



Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Departamento de Matemática



Conexões da Geometria Analítica e Vetorial com a Geometria Espacial de Posição e Métrica

Autor: *Nycolas Hendrigo Mancini*

Orientador: *Prof. Dr. Roberto Ribeiro Paterlini*

Disciplina: Trabalho de Conclusão de Curso B

Curso: Licenciatura em Matemática

Professores Responsáveis: Alessandra Aparecida Verri
João Carlos Vieira Sampaio
Selma Helena de Jesus Nicola

São Carlos, 26 de setembro de 2018.

Conexões da Geometria Analítica e Vetorial com a Geometria Espacial de Posição e Métrica

Autor: *Nycolas Hendrigo Mancini*

Orientador: *Prof. Dr. Roberto Paterlini*

Disciplina: Trabalho de Conclusão do Curso B

Curso: Licenciatura em Matemática

Professores Responsáveis: Alessandra Aparecida Verri
João Carlos Vieira Sampaio
Selma Helena de Jesus Nicola

Instituição: Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Departamento de Matemática

São Carlos, 26 de setembro de 2018.

Nycolas Hendrigo Mancini
Autor

Roberto Ribeiro Paterlini
Orientador

Apresentação

Neste trabalho de conclusão de curso apresentamos propriedades de sólidos geométricos estudadas com o uso de coordenadas e vetores. Devido à limitação do tempo, abordamos uma pequena parte de tudo que poderia ser considerado. Damos assim prosseguimento ao estudo feito por Jheniffer Camila Pedro em seu Trabalho de Conclusão de Curso [21], em que fez esse mesmo estudo para objetos geométricos do plano. Esperamos assim contribuir para que o uso de coordenadas e vetores em Geometria seja mais disseminado.

Embora exista uma proposta de mudança no esquema atual de ensino da Geometria, com a eliminação do uso de sistemas axiomáticos e uso exclusivo da Geometria Analítica, não a defendemos aqui. O ensino tradicional da Geometria através de axiomas e sistemas dedutivos é importante pois está mais próximo da observação que fazemos das formas que nos rodeiam e exige um tipo de dedução que pode ser implementada em vários estágios de profundidade, tornando assim mais factível seu uso no ensino básico.

Para compor este Trabalho de Conclusão de Curso, tomamos como ponto de partida livros textos comumente utilizados no Ensino Superior para o estudo da Geometria Analítica, como [4] e [1]. Em geral, esses textos trazem algumas aplicações do uso de coordenadas e vetores no estudo de propriedades de sólidos geométricos. Em seguida, procuramos textos didáticos que nos auxiliam em nosso propósito, mas pouco material foi encontrado. Passamos então a consultar textos e artigos esparsos, que trazem uma grande quantidade de propriedades e problemas. Procuramos organizar uma pequena parte deste material e completa-lo com demonstrações.

Na Introdução deste trabalho, teremos algumas considerações sobre as relações entre as diversas abordagens usadas para estudar a Geometria Elementar, e comentamos brevemente opiniões de autores pesquisados.

Os dois primeiros capítulos apresentam alguns resultados da Geometria Analítica que serão essenciais para as demonstrações que serão apresentadas nos capítulos seguintes. Eles foram divididos de maneira que o primeiro trata apenas de alguns resultados básicos da Geometria Analítica e, o segundo, apresenta propriedades e resultados de algumas figuras do espaço em coordenadas e vetores.

O terceiro capítulo trata apenas das propriedades dos paralelepípedos no espaço, utilizando exclusivamente coordenadas e vetores para validar os teoremas propostos. Da mesma maneira, o capítulo 4 apresenta e demonstra diversas propriedades do tetraedro.

Por fim, o capítulo 5 são resolvidos alguns exercícios (que normalmente são apresentados em livros de Geometria Espacial) utilizando apenas o conteúdo apresentado e demonstrado neste trabalho.

Sumário

Introdução	8
1 Conceitos e resultados básicos da Geometria Analítica	12
1.1 O conjunto \mathbb{R}^3 e sua estrutura vetorial	12
1.2 O Sistema de Coordenadas Cartesianas	13
1.3 Distância entre dois pontos	15
1.4 Vetores	15
1.5 Produto vetorial e suas propriedades	18
1.6 Produto misto e suas propriedades	19
1.7 Equações da reta	21
1.7.1 Equação vetorial da reta	21
1.7.2 Equações paramétricas da reta	22
1.7.3 Equação da reta na forma simétrica	22
1.7.4 Expressão vetorial de semirretas e segmentos	23
1.8 Equação do plano	24
1.8.1 Equação vetorial do plano	24
1.8.2 Equações paramétricas do plano	24
1.8.3 Equação geral do plano	25
1.9 A Geometria Analítica como modelo da Geometria Euclidiana	26
2 Propriedades básicas de algumas figuras do espaço em coordenadas e vetores	37
2.1 Ponto médio de um segmento	37
2.2 Condições de colinearidade de três pontos no espaço em coordenadas	38
2.3 Área de paralelogramos e triângulos no espaço	41
2.4 Condições de coplanaridade de quatro pontos em coordenadas	43
2.5 Coordenadas baricêntricas no espaço relativamente a três pontos	45
2.6 Expressão vetorial e em coordenadas do incentro e do inraio de um triângulo no espaço	51
2.7 Expressão vetorial e em coordenadas do circunraio de um triângulo no espaço	52
2.8 Expressão vetorial e em coordenadas do circuncentro de um triângulo no espaço	55
3 Propriedades do paralelepípedo	61
3.1 Definição do Paralelepípedo	61
3.2 Centróide do Paralelepípedo	62
3.2.1 Volume do Paralelepípedo	68
3.3 Propriedades do Cubo	69
3.3.1 Representação do cubo em coordenadas	69
3.3.2 Coordenadas do centróide	70

