(C_1)$, então existe $c \in C_1$ de modo que $\partial_{C_1}(c) = b$ e, portanto, $\varphi(b) = \varphi(\partial_{C_1}(c)) = (\varphi \circ \partial_{C_1})(c) = (\partial_{C_2} \circ \varphi)(c) = \partial_{C_2}(\varphi(c))$. Daí $\varphi(b) \in B(C_2)$.*

Ou seja, um morfismo de grupos diferenciais $\varphi : C_1 \to C_2$ aplica ciclos de C_1 em ciclos de C_2 e aplica bordos de C_1 em bordos de C_2. ◀

Definição 3.1.4 (Homomorfismo induzido em homologia)**.** *Sejam $C_1, C_2 \in \mathscr{G}_\partial$ e $\varphi \in Hom_{\mathscr{G}_\partial}(C_1, C_2)$. Dizemos que $\varphi_* : H(C_1) \to H(C_2)$, $[z] \mapsto [\varphi(z)]$, é o* ***homomorfismo induzido por φ em homologia****.* ▶

O conteúdo da Observação 3.1.2 garante que o homomorfismo induzido em homologia da Definição 3.1.4 está sempre bem definido.

Observação 3.1.3. *Sejam C_1, C_2 e C_3 grupos diferenciais, $\varphi_1 \in Hom_{\mathscr{G}_\partial}(C_1, C_2)$ e $\varphi_2 \in Hom_{\mathscr{G}_\partial}(C_2, C_3)$. Então $(\varphi_2 \circ \varphi_1)_* = (\varphi_2)_* \circ (\varphi_1)_*$. De fato, para todo $[z] \in H(C_1)$, $(\varphi_2 \circ \varphi_1)_*([z]) = [(\varphi_2 \circ \varphi_1)([z])] = [\varphi_2(\varphi_1([z]))] = (\varphi_2)_*([\varphi_1([z])]) = (\varphi_2)_*((\varphi_1)_*([z])) = ((\varphi_2)_* \circ (\varphi_1)_*)([z])$.* ◀

Devido à Observação 3.1.3 o funtor covariante homologia $H : \mathscr{G}_\partial \to \mathscr{G}_{ab}$ que associa a cada grupo diferencial seu grupo de homologia e que associa a cada morfismo de grupos diferenciais seu homomorfismo induzido em homologia fica bem definido.

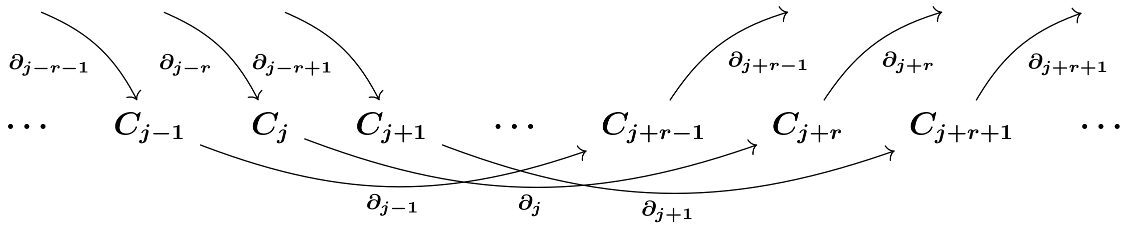
3.2 Grupos graduados diferenciais

Definição 3.2.1 (Grupo graduado)**.** *Dizemos que* $C = \{C_j\}_{j\in\mathbb{Z}} \subset \mathscr{G}_{ab}$ *é um* ***grupo graduado****. Dizemos que os elementos de* C_j *têm* ***grau*** j*. Sejam* C *e* C' *grupos graduados e* $r \in \mathbb{Z}$*; um* ***homomorfismo de grau*** r *entre* C *e* C' *consiste de uma coleção* $\varphi = \{\varphi_j : C_j \to C'_{j+r}\}_{j\in\mathbb{Z}}$ *de homomorfismos de* $\mathscr{G}_{ab}$*.* ▶

Definimos $\mathscr{G}_{\mathbb{Z}}$ como sendo a categoria dos grupos graduados cujos morfismos são os homomorfismos de grupos graduados de graus quaisquer. A composição de morfismos é definida como $\circ : Hom_{\mathscr{G}_{\mathbb{Z}}}(C, C') \times Hom_{\mathscr{G}_{\mathbb{Z}}}(C', C'') \to Hom_{\mathscr{G}_{\mathbb{Z}}}(C, C'')$, $(\{\varphi_j : C_j \to C'_{j+r_1}\}_{j\in\mathbb{Z}}, \{\psi_j : C'_j \to C''_{j+r_2}\}_{j\in\mathbb{Z}}) \mapsto \{\psi_{j+r_1} \circ \varphi_j : C_j \to C''_{j+r_1+r_2}\}_{j\in\mathbb{Z}}$, para todos $C, C', C'' \in \mathscr{G}_{\mathbb{Z}}$. Além disso, a soma em $Hom_{\mathscr{G}_{\mathbb{Z}}}(C, C')$ torna este conjunto de morfismos um grupo abeliano para todos $C, C' \in \mathscr{G}_{\mathbb{Z}}$. O fato de o grau da composição ser a soma dos graus das componentes garante que a subcategoria não-cheia $\mathscr{G}^0_{\mathbb{Z}}$ de $\mathscr{G}_{\mathbb{Z}}$ cujos objetos são os mesmos de $\mathscr{G}_{\mathbb{Z}}$ e cujos morfismos são os homomorfismos de grupos graduados de grau zero está bem definida.

Definição 3.2.2 (Grupo graduado diferencial)**.** *Sejam* $C = \{C_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ *um grupo graduado,* $r \in \mathbb{Z}$ *e* $\partial_C : C \to C$ *um homomorfismo de grau* r *tal que* $\partial_C \circ \partial_C = 0$*. Dizemos que* (C, ∂_C) *é um* ***grupo graduado diferencial****. Dizemos também que* ∂_C *é um operador bordo de grau* r*.* ▶

Escrevendo $\partial_C = \{\partial_j : C_j \to C_{j+r}\}_{j\in\mathbb{Z}}$, podemos entender o operador bordo de grau r como no esquema a seguir. Vemos que a condição $\partial_C \circ \partial_C = 0$ equivale a $\partial_{j+r} \circ \partial_j = 0$ para todo $j \in \mathbb{Z}$.



Acima descrevemos um grupo graduado diferencial a partir de um grupo diferencial. Podemos também fazer o contrário. Ou seja, sendo $C = \{C_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ um grupo graduado, $r \in \mathbb{Z}$ e $\partial_C : C \to C$ um operador bordo de grau r, temos que $\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} C_j$ é um grupo diferencial. O operador bordo nesta soma direta age como no diagrama acima e, por isso, a composição dele consigo mesmo é nula.

3.3 Complexos de cadeias

Definição 3.3.1 (Complexo de cadeias)**.** *Um grupo graduado diferencial* (C, ∂_C) *cujo operador bordo tem grau* -1 *é dito um* ***complexo de cadeias****. Seja* $C = \{C_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$*. Chamamos os elementos de* C_j *de* j***-cadeias*** *do complexo. Dizemos que* (C, ∂_C) *é um* ***complexo não-negativo*** *se* $C_j = \{0\}$ *para todo* $j < 0$*. Dizemos também que* (C, ∂_C) *é um* ***complexo de cadeias livre*** *se* C_j *é um grupo abeliano livre para todo* $j \in \mathbb{Z}$*.* ▶

Sendo (C, ∂_C) um complexo de cadeias e escrevendo $\partial_C = \{\partial_j : C_j \to C_{j-1}\}_{j \in \mathbb{Z}}$, podemos entender o operador bordo de um complexo de cadeias como no esquema a seguir. Insistimos aqui que a condição $\partial_C \circ \partial_C = 0$ equivale a $\partial_{j-1} \circ \partial_j = 0$ para todo $j \in \mathbb{Z}$.

$$\cdots \xleftarrow[\partial_{j-1}]{} C_{j-1} \xleftarrow[\partial_j]{} C_j \xleftarrow[\partial_{j+1}]{} C_{j+1} \xleftarrow[\partial_{j+2}]{} \cdots$$

Seja (C, ∂_C) um complexo de cadeias. O subgrupo de ciclos $Z(C)$ do complexo é o grupo graduado $\{Z_j(C) = Ker(\partial_j)\}_{j \in \mathbb{Z}}$ e o subgrupo dos bordos $B(C)$ do complexo é o grupo graduado $\{B_j(C) = Im(\partial_{j+1})\}_{j \in \mathbb{Z}}$. Além disso, o grupo de homologia $H(C)$ é o grupo graduado $\{H_j(C) = {Z_j(C)}/{B_j(C)}\}_{j \in \mathbb{Z}}$.

Definição 3.3.2 (Transformações de cadeias)**.** *Sejam (C, ∂_C) e $(C', \partial_{C'})$ complexos de cadeias e $\varphi : C \to C'$ um homomorfismo de grau zero. Dizemos que φ é uma **transformação de cadeias** ou **morfismo de cadeias** se o Diagrama (3.3.1) é comutativo.*

$$\begin{tikzcd}
\cdots & C_{j-1} \arrow[l, "\partial_{j-1}"'] \arrow[d, "\varphi_{j-1}"'] & C_j \arrow[l, "\partial_j"'] \arrow[d, "\varphi_j"'] & C_{j+1} \arrow[l, "\partial_{j+1}"'] \arrow[d, "\varphi_{j+1}"'] & \cdots \arrow[l, "\partial_{j+2}"'] \\
\cdots & C'_{j-1} \arrow[l, "\partial'_{j-1}"] & C'_j \arrow[l, "\partial'_j"] & C'_{j+1} \arrow[l, "\partial'_{j+1}"] & \cdots \arrow[l, "\partial'_{j+2}"]
\end{tikzcd} \tag{3.3.1}$$

▶

Definição 3.3.3 (Subcomplexo, complexo quociente e transformação projeção)**.** *Seja (C, ∂_C) um complexo de cadeias. Dizemos que $(C', \partial_{C'})$ é um **subcomplexo** de (C, ∂_C), e denotamos $(C', \partial_{C'}) \subset (C, \partial_C)$, se $C'_j \subset C_j$ e $\partial'_j = \partial_j |_{C'_j}$ para todo $j \in \mathbb{Z}$. Sejam ${C}/{C'} := \{{C_j}/{C'_j}\}_{j \in \mathbb{Z}}$ e $\partial_{{C}/{C'}} := \{\tilde{\partial}_j : {C_j}/{C'_j} \to {C_{j-1}}/{C'_{j-1}}\}_{j \in \mathbb{Z}}$, em que cada $\tilde{\partial}_j$ é o operador bordo obtido pela passagem de ∂_j ao quociente. Dizemos que $({C}/{C'}, \partial_{{C}/{C'}})$ é um **complexo de cadeias quociente**. A coleção de projeções $\{\pi_j : C_j \to {C_j}/{C'_j}\}_{j \in \mathbb{Z}}$ é a **transformação projeção** $\pi : C \to {C}/{C'}$.* ▶

Como a composição de duas transformações de cadeias é também uma transformação de cadeias, fica bem definida a categoria Ab_C cujos objetos são os complexos de cadeias e cujos morfismos são as transformações de cadeias. Esta categoria dos complexos de cadeia admite produtos e coprodutos de coleções arbitrárias de objetos. Sejam K um conjunto de índices e $\{C^k\}_{k \in K}$ uma família de complexos de cadeias. O produto $\prod_{k \in K} C^k$ e o coproduto $\coprod_{k \in K} C^k$ são tais que

$$\left(\prod_{k \in K} C^k\right)_j = \prod_{k \in K} C^k_j \quad \text{e que} \quad \left(\coprod_{k \in K} C^k\right)_j = \bigoplus_{k \in K} C^k_j$$

para todo $j \in \mathbb{Z}$. Portanto, para todo $j \in \mathbb{Z}$, temos que

$$Z_j\left(\prod_{k \in K} C^k\right) = \prod_{k \in K} Z_j(C^k), \qquad Z_j\left(\coprod_{k \in K} C^k\right) = \bigoplus_{k \in K} Z_j(C^k),$$

$$B_j\left(\prod_{k\in K} C^k\right) = \prod_{k\in K} B_j(C^k) \quad \text{e} \quad B_j\left(\coprod_{k\in K} C^k\right) = \bigoplus_{k\in K} B_j(C^k).$$

Destarte, temos que

$$H\left(\prod_{k\in K} C^k\right) = \prod_{k\in K} H(C^k) \quad \text{e} \quad H\left(\coprod_{k\in K} C^k\right) = \bigoplus_{k\in K} H(C^k).$$

Seja agora $\varphi : C \to C'$ uma transformação de cadeias entre os complexos de cadeia C e C'. O **homomorfismo induzido** por φ em homologia, $\varphi_* : H(C) \to H(C')$, é o homomorfismo de grau zero tal que

$$(\varphi_*)_j([z]) = [\varphi_j(z)]$$

para todo $z \in Z_j(C)$ e para todo $j \in \mathbb{Z}$. Portanto, o funtor covariante homologia $H : Ab_C \to \mathscr{G}^0_{\mathbb{Z}}$ que associa a cada complexo de cadeias seu grupo de homologia e que associa a cada morfismo de cadeias seu homomorfismo induzido em homologia fica bem definido.

No Teorema 3.3.1 vemos que o funtor homologia $H : Ab_C \to \mathscr{G}^0_{\mathbb{Z}}$ comuta com limites diretos. Esta afirmação não é verdadeira se considerarmos limites inversos. Lembramos que sistemas e limites diretos, bem como sistemas e limites inversos, foram definidos na Seção 2.9.

Teorema 3.3.1. *Seja* $((\Lambda, \leq), \{A_\alpha\}, \{\iota_{\alpha\beta}\})$ *um sistema direto em* Ab_C *cujo limite direto é* $\varinjlim A_\alpha$. *Se* $H : Ab_C \to \mathscr{G}^0_{\mathbb{Z}}$ *é o funtor covariante homologia, então temos que* $((\Lambda, \leq), H(A_\alpha), \{(\iota_{\alpha\beta})_*\})$ *é um sistema direto em* $\mathscr{G}^0_{\mathbb{Z}}$ *e que* $H\big(\varinjlim A_\alpha\big) = \varinjlim H(A_\alpha)$.