4	Propriedades do tetraedro	72
4.1	Definição do Tetraedro	72
4.2	Volume do Tetraedro	72
4.3	Altura do Tetraedro	74
4.4	Coordenadas do centroide de um tetraedro	75
4.5	Coordenadas do centro da Esfera Circunscrita	76
4.6	Tetraedro Trirretângulo e suas propriedades	80
4.6.1	Definição de Tetraedro Trirretângulo	80
4.6.2	Teorema de Gua	80
4.6.3	Coordenadas do Tetraedro Trirretângulo	82
4.6.4	Altura do Tetraedro Trirretângulo	82
4.6.5	Volume do Tetraedro Trirretângulo	83
4.7	Tetraedro Regular e suas propriedades	83
4.7.1	Definição de um Tetraedro Regular	83
4.7.2	Altura de um Tetraedro Regular	83
4.7.3	Coordenadas do Tetraedro Regular	86
4.7.4	Propriedades do Tetraedro Regular	89
4.7.5	Volume de um Tetraedro Regular	89
4.7.6	Ângulo Tetraédrico do Tetraedro Regular	90
4.8	Tetraedros Ortocêntricos	90
5	Problemas sobre objetos no espaço	102

Lista de Figuras

1.1	Eixo numérico.	13
1.2	Sistema de coordenadas cartesianas.	14
1.3	Representação de um ponto.	15
1.4	Distância entre dois pontos.	15
1.5	Duas representações do mesmo vetor.	16
1.6	Representação da soma de dois vetores não paralelos.	17
1.7	Ângulo entre dois vetores.	17
1.8	Representação do plano α	24
1.9	Representação do vetor normal ao plano α	25
2.1	Representação do ponto médio de um segmento.	37
2.2	Vetores \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AD} do paralelogramo.	41
2.3	Representação do Exemplo 2.1.	48
2.4	Representação do Exemplo 2.2.	49
2.5	Representação do Exemplo 2.2'.	50
2.6	Representação do incentro de um triângulo.	51
2.7	Circuncentro pertencente à uma das arestas do triângulo.	53
2.8	Circuncentro interno ao triângulo.	54
2.9	Circuncentro externo ao triângulo.	54
2.10	Circuncentro pertencente à uma das arestas do triângulo (esquerda), interno ao triângulo (centro) e externo ao triângulo (direita).	56
3.1	Paralelepípedo reto e paralelepípedo oblíquo.	61
3.2	Arestas do paralelepípedo representadas como vetores.	62
3.3	Diagonal AG do paralelepípedo.	63
3.4	Segmento que une os pontos médios de duas arestas opostas.	64
3.5	Segmento que une o centro de duas faces opostas.	65
3.6	Representação da Propriedade 3.4.	66
3.7	Representação da altura h de um paralelepípedo.	68
3.8	Representação de um cubo no espaço.	70
4.1	Segmentando um paralelepípedo em dois prismas triangulares de mesmo volume.	73
4.2	Representação dos tetraedros de mesmo volume contidos em um prisma triangular	73
4.3	Altura h do tetraedro.	74
4.4	Os segmentos que unem os pontos médios de duas arestas opostas no tetraedro.	75
4.5	Ilustração da Propriedade 4.2.	76
4.6	Exemplo de tetraedro trirretângulo.	80
4.7	Representação da demonstração do Lema 4.1.	84
4.8	Representação da demonstração do Lema 4.2.	84
4.9	Representação do Lema 4.3.	85
4.10	Base BCD do tetraedro.	88

4.11 Ilustração do Exemplo 4.1.	91
4.12 Ilustração do Exemplo 4.2.	91
4.13 Representação do Lema 4.6	93
4.14 Representação do Lema 4.7.	93
4.15 Representação do Lema 4.8.	94
4.16 Representação do Lema 4.10.	96
4.17 Representação do Lema 4.12	97

Introdução

O filósofo e historiador da Matemática Proclus Diadochus (410 – 485) relata que Pitágoras de Samos (585 – 500 a.C.) propôs (em relação ao que era feito em seu tempo) a transformação do estudo da Geometria em uma arte livre, examinando os princípios dessa ciência desde sua gênese (confira [1] pág. 37). Essa proposta trazia a ideia de construir a Matemática como uma ciência abstrata e autônoma, buscando, através da dedução, um corpo de conhecimentos o mais exato possível, começando com noções simples assumidas como verdadeiras.

Para desenvolver essas ideias os antigos matemáticos gregos se dedicaram à construção de sistemas dedutivos. O mais bem sucedido foi o sistema euclidiano, apresentado por Euclides de Alexandria (300 a.C.) em sua obra *Os Elementos*. Partindo de noções que nos parecem simples e que são fruto de nossas observações diretas do espaço circundante, assim como de postulados de validade considerada fora de dúvidas, construiu dedutivamente o que denominamos hoje Geometria Euclidiana. A obra de Euclides foi tão bem sucedida que sua proposta dominou a Matemática, as Ciências e as metodologias de ensino por praticamente dois milênios.

Mas existe outra opção para o estudo da Geometria. A ideia de descrever objetos geométricos no plano e no espaço referenciando-os em relação a retas ou a planos fixos remonta a tempos antigos, e, pelo que consta na História da Matemática, Apolônio de Perga (262 – 194 a.C) já a usava. Mas foi apenas com P. de Fermat (1601 – 1665) e R. Decartes (1596 – 1650), no Século XVII, que apareceu uma apresentação convincente desse método, chamado Geometria Analítica. Esses matemáticos demonstraram as extensas possibilidades dessa técnica, criando assim um modelo algébrico para a Geometria Euclidiana.

Hoje estudamos a Geometria sob esses dois pontos de vista. Denominamos Geometria de Posição e Métrica ao método que segue a tradição euclidiana. Alguns autores também se referem a ele como “método sintético”. Por outro lado, chamamos de Geometria Analítica ao método algébrico, que usa coordenadas e vetores. O costume de nossas escolas é iniciar com a tradição euclidiana, talvez pelo motivo de que ela tem uma maior conexão com a experiência cotidiana. A Geometria Analítica, em sua maior parte, é deixada para o final do ensino médio.

Ocorre que nos afazeres do dia a dia da escola, com o acúmulo do conteúdo e as inúmeras preocupações dos estudantes, acaba que, no estudo da Geometria Analítica, não se faz um retorno ao estudo das propriedades dos objetos geométricos, agora sob o ponto de vista mais algébrico, com o uso de coordenadas. Uma opção seria mudar essa sequência e iniciar logo a apresentação da Geometria Analítica e incluir o estudo de propriedades da Geometria Plana usando coordenadas. Essa proposta é adotada em alguns países, particularmente na França. Exemplos de livros que apresentam esses estudos são [14], [26], [27] e [28].