Demonstração. Para todos $\alpha \in \Lambda$, $j \in \mathbb{Z}$ e $z \in Z_j(A_\alpha)$, temos que

$$\big((\iota_{\alpha\alpha})_*\big)_j([z]) = [(\iota_{\alpha\alpha})_j(z)] = [(id_{A_\alpha})_j(z)] = [z].$$

Ou seja, $(\iota_{\alpha\alpha})_* = id_{H(A_\alpha)}$ para todo $\alpha \in \Lambda$. Além disso, para todos α, β, $\gamma \in \Lambda$ com $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ e para todos $j \in \mathbb{Z}$ e $z \in Z_j(A_\alpha)$, temos que

$$\begin{aligned}\big((\iota_{\alpha\gamma})_*\big)_j([z]) &= [(\iota_{\alpha\gamma})_j(z)] = [(\iota_{\beta\gamma} \circ \iota_{\alpha\beta})_j(z)] \\ &= \big((\iota_{\beta\gamma})_*\big)_j([(\iota_{\alpha\beta})_j(z)]) = \big((\iota_{\beta\gamma})_*\big)_j\Big(\big((\iota_{\alpha\beta})_*\big)_j([z])\Big) \\ &= \big((\iota_{\beta\gamma})_* \circ (\iota_{\alpha\beta})_*\big)_j([z]).\end{aligned}$$

Ou seja, $(\iota_{\alpha\gamma})_* = (\iota_{\beta\gamma})_* \circ (\iota_{\alpha\beta})_*$ para todos α, β, $\gamma \in \Lambda$ com $\alpha \leq \beta \leq \gamma$. Logo, a tripla $((\Lambda, \leq), H(A_\alpha), \{(\iota_{\alpha\beta})_*\})$ é realmente um sistema direto em $\mathscr{G}^0_{\mathbb{Z}}$. É suficiente então verificarmos que $H\big(\varinjlim A_\alpha\big)$ é um limite direto para este sistema direto. De fato, como $\varinjlim A_\alpha$ é um limite direto para o sistema direto $((\Lambda, \leq), \{A_\alpha\}, \{\iota_{\alpha\beta}\})$, existe uma família de morfismos $\{\iota_\alpha : A_\alpha \to \varinjlim A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ de Ab_C tal que, para todos α, $\beta \in \Lambda$ com $\alpha \leq \beta$, o Diagrama (3.3.2) é comutativo.

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{A_\alpha} \arrow[d, "\iota_{\alpha\beta}"'] \arrow[dr, "\iota_\alpha"] & \\ \boldsymbol{A_\beta} \arrow[r, "\iota_\beta"'] & \boldsymbol{\varinjlim A_\alpha} \end{tikzcd} \tag{3.3.2}$$

Considerando agora a família de morfismos $\{(\iota_\alpha)_* : H(A_\alpha) \to H(\varinjlim A_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ de $\mathscr{G}^0_{\mathbb{Z}}$, é imediato verificar que o Diagrama (3.3.3) é comutativo.

$$\begin{tikzcd} H(A_\alpha) \arrow[d, "(\iota_{\alpha\beta})_*"'] \arrow[dr, "(\iota_\alpha)_*"] & \\ H(A_\beta) \arrow[r, "(\iota_\beta)_*"'] & H(\varinjlim A_\alpha) \end{tikzcd} \tag{3.3.3}$$

Vê-se então que, para todo $Y \in \mathscr{G}^0_{\mathbb{Z}}$ e para toda família de morfismos $\{\varphi_\alpha : H(A_\alpha) \to Y\}_{\alpha \in \Lambda}$ de $\mathscr{G}^0_{\mathbb{Z}}$ tal que o Diagrama (3.3.4) é comutativo para α, $\beta \in \Lambda$ com $\alpha \leq \beta$, existe um único morfismo $\varphi : H(\varinjlim A_\alpha) \to Y$ em $\mathscr{G}^0_{\mathbb{Z}}$ de sorte que o Diagrama (3.3.5) é comutativo para todo $\alpha \in \Lambda$.

$$\begin{tikzcd} H(A_\alpha) \arrow[d, "(\iota_{\alpha\beta})_*"'] \arrow[dr, "\varphi_\alpha"] & \\ H(A_\beta) \arrow[r, "\varphi_\beta"'] & Y \end{tikzcd} \tag{3.3.4}$$

$$\begin{tikzcd} H(A_\alpha) \arrow[r, "(\iota_\alpha)_*"] \arrow[dr, "\varphi_\alpha"'] & H(\varinjlim A_\alpha) \arrow[d, dashed, "\varphi"] \\ & Y \end{tikzcd} \tag{3.3.5}$$

■

3.4 Homotopia de cadeias

Definição 3.4.1 (Homotopia de cadeias)**.** *Sejam (C, ∂_C) e $(C', \partial_{C'})$ complexos de cadeias e $\varphi, \varphi' : C \to C'$ transformações de cadeias. Dizemos que um homomorfismo $D = \{D_j : C_j \to C'_{j+1}\}_{j \in \mathbb{Z}}$ tal que, para todo $j \in \mathbb{Z}$,*

$$\partial'_{j+1} \circ D_j + D_{j-1} \circ \partial_j = \varphi_j - \varphi'_j,$$

*é uma **homotopia de cadeias** entre φ e φ'. Dizemos que φ é **homotópica** a φ', e escrevemos $\varphi \simeq \varphi'$, se existir uma homotopia de cadeias entre duas transformações de cadeias.* ▶

Teorema 3.4.1 (Invariância por homotopia)**.** *Sejam (C, ∂_C) e $(C', \partial_{C'})$ complexos de cadeias. Se $\varphi, \varphi' : C \to C'$ são transformações de cadeias homotópicas, então $\varphi_* = \varphi'_* : H(C) \to H(C')$.*

Demonstração. Seja D uma homotopia de cadeias entre as transformações de cadeias φ e φ'. Para todo $j \in \mathbb{Z}$ e para todo $z \in Z_j(C)$, temos que $\partial'_{j+1}(D_j(z)) = \partial'_{j+1}(D_j(z)) + 0 = \partial'_{j+1}(D_j(z)) + D_{j-1}(\partial_j(z)) = (\partial'_{j+1} \circ D_j + D_{j-1} \circ \partial_j)(z) = \varphi_j(z) - \varphi'_j(z)$. Logo $\varphi_j(z) - \varphi'_j(z) \in B_j(C')$ para todo $j \in \mathbb{Z}$ e para todo $z \in Z_j(C)$. Portanto, $\varphi_*[z] = \varphi'_*[z]$ para todo $z \in H(C)$. ■

Proposição 3.4.1. *Sejam (C, ∂_C) e $(C', \partial_{C'})$ complexos de cadeias. Dizemos que duas transformações de cadeias $\varphi, \varphi' : C \to C'$ estão relacionadas se, e somente se, $\varphi \simeq \varphi'$. Esta relação é uma relação de equivalência no conjunto $Hom_{Ab_C}(C, C')$. Denotamos a classe de equivalência de uma transformação de cadeias $\varphi : C \to C'$ por $[\varphi]$.*

Demonstração. É preciso verificar que a relação de homotopia de cadeias seja reflexiva, simétrica e transitiva para que seja uma relação de equivalência no conjunto $Hom_{Ab_C}(C, C')$.

(i) (Reflexividade) Seja $\varphi : C \to C'$ uma transformação de cadeias. Definindo $D_j : C_j \to C'_{j+1}$ como sendo o homomorfismo trivial para todo $j \in \mathbb{Z}$, temos que $\partial'_{j+1} \circ D_j + D_{j-1} \circ \partial_j = 0 = \varphi_j - \varphi_j$.

(ii) (Simetria) Sejam $\varphi, \varphi' : C \to C'$ transformações de cadeias homotópicas. Seja D uma homotopia de cadeias entre φ e φ'. Temos que $-D$ é uma homotopia de cadeias entre φ' e φ. De fato, $\partial'_{j+1} \circ (-D)_j + (-D)_{j-1} \circ \partial_j = \partial'_{j+1} \circ (-D_j) + (-D_{j-1}) \circ \partial_j = -(\partial'_{j+1} \circ D_j + D_{j-1} \circ \partial_j) = -(\varphi_j - \varphi'_j) = \varphi'_j - \varphi_j$.

(iii) (Transitividade) Sejam $\varphi, \varphi', \varphi'' : C \to C'$ transformações de cadeias tais que $\varphi \simeq \varphi'$ e que $\varphi' \simeq \varphi''$. Seja D uma homotopia de cadeias entre φ e φ', e seja D' uma homotopia de cadeias entre φ' e φ''. Temos que $D + D'$ é uma homotopia de cadeias entre φ e φ''. De fato, $\partial'_{j+1} \circ (D + D')_j + (D + D')_{j-1} \circ \partial_j = \partial'_{j+1} \circ (D_j + D'_j) + (D_{j-1} + D'_{j-1}) \circ \partial_j = (\partial'_{j+1} \circ D_j + D_{j-1} \circ \partial_j) + (\partial'_{j+1} \circ D'_j + D'_{j-1} \circ \partial_j) = (\varphi'_j - \varphi_j) + (\varphi''_j - \varphi'_j) = \varphi''_j - \varphi'_j$. ■

Proposição 3.4.2. *Sejam (C, ∂_C), $(C', \partial_{C'})$ e $(C'', \partial_{C''})$ complexos de cadeias. Se $\varphi, \varphi' : C \to C'$ e $\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}' : C' \to C''$ são transformações de cadeias tais que $\varphi \simeq \varphi'$ e que $\tilde{\varphi} \simeq \tilde{\varphi}'$, então $\tilde{\varphi} \circ \varphi \simeq \tilde{\varphi}' \circ \varphi'$.*

Demonstração. Sendo D uma homotopia de cadeias entre φ e φ' e sendo $\tilde{D}$ uma homotopia de cadeias entre $\tilde{\varphi}$ e $\tilde{\varphi}'$, temos que $\tilde{\varphi} \circ D + \tilde{D} \circ \varphi'$ é uma homotopia de cadeias entre $\tilde{\varphi} \circ \varphi$ e $\tilde{\varphi}' \circ \varphi'$. Vide Diagrama (3.4.2).

$$
\begin{tikzcd}
\boldsymbol{C_{j-1}} \arrow[d, shift right, "\varphi_{j-1}"'] \arrow[d, shift left, "\varphi'_{j-1}"] \arrow[dr, "D_{j-1}"] & \boldsymbol{C_j} \arrow[l, "\partial_j"'] \arrow[d, shift right, "\varphi_j"'] \arrow[d, shift left, "\varphi'_j"] \arrow[dr, "D_j"] & \boldsymbol{C_{j+1}} \arrow[l, "\partial_{j+1}"'] \arrow[d, shift right, "\varphi_{j+1}"'] \arrow[d, shift left, "\varphi'_{j+1}"] \\
\boldsymbol{C'_{j-1}} \arrow[d, shift right, "\tilde{\varphi}_{j-1}"'] \arrow[d, shift left, "\tilde{\varphi}'_{j-1}"] \arrow[dr, "\tilde{D}_{j-1}"] & \boldsymbol{C'_j} \arrow[l, "\partial'_j"'] \arrow[d, shift right, "\tilde{\varphi}_j"'] \arrow[d, shift left, "\tilde{\varphi}'_j"] \arrow[dr, "\tilde{D}_j"] & \boldsymbol{C'_{j+1}} \arrow[l, "\partial'_{j+1}"'] \arrow[d, shift right, "\tilde{\varphi}_{j+1}"'] \arrow[d, shift left, "\tilde{\varphi}'_{j+1}"] \\
\boldsymbol{C''_{j-1}} & \boldsymbol{C''_j} \arrow[l, "\partial''_j"] & \boldsymbol{C''_{j+1}} \arrow[l, "\partial''_{j+1}"]
\end{tikzcd}
$$

De fato, para todo $j \in \mathbb{Z}$, temos que

$$\begin{aligned}
& \partial''_{j+1} \circ (\tilde{\varphi} \circ D + \tilde{D} \circ \varphi')_j + (\tilde{\varphi} \circ D + \tilde{D} \circ \varphi')_{j-1} \circ \partial_j \\
= \; & \partial''_{j+1} \circ (\tilde{\varphi}_{j+1} \circ D_j + \tilde{D}_j \circ \varphi'_j) + (\tilde{\varphi}_j \circ D_{j-1} + \tilde{D}_{j-1} \circ \varphi'_{j-1}) \circ \partial_j \\
= \; & \partial''_{j+1} \circ \tilde{\varphi}_{j+1} \circ D_j + \partial''_{j+1} \circ \tilde{D}_j \circ \varphi'_j + \tilde{\varphi}_j \circ D_{j-1} \circ \partial_j + \tilde{D}_{j-1} \circ \varphi'_{j-1} \circ \partial_j \\
= \; & \tilde{\varphi}_j \circ \partial'_{j+1} \circ D_j + \partial''_{j+1} \circ \tilde{D}_j \circ \varphi'_j + \tilde{\varphi}_j \circ D_{j-1} \circ \partial_j + \tilde{D}_{j-1} \circ \partial'_j \circ \varphi'_j \\
= \; & \tilde{\varphi}_j \circ (\partial'_{j+1} \circ D_j + D_{j-1} \circ \partial_j) + (\partial''_{j+1} \circ \tilde{D}_j + \tilde{D}_{j-1} \circ \partial'_j) \circ \varphi'_j \\
= \; & \tilde{\varphi}_j \circ (\varphi_j - \varphi'_j) + (\tilde{\varphi}_j - \tilde{\varphi}'_j) \circ \varphi'_j \\
= \; & \tilde{\varphi}_j \circ \varphi_j - \tilde{\varphi}_j \circ \varphi'_j + \tilde{\varphi}_j \circ \varphi'_j - \tilde{\varphi}'_j \circ \varphi'_j \\
= \; & \tilde{\varphi}_j \circ \varphi_j - \tilde{\varphi}'_j \circ \varphi'_j.
\end{aligned}$$

■

A Proposição 3.4.2 diz que relação de homotopia de cadeias é compatível com a composição. Portanto fica bem-definida a categoria quociente $^{Ab_C}/_{\simeq}$ cujos objetos são os complexos de cadeias e cujos morfismos são as classes de homotopia de cadeias. Dizemos que uma transformação de cadeias $\varphi : C \to C'$ é um **isomorfismo de cadeias** se $[\varphi]$ é um isomorfismo na categoria quociente $^{Ab_C}/_{\simeq}$.

3.5 Complexos contráteis e acíclicos

Definição 3.5.1 (Complexo contrátil e acíclico)**.** *Uma* ***contração de cadeias*** *de um complexo de cadeias (C, ∂_C) é uma homotopia de cadeias entre a transformação de cadeias identidade $id_C : C \to C$ e a transformação de cadeias nula $0_C : C \to C$. Se existir uma contração de cadeias de C, então dizemos que C é um* ***complexo de cadeias contrátil*** *ou, simplesmente, que C é* ***contrátil****. O complexo de cadeias C é dito um* ***complexo de cadeias acíclico*** *ou, simplesmente,* ***acíclico****, se $H_j(C) = \{0\}$ para todo $j \in \mathbb{Z}$.* ▶

Corolário 3.5.1. *Se C é um complexo de cadeias contrátil, então C é um complexo de cadeias acíclico.*

Demonstração. Se C é um complexo de cadeias contrátil, então $id_C \simeq 0_C$. O Teorema 3.4.1 garante então que $(id_C)_* = (0_C)_*$. Entretanto, $(id_C)_* = id_{H(C)}$ e $(0_C)_* = 0_{H(C)}$. Ou seja, $id_{H(C)} = 0_{H(C)}$. Portanto $H(C) = 0$. ■

Exemplo 3.5.1 (Um complexo acíclico não-contrátil)**.** *Seja C o grupo graduado em que todos os grupos que o compõe são triviais com exceção de C_0, C_1 e C_2 que são, respectivamente, $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}$. O homomorfismo $\partial_C : C \to C$ de grau -1 em que todos os seus homomorfismos são triviais exceto $\partial_1 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2$, $2n \mapsto 0$ e $2n+1 \mapsto 1$, e $\partial_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto 2n$, torna (C, ∂_C) um complexo de cadeias.*

$$\cdots \longleftarrow \{\mathbf{0}\} \xleftarrow[\partial_0]{} \mathbb{Z}_2 \xleftarrow[\partial_1]{} \mathbb{Z} \xleftarrow[\partial_2]{} \mathbb{Z} \xleftarrow[\partial_3]{} \{\mathbf{0}\} \longleftarrow \cdots$$

Temos que (C, ∂_C) é um complexo de cadeias acíclico. Entretanto, (C, ∂_C) não é um complexo de cadeias contrátil. De fato, se D é uma contração de cadeias entre id_C

e 0_C, então $\partial_1 \circ D_0 = id_{\mathbb{Z}_2}$. Ou seja, o homomorfismo $\partial_1 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2$ tem como um seu inverso à direita D_0. Contudo, todo homomorfismo de $\mathbb{Z}_2$ em $\mathbb{Z}$ é necessariamente trivial. ◀

Teorema 3.5.1. *Seja (C, ∂_C) um complexo de cadeias livre. Então C é acíclico se, e somente se, C é contrátil.*

Demonstração. É suficiente verificar que se C é um complexo de cadeias acícilo, então C é um complexo de cadeias contrátil. Para todo $j \in \mathbb{Z}$, a aplicação ∂_j é um epimorfismo de C_j a $B_{j-1}(C) = Z_{j-1}(C)$.

Uma vez que C_{j-1} é um grupo livre, temos que $Z_{j-1}(C)$ também o é. Além disso, existe um homomorfismo $s_{j-1} : Z_{j-1}(C) \to C_j$ que é um inverso à direita de ∂_j. Então $id_{C_j} - s_{j-1} \circ \partial_j$ aplica C_j a $Z_j(C)$. De fato, para todo $j \in \mathbb{Z}$ e para todo $c \in Z_j$, temos que $[\partial_j \circ (id_{C_j} - s_{j-1} \circ \partial_j)](c) = \partial_j(c) - (\partial_j \circ s_{j-1} \circ \partial_j)(c) = \partial_j(c) - (id_{C_j} \circ \partial_j)(c) = 0$.

Definimos agora $\{D_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ como sendo o homomorfismo de grau um tal que $D_j = s_j \circ (id_{C_j} - s_{j-1} \circ \partial_j) : C_j \to C_{j+1}$ para todo $j \in \mathbb{Z}$. Temos que $\partial_{j+1} \circ D_j + D_{j-1} \circ \partial_j = \partial_{j+1} \circ s_j \circ (id_{C_j} - s_{j-1} \circ \partial_j) + s_{j-1} \circ (id_{C_{j-1}} - s_{j-2} \circ \partial_{j-1}) \circ \partial_j = id_{C_j}$ para todo $j \in \mathbb{Z}$. Destarte $\{D_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ é uma contração de cadeias de C. ■

O método empregado na prova do Teorema 3.5.1 é usado para construir transformações de cadeias e homotopias de um complexo de cadeias livre a um complexo de cadeias acíclico. Vamos agora estender este procedimento para um método geral de obtenção de transformações de cadeias e de homotopias de cadeias chamado de **método dos modelos acíclicos**.

Definição 3.5.2 (Categoria com modelos e base para um funtor covariante)**.** *Sejam $\mathscr{C}$ uma categoria e $\mathscr{M} = \{M_j\}_{j \in J}$ um conjunto de objetos de $\mathscr{C}$, em que J é um conjunto de índices. Dizemos que $(\mathscr{C}, \mathscr{M})$ é uma **categoria com modelos**. Seja $T : \mathscr{C} \to \mathscr{G}_{ab}$ um funtor covariante. Dizemos que uma família $\{g_j \in T(M_j)\}_{j \in J}$ é uma **base** para T, onde $M_j \in \mathscr{M}$ para todo $j \in J$, se, para todo $A \in \mathscr{C}$, a família $\{T(f)(g_j)\}_{j \in J;\, f \in Hom_{\mathscr{C}}(M_j, A)}$ é uma base para $T(A)$.* ▶

Para cada $j \in \mathbb{Z}$, seja $\pi_j : Ab_C \to \mathscr{G}_{ab}$ o funtor covariante que associa a cada complexo de cadeias C o grupo abeliano C_j e que associa a cada transformação de cadeias $\varphi : C \to C'$ o homomorfismo $\varphi_j : C_j \to C'_j$. Além disso, para todo $j \in \mathbb{Z}$, sendo $T : \mathscr{C} \to Ab_C$ um funtor covariante, denotamos por T_j o funtor covariante $\pi_j \circ T : \mathscr{C} \to \mathscr{G}_{ab}$.

Definição 3.5.3 (Funtor covariante livre)**.** *Sejam $(\mathscr{C}, \mathscr{M})$ uma categoria com modelos e $T : \mathscr{C} \to \mathscr{G}_{ab}$ um funtor covariante. Dizemos que T é um **funtor livre em $\mathscr{C}$ com modelos em $\mathscr{M}$** se ele possuir uma base. Seja $T : \mathscr{C} \to Ab_C$ um funtor covariante. Dizemos que T é um funtor livre em $\mathscr{C}$ com modelos em $\mathscr{M}$ se $T_j : \mathscr{C} \to \mathscr{G}_{ab}$ é um funtor livre para todo $j \in \mathbb{Z}$.* ▶

Exemplo 3.5.2 (Δ é livre em Top com modelos em $\{\Delta^j\}_{j \in \mathbb{N}}$)**.** *Sejam $\mathscr{C} = Top$ a categoria dos espaços topológicos e $\mathscr{M} := \{\Delta^j\}_{j \in \mathbb{N}}$. Seja $\Delta : \mathscr{C} \to Ab_C$ o funtor homologia singular que associa a cada $X \in Top$ o complexo de cadeias singular*

$(\Delta(X), \partial_{\Delta(X)})$. *Então* Δ *é um funtor livre em* $\mathscr{C}$ *com modelos em* $\mathscr{M}$. *De fato, se* $\xi_j : \Delta^j \to \Delta^j$ *é a aplicação identidade, então o conjunto unitário* $\{\xi_j \in \Delta_j(\Delta^j)\}$ *é uma base para* Δ_j. *Isto se dá porque, para todo* $X \in \mathscr{C}$ *e para todo* $j \in \mathbb{Z}$, *a família* $\{\Delta(f)(\xi_j)\}_{f \in Hom_{\mathscr{C}}(\Delta^j, X)} = Hom_{\mathscr{C}}(\Delta^j, X)$ *é, por definição, uma base para* Δ_j. *Portanto, uma vez que* $\Delta_j = \pi_j \circ \Delta : \mathscr{C} \to \mathscr{G}_{ab}$ *é um funtor livre em* $\mathscr{C}$ *com modelos em* $\mathscr{M}$ *para todo* $j \in \mathbb{Z}$, *temos que* $\Delta : \mathscr{C} \to Ab_C$ *é um funtor livre em* $\mathscr{C}$ *com modelos em* $\mathscr{M}$. ◀

Sejam $\mathscr{C}$ uma categoria e $T : \mathscr{C} \to Ab_C$ um funtor covariante. Para todo $j \in \mathbb{Z}$, existem funtores covariantes $H_j(T)$ que partem de $\mathscr{C}$ e que chegam na categoria dos grupos abelianos $\mathscr{G}_{ab}$ que associam a cada $A \in \mathscr{C}$ o grupo $H_j(T(A))$. Sendo $\mathscr{M}$ um conjunto de modelos para $\mathscr{C}$, dizemos que um funtor covariante T que parte de $\mathscr{C}$ e que chega em Ab_C é **acíclico em dimensões positivas** se $H_j(T(M)) = \{0\}$ para todos $j \in \mathbb{N}^*$ e $M \in \mathscr{M}$.

Teorema 3.5.2. *Sejam* $(\mathscr{C}, \mathscr{M})$ *uma categoria com modelos e* $T, T' : \mathscr{C} \to Ab_C$ *funtores covariantes tais que* T *é livre e não-negativo e que* T' *é acíclico em dimensões positivas. Então toda transformação natural* $H_0(T) \to H_0(T')$ *é induzida por uma transformação de cadeias natural* $\alpha : T \to T'$. *Além disso, duas transformações de cadeias naturais* $\alpha, \alpha' : T \to T'$ *que induzem a mesma transformação natural* $H_0(T) \to H_0(T')$ *são naturalmente homotópicas.*

Demonstração. Para todo objeto $A \in \mathscr{C}$ precisamos definir uma transformação de cadeias $\alpha_A : T(A) \to T'(A)$ de modo que, para todo $h \in Hom_{\mathscr{C}}(A, B)$, tenha-se $\alpha_B \circ T(h) = T'(h) \circ \alpha_A$. Analogamente, para todo objeto $A \in \mathscr{C}$, precisamos definir uma homotopia de cadeias D entre α_A e α'_A de sorte que, para todo $h \in Hom_{\mathscr{C}}(A, B)$, $D_B \circ T(h) = T'(h) \circ D_A$.

Para todo $j \in \mathbb{N}$, uma vez que $T : \mathscr{C} \to Ab_C$ é funtor livre, existe uma base para T_j dada por $\{g_{ij} \in T_j(M_i)\}_{i \in I_j}$, em que $M_i \in \mathscr{M}$ para todo $i \in I_j$. Sendo assim, $\{T_j(f)(g_{ij})\}_{i \in I_j;\, f \in Hom_{\mathscr{C}}(M_i, A)}$ é uma base para $T_j(A)$. Daí temos que $(\alpha_j)_A$ é determinada pela coleção $\{(\alpha_j)_{M_i}(g_{ij})\}_{i \in I_j}$ e pela Equação (3.5.1). Da mesma forma, $(D_j)_A$ é determinada pela coleção $\{(D_j)_{M_i}(g_{ij})\}_{i \in I_j}$ e pela Equação (3.5.2).

$$(\alpha_j)_A \left(\sum_{\substack{f \in Hom_{\mathscr{C}}(M_i, A) \\ i \in I_j}} n_{ij}\, T_j(f)(g_{ij}) \right) = \sum_{\substack{f \in Hom_{\mathscr{C}}(M_i, A) \\ i \in I_j}} n_{ij}\, T'_j(f)\big((\alpha_j)_{M_i}(g_{ij})\big) \tag{3.5.1}$$

$$(D_j)_A \left(\sum_{\substack{f \in Hom_{\mathscr{C}}(M_i, A) \\ i \in I_j}} n_{ij}\, T_j(f)(g_{ij}) \right) = \sum_{\substack{f \in Hom_{\mathscr{C}}(M_i, A) \\ i \in I_j}} n_{ij}\, T'_j(f)\big((D_j)_{M_i}(g_{ij})\big) \tag{3.5.2}$$

Inicialmente vamos definir por indução em j a transformação de cadeias $(\alpha_j)_A$ de modo que valha a Equação (3.5.3). Vamos também definir a homotopia de cadeias $(D_j)_A$ por indução em j de modo que valha a Equação (3.5.4).

$$\partial_j \circ (\alpha_j)_A = (\alpha_{j-1})_A \circ \partial_j \tag{3.5.3}$$

$$\partial_{j+1} \circ (D_j)_A = (\alpha_j)_A - (\alpha'_j)_A - (D_{j-1})_A \circ \partial_j \tag{3.5.4}$$

Tendo definido α_k (ou D_k) para $k < j$, com $j \in \mathbb{N}^*$, é suficiente definir $(\alpha_j)_{M_i}(g_{ij})$ para $i \in I_j$ de modo que valha a Equação (3.5.5) e é suficiente definir $(D_j)_{M_i}(g_{ij})$ para $i \in I_j$ de sorte que valha a Equação (3.5.6). De fato, $(\alpha_j)_A$ e $(D_j)_A$ podem então ser determinados pela Equação (3.5.1) e pela Equação (3.5.2), respectivamente. É claro então que $(\alpha_j)_A$ e que $(D_j)_A$ serão naturais e que satisfarão às Equações (3.5.3) e (3.5.4).

$$\partial_j\big((\alpha_j)_{M_i}(g_i)\big) = (\alpha_{j-1})_{M_i}\big(\partial_j(g_i)\big) \tag{3.5.5}$$

$$\partial_{j+1}\big((D_j)_{M_i}(g_i)\big) = (\alpha_j)_{M_i}(g_i) - (\alpha'_j)_{M_i} - (D_{j-1})_{M_i}\big((\partial_j(g_i)\big) \tag{3.5.6}$$

Dada uma transformação natural $\varphi : H_0(T) \to H_0(T')$, a definição indutiva de α se dá como a seguir. Para $j = 0$ definimos $(\alpha_0)_{M_i}(g_{ij})$ para $i \in I_0$ como sendo algum elemento de $T'_0(M_i)$ tal que $[(\alpha_0)_{M_i}(g_{ij})] = \varphi(M_i)[g_{ij}]$. Usamos então a Equação (3.5.1) para definir $(\alpha_0)_A$ para todo $A \in \mathscr{C}$. Então, para todo $g \in T_0(A)$, $[(\alpha_0)_A(g)] = \varphi(A)[g]$. Em particular, para todo $i \in J_1$, $(\alpha_0)_{M_i}\big(\partial_j(g_i)\big)$ é um bordo em $T'_0(M_i)$. Portanto, podemos definir $(\alpha_1)_{M_i}(g_{ij}) \in T'_1(M_i)$ de modo que $\partial_j\big((\alpha_1)_{M_i}(g_{ij})\big) = (\alpha_0)_{M_i}\big(\partial_j(g_{ij})\big)$. Usamos então a Equação (3.5.1) para definir $(\alpha_1)_A$ para todo $A \in \mathscr{C}$. Assumindo que tenhamos definido α_k para $k < j$, com $j > 1$, de modo que a Equação (3.5.3) seja satisfeita, observamos que o lado direito da Equação (3.5.5) é um ciclo de $T_{j-1}(M_i)$. Como $j > 1$ e o funtor $T' : \mathscr{C} \to Ab_C$ é acíclico em dimensões positivas, temos que $H_{j-1}(T'(M_i)) = \{0\}$, e definimos $(\alpha_j)_{M_i}(g_{ij})$ para satisfazer a Equação (3.5.5). Então definimos $(\alpha_j)_A$ para todo $A \in \mathscr{C}$ a fim de satisfazer a Equação (3.5.1). Isto termina a definição de α.