Apresentamos agora algumas considerações sobre a necessidade de conectar os conteúdos estudados no Ensino Básico.

Conexões entre as áreas da Matemática no Ensino

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) compreendem a necessidade de estabelecer conexões entre os conteúdos matemáticos, aprendidos dentro de sala de aula ou não, pelos alunos; (PCN, 1998) ”O estabelecimento de relações é tão importante quanto a exploração dos conteúdos matemáticos, pois, abordados de forma isolada, os conteúdos podem acabar representando muito pouco para a formação do aluno”. Esse conceito é reforçado posteriormente neste mesmo documento, o qual destaca que o aluno deve ser levado a ”estabelecer conexões entre temas matemáticos de diferentes campos e entre esses temas e conhecimentos de outras áreas curriculares”

As conexões segundo artigos e livros didáticos

Publicado em 2001, o livro [15] “Exame de Textos: Análise de Livros de Matemática para o Ensino Médio”, contém uma apreciação de 12 coleções, totalizando 36 volumes de livros didáticos de matemática que eram utilizados pelos estudantes do ensino médio. Neste livro, Lima não se restringe a apontar defeitos ou prestigiar acertos, mas sim fazer uma análise crítica do conteúdo, trazendo também sugestões e até exemplos do que seria esperado de um livro didático, segundo os que analisaram essas coleções.

A primeira consideração que podemos fazer ao analisar esta obra é a notada ausência do uso de vetores em livros didáticos. Essa falta de um tratamento vetorial, segundo o autor, leva a apresentação de fórmulas prontas, generalizadas a partir de casos particulares e não elegantes. Em uma das análises feitas, encontramos uma possível justificativa para a ausência deste tratamento:

Não vamos insistir no óbvio: um dos defeitos deste livro e de todos os livros de matemática para o Ensino Médio existentes no mercado é a completa omissão de vetores. Estranhamente, vetores são ensinados nos livros de Física, não nos de matemática. Talvez a justificativa esteja no fato que os vetores não estejam presentes no programas de muitos vestibulares [...] Mesmo assim, esta justificativa não se sustenta, uma vez que os vetores são uma ferramenta extremamente útil, simplificando cálculos e permitindo soluções simples e elegantes de diversos problemas.”

No que rege o estudo da Geometria Espacial, Lima diz que os autores, em geral, possuem pouca familiaridade com a Geometria e com o método dedutivo. Além disso, há uma certa afobação nestes livros ao apresentar um desordenado tratamento da geometria de posição, não definindo em momento algum áreas e volumes de objetos. Já na Geometria Analítica, é possível destacar a falta de exemplos do uso deste conteúdo na resolução de problemas provenientes da Geometria Plana; além disso, quando apresentado em um livro, não há uma seção dedicada a coordenadas no espaço.

Vemos que os livros didáticos adotados no Ensino Médio das escolas brasileiras deixam uma lacuna no ensino da matemática quando não dão um tratamento vetorial à Geometria Analítica, muitas vezes abordando a Geometria Analítica como um conteúdo desconexo da realidade. Existe então a necessidade de se fazer uma conexão entre os conteúdos de Geometria Analítica com os de Geometria de Posição, visto que ambas são áreas de grande potencial para o ensino, porém comumente evitadas pelos autores de livros didáticos e, em consequência, pelos professores.

Capítulo 1

Conceitos e resultados básicos da Geometria Analítica

Apresentamos neste capítulo os principais conceitos e resultados da Geometria Analítica no espaço que serão utilizados neste texto. Nosso objetivo é estabelecer as notações e elencar propriedades dos elementos fundamentais da Geometria Analítica, como o sistema de coordenadas cartesianas no espaço, vetores, retas e planos. Terminamos o capítulo comentando algumas conexões com a Geometria Euclidiana. As principais referências que utilizamos são [1], [4] e [5].

1.1 O conjunto \mathbb{R}^3 e sua estrutura vetorial

Designamos por \mathbb{R}^3 o produto cartesiano

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

cujos elementos são as ternas ordenadas $A = (x, y, z)$, com $x, y, z \in \mathbb{R}$. Duas ternas ordenadas $A = (x_1, y_1, z_1)$ e $B = (x_2, y_2, z_2)$ se dizem iguais quando $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ e $z_1 = z_2$.

Consideramos em \mathbb{R}^3 duas operações:

Adição: $A + B = (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$ quaisquer que sejam $A = (x_1, y_1, z_1)$ e $B = (x_2, y_2, z_2)$ em \mathbb{R}^3

Multiplicação por um escalar: $\lambda(x_1, y_1, z_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1)$, quaisquer que sejam

$A = (x_1, y_1, z_1)$ em \mathbb{R}^3 e λ em \mathbb{R} .

Essas operações satisfazem às seguintes propriedades básicas:

- (i) $A + B = B + A$, quaisquer que sejam $A, B \in \mathbb{R}^3$;
- (ii) $A + (B + C) = (A + B) + C$, quaisquer que sejam $A, B, C \in \mathbb{R}^3$;
- (iii) $0 = (0, 0, 0)$ é o elemento neutro da adição, isto é, $A + 0 = A$ para todo $A \in \mathbb{R}^3$;
- (iv) Todo $A \in \mathbb{R}^3$ tem um elemento oposto na adição, chamado de $-A = (-1)A$;
- (v) $\lambda(\mu A) = \lambda\mu A$, quaisquer que sejam A em \mathbb{R}^3 e λ, μ em \mathbb{R} ;
- (vi) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ quaisquer que sejam A, B em \mathbb{R}^3 e λ em \mathbb{R} ;
- (vii) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$ quaisquer que sejam A em \mathbb{R}^3 e λ, μ em \mathbb{R} .

Os elementos de \mathbb{R}^3 também são chamados de pontos, visto que fazemos uma identificação de \mathbb{R}^3 com o espaço euclidiano.

1.2 O Sistema de Coordenadas Cartesianas

Trata-se de um método que permite uma representação figural dos elementos de \mathbb{R}^3 , facilitando a visualização de objetos geométricos e de suas propriedades. Com isso, o espaço é identificado com \mathbb{R}^3 de modo que podemos estudar os objetos geométricos através de métodos algébricos.

Começamos observando que qualquer reta do espaço pode ser identificada com o conjunto dos números reais \mathbb{R} . A cada ponto A da reta associamos um número real x_A tomando como unidade um segmento pré-determinado. Obtemos assim o **eixo numérico**, como vemos na Figura 1.1.

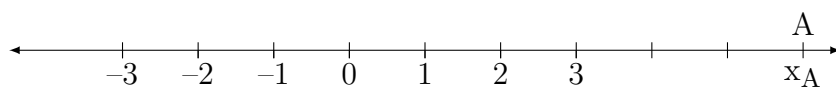


Figura 1.1: Eixo numérico.

Dado um ponto A da reta, o número x_A a ele associado chama-se coordenada de **A**. O eixo numérico é indicado por O_x . A semirreta com origem no ponto de coordenada zero e contendo os pontos com coordenadas positivas chama-se semi-eixo positivo. A semirreta complementar chama-se semi-eixo negativo.

Dados pontos A e B de coordenadas x_A e x_B , respectivamente, a distância entre A e B é

$$|x_A - x_B|$$

Para construirmos um sistema de coordenadas em \mathbb{R}^3 , usamos três eixos numéricos O_x, O_y e O_z , perpendiculares dois a dois em $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$, como vemos na Figura 1.2 abaixo. Indicamos esse sistema por O_{xyz} e chamamos de origem do sistema de coordenadas o ponto $O = (0, 0, 0)$.

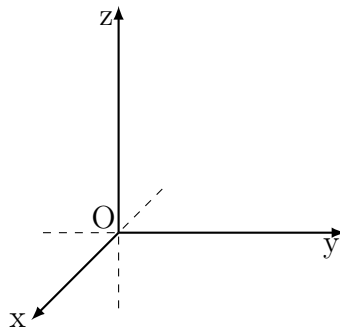


Figura 1.2: Sistema de coordenadas cartesianas.

Todo ponto A do espaço corresponde a uma terna ordenada (x, y, z) , com $x \in O_x$, $y \in O_y$ e $z \in O_z$. A representação se faz como na Figura 1.3, onde dado um ponto $A = (x_o, y_o, z_o)$ qualquer, consideramos os três planos perpendiculares aos eixos coordenados pelos pontos x , y e z . O ponto P se localiza na intersecção desses planos.

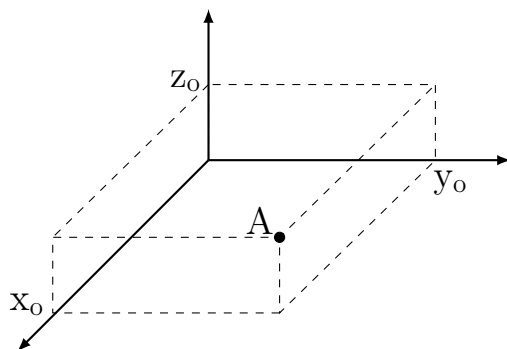


Figura 1.3: Representação de um ponto.

1.3 Distância entre dois pontos

Sejam $A = (x_1, y_1, z_1)$ e $B = (x_2, y_2, z_2)$ dois pontos quaisquer no espaço. Em geral, definimos a distância entre esses pontos como

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Essa fórmula vem da dupla aplicação do Teorema de Pitágoras, como é possível ver na Figura 1.4.

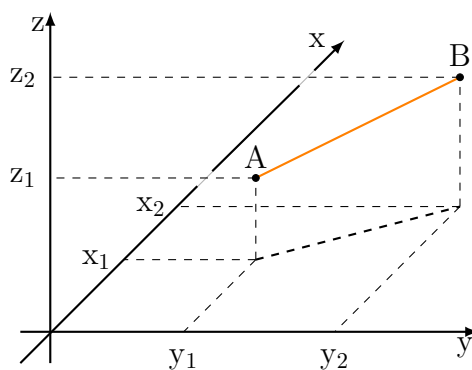


Figura 1.4: Distância entre dois pontos.

1.4 Vetores

Um vetor no sistema O_{xyz} é um ponto (x, y, z) do espaço, considerado geometricamente como uma “seta” de origem $(0, 0, 0)$ e extremidade (x, y, z) .

Dados dois pontos $A = (x_1, y_1, z_1)$ e $B = (x_2, y_2, z_2)$, a “seta” de A a B é um vetor de origem A e extremidade B, que indicamos por \overrightarrow{AB} . Aqueles segmentos que possuem mesmo comprimento, direção e sentido são considerados o mesmo vetor, como vemos na Figura 1.5. Desta forma o vetor \overrightarrow{AB} , quando considerado com origem em $O = (0, 0, 0)$, é

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) = \overrightarrow{O(B - A)} \quad (1.1)$$

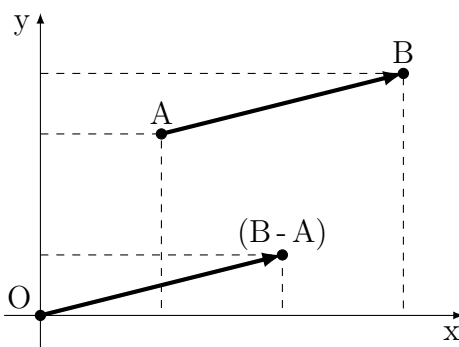


Figura 1.5: Duas representações do mesmo vetor.

Como um vetor não tem origem fixa, alguns autores o chamam de “vetor livre”. Temos as seguintes correspondências biunívocas

vetor livre \leftrightarrow pontos do espaço \leftrightarrow segmento orientado com origem O

Estabelecemos aqui algumas notações e propriedades mais utilizadas, deixando para autores como [4] organizar instruções mais completas sobre o assunto.

Dado um vetor $\vec{v} = (x, y, z)$, seu módulo é

$$|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (1.2)$$

Portanto, se o vetor for dado na forma $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, com $A = (x_1, y_1, z_1)$ e $B = (x_2, y_2, z_2)$, temos

$$|\vec{v}| = |\overrightarrow{AB}| = |B - A| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (1.3)$$

A **adição** de dois vetores \vec{u} e \vec{v} é o vetor definido $\vec{u} + \vec{v}$ representados em coordenadas. Assim, se $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ e $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$, definimos

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_x + v_x, u_y + v_y, u_z + v_z) \quad (1.4)$$

Se \vec{u} e \vec{v} não têm a mesma direção, a soma $\vec{u} + \vec{v}$ tem uma interpretação geométrica, determinada pela diagonal do paralelogramo formado por eles, como indicado na Figura 1.6.