Dadas transformações de cadeias naturais $\alpha, \alpha' : T \to T'$ que induzem a mesma transformação natural $H_0(T) \to H_0(T')$, definimos $(D_0)_{M_i}(g_{ij})$, para todo $i \in I_0$, como sendo um elemento de $T'_1(M_i)$ cujo bordo coincida com $(\alpha_0)_{M_i}(g_{ij}) - (\alpha'_0)_{M_i}(g_{ij})$. Então $(D_0)_A$ é definido para todo $A \in \mathscr{C}$ pela Equação (3.5.2). Assumindo que tenhamos definido D_k para $k < j$, com $j > 0$, de modo que a Equação (3.5.4) seja satisfeita, observamos que o lado direito da Equação (3.5.6) é um ciclo de $T'_j(M_i)$. Porque $j > 0$ e o funtor $T' : \mathscr{C} \to Ab_C$ é acíclico em dimensões positivas, temos que $H_j(T'(M_i)) = \{0\}$, e este ciclo é um bordo. Definimos então $(D_j)_{M_i}(g_{ij}) \in T'_{j+1}(M_i)$ para satisfazer à Equação (3.5.6) e usamos a Equação (3.5.2) para definir $(D_j)_A$ para todo $A \in \mathscr{C}$. Assim terminamos a definição de D. ■

Na Seção 4.2 definimos o complexo de cadeias singular $(\Delta(X), \partial_{\Delta(X)})$ de um espaço topológico X. Podemos definir também, considerando X somente como uma variedade suave, o complexo de cadeias singular suave $(\Delta^s(X), \partial_{\Delta^s(X)})$ de X a partir somente de j-simplexos singulares $\sigma : \Delta^j \to X$ infinitamente diferenciáveis. Sendo assim obtemos o Corolário 3.5.2 a seguir que diz que é suficiente considerar o complexo suave para obter todas as informações homológicas sobre uma variedade suave.

Corolário 3.5.2. *Sejam M uma variedade suave, $(\Delta(M), \partial_{\Delta(M)})$ o complexo de cadeias singular de M e $(\Delta^s(M), \partial_{\Delta^s(M)})$ o complexo de cadeias singular suave de M. Então a aplicação inclusão $\iota : \Delta^s(M) \to \Delta(M)$ é um isomorfismo natural. Em particular, o push-forward em homologia $\iota_* : H^s(M) \to H(M)$ é um isomorfismo de grupos natural.* ■

3.6 Complexo cone

Definição 3.6.1. *Sejam* (C, ∂_C) *e* $(C', \partial_{C'})$ *complexos de cadeias e* $\varphi : C \to C'$ *uma transformação de cadeias. Seja*

$$\tilde{C}_j := C_{j-1} \oplus C'_j$$

e seja

$$\tilde{\partial}_j(c, c') := (-\partial_{j-1}(c),\ \varphi_{j-1}(c) + \partial'_j(c'))$$

com $c \in C_{j-1}$ *e* $c' \in C'_j$, *para todo* $j \in \mathbb{Z}$. *Definimos assim* $\tilde{C} := \{\tilde{C}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ *e* $\partial_{\tilde{C}} := \{\tilde{\partial}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$. *Então* $(\tilde{C}, \partial_{\tilde{C}})$ *é um complexo de cadeias, chamado de* ***complexo cone*** *de* φ. ▶

Vejamos que o complexo cone da Definição 3.6.1 é realmente um complexo de cadeias. Para isso, é suficiente verificar que $\tilde{\partial}_{j-1} \circ \tilde{\partial}_j = 0$ para todo $j \in \mathbb{Z}$. De fato, para todo $j \in \mathbb{Z}$ e para todos $c \in C_{j-1}$ e $c' \in C'_j$, temos que

$$\begin{aligned}
\tilde{\partial}_{j-1} \circ \tilde{\partial}_j(c, c') &= \tilde{\partial}_{j-1}(-\partial_{j-1}(c),\ \varphi_{j-1}(c) + \partial'_j(c')) \\
&= \big(-\partial_{j-2}(-\partial_{j-1}(c)),\ \varphi_{j-2}(-\partial_{j-1}(c)) + \partial'_{j-1}[\varphi_{j-1}(c) + \partial'_j(c')]\big) \\
&= \big((\partial_{j-2} \circ \partial_{j-1})(c),\ -(\varphi_{j-2} \circ \partial_{j-1})(c) + (\partial'_{j-1} \circ \varphi_{j-1})(c) + (\partial'_{j-1} \circ \partial'_j)(c')\big) \\
&= \big((\partial_{j-2} \circ \partial_{j-1})(c),\ -(\varphi_{j-2} \circ \partial_{j-1})(c) + (\varphi_{j-2} \circ \partial_{j-1})(c) + (\partial'_{j-1} \circ \partial'_j)(c')\big) \\
&= (0,\ 0).
\end{aligned}$$

Observação 3.6.1. *Sejam* $I := [0, 1] \subset \mathbb{R}$, X *um espaço topológico e* $A \subset X$ *um subespaço topológico de* X. *Definimos o* ***cone*** *de* X *por* $C(X) := {}^{X \times I}\!/_{X \times \{1\}}$. *Definimos também o* ***cone do par*** (X, A) *por* $C(X, A) := {}^{X \sqcup C(A)}\!/_{\sim}$, *em que* $(a, 0) \in C(A) \sim a \in A \subset X$ *para todo* $a \in A$. *Analogamente, definimos o* ***cone de uma aplicação contínua*** $\varphi : A \to X$ *por* $C(\varphi) := {}^{X \sqcup C(A)}\!/_{\sim}$, *em que* $(a, 0) \in C(A) \sim \varphi(a) \in A \subset X$ *para todo* $a \in A$.

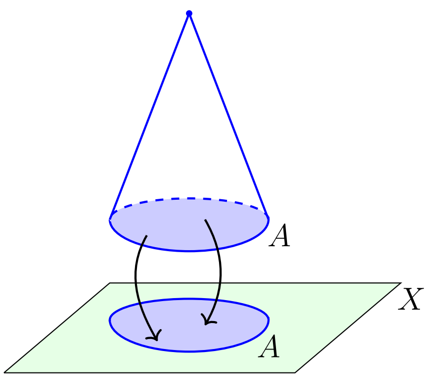


Figura 3.6.1: Cone do par (X, A).

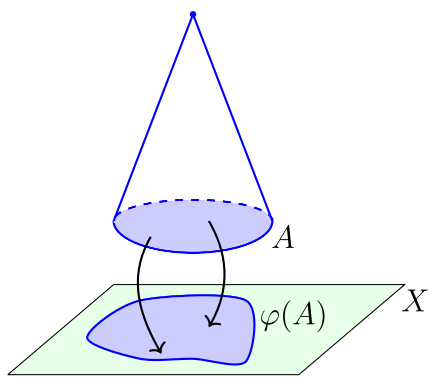


Figura 3.6.2: Cone de φ.

Figura 3.6.3: As setas indicam o processo de colagem da base do cone de A com os respectivos subespaços de X. Nota-se que o cone da inclusão $\iota : A \to X$ coincide com o cone do par (X, A).

É natural definir-se $C_j(X,A) := C_{j-1}(A) \oplus C_j(X)$ para todo $j \in \mathbb{Z}$. Pode-se ver na Figura 3.6.4 para o caso $j = 2$ que uma 2-cadeia do cone do par (X, A) pode tanto ser uma 1-cadeia α de A, pois quando fazemos seu cone elevamos sua dimensão em um, quanto uma 2-cadeia β de X. Em geral, estamos dizendo que as j-cadeias do par (X, A) consistem nas $(j-1)$-cadeias de A e nas j-cadeias de X. Para todo $j \in \mathbb{Z}$, seja $\iota_j : C_{j-1}(A) \to C_j(X)$ a inclusão. É também natural, para todo $j \in \mathbb{Z}$, dizermos que $\tilde{\partial}_j(\alpha, 0) = \big(\partial_{j-1}(\alpha), \iota_j(\alpha)\big)$ para todo $\alpha \in C_{j-1}(A)$ e que $\tilde{\partial}_j(0, \beta) = \big(0, \partial_j(\beta)\big)$ para todo $\beta \in C_j(X)$. Daí, para todo $j \in \mathbb{Z}$, temos que $\tilde{\partial}_j(\alpha,\, \beta) = \big(\partial_{j-1}(\alpha),\, \iota_j(\alpha) + \partial_j(\beta)\big)$ para todo $\alpha \in C_{j-1}(A)$ e para todo $\beta \in C_j(X)$.

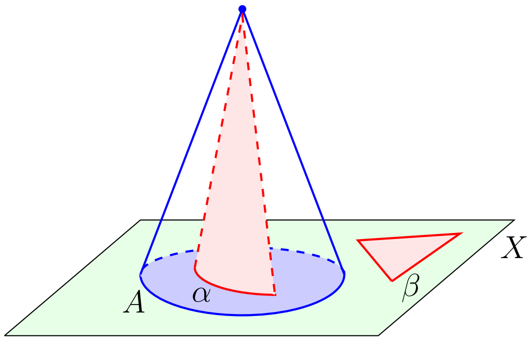


Figura 3.6.4: Na figura α é uma $(j-1)$-cadeia de A e β é uma j-cadeia de X.

Seja $\varphi : A \to X$ uma aplicação contínua e seja $\varphi_j : C_{j-1}(A) \to C_j(X)$, $\alpha \mapsto \varphi(\alpha)$, para todo $j \in \mathbb{Z}$. Definimos então $C_j(\varphi) := C_{j-1}(\varphi(A)) \oplus C_j(X)$ e $\tilde{\partial}_j(\alpha,\, \beta) = \big(\partial_{j-1}(\alpha),\, \varphi_j(\alpha) + \partial_j(\beta)\big)$, para todo $j \in \mathbb{Z}$. ◀

Teorema 3.6.1. *Sejam (C, ∂_C) e $(C', \partial_{C'})$ complexos de cadeias e $\varphi : C \to C'$ uma transformação de cadeias. Então φ é um isomorfismo de cadeias se, e somente se, a transformação cone de φ é contrátil.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Se $\varphi : C \to C'$ é um isomorfismo de cadeias, então existem uma transformação de cadeias $\varphi' : C' \to C$, uma homotopia de cadeias $D : C \to C$ entre $\varphi' \circ \varphi$ e id_C, e uma homotopia de cadeias $D' : C' \to C'$ entre $\varphi \circ \varphi'$ e $id_{C'}$. Sejam

$$c_1(c, c') = D(c) + (\varphi' \circ D' \circ \varphi)(c) - (\varphi' \circ \varphi \circ D)(c) + \varphi'(c')$$

e

$$c_2(c, c') = (D' \circ \varphi \circ D)(c) - (D' \circ D' \circ \varphi)(c) - D'(c'),$$

com $c \in C$ e $c' \in C'$. Definimos $\tilde{D}(c, c') = (c_1(c, c'),\ c_2(c, c'))$ para todos $c \in C$ e $c' \in C'$. Temos que $\tilde{D}$ é uma contração de cadeias de $\tilde{C}$. Faz-se esta verificação com um cálculo direto.

($\Leftarrow$) Seja $\tilde{D} : \tilde{C} \to \tilde{C}$ uma contração de cadeias. Sejam $\pi_j^{(1)} : C_{j-1} \oplus C'_j \to C_{j-1}$, $(c, c') \mapsto c$, e $\pi_j^{(2)} : C_{j-1} \oplus C'_j \to C'_j$, $(c, c') \mapsto c'$, para todo $j \in \mathbb{Z}$. Definimos $\varphi'_j : C'_j \to C_j$, $c' \mapsto (\pi_{j+1}^{(1)} \circ \tilde{D}_j)(0, c')$, para todo $j \in \mathbb{Z}$. Definimos também $D_j : C_j \to C_{j+1}$, $c \mapsto (\pi_{j+2}^{(1)} \circ \tilde{D}_{j+1})(c, 0)$, para todo $j \in \mathbb{Z}$. Por fim, definimos $D'_j : C'_j \to C'_{j+1}$, $c' \mapsto -(\pi_{j+1}^{(2)} \circ \tilde{D}_j)(0, c')$, para todo $j \in \mathbb{Z}$. Temos que

- ($\varphi' := \{\varphi'_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ é uma transformação de cadeias). Precisamos mostrar que, para todo $j \in \mathbb{Z}$, o Diagrama (3.6.1) é comutativo.

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{C'_{j-1}} \arrow[d, "\varphi'_{j-1}"'] & \boldsymbol{C'_j} \arrow[l, "\partial'_j"'] \arrow[d, "\varphi'_j"] \\ \boldsymbol{C_{j-1}} & \boldsymbol{C_j} \arrow[l, "\partial_j"] \end{tikzcd} \tag{3.6.1}$$

  Como $\tilde{D}$ é uma contração de cadeias, para todo $j \in \mathbb{Z}$ e para todo $c' \in C'_j$, temos que
  $$(\tilde{\partial}_{j+1} \circ \tilde{D}_j)(0, c') + (\tilde{D}_{j-1} \circ \tilde{\partial}_j)(0, c') = (0, c').$$
  Além disso, temos que
  $$(\tilde{\partial}_{j+1} \circ \tilde{D}_j)(0, c') = \tilde{\partial}_{j+1}(\varphi'_j(c'),\ \cdot) = \big(-(\partial_j \circ \varphi'_j)(c'),\ \cdot\big)$$
  e que
  $$(\tilde{D}_{j-1} \circ \tilde{\partial}_j)(0, c') = \tilde{D}_{j-1}\big(0,\ \partial'_{j-1}(c')\big) = \big((\varphi'_{j-1} \circ \partial'_{j-1})(c'),\ \cdot\big),$$
  para todo $j \in \mathbb{Z}$ e para todo $c' \in C'_j$. Destarte,
  $$(\partial_j \circ \varphi'_j)(c') = (\varphi'_{j-1} \circ \partial'_{j-1})(c')$$
  para todo $j \in \mathbb{Z}$ e para todo $c' \in C'_j$. Ou seja,
  $$\partial_j \circ \varphi'_j = \varphi'_{j-1} \circ \partial'_{j-1}$$
  para todo $j \in \mathbb{Z}$.