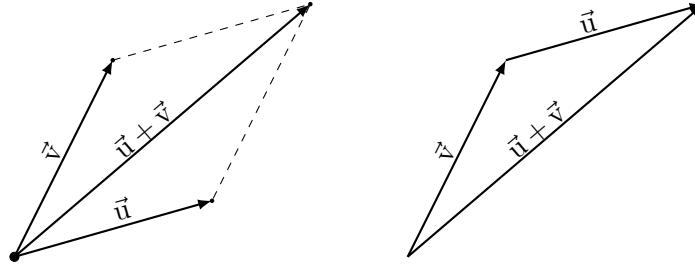


Figura 1.6: Representação da soma de dois vetores não paralelos.

Para determinarmos o ângulo entre dois vetores com direções distintas \vec{u} e \vec{v} , buscamos um representante de cada vetor tal que ambos possuam a mesma origem. As semirretas por elas determinadas definem um ângulo θ , com $0 \leq \theta \leq \pi$. Representamos este ângulo na Figura 1.7

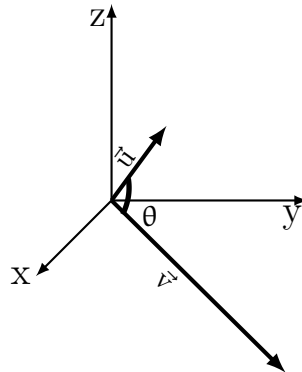


Figura 1.7: Ângulo entre dois vetores.

No caso em que \vec{u} e \vec{v} tem a mesma direção e sentido, dizemos que o ângulo θ é nulo. Já no caso onde \vec{u} e \vec{v} possuem a mesma direção, porém sentidos opostos, temos que $\theta = \pi$. Dois vetores \vec{u} e \vec{v} se dizem paralelos ou múltiplos quando $\vec{u} = \lambda \vec{v}$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$.

Por fim, o produto escalar dos vetores \vec{u} e \vec{v} , denotado por $\vec{u} \cdot \vec{v}$, é o número

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos(\theta) \quad (1.5)$$

Em coordenadas, se $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ e $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$, temos

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z \quad (1.6)$$

Vejamos algumas propriedades dos vetores:

(i) $\vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}|^2$

(ii) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

(iii) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

(iv) $(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) = \lambda (\vec{u} \cdot \vec{v})$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$

(v) $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq |\vec{u}| |\vec{v}|$

(vi) $|\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|$

(vii) $\vec{u} \parallel \vec{v}$ quando $\vec{u} = \lambda \vec{v}$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$

(viii) $|\vec{v} + \vec{u}|^2 = |\vec{u}|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2$

Se $\vec{u} \neq 0$ e $\vec{v} \neq 0$, temos

(ix) $\vec{u} \perp \vec{v}$ se, e somente se, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

1.5 Produto vetorial e suas propriedades

Além das propriedades descritas acima, definimos também o produto vetorial entre dois vetores. Enquanto o produto escalar entre dois vetores, descrito na equação 1.5, pg. 17, resultada em um escalar, o produto vetorial entre dois vetores gera um terceiro vetor.

Sejam

$$\vec{u} = (u_x, u_y, u_z) = u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k}$$

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z) = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$$

dois vetores em \mathbb{R}^3 . Definimos pelo vetor $\vec{u} \times \vec{v}$ o produto vetorial entre eles, tal que

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = (u_y v_z - u_z v_y) \vec{i} + (u_z v_x - u_x v_z) \vec{j} + (u_x v_y - u_y v_x) \vec{k}$$

Vejam agora algumas propriedades do produto vetorial. Sendo \vec{u} e \vec{v} dois vetores em \mathbb{R}^3 , temos

- (i) $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$, qualquer seja \vec{u}
- (ii) $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$
- (iii) $(\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}) \times \vec{w} = \alpha (\vec{u} \times \vec{w}) + \beta (\vec{v} \times \vec{w})$
- (iv) Se $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{u} = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{v} = 0$, então os vetores \vec{u} e \vec{v} são perpendiculares.
- (v) $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$
- (vi) $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| |\vec{v}| \text{sen}(\theta)$

Obviamente, existem mais propriedades para o produto vetorial que não estão listadas aqui, como podemos ver em [4], mas para este trabalho bastam as que estão acima citadas.

1.6 Produto misto e suas propriedades

Sabendo calcular o produto escalar e o produto vetorial entre dois vetores, nos resta agora generalizar o resultado do cálculo do produto escalar entre um vetor \vec{u} e vetor $\vec{v} \times \vec{w}$, resultante do produto vetorial entre esses dois vetores, isto é, $\vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w}$, denotado por $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$. Desta forma, sejam

$$\vec{u} = (u_x, u_y, u_z) = u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k}$$

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z) = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$$

$$\vec{w} = (w_x, w_y, w_z) = w_x \vec{i} + w_y \vec{j} + w_z \vec{k}$$

Inicialmente, calculamos o produto vetorial $\vec{v} \times \vec{w}$:

$$\begin{aligned}\vec{v} \times \vec{w} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} \\ &= (v_y w_z - v_z w_y) \vec{i} + (v_z w_x - v_x w_z) \vec{j} + (v_x w_y - v_y w_x) \vec{k} \\ &= \begin{vmatrix} v_y & v_z \\ w_y & w_z \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} v_z & v_x \\ w_z & w_x \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} v_x & v_y \\ w_x & w_y \end{vmatrix} \vec{k}\end{aligned}$$

invertendo a ordem das colunas da segunda matriz, temos

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} v_y & v_z \\ w_y & w_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} v_x & v_z \\ w_x & w_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} v_x & v_y \\ w_x & w_y \end{vmatrix} \vec{k}$$

Assim, em coordenadas, temos que

$$\vec{v} \times \vec{w} = \left(\begin{vmatrix} v_y & v_z \\ w_y & w_z \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} v_x & v_z \\ w_x & w_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v_x & v_y \\ w_x & w_y \end{vmatrix} \right)$$

Podemos então calcular $\vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w}$ por

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) &= u_x \begin{vmatrix} v_y & v_z \\ w_y & w_z \end{vmatrix} - u_y \begin{vmatrix} v_x & v_z \\ w_x & w_z \end{vmatrix} + u_z \begin{vmatrix} v_x & v_y \\ w_x & w_y \end{vmatrix} \\ &= (u_x v_y w_z - u_x v_z w_y) - (u_y v_z w_x - u_y v_x w_z) + (u_z v_x w_y - u_z v_y w_x) \\ &= \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Dessa forma, é possível calcular o produto misto de três vetores à partir de suas respectivas coordenadas, tal que seu resultado é um número real.