- ($D := \{D_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ é uma homotopia de cadeias entre $\varphi' \circ \varphi$ e id_C). Mostra-se, como acima, que
  $$\partial_{j+1} \circ D_j + D_{j-1} \circ \partial_j = \varphi'_j \circ \varphi_j - id_{C_j}$$
  para todo $j \in \mathbb{Z}$.

- ($D' := \{D'_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ é uma homotopia de cadeias entre $\varphi \circ \varphi'$ e $id_{C'}$). Também, mostra-se que
  $$\partial'_{j+1} \circ D'_j + D'_{j-1} \circ \partial'_j = \varphi_j \circ \varphi'_j - id_{C'_j}$$
  para todo $j \in \mathbb{Z}$.

Destarte φ é um isomorfismo de cadeias. ∎

Combinando os Teoremas 3.5.1 e 3.6.1 com o fato de que o complexo cone entre complexos de cadeias livres são também complexos de cadeias livres, temos o Corolário 3.6.1 a seguir.

Corolário 3.6.1. *Sejam C e C' complexos de cadeias livres e $\varphi : C \to C'$ uma transformação de cadeias. Então φ é um isomorfismo de cadeias se, e somente se, a transformação cone de φ é acíclica.* ∎

4 Homologia Singular

O grupo fundamental pode ser calculado para espaços não elementares graças ao *Teorema de Seifert-Van Kampen*. Entretanto, sendo o grupo fundamental, em geral, não-abeliano, sua estrutura pode ser bastante complicada. Já os grupos de homotopia de ordem superior são abelianos, mas geralmente é bem difícil calculá-los, pois não temos uma ferramenta parecida com o *Teorema de Seifert-Van Kampen*, ou seja, uma ferramenta que nos permita calcular os grupos de homotopia de espaços complicados a partir de uma cobertura adequada. Por estas razões a *Teoria de Homotopia* não é suficientemente manejável para ser usada como ferramenta básica no estudo dos espaços topológicos.

Nesta seção apresentamos os fundamentos da *Teoria de Homologia*. Esta resolve ao mesmo tempo os dois problemas destacados no parágrafo anterior. Para isso fazemos uso da linguagem categorial apresentada anteriormente. As referências usadas para este estudo são as notas de aula do orientador e [SPANIER].

4.1 Funtor homologia orientada

Dizemos que um ***j*-simplexo orientado** de um complexo simplicial K é um j-simplexo de K equipado com uma classe de equivalência de ordens totais dos seus vértices, sendo que duas ordens são equivalentes se elas diferem por uma permutação par dos vértices. Se $\{v_0, v_1, \cdots, v_j\}$ é o conjunto de vértices de um j-simplexo de um complexo simplicial K, então $[v_0, v_1, \cdots, v_j]$ denota o j-simplexo orientado de K que consiste do j-simplexo munido da classe de equivalência da ordem $v_0 < v_1 < \cdots < v_j$ dos vértices. Não existe nenhum j-simplexo orientado para $j < 0$. Para todo vértice v de K existe um único 0-simplexo orientado $[v]$ e, para todo $j \in \mathbb{N}^*$, existem dois j-simplexos orientados distintos.

Seja $C_j(K)$ o grupo abeliano gerado pelos j-simplexos orientados σ^j com as relações $\sigma_1^j + \sigma_2^j = 0$ se σ_1^j e σ_2^j são j-simplexos orientados distintos correspondentes ao mesmo j-simplexo de K. Então $C_j = \{0\}$ para $j < 0$ e, para todo $j \in \mathbb{N}$, $C_j(K)$ é um grupo abeliano livre com posto igual ao número de j-simplexos de K. Se K é vazio, então $C_j(K) = \{0\}$ para todo $j \in \mathbb{Z}$.

Para todo $j \in \mathbb{N}^*$ definimos o homomorfismo $\partial_j : C_j(K) \to C_{j-1}(K)$ definindo-o nos geradores de $C_j(K)$ como

$$\partial_j[v_0, v_1, \cdots, v_j] = \sum_{i=0}^{j}(-1)^i[v_0, v_1, \cdots, \hat{v}_i, \cdots, v_j], \tag{4.1.1}$$

em que $[v_0, v_1, \cdots, \hat{v}_i, \cdots, v_j]$ denota o $(j-1)$-simplexo orientado obtido deletando-se o vértice v_i do j-simplexo orientado $[v_0, v_1, \cdots, v_j]$. Sejam $C(K) := \{C_j(K)\}_{j\in\mathbb{Z}}$ e $\partial_{C(K)} := \{\partial_j : C_j(K) \to C_{j-1}(K)\}_{j\in\mathbb{Z}}$. Uma vez que, para todo $j \in \mathbb{N}^*$,

$$
\begin{aligned}
\partial_{j-1} \circ \partial_j [v_0, \cdots, v_j] &= \sum_{i=0}^{j} (-1)^i \partial_{j-1} [v_0, \cdots, \hat{v}_i, \cdots, v_j] \\
&= \sum_{i=0}^{j} \sum_{k=0}^{i-1} (-1)^{i+k} [v_0, \cdots, \hat{v}_k, \cdots, \hat{v}_i, \cdots, v_j] \\
&\quad + \sum_{i=0}^{j} \sum_{k=i+1}^{j} (-1)^{i+k-1} [v_0, \cdots, \hat{v}_i, \cdots, \hat{v}_k, \cdots, v_j] \\
&= \sum_{i<k} (-1)^{i+k} [v_0, \cdots, \hat{v}_k, \cdots, \hat{v}_i, \cdots, v_j] \\
&\quad + \sum_{i>k} (-1)^{i+k-1} [v_0, \cdots, \hat{v}_i, \cdots, \hat{v}_k, \cdots, v_j] \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

temos que $(C(K), \partial_{C(K)})$ é um complexo de cadeias livre não-negativo que chamamos de **complexo de cadeias orientado** de K. O grupo de homologia de $C(K)$, denotado por $H(K)$, é o grupo graduado $\{H_j(K) := H_j(C(K))\}_{j \in \mathbb{Z}}$, que denominamos por **grupo de homologia orientada** de K. O grupo $H_j(K)$ é dito o ***j*-ésimo grupo de homologia orientada** de K.

Se $v_0, v_1, \cdots, v_j$ são vértices de algum simplexo de um complexo simplicial K, então definimos $[v_0, v_1, \cdots, v_j] \in C_j(K)$ como sendo nulo se os vértices não são todos distintos ou o definimos como sendo o j-simplexo orientado caso contrário. Observamos que a Equação (4.1.1) se anula em ambos os lados no caso em que os vértices $v_0, v_1, \cdots, v_j$ não são todos distintos e, por isso, ela é coerente com a extensão de significado apresentada para $[v_0, v_1, \cdots, v_j] \in C_j(K)$ neste parágrafo. Existe uma transformação de cadeias $C(\varphi) : C(K_1) \to C(K_2)$ associada a uma aplicação simplicial $\varphi : K_1 \to K_2$ definida por

$$
C(\varphi)[v_0, v_1, \cdots, v_j] = [\varphi(v_0), \varphi(v_1), \cdots, \varphi(v_j)]. \tag{4.1.2}
$$

Observamos que se $v_0, v_1, \cdots, v_j$ são vértices distintos de algum simplexo de K_1, não necessariamente os vértices $\varphi(v_0), \varphi(v_1), \cdots, \varphi(v_j)$ de algum simplexo de K_2 são distintos. O lado direito da Equação (4.1.2) só está definido, portanto, por causa da extensão feita para que $[v_0, v_1, \cdots, v_j]$ fosse um elemento de $C_j(K)$ mesmo quando os vértives $v_0, v_1, \cdots, v_j$ não fossem todos distintos.

Teorema 4.1.1. *Existe um funtor covariante C que parte da categoria dos complexos simpliciais e que chega na categoria dos complexos de cadeia que associa a cada K seu complexo de cadeias $C(K)$ e que associa a cada aplicação simplicial φ sua transformação de cadeias $C(\varphi)$.* ■

A composição do funtor covariante C com o funtor covariante homologia H é um funtor covariante, chamado de **funtor homologia orientada**, partindo da categoria dos complexos simpliciais e chegando na categoria dos grupos graduados e homomorfismos de grau zero. Este funtor associa a cada complexo simplicial K o grupo graduado $H(K) = \{H_j(K)\}_{j \in \mathbb{Z}}$ e associa a cada aplicação simplicial $\varphi : K_1 \to K_2$ o homomorfismo de grau zero $C(\varphi) : C(K_1) \to C(K_2)$.

4.2 Funtor homologia singular

Seja $\{p_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ uma família de objetos dois a dois distintos. Seja Δ^j o complexo simplicial consistindo de todos os subconjuntos não-vazios de $\{p_0, p_1, \cdots, p_j\}$, com $j \in \mathbb{N}$. Ou seja, Δ^j é o simplexo fechado $[p_0, p_1, \cdots, p_j]$. Para todo $j \in \mathbb{N}$ e todo $0 \leq i \leq j+1$, tomamos $e^i_{j+1} : \Delta^j \to \Delta^{j+1}$ sendo a aplicação linear definida nos vértices como

$$e^i_{j+1}(p_r) := \begin{cases} p_r, & \text{se } r \leq i-1; \\ p_{r+1}, & \text{se } r \geq i. \end{cases}$$

Então $e^i_{j+1}(\Delta^j)$ é o simplexo fechado $[p_0, p_1, \cdots, p_{i-1}, p_{i+1}, \cdots, p_{j+1}]$ de Δ^{j+1}. Além disso, se $j > 1$ e se $0 \leq k \leq i-1 \leq j$, então $e^i_{j+2} \circ e^k_{j+1} = e^k_{j+2} \circ e^{i-1}_{j+1}$.

Seja X um espaço topológico. Para todo $j \in \mathbb{N}$, dizemos que uma aplicação contínua $\sigma : \Delta^j \to X$ é um ***j*-simplexo singular** de X. Para $j > 0$ e $0 \leq i \leq j$, dizemos que o $(j-1)$-simplexo singular de X dado por $\sigma \circ e^i_j : \Delta^{j-1} \to X$, denotado por $\sigma^{(i)}$, é a ***i*-face** do j-simplexo singular $\sigma : \Delta^j \to X$. A partir da última afirmação do parágrafo anterior temos que, se $j > 1$ e $0 \leq k < i \leq j$, então

$$\begin{aligned} (\sigma^{(i)})^{(k)} &= (\sigma \circ e^i_j) \circ e^k_{j-1} = \sigma \circ (e^i_j \circ e^k_{j-1}) \\ &= \sigma \circ (e^k_j \circ e^{i-1}_{j-1}) = (\sigma \circ e^k_j) \circ e^{i-1}_{j-1} \\ &= (\sigma^{(k)})^{(i-1)}. \end{aligned}$$

Para todo $j \in \mathbb{N}$, seja $\Delta_j(X)$ o grupo abeliano livre gerado pelos j-simplexos singulares de X, isto é,

$$\Delta_j(X) := \bigoplus_{\sigma:\Delta^j \to X} \mathbb{Z}.$$

Para todo $j < 0$ inteiro, seja $\Delta_j(X)$ o grupo trivial. Definimos então o grupo graduado $\Delta(X) := \{\Delta_j(X)\}_{j\in\mathbb{Z}}$. Seja agora, para $j \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \partial_j : \Delta_j(X) &\to \Delta_{j-1}(X), \\ \sigma &\mapsto \sum_{i=0}^{j} (-1)^i \sigma^{(i)}. \end{aligned}$$

Para todo $j \leq 0$ inteiro, seja $\partial_j : \Delta_j(X) \to \Delta_{j-1}(X)$ o homomorfismo nulo. Definimos $\partial_{\Delta(X)} := \{\partial_j : \Delta_j(X) \to \Delta_{j-1}(X)\}_{j\in\mathbb{Z}}$. Como $\partial_{j-1} \circ \partial_j = 0$ para todo $j \in \mathbb{Z}$, temos que $(\Delta(X), \partial_{\Delta(X)})$ é um complexo de cadeias, que chamamos de **complexo de cadeias singular** de X. Existe uma transformação de cadeias $\Delta(f) : \Delta(X) \to \Delta(Y)$ associada a uma aplicação contínua $f : X \to Y$ definida por $\Delta(f)(\sigma) = f \circ \sigma$ para todo j-simplexo $\sigma : \Delta^j \to X$.

Teorema 4.2.1. *Existe um funtor covariante Δ que parte da categoria dos espaços topológicos e que chega na categoria dos complexos de cadeia que associa a cada X seu complexo de cadeias singular $\Delta(X)$ e que a cada a aplicação contínua f associa a transformação de cadeias $\Delta(f)$.* ■

A composição do funtor covariante Δ com o funtor covariante homologia H é um funtor covariante, chamado de **funtor homologia singular**, partindo da categoria dos espaços topológicos e chegando na categoria dos grupos graduados e homomorfismos de grau zero. Este funtor associa a cada espaço topológico X o grupo graduado $H(X) = \{H_j(X) := H_j(\Delta(X))\}_{j\in\mathbb{Z}}$ e associa a cada aplicação contínua $f : X \to Y$ o homomorfismo de grau zero $f_* : H(X) \to H(Y)$ induzido pela transformação de cadeias $\Delta(f) : \Delta(X) \to \Delta(Y)$. O grupo $H_j(X)$ é chamado de ***j*-ésimo grupo de homologia singular** de X.

4.3 Homologia relativa

Podemos agora estender a definição de Homologia Singular ao caso relativo. Dado um par $(X, A) \in \mathrm{Top}_2$, construímos o complexo de cadeias

$$\Delta_j(X, A) := {}^{\Delta_j(X)}\!/\!_{\Delta_j(A)}.$$

Um elemento de $\Delta_j(X, A)$ é uma classe $[\alpha]$, tal que $\alpha \in \Delta_j(X)$. Isso não deve ser confundido com a classe de homologia de um ciclo. Observamos que $\Delta_j(X, A)$ é canonicamente isomorfo à soma direta de uma cópia de $\mathbb{Z}$ para cada j-simplexo singular $\sigma : \Delta^j \to X$ cuja imagem não está inteiramente contida em A. Ou seja,

$$\Delta_j(X, A) \simeq \bigoplus_{\substack{\sigma\colon \Delta^n \to X \\ \sigma(\Delta^n)\not\subseteq A}} \mathbb{Z}.$$

O bordo ∂_j de $\Delta_j(X, A)$ fica bem definido passando ao quociente o bordo do complexo de cadeias singular de X (vide Definição 3.3.3). Indicamos por $\partial_j : \Delta_j(X, A) \to \Delta_{j-1}(X, A)$ o bordo relativo, usando o mesmo símbolo que usamos no caso absoluto. Logo,

$$\partial_j[\alpha] := [\partial_j\alpha],$$

sendo $\alpha \in \Delta_j(X)$.

Dado um morfismo $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ de Top_2, fica bem definido o morfismo de complexos de cadeias $f_\# : \Delta_j(X, A) \to \Delta_j(Y, B)$, $[\sigma] \mapsto [f \circ \sigma]$. Portanto obtemos o funtor $\Delta : \mathrm{Top}_2 \to Ab_C$.

Logo podemos definir os **grupos de homologia singular relativa** $H_j(X, A)$ como sendo os grupos de homologia do complexo $(\Delta(X, A), \partial_{\Delta(X,A)})$. Um elemento de $H_j(X, A)$ é uma classe $[[\alpha]]$, sendo $\alpha \in \Delta_j(X)$, $[\alpha] \in Z_j(X, A)$ e $[[\alpha]] \in H_j(X, A)$. O morfismo $f_* : H_j(X, A) \to H_j(Y, B)$ fica definido por $f_*[[\alpha]] = [f_\#[\alpha]]$.

4.4 Axiomas de Eilenberg-Steenrod

O funtor homologia singular é caracterizado por cinco propriedades fundamentais, que são as seguintes.

1. **Invariância por homotopia**. Se $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ são morfismos homotópicos em Top_2, então $f_* = g_* : H_j(X, A) \to H_j(Y, B)$. Isso implica que dois pares (em particular, dois espaços topológicos) com o mesmo tipo de homotopia têm grupos de homologia isomorfos.

2. **Sequência exata longa associada a um par de espaços**. A cada par de espaços (X, A) a seguinte sequência exata longa em homologia fica associada:

$$\cdots \xrightarrow{i_{*,j}} H_j(X) \xrightarrow{\pi_{*,j}} H_j(X, A) \xrightarrow{\beta_j} H_{j-1}(A) \xrightarrow{i_{*,j-1}} H_{j-1}(X) \xrightarrow{\pi_{*,j-1}} \cdots$$

sendo i_* o push-forward induzido pelo mergulho $i : A \to X$, π_* o induzido pelo morfismo de pares $\pi : (X, \emptyset) \to (X, A)$ e β_j um morfismo de funtores apropriado.

3. **Excisão**. Seja $Z \subset A$ um subespaço topológico. Se o fecho de Z estiver contido no interior de A, então o mergulho de pares $\iota : (X \setminus Z, A \setminus Z) \to (X, A)$ induz o isomorfismo $\iota_* : H_j(X \setminus Z, A \setminus Z) \to H_j(X, A)$ para todo $j \in \mathbb{Z}$.

   Esta propriedade é a que realmente distingue os grupos de homologia dos de homotopia. De fato, também os grupos de homotopia são invariantes por homotopia dos morfismos e associam uma sequência exata longa a um par de espaços, mas não vale a excisão. Veremos que, precisamente por causa da excisão, ficará definida a sequência de Mayer-Vietoris, que, como antecipamos na introdução, torna mais fácil o cálculo explícito dos grupos de homologia.

4. **Aditividade**. Seja $X = \bigsqcup_{\alpha \in I} X_\alpha$ uma união disjunta de espaços topológicos (logo cada X_α é aberto e fechado em X). Temos que $H_j(X) \simeq \bigoplus_{\alpha \in I} H_j(X_\alpha)$, sendo o isomorfismo induzido pelos mergulhos das componentes X_α em X. Analogamente, no caso relativo, se $A \subset X$ e $A_\alpha := X_\alpha \cap A$, então $H_j(X, A) \simeq \bigoplus_{\alpha \in I} H_\bullet(X_\alpha, A_\alpha)$.

   Esta propriedade pode ser deduzida a partir das precedentes quando I for finito, mas, em geral, é uma propriedade independente.

5. **Axioma da dimensão**. A homologia de um espaço X formado somente por um ponto é trivial em todos os graus não nulos. Conforme este enunciado, $H_0(X)$ pode ser um grupo abeliano qualquer. A partir da definição que demos de homologia singular, temos que $H_0(X) \simeq \mathbb{Z}$.

Estas propriedades são chamadas de **Axiomas de Eilenberg-Steenrod**. Na verdade, para nós, todos são teoremas, não axiomas, pois já definimos a homologia singular. Todavia, é possível tratar estas propriedades de modo axiomático. Se tirarmos o axioma da dimensão, podemos achar vários funtores que satisfazem os primeiros quatro axiomas não equivalentes entre si. Estes funtores são chamados de **teorias homológicas generalizadas** e são muito importantes em várias áreas da Matemática.

4.5 Sequência de Mayer-Vietoris

Há outras propriedades importantes da Homologia Singular, as quais podem ser provadas diretamente a partir da definição. Em particular, temos as duas seguintes:

• **Sequência de Mayer-Vietoris**. Sejam $A, B \subset X$ subespaços topológicos tais que X é a união entre do interior de A com o interior de B. Fica definida a seguinte sequência exata longa:

$$\cdots \xrightarrow{\beta_{j-1}} H_j(A \cap B) \xrightarrow{\varphi_{*,j}} H_j(A) \oplus H_j(B) \xrightarrow{\psi_{*,j}} H_j(X) \xrightarrow{\beta_j} H_{j-1}(A \cap B) \xrightarrow{\varphi_{*,j-1}} \cdots$$

Frequentemente essa sequência nos permitirá calcular os grupos de homologia de X a partir dos de A e B, portanto poderemos decompor um espaço complicado em espaços mais simples.

• **Sequência exata longa associada a uma tripla de espaços**. A cada tripla de espaços $(X, A, B) \in \mathrm{Top}_3$ fica definida a sequência:

$$\boldsymbol{\cdots \xrightarrow{i_{j,*}} H_j(X, B) \xrightarrow{\pi_{j,*}} H_j(X, A) \xrightarrow{\beta_j} H_{j-1}(A, B) \xrightarrow{i_{j-1,*}} H_{j-1}(X, B) \xrightarrow{\pi_{j-1,*}} \cdots}$$

sendo i_* o push-forward induzido pelo morfismo de pares $i\colon (A, B) \hookrightarrow (X, B)$, π_* induzido pelo morfismo de pares $\pi\colon (X, B) \to (X, A)$ e β_j um morfismo de funtores apropriado.

A Uma categoria conveniente de espaços topológicos

Nesta seção expomos o estudo que fizemos sobre parte de [STEENROD], o artigo *A Convenient Category of Topological Spaces* do matemático norte-americano *Norman Earl Steenrod* (1910-1971). No trabalho citado o autor se preocupou em estabelecer uma categoria de espaços topológicos na qual as operações elementares se comportassem bem. Sendo assim, a expressão "categoria conveniente" é entendida essencialmente do ponto de vista operacional. A fim de esclarecer esta última afirmação, fornecemos uma tradução livre de um trecho de [STEENROD] no qual o autor explica que

> "As demandas que uma categoria conveniente deve satisfazer são, primeiro, que seja suficientemente grande para conter todos os espaços particulares que aparecem na prática. Segundo, que seja fechada ante as operações padrão; estas são a formação de subespaços, espaços produtos $X \times Y$, espaços de função Y^X, espaços de decomposição, uniões de sequências expansoras de espaços e composições destas operações. Terceiro, a categoria deve ser suficientemente pequena para que algumas proposições razoáveis sobre as operações padrão sejam verdadeiras. Isto significa que a ordem de realizar duas operações pode ser trocada."

A.1 Espaços compactamente gerados

Definição A.1.1 (Espaço compactamente gerado)**.** *Seja X um espaço topológico de Hausdorff. Dizemos que X é um* ***espaço compactamente gerado*** *se para todo $A \subset X$ com $A \cap K$ fechado, para todo $K \subset X$ compacto, tenhamos que A seja fechado em X.* ▶

(**Categoria TopCG**) Definimos a categoria TopCG dos espaços topológicos compactamente gerados da seguinte maneira: seus objetos são os espaços topológicos compactamente gerados, seus morfismos são as aplicações contínuas entre estes espaços topológicos e a composição dos morfismos é a lei de composição ordinária entre funções. Observamos que TopCG também é uma categoria concreta.

Definimos também TopCG_+, TopCG_n e TopCG_{n+} como sendo os análogos naturais de Top_+, Top_n e Top_{n+}, respectivamente.

Proposição A.1.1. *Seja X um espaço topológico de Hausdorff. Se para todo $A \subset X$ e para todo $x \in X$ ponto de acumulação de A existir um conjunto compacto $K \subset X$ de modo que x seja um ponto de acumulação de $A \cap K$, então $X \in$ TopCG.*

Demonstração. Sejam $A \subset X$ tal que $A \cap K$ é fechado, para todo $K \subset X$ compacto em X, e x um ponto de acumulação de A. Por hipótese, existe um conjunto compacto $K \subset X$ de modo que x é um ponto de acumulação de $A \cap K$. Uma vez que $A \cap K$ é fechado, temos que $x \in A \cap K$ e, portanto, temos que $x \in A$. Destarte A é fechado e assim segue que $X \in$ TopCG. ■

Todos os espaços de *Hausdorff* localmente compactos e todos os espaços de *Hausdorff* que satisfazem o primeiro axioma de enumerabilidade pertencem à categoria TopCG. De fato, é imediato a partir da Proposição A.1.1 que todo espaço de *Hausdorff* localmente compacto pertence à categoria TopCG. Portanto, verificamos agora a outra afirmação. Sejam X um espaço de *Hausdorff* que satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade e $A \subset X$ tal que $A \cap K$ é fechado para todo $K \subset X$ compacto. Mostramos então que $\bar{A} \subset A$ e, portanto, que A é fechado. Seja $x \in \bar{A}$; como X satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade, existe uma sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ de forma que $a_n \to x$ e $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \cup \{x\}$ é compacto. Deste modo, $A \cap ((a_n)_{n \in \mathbb{N}} \cup \{x\})$ é fechado. Mas como esta intersecção é infinita, devemos ter que $x \in A$. Portanto $\bar{A} \subset A$.

Proposição A.1.2. *Seja (X, Ω) um espaço topológico de Hausdorff. X é compactamente gerado se, e somente se, sendo $\{K_j\}_{j \in J}$, em que J é um conjunto de índices, a família de todos os subconjuntos compactos de X, Ω é a topologia fraca em X induzida por $\{K_j\}_{j \in J}$.* ■

Proposição A.1.3. *Sejam $X \in TopCG$ e $A \subset X$ um subespaço. Se A é fechado em X, então $A \in TopCG$. Além disso, se U é um aberto regular em X, isto é, se para todo $x \in U$ existe uma vizinhança V de x em X de modo que $\bar{V} \subset U$, então $U \in TopCG$.*

Demonstração. Sejam $A \subset X$ um subespaço fechado e $B \subset A$ tal que, para todo $K \subset A$ compacto em A, $B \cap K$ é um conjunto fechado em A. Seja $K \subset X$ um compacto. Temos que $A \cap K$ é um conjunto compacto de A e, portanto, $B \cap (A \cap K) = B \cap K$ é um conjunto fechado em A. Uma vez que A é fechado, $B \cap K$ é fechado em X. Dado que $X \in$ TopCG, B é fechado em X e, pois, em A. Logo $A \in$ TopCG.

Sejam $U \subset X$ um subespaço aberto, $B \subset U$ tal que, para todo $K \subset U$ compacto, $B \cap K$ é um conjunto fechado em U e $x \in U$ um ponto de acumulação para B. Por hipótese, existe uma vizinhança V de x em X de modo que $\bar{V} \subset U$. Se $K \subset X$ é compacto, então $\bar{V} \cap K$ é um conjunto compacto em U. Sendo assim $B \cap (\bar{V} \cap K)$ é fechado em U, em $\bar{V} \cap K$ e, finalmente, em X. Como $X \in$ TopCG, $B \cap \bar{V}$ é um conjunto fechado em X. Dado que x é um ponto de acumulação de $B \cap \bar{V}$, temos que $x \in B \cap \bar{V}$. Portanto $x \in B$ e, assim, B é fechado em U. ■

Definição A.1.2 (Proclusão). *Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \to Y$ uma aplicação. Dizemos que f é uma* ***proclusão*** *se for uma aplicação sobrejetora e se $U \subset Y$ é aberto em Y sempre que $f^{-1}(U) \subset X$ é aberto em X.* ▶

Com a notação da Definição A.1.2, quando f é uma proclusão, Y é equivalente ao espaço de decomposição de X pela família de imagens inversas dos pontos de Y. Também, se X está decomposto em uma família Y de conjuntos fechados disjuntos, então a topologia do espaço de decomposição Y é definida de modo que a aplicação natural $X \to Y$ seja contínua e proclusiva.