Vejam agora algumas propriedades do produto misto que serão utilizadas neste trabalho:

(i) Se $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = k$, então

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -k$$

$$[\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}] = -k$$

$$[\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}] = -k$$

ou seja, ao trocarmos a posição de dois vetores, mudamos o sinal do produto misto

(ii) $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$

(iii) $[\lambda \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, \lambda \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{v}, \lambda \vec{w}] = \lambda [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$

(iv) Se $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$, \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} estão no mesmo plano, isto é, são coplanares

1.7 Equações da reta

Estabelecidos os conceitos de ponto, vetor e suas notações, torna-se viável agora a descrição de retas no espaço. Determinamos a seguir equações da reta a partir de um ponto que lhe pertence e de um vetor que descreve sua direção. Mais detalhes podem ser consultados em [1] e [4].

1.7.1 Equação vetorial da reta

Consideremos um ponto P e um vetor $\vec{v} \neq 0$ do espaço. Um ponto X qualquer da reta que passa por P e tem a direção \vec{v} deve satisfazer à propriedade

$$\overrightarrow{PX} = t\vec{v} \text{ para algum } t \in \mathbb{R},$$

isto é \overrightarrow{PX} e \vec{v} devem ser paralelos. Lembrando que $\overrightarrow{PX} = X - P$, podemos dizer que um ponto genérico X da reta é dado por

$$X = P + t\vec{v}, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Esta é a chamada **equação vetorial** da reta.

1.7.2 Equações paramétricas da reta

Consideramos agora um ponto $P = (x_0, y_0, z_0)$ e um vetor $\vec{v} = (a, b, c)$ dados em coordenadas. Seja $X = (x, y, z)$ um ponto genérico da reta que passa por P e tem a direção de \vec{v} . Vimos anteriormente que

$$X = P + t\vec{v}, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}$$

Em coordenadas, essa equação equivale à

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c), \text{ para todo } t \in \mathbb{R}, \text{ isto é}$$

$$\begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \\ z = z_0 + tc \end{cases}, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}$$

Essas são as **equações paramétricas** da reta. Além disso, a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(t) = (x_0 + ta, y_0 + tb, z_0 + tc)$$

chama-se **parametrização** da reta.

1.7.3 Equação da reta na forma simétrica

Com as notações do item anterior, suponhamos que $a \neq 0$, $b \neq 0$ e $c \neq 0$. As equações paramétricas da reta podem ser escritas como

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Essas relações são chamadas de equações da reta na **forma simétrica**.

Se $a = 0$, $b \neq 0$ e $c \neq 0$ temos

$$x = x_0 \text{ e } \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

que se trata de uma reta paralela ao plano O_{yz} .

Se $b = 0$, $a \neq 0$ e $c \neq 0$ temos

$$y = y_0 \text{ e } \frac{x - x_0}{a} = \frac{z - z_0}{c}$$

que se trata de uma reta paralela ao plano O_{xz} .

Finalmente, se $c = 0$, $a \neq 0$ e $b \neq 0$ e temos

$$z = z_0 \text{ e } \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}$$

que é uma reta paralela ao plano O_{xy} .

1.7.4 Expressão vetorial de semirretas e segmentos

Dado um segmento AB no espaço, seus pontos X são determinados pela expressão

$$X = (1 - \lambda)A + \lambda B, \lambda \in \mathbb{R}, 0 \leq \lambda \leq 1$$

Além disso, a semirreta \overrightarrow{AB} de origem em A é o conjunto dos pontos X tais que

$$X = A + \lambda \overrightarrow{AB}, \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \geq 0$$

ou

$$X = A + \lambda(B - A), \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \geq 0$$

1.8 Equação do plano

Descrevemos agora três tipos de equações do plano. Mais detalhes podem ser consultados em [1] e [4].

1.8.1 Equação vetorial do plano

Um ponto A e dois vetores linearmente independentes \vec{u} e \vec{v} determinam um plano α . Um ponto X está nesse plano quando o vetor \overrightarrow{AX} é gerado por \vec{u} e \vec{v} , isto é, existem números reais λ e μ tais que

$$\overrightarrow{AX} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$$

como vemos na Figura 1.8 abaixo.

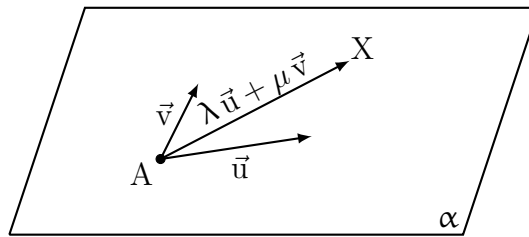


Figura 1.8: Representação do plano α

Lembrando que $\overrightarrow{AX} = X - A$, os pontos X desse plano são caracterizados por

$$X = A + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Essa é a chamada **equação vetorial** do plano.

1.8.2 Equações paramétricas do plano

Com as notações do item anterior, consideremos o ponto $P = (x_0, y_0, z_0)$ e os vetores $\vec{u} = (x_u, y_u, z_u)$ e $\vec{v} = (x_v, y_v, z_v)$ dados em coordenadas, tal que \vec{u} e \vec{v} sejam linearmente independentes. A equação vetorial do plano se escreve na forma

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda (x_u, y_u, z_u) + \beta (x_v, y_v, z_v)$$

com $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$ e $X = (x, y, z)$ um ponto qualquer do plano. Outra forma de escrever essa fórmula é

$$\begin{cases} x = x_o + \lambda x_u + \beta x_v \\ y = y_o + \lambda y_u + \beta y_v \\ z = z_o + \lambda z_u + \beta z_v \end{cases} \text{ para todo } \lambda, \beta \in \mathbb{R}$$

Essas são as equações paramétricas do plano. A função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(\lambda, \beta) = (x_o + \lambda x_u + \beta x_v, y_o + \lambda y_u + \beta y_v, z_o + \lambda z_u + \beta z_v)$$

chama-se **parametrização** do plano.