Lema A.1.1. *Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \to Y$ uma aplicação. Se X e Y são espaços de Hausdorff, X é compacto e f é contínua e sobrejetora, então f é uma proclusão.* ■

Proposição A.1.4. *Sejam $X \in$ TopCG, Y um espaço topológico de Hausdorff e $f : X \to Y$ uma aplicação. Se f é uma proclusão, então $Y \in$ TopCG.*

Demonstração. Seja $B \subset Y$ tal que, para todo $K \subset Y$ compacto em Y, $B \cap K$ é um conjunto fechado em Y. Se L é um conjunto compacto em X, então $f(L)$ é um conjunto compacto em Y. Desta forma $B \cap f(L)$ é fechado e, portanto, $f^{-1}(B \cap f(L))$ é fechado. Assim $f^{-1}(B \cap f(L)) \cap L$ é um conjunto fechado. Uma vez que $f^{-1}(B \cap f(L)) \cap L = f^{-1}(B) \cap L$, segue que a intersecção de $f^{-1}(B)$ com qualquer conjunto compacto de X é uma conjunto fechado. Dado que $X \in$ TopCG, $f^{-1}(B)$ é fechado. Como f é uma proclusão, B é fechado em Y e, pois, $Y \in$ TopCG. ■

Proposição A.1.5. *Sejam $X \in$ TopCG, Y um espaço topológico de Hausdorff e $f : X \to Y$ uma aplicação. Se $f|_K : K \to Y$ é contínua para todo $K \subset X$ compacto, então f é contínua.*

Demonstração. Sejam $A \subset Y$ fechado e $K \subset X$ compacto. Como Y é um espaço de *Hausdorff* e $f|_K$ é contínua, temos que $f(K)$ é compacto e, portanto, que $f(K)$ é fechado em Y. Desta forma $A \cap f(K)$ é fechado. Como $(f|_K)^{-1}(A \cap f(K)) = f^{-1}(A) \cap K$ e $X \in$ TopCG, temos que $f^{-1}(A)$ é fechado em X. Destarte f é uma aplicação contínua. ■

A.2 Espaços compactamente gerados associados

Definição A.2.1 (Espaço compactamente gerado associado)**.** *Seja X um espaço topológico de Hausdorff. Dizemos que o* ***espaço compactamente gerado associado*** *a X, que denotamos por $k(X)$, é o conjunto X munido da seguinte topologia: $A \subset k(X)$ é fechado em $k(X)$ se, para todo $K \subset X$ compacto em X, $A \cap K$ é um conjunto fechado em X. Sendo X e Y espaços de Hausdorff e $f : X \to Y$ uma aplicação, denotamos por $k(f)$ a mesma função $k(X) \to k(Y)$.* ▶

Teorema A.2.1. *Sejam X e Y espaços topológicos de Hausdorff e $f : X \to Y$ uma aplicação. Então*

1. *a aplicação identidade $k(X) \to X$ é contínua;*
2. *$k(X)$ é um espaço topológico de Hausdorff;*
3. *$k(X)$ e X têm os mesmos conjuntos compactos;*
4. *$k(X)$ é compactamente gerado;*
5. *Se $X \in$ TopCG, então $k(X) = X$;*
6. *Se $f|_K : K \to Y$ é contínua para todo $K \subset X$ compacto em X, então $k(f)$ é uma aplicação contínua.*

Demonstração.

1. Seja $A \subset X$ fechado em X. Se $K \subset X$ é compacto em X, então K é fechado em X. Logo $A \cap K$ é fechado em X. Portanto A é fechado em $k(X)$.

2. Uma vez que X é um espaço de *Hausdorff*, o item anterior garante que $k(X)$ também é um espaço de *Hausdorff*.

3. Se $K \subset X$ é um conjunto compacto em $k(X)$, então o Item 1 garante que K é compacto em X. Reciprocamente, seja $K \subset X$ um conjunto compacto em X; denotamos por K' o mesmo conjunto com a topologia induzida de $k(X)$. Pelo Item 1 a aplicação identidade $K' \to K$ é contínua e, portanto, é suficiente demonstrar a continuidade de sua inversa para ver que K é compacto em $k(X)$ também. Seja $A \subset K'$ um conjunto fechado em K'. Por definição, a intersecção de A com qualquer conjunto compacto em X é um conjunto fechado em X; em particular, $A \cap K = A$ é fechado em K. Isto mostra que a aplicação identidade $K \to K'$ é contínua.

4. Se a intersecção de um conjunto A com qualquer conjunto compacto em $k(X)$ é um conjunto fechado em $k(X)$, então, pelo item anterior, a intersecção de A com qualquer conjunto compacto em X é um conjunto compacto e, pois, fechado em X. Destarte A é fechado em $k(X)$.

5. Segue do Item 4.

6. Graças à Proposição A.1.5, precisamos somente mostrar que $k(f)$ é contínua em cada conjunto compacto em $k(X)$. Seja $K' \subset X$ um conjunto compacto em $k(X)$. Pelo Item 3, este mesmo conjunto, agora denotado por K, com a topologia induzida de X, é um conjunto compacto e, além disso, a aplicação identidade $K' \to K$ é um homeomorfismo entre K' e K. Uma vez que $f\mid_K$ é contínua, temos que $f(K)$ é um conjunto compacto e, pelo Item 3, também é compacto o conjunto $f(K')$ com a topologia induzida de $k(Y)$. Como $k(f)\mid_{K'}\colon K' \to f(K')$ é a composição das aplicações $K' \to K \to f(K) \to f(K')$, $k(f)\mid_{K'}$ é contínua em K'. Destarte segue a afirmação. ■

A.3 Espaços produto

Uma categoria conveniente de espaços deve ser fechada ante as operações padrão, ou seja, uma construção aplicada a um ou mais espaços da categoria deve resultar em um espaço na categoria. A categoria TopCG é quase ideal neste sentido: o espaço produto entre espaços de TopCG, em geral, fornece um espaço de *Hausdorff* não necessariamente pertencente à categoria TopCG. Este fato é tratado considerando-se o espaço compactamente gerado associado.

Definição A.3.1 (Produto em TopCG)**.** *Sejam $X, Y \in$ TopCG. Dizemos que $X \times Y := k(X \times' Y)$, em que $\times'$ denota o espaço produto, é o* ***produto de** X **e** Y* *em TopCG.* ▶

Vejamos que o produto, como na Definição A.3.1, é de fato um produto na categoria TopCG (vide Definição 2.2.1). Pelo Teorema A.2.1, a aplicação identidade $X \times Y \to$

$X \times' Y$ é contínua. Além disso, como as projeções $X \times' Y \to X$ e $X \times' Y \to Y$ são contínuas, temos que suas composições com a identidade $X \times Y \to X$ e $X \times Y \to Y$ são projeções contínuas que pertencem a TopCG. Dados $Z \in$ TopCG e $f : Z \to X$ e $g : Z \to Y$ aplicações contínuas, temos que f e g são componentes de uma única aplicação contínua $\varphi : Z \to X \times' Y$. Considerando o espaço compactamente gerado associado e notando que $k(Z) = Z$ e que $k(X \times' Y) = X \times Y$, temos que existe uma única aplicação contínua $k(\varphi) : Z \to X \times Y$ que, quando composta com as projeções, fornece f e g.

Teorema A.3.1. *Sejam X um espaço topológico localmente compacto e $Y \in$ TopCG. Então $X \times' Y \in$ TopCG. Ou seja, $X \times' Y = X \times Y$.*

Demonstração. Seja $A \subset X \times' Y$ um conjunto cuja intersecção com qualquer conjunto compacto de $X \times' Y$ é um conjunto fechado e seja $(x_0, y_0) \in (X \times' Y) \setminus A$. Graças à hipótese de compacidade local, x_0 possui uma vizinhança V cujo fecho é um conjunto compacto. Uma vez que $\bar{V} \times' \{y_0\}$ também é um conjunto compacto, $A \cap (\bar{V} \times' \{y_0\})$ é fechado. Assim, x_0 possui uma vizinhança U de modo que $(\bar{U} \times' \{y_0\}) \cap A = \emptyset$. Seja $B \subset Y$ a projeção do conjunto $A \cap (\bar{U} \times' Y)$. Se K é um conjunto compacto em Y, então $A \cap (\bar{U} \times' K)$ é um conjunto compacto e, portanto, $B \cap K$ é um conjunto fechado em Y. Dado que $Y \in$ TopCG, B é fechado em Y. Sendo que $y_0 \notin B$, temos que $U \times' (Y \setminus B)$ é uma vizinhança de (x_0, y_0) totalmente contida em $(X \times' Y) \setminus A$. Destarte A é fechado e, pois, $X \times' Y \in$ TopCG. ∎

Teorema A.3.2. *Sejam $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in$ TopCG e $f : X_1 \to X_2$ e $g : Y_1 \to Y_2$ morfismos em TopCG que são proclusões. Então $f \times g : X_1 \times Y_1 \to X_2 \times Y_2$, $(x, y) \mapsto (f(x), g(y))$, é um morfismo em TopCG que é uma proclusão.*

Demonstração. Graças à Subseção 2.2, $f \times g$ é um morfismo em TopCG. Logo, precisamos verificar somente que se trata de uma proclusão entre $X_1 \times X_2$ e $Y_1 \times Y_2$. Vejamos inicialmente que $f \times g = (f \times id_{Y_2}) \circ (id_{X_1} \times g) = (id_{X_2} \times g) \circ (f \times id_{Y_1})$ (vide Diagramas (A.3.1)).

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{X_1 \times Y_1} \arrow[r, "id_{X_1}\times g"] \arrow[dr, "f\times g"'] & \boldsymbol{X_1 \times Y_2} \arrow[d, "f\times id_{Y_2}"] \\ & \boldsymbol{X_2 \times Y_2} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \boldsymbol{X_1 \times Y_1} \arrow[r, "f\times id_{Y_1}"] \arrow[dr, "f\times g"'] & \boldsymbol{X_2 \times Y_1} \arrow[d, "id_{X_2}\times g"] \\ & \boldsymbol{X_2 \times Y_2} \end{tikzcd} \tag{A.3.1}$$

De fato, se $(x, y) \in X_1 \times Y_1$, então

$$\begin{aligned} [(f \times id_{Y_2}) \circ (id_{X_1} \times g)](x, y) &= (f \times id_{Y_2})(x, g(y)) = (f(x), g(y)) \\ &= (f \times g)(x, y) \end{aligned}$$

e também, analogamente, $[(id_{X_2} \times g) \circ (f \times id_{Y_1})](x, y) = (f \times g)(x, y)$. Como estas igualdades se dão para qualquer par $(x, y) \in X_1 \times Y_1$ temos que as aplicações em questão coincidem.

Dessa forma, como a composição de duas proclusões é também uma proclusão, é suficiente verificar a afirmação do enunciado para o caso em que $Y_1 = Y_2$ e em que g é a aplicação identidade (da mesma forma, seria suficiente considerar o caso em que $X_1 = X_2$ e em que f é a aplicação identidade). Como $f \times id_{Y_1}$ é evidentemente sobrejetora, pois por hipótese f é sobrejetora, resta mostrar que U é aberto em $X_2 \times Y_1$ sempre que $f^{-1}(U)$ for aberto em $X_1 \times Y_1$. Equivalentemente, precisamos mostrar que U é fechado em $X_2 \times Y_1$ sempre que $f^{-1}(U)$ for fechado em $X_1 \times Y_1$.

Seja $A \subset X_1 \times Y_1$ tal que $(f \times id_{Y_1})^{-1}(A)$ é um conjunto fechado em $X_1 \times Y_1$. Sejam K um conjunto compacto em $X_2 \times Y_1$ e B e C as projeções de K em X_2 e em Y_1, respectivamente. Logo, $B \times C$ é compacto em $X_2 \times Y_1$. Se mostramos que $A \cap (B \times C)$ é fechado em $X_2 \times Y_1$, então $A \cap K$ é fechado em $X_2 \times Y_1$ e, como $X_2 \times Y_1 \in$ TopCG, A é fechado em $X_2 \times Y_1$. Assim a afirmação estará provada.

Uma vez que $(f \times id_{Y_1})^{-1}(B \times C) = f^{-1}(B) \times C$ é fechado em $X_1 \times Y_1$, temos que $(f \times id_{Y_1})^{-1}(A \cap (B \times C))$ é fechado em $f^{-1}(B) \times C$. Substituindo X_1, X_2 e Y_1 por, respectivamente, $f^{-1}(B)$, B e C, reduzimos a prova deste caso a considerar X_1 e Y_1 como espaços compactos. Desta forma, devido ao Teorema A.3.1, $X_2 \times Y_1 = X_2 \times' Y_1$ e $X_1 \times Y_1 = X_1 \times' Y_1$.

Seja $W \subset X_2 \times Y_1$ tal que $(f \times id_{Y_1})^{-1}(W)$ é aberto em $X_1 \times Y_1$ e seja $(x_0', y_0) \in W$. Uma vez que f é uma proclusão, em particular, é uma aplicação sobrejetora; assim, existe $x_0 \in X_1$ de forma que $f(x_0) = x_0'$. Sendo que $(x_0, y_0) \in (f \times id_{Y_1})^{-1}(W)$ e que Y_1 é compacto, existe uma vizinhança V de y_0 tal que $\{x_0\} \times \bar{V} \subset (f \times id_{Y_1})^{-1}(W)$. Seja $U := \{x \in X_1 : \{f(x)\} \times \bar{V} \subset W\}$. Vejamos que U é aberto em X_1; seja $x_1 \in U$. Consideramos uma cobertura de $\{x_1\} \times \bar{V}$ por produtos de conjuntos abertos de $(f \times id_{Y_1})^{-1}(W)$ e tomamos uma subcoleção finita desta que é também uma cobertura de $\{x_1\} \times \bar{V}$; então, a intersecção das projeções em X_1 destes fatores é uma vizinhança N de x_1 tal que $N \times \bar{V} \subset (f \times id_{Y_1})^{-1}(W)$. Assim, U é um conjunto aberto. Pela forma como U foi definido, $U = f^{-1}(f(U))$. Desta forma $f(U)$ é aberto em X_2 porque f é uma proclusão. Dado que $(x_0', y_0) \in f(U) \times V$ e que $f(U) \times V \subset W$ é aberto, temos que W é aberto. ■

Teorema A.3.3. *Sejam $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in$ TopCG e $f : X_1 \to X_2$ e $g : Y_1 \to Y_2$ morfismos em TopCG que são mergulhos. Então $f \times g : X_1 \times Y_1 \to X_2 \times Y_2$, $(x, y) \mapsto (f(x), g(y))$, é um morfismo em TopCG que é um mergulho.* ■

Proposição A.3.1. *Sejam X e Y espaços topológicos de Hausdorff. Então a topologia produto de $k(X) \times k(Y)$ coincide com a topologia de $k(X \times' Y)$.*

Demonstração. As aplicações identidade $k(X) \to X$ e $k(Y) \to Y$ são contínuas (Teorema A.2.1) e, pois, a aplicação identidade $g : k(X) \times' k(Y) \to X \times' Y$ também é contínua. Destarte cada conjunto compacto de $k(X) \times' k(Y)$ é um conjunto compacto em $X \times' Y$. Seja A um conjunto compacto em $X \times' Y$. Sejam B e C as projeções, respectivamente, em X e em Y, de A. Uma vez que B e C são conjuntos compactos, temos que também são compactos em $k(X)$ e em $k(Y)$, respectivamente. Deste modo $B \times' C$ é um conjunto compacto em $k(X) \times' k(Y)$; portanto $g \mid_{B \times' C}$ é contínua em cada coordenada. Sendo que $A \subset B \times' C$, temos que A é compacto em $k(X) \times' k(Y)$. Porque $k(X) \times' k(Y)$ e $X \times' Y$ têm os mesmos conjuntos compactos, segue da Definição A.2.1 que as topologias em questão coincidem. ■

A.4 Espaços de função

Sendo X e Y espaços topológicos de *Hausdorff*, denotamos o conjunto das aplicações contínuas de X a Y por $C(X,Y)$. Também, dados dois conjuntos $Z \subset X$ e $W \subset Y$, denotamos por $U_{Z,W}$ o conjunto $\{f \in C(X,Y) : f(Z) \subset W\}$.