1.8.3 Equação geral do plano

Por ultimo, desenvolvemos a **Equação Geral do Plano**, que é uma das maneiras mais comuns de representá-lo algebricamente.

Seja $\vec{n} = (a, b, c)$ um vetor normal não nulo ao plano α e A um ponto de coordenadas conhecidas (x_1, y_1, z_1) pertencente à α , como representado na Figura 1.9.

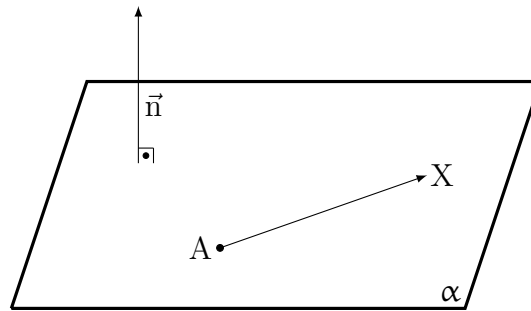


Figura 1.9: Representação do vetor normal ao plano α .

Para que um ponto $X = (x, y, z)$ pertença à α , é necessário que os vetores \vec{AX} e \vec{n} sejam ortogonais, isto é,

$$\vec{n} \cdot \vec{AX} = 0$$

Como $\vec{AX} = X - A = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$, temos

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{AX} = 0 \\
&\Rightarrow (a, b, c) \cdot (x - x_1, y - y_1, z - z_1) = 0 \\
&\Rightarrow a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0 \\
&\Rightarrow ax + by + cz - ax_1 - by_1 - cz_1 = 0 \\
&\Rightarrow ax + by + cz - (ax_1 + by_1 + cz_1) = 0
\end{aligned}$$

Substituindo o termo constante $-(ax_1 + by_1 + cz_1)$ por d , temos que o plano α pode ser descrito pela seguinte equação

$$ax + by + cz + d = 0$$

que depende das coordenadas de um vetor normal ao plano. Chamamos esta fórmula de **equação geral do plano**, onde a, b e c não são todos nulos.

1.9 A Geometria Analítica como modelo da Geometria Euclidiana

O nome “Geometria Euclidiana” é geralmente utilizado como sinônimo de “Geometria de Posição e Métrica”; esses nomes denotam o estado das formas naturais ou abstratas através de um sistema axiomático, e exemplos dessas abordagens em nível elementar podem ser vistos em [18], [20] e [23]. Nesse método de estudo, os primeiros objetos geométricos, como ponto, reta e plano não são definidos: são ditos que existem e que satisfazem a certas propriedades, chamadas axiomas. A seguir, apresentamos dois axiomas:

Axioma 1.1 (Axioma da Reta): dois pontos determinam uma reta.

Axioma 1.2 (Axioma do Plano): três pontos não colineares determinam um plano.

Usando a linguagem de conjuntos, podemos dizer que existe um conjunto chamado espaço, de elementos que se chamam pontos, que satisfaz certas propriedades. As retas e planos são subconjuntos desse espaço, também satisfazendo as suas propriedades; nenhuma dessas afirmações

definem o que é um ponto, reta, plano ou espaço. Assim, surge a pergunta: existem esses objetos que obedecem a tais propriedades?

A Matemática responde, pelo menos em parte, a essa pergunta, mediante a construção de um modelo de espaço, em que pontos, retas e plano são definidos, e suas propriedades são obtidas dedutivamente.

Para isso, primeiro é construído o conjunto dos números reais \mathbb{R} , com sua estrutura de corpo ordenado completo. Em seguida, define-se o conjunto \mathbb{R}^3 , com sua estrutura de espaço vetorial sobre \mathbb{R} , conforme observado na seção 1.1, página 12.

Consideramos \mathbb{R}^3 como o conjunto “espaço” da Geometria Euclidiana, onde é frequentemente denominado “espaço euclidiano tridimensional”. Nele, seus elementos (chamados pontos), são representados por ternas ordenadas (x, y, z) .

Aqui, chamamos \mathbb{R}^3 de “modelo de uma Geometria Euclidiana” e, para continuarmos a construção deste modelo, será necessário definir reta e plano, obtendo por dedução todos os axiomas adotados na Geometria de Posição e Métrica. É um trabalho extenso, e não é nosso objetivo neste trabalho; apenas apresentamos as definições de reta e plano, com as demonstrações dos axiomas 1.1 e 1.2 citadas acima.

Definição 1.1 (Definição de plano): dado uma quádrupla (a, b, c, d) de números reais tais que $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, o plano por ela definido é o conjunto

$$\alpha = \alpha[a, b, c, d] = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; ax + by + cz + d = 0\}$$

Essa definição é inspirada nas observações da seção 1.7. Para completar a definição, precisamos saber quando duas dessas expressões, digamos, $\alpha = \alpha[a, b, c, d]$ e $\beta = \beta[e, f, g, h]$, indicam o mesmo conjunto. Para entender isso, vamos estudar o sistema linear de duas equações e três incógnitas x, y e z , definido por

$$\begin{cases} ax + by + cz = -d \\ ex + fy + gz = -h \end{cases} \quad (1.7)$$

Consideremos a matriz dos coeficientes A e a matriz ampliada \tilde{A} :

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ e & f & g \end{bmatrix} \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} a & b & c & -d \\ e & f & g & -h \end{bmatrix}$$

Seja p posto de A e q posto de \tilde{A} . Temos $p \leq q \leq 2$. Como $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, temos $1 \leq p \leq q \leq 2$.

Usando a Teoria dos Sistemas Lineares e, em particular, o Teorema de Roaché-Capelli ([1], páginas 17 a 46), temos os seguintes casos:

(i) $p = 1$ e $q = 2$

Como $p \neq q$, o sistema é impossível, o que significa que ele não possui solução; isso indica que os planos α e β não tem pontos em comum. Para que $p = 1$, é necessário que (a, b, c) e (e, f, g) sejam múltiplos, isto é, que exista $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $(a, b, c) = \lambda(e, f, g)$ e, para que $q = 2$, é necessário que $(a, b, c, -d)$ e $(e, f, g, -h)$ não sejam múltiplos, isto é, $d \neq \lambda h$.