Definição A.4.1 (Topologia compacto-aberto)**.** *Sejam X e Y espaços topológicos. A família*

$$\{U_{K,A} : K \subset X \text{ compacto } A \subset Y \text{ aberto}\} \subset \mathscr{P}(C(X,Y))$$

*é uma pré-base para uma topologia em $C(X,Y)$. Esta topologia é chamada de **topologia compacto-aberto**.* ▶

A escolha da topologia compacto-aberto é natural pois um compacto no domínio e um aberto no contradomínio são tais que a imagem de um compacto é compacta e a imagem inversa de um aberto é aberta. O problema desta topologia está no fato de que, sem acrescentar algumas hipóteses em relação aos espaços envolvidos, seu comportamento não é razoável quanto à composição, ao produto cartesiano e à evaluação.

O fato de que seja necessário introduzir hipóteses adicionais em relação às operações básicas do parágrafo anterior justifica a necessidade de se procurar uma família de espaços em que o comportamento da topologia compacto-aberto seja mais natural. Vemos a seguir que se os espaços pertencerem à categoria TopCG todos os problemas desaparecem.

Mesmo que tenhamos X e Y objetos da categoria TopCG, não necessariamente obtemos que $C(X,Y) \in$ TopCG. Por isso, como anteriormente, devemos considerar o espaço compactamente gerado associado. Assim sendo, para X e Y espaços topológicos de *Hausdorff*, definimos $Y^X := k(C(X,Y))$.

Proposição A.4.1. *Sejam X e Y espaços topológicos de Hausdorff e $e : C(X,Y) \times' X \to Y$, $(f,x) \mapsto f(x)$. Então e é contínua em conjuntos compactos. Além disso, se X, $Y \in$ TopCG, então e é contínua como aplicação $Y^X \times X \to Y$.*

Demonstração. Uma vez que todo conjunto compacto em $C(X,Y) \times' X$ está contido no produto de suas projeções, é suficiente verificar que e é contínua em conjuntos da forma $F \times A$, em que F é um conjunto compacto em $C(X,Y)$ e A é um conjunto compacto em X. Sejam $(f_0, x_0) \in F \times A$ e U um conjunto aberto em Y que contenha $f_0(x_0)$. Sendo que f_0 é contínua, existe uma vizinhança $N \subset A$ de x_0 cujo fecho é tal que $f_0(\bar{N}) \subset U$. Deste modo $(U_{\bar{N},U} \cap F) \times N$ é um conjunto aberto em $F \times A$, que contém (f_0, x_0), e que é aplicado por e em U. Isto mostra que e é contínua em conjuntos compactos.

Graças ao Teorema A.2.1, a aplicação $k(e) : k(C(X,Y) \times' X) \to k(Y)$ é contínua. Caso $X \in$ TopCG, pela Proposição A.3.1, temos que

$$\begin{aligned} k(C(X,Y) \times' X) &= k(C(X,Y)) \times k(X) \\ &= Y^X \times X \end{aligned}$$

e, se $Y \in$ TopCG, $k(Y) = Y$. Destarte $k(e) : Y^X \times X \to Y$ é uma aplicação contínua. ■

Proposição A.4.2. *Sejam $X \in TopCG$ e Y um espaço topológico de Hausdorff. Então $C(X,Y)$ e $C(X,k(Y))$ são iguais como conjuntos e suas topologias têm os mesmos conjuntos compactos. Desta forma, $k(C(X,k(Y))) = k(C(X,Y))$.*

Demonstração. Se $f : X \to k(Y)$ é uma aplicação contínua, então sua composição com a aplicação identidade $k(Y) \to Y$ também é contínua e, portanto, $f \in C(X,k(Y)) \Rightarrow f \in C(X,Y)$. Reciprocamente, se $f : X \to Y$ é uma aplicação contínua, então em particular é uma aplicação contínua em compactos e, pelo Teorema A.2.1, segue que a aplicação $k(f) : k(X) \to k(Y)$ é também contínua. Logo, $f \in C(X,Y) \Rightarrow f \in C(X,k(Y))$. Portanto, como conjuntos, $C(X,k(Y)) = C(X,Y)$.

Uma vez que a aplicação identidade $id : k(Y) \to Y$ é uma aplicação contínua, a aplicação identidade $C(X,k(Y)) \to C(X,Y)$, $f \mapsto id \circ f$, é contínua. Portanto, cada conjunto compacto em $C(X,k(Y))$ é um conjunto compacto em $C(X,Y)$.

Seja $F \subset C(X,Y)$ um conjunto compacto em sua topologia induzida de $C(X,Y)$. Denotamos por F' o conjunto F dotado de sua topologia induzida de $C(X,k(Y))$. Vamos provar que F' é compacto. Para isso, é suficiente verificar que a intersecção de F' com qualquer conjunto U aberto em $C(X,k(Y))$ é um conjunto aberto em F, pois isso implica que a aplicação identidade $F \to F'$ é contínua e, pois, segue que F' é compacto. É também suficiente provar a afirmação quando U é um conjunto aberto pré-básico $U_{K,A}$, em que K é um conjunto compacto em X e A é um conjunto aberto em $k(Y)$. Seja $f_0 \in U_{K,A} \cap F$. Sendo que $F \times K$ é compacto, a Proposição A.4.1 garante que a evaluação $e : F \times K \to Y$ é uma aplicação contínua e, portanto, o Teorema A.2.1 diz que esta aplicação é contínua como função $F \times K \to k(Y)$. Desta forma, $e^{-1}(A)$ é um conjunto aberto em $F \times K$. Como K é um conjunto compacto e $\{f_0\} \times K \subset e^{-1}(A)$, existe um conjunto aberto V em F contendo f_0 de sorte que $V \times K \subset e^{-1}(A)$. Assim segue que $f_0 \in V \subset U_{K,A}$. Destarte $U_{K,A} \cap F$ é um conjunto aberto em F. Isso encerra a prova de que F' é compacto e mostra que as topologias dos conjuntos $C(X,Y)$ e $C(X,k(Y))$ têm os mesmos conjuntos compactos. Por fim, ressaltamos somente que a Definição A.2.1 implica imediatamente que $k(C(X,k(Y))) = k(C(X,Y))$. ■

Teorema A.4.1. *Sejam $X, Y, Z \in TopCG$. Então $(Y \times Z)^X = Y^X \times Z^X$.*

Demonstração. A cada $f : X \to Y \times Z$ está associado o par $(\pi_Y \circ f, \pi_Z \circ f)$, em que $\pi_Y : Y \times Z \to Y$ e $\pi_Z : Y \times Z \to Z$ são as projeções de $Y \times Z$ em Y e em Z, respectivamente. Como f, π_Y e π_Z são aplicações contínuas, temos que $\pi_Y \circ f$ e $\pi_Z \circ f$ também o são. Reciprocamente, se $\pi_Y \circ f$ e $\pi_Z \circ f$ são aplicações contínuas, então $f : X \to Y \times' Z$ é uma aplicação contínua. Graças ao Teorema A.2.1 segue que $k(f) = f$ é uma aplicação contínua de $k(X) = X$ a $k(Y \times' Z) = Y \times Z$.

Inicialmente mostramos que há uma igualdade entre as topologias compacto-aberto de $C(X, Y \times' Z)$ e de $C(X,Y) \times' C(X,Z)$. Consideramos um conjunto aberto pré-básico de $C(X, Y \times' Z)$ da forma $U_{K,V} \times' U_{L,W}$, em que K e L são conjuntos compactos em X e V e W são conjuntos abertos em Y e Z, respectivamente. Este aberto pré-básico corresponde ao conjunto aberto $U_{K,V \times' Z} \cap U_{L,Y \times' W}$ de $C(X,Y) \times' C(X,Z)$. Reciprocamente, um conjunto aberto pré-básico de $C(X,Y) \times' C(X,Z)$ da forma $U_{K,V \times W}$ corresponde ao conjunto aberto $U_{K,V} \times' U_{K,W}$. No caso de um conjunto aberto pré-básico qualquer $U_{K,S}$ de $C(X, Y \times' Z)$, escolhemos um ponto $f_0 \in U_{K,S}$ e procedemos da seguinte maneira: uma vez que $f_0(K) \subset S \subset Y \times' Z$ é um conjunto compacto, existem uma coleção $\{K_j\}_{j=1}^n$ de subconjuntos compactos de K e uma coleção $\{V_j \times W_j\}_{j=1}^n$ de conjuntos abertos de $Y \times' Z$ de sorte que $K = \bigcup_{j=1}^{n} K_j$ e que $f_0(K_j) \subset V_j \times W_j \subset S$ para todo $1 \leq j \leq n$. Destarte

$$f_0 \in \bigcap_{j=1}^{n} U_{K_j, V_j \times W_j} \subset U_{K,S}.$$

Dado que $U_{K_j, V_j \times W_j}$ é aberto, para todo $1 \leq j \leq n$, em $C(X,Y) \times' C(X,Z)$, temos que $\bigcap_{j=1}^{n} U_{K_j, V_j \times W_j}$ é também um conjunto aberto neste espaço. Portanto $U_{K,S}$ é aberto em $C(X,Y) \times' C(X,Z)$.

Para terminar a prova consideramos os espaços compactamente gerados associados. Aplicando a Proposição A.4.2 a $C(X, Y \times' Z)$ obtemos

$$\begin{aligned} k(C(X, Y \times' Z)) &= k(C(X, k(Y \times' Z))) \\ &= (Y \times Z)^X \end{aligned}$$

e, aplicando a Proposição A.3.1 a $C(X,Y) \times' C(X,Z)$, obtemos

$$\begin{aligned} k(C(X,Y) \times' C(X,Z)) &= k(C(X,Y)) \times k(C(X,Z)) \\ &= Y^X \times Z^X. \end{aligned}$$

■

Teorema A.4.2. *Sejam $X, Y, Z \in$ TopCG. Então $Z^{Y \times X} = (Z^Y)^X$.*

Demonstração. Mostramos inicialmente que $\mu : C(Y \times X, Z) \to C(X, C(Y,Z))$, que a cada $f \in C(Y \times X, Z)$ associa $\mu(f) : X \to C(Y,Z)$, $\mu(f)(x)(y) = f(y,x)$, é um homeomorfismo entre os espaços em questão. De fato, para ver que $\mu(f)(x)$ é uma aplicação contínua de Y a Z, para todo $x \in X$, suponhamos que $\mu(f)(x)(y_0) \in U$, em que U é um conjunto aberto em Z. Então $f(y_0, x) \in U$ e, pela continuidade de f, existe um conjunto V aberto em Y de modo que $y_0 \in V$ e que $f(V \times \{x\}) \subset U$; desta forma, $\mu(f)(x)$ aplica V em U.

Devemos mostrar agora que se $f \in C(Y \times X, Z)$, então $\mu(f) : X \to C(Y,Z)$ é uma aplicação contínua. Seja $U_{K,W}$ um conjunto aberto pré-básico de $C(Y,Z)$ e suponhamos que $\mu(f)(x_0) \in U_{K,W}$. Então $f(K \times \{x_0\}) \subset W$. Uma vez que W é aberto e K é compacto, existe uma vizinhança N de x_0 tal que $f(K \times N) \subset W$. Isto implica que $\mu(f)(N) \subset U_{K,W}$ e, portanto, segue a afirmação.

Para provar a continuidade de μ, começamos com a continuidade da evaluação

$$e : Y \times X \times C(Y \times X, Z) \to Z.$$

Sabemos que

$$\mu(e) : X \times C(Y \times X, Z) \to C(Y,Z)$$

é contínua. Portanto, temos que

$$\mu(\mu(e)) : C(Y \times X, Z) \to C(X, C(Y,Z))$$

é contínua. É fato simples ver que $\mu(\mu(e)) = \mu$.

A fim de mostrar que μ possui uma inversa contínua, consideramos

$$e : X \times C(X, C(Y,Z)) \to C(Y,Z) \text{ e } e' : Y \times C(Y,Z) \to Z,$$

as evaluações. Pela Proposição A.4.1 temos que a composição

$$e' \circ (id_Y \times e) : Y \times X \times C(X, C(Y, Z)) \to Z$$

é contínua. Desta forma, é também contínua a aplicação

$$\mu(e' \circ (id_Y \times e)) : C(X, C(Y, Z)) \to C(Y \times X, Z).$$

Mais uma vez, é fato simples ver que $\mu(e' \circ (1 \times e))$ é a aplicação inversa de μ.

Por fim, consideramos os espaços compactamente gerados associados. Graças à Proposição A.4.2 temos que

$$\begin{aligned} k(C(X, C(Y, Z))) &= k(C(X, k(C(Y, Z)))) \\ &= (Z^Y)^X. \end{aligned}$$

Por outro lado, obtemos $k(C(Y \times X, Z)) = Z^{Y \times X}$. ■

Referências

[DUGUNDJI] DUGUNDJI, James; *Topology.* Allyn and Bacon Series in Advanced Mathematics.

[HILTON-STAMMBACH] HILTON, P. J. and STAMMBACH, U.; *A course in homological algebra.* Graduate Texts in Mathematics 4. Springer-Verlag, 1971.

[HUNGERFORD] HUNGERFORD, Thomas W.; *Algebra.* Graduate Texts in Mathematics 73. Springer-Verlag New York, 1980.

[MUNKRES] MUNKRES, James R.; *Topology.* Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ 07459.

[SPANIER] SPANIER, Edward H.; *Algebraic Topology.* McGraw-Hill. Springer-Verlag, 1966.

[STEENROD] STEENROD, N. E.; *A Convenient Category of Topological Spaces.* Michigan Math. J. Volume 14, Issue 2 (1967), 133-152.

Índice Remissivo