(ii) $p = 2$ e $q = 2$

Como $p = q$, o sistema é possível e indeterminado, com grau de liberdade $3 - 2 = 1$. Portanto, existem pontos (x, y, z) que são soluções da equação 1.7, e existem pontos que não são. Nesse contexto, isso significa que os planos α e β têm pontos em comum, mas são planos diferentes. Assim, as ternas (a, b, c) e (e, f, g) não podem ser múltiplas.

(iii) $p = 1$ e $q = 1$

Como $p = q$, o sistema é possível e indeterminado, com grau de liberdade $3 - 1 = 2$. Para que isso ocorra, é necessário e suficiente que $(a, b, c, -d)$ e $(e, f, g, -h)$ sejam múltiplos.

Com essas observações, podemos demonstrar a

Proposição 1.1: As expressões α e β , definidas anteriormente na Definição 1.1, denotam o mesmo conjunto se, e somente se, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $(a, b, c, d) = \lambda(e, f, g, h)$.

Demonstração: Suponhamos primeiro que $\alpha = \beta$. Os coeficientes a, b, c, d, e, f, g e h determinam o sistema de equações lineares 1.7, na página 27. O único caso possível para que isso ocorra está descrito em (iii), onde vimos que $(a, b, c, -d)$ e $(e, f, g, -h)$ são múltiplos.

Assim, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $(a, b, c, d) = \lambda(e, f, g, h)$.

Reciprocamente, suponhamos que exista $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $(a, b, c, d) = \lambda(e, f, g, h)$. Como $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, temos $\lambda \neq 0$. Seja $X = (x, y, z) \in \alpha$. Então

$$\begin{aligned}x + by + cz + d &= 0 \\ \Rightarrow \frac{a}{\lambda} \cdot x + \frac{b}{\lambda} \cdot y + \frac{c}{\lambda} \cdot z + \frac{d}{\lambda} &= 0 \\ \Rightarrow ex + fy + gz + h &= 0 \\ \Rightarrow X \in \beta.\end{aligned}$$

Logo, $\alpha \subset \beta$. Do mesmo modo, se vê que $\beta \subset \alpha$, onde segue que $\alpha = \beta$. □

Essa Proposição completa a definição do plano feita na Definição 1.1, página 27. Passamos agora a apresentar uma definição para retas como subconjuntos de \mathbb{R}^3 .

Definição 1.2 (Definição de reta): Dados um ponto $P = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ e uma terna de números reais $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, a reta determinada por P e por (a, b, c) é o conjunto $r = r[P, a, b, c]$, definido por

(r1) se $a \neq 0, b \neq 0$ e $c \neq 0$,

$$r = r[P, a, b, c] = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \right\}$$

(r2) Se $a = 0, b \neq 0$ e $c \neq 0$,

$$r = r[P, a, b, c] = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = x_0 \text{ e } \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \right\}$$

(r3) Se $a \neq 0, b = 0$ e $c \neq 0$,

$$r = r[P, a, b, c] = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; y = y_0 \text{ e } \frac{x - x_0}{a} = \frac{z - z_0}{c} \right\}$$

(r4) Se $a \neq 0, b \neq 0$ e $c = 0$,

$$r = r[P, a, b, c] = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = z_0 \text{ e } \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} \right\}$$

(r5) Se $a \neq 0, b = 0$ e $c = 0$,

$$r = r[P, a, b, c] = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; y = y_0, z = z_0 \text{ e } x \text{ qualquer}\}$$

(r6) Se $a = 0, b \neq 0$ e $c = 0$,

$$r = r[P, a, b, c] = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = x_0, z = z_0 \text{ e } y \text{ qualquer}\}$$

(r7) Se $a = 0, b = 0$ e $c \neq 0$,

$$r = r[P, a, b, c] = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = x_0, y = y_0 \text{ e } z \text{ qualquer}\}$$

Para completarmos a definição de reta, precisamos esclarecer quando duas expressões $r[P, a, b, c]$ e $r[Q, d, e, f]$ indicam o mesmo conjunto.

Uma primeira observação é que $P \in r[P, a, b, c]$, o que se constata examinando todos os casos (de r1 à r7) acima. Vejamos agora o

Lema 1.1: Dado uma terna de números reais $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ e dados $P, Q \in \mathbb{R}^3$, temos $r[P, a, b, c] = r[Q, a, b, c]$ se, e somente se, $Q \in r[P, a, b, c]$.

Demonstração: Se $r[P, a, b, c] = r[Q, a, b, c]$, temos $Q \in r[Q, a, b, c] \Rightarrow Q \in r[P, a, b, c]$.

Para a recíproca, escrevemos $P = (x_0, y_0, z_0)$ e $Q = (x_1, y_1, z_1)$, e supomos que $Q \in r[P, a, b, c]$. Examinaremos apenas o caso em que $a \neq 0, b \neq 0$ e $c \neq 0$, uma vez que os demais casos são análogos.

Como $Q \in r[P, a, b, c]$, temos que $\frac{x_1 - x_0}{a} = \frac{y_1 - y_0}{b} = \frac{z_1 - z_0}{c}$. Seja λ esse valor comum, de modo que

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + a\lambda \\ y_1 = y_0 + b\lambda \\ z_1 = z_0 + c\lambda \end{cases}$$

Seja $X = (x, y, z) \in r[P, a, b, c]$. Então $\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$. Seja μ esse valor comum, de modo que:

$$x - x_1 = x - (x_0 + a\lambda) = x - x_0 - a\lambda = a\mu - a\lambda = a(\mu - \lambda)$$

Do mesmo modo, se tem

$$y - y_1 = b(\mu - \lambda)$$

$$z - z_1 = c(\mu - \lambda)$$

Logo,

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

e assim, $X \in r[Q, a, b, c]$. Mostramos que $r[P, a, b, c] \subset r[Q, a, b, c]$. mas, de forma análoga, se mostra que $r[Q, a, b, c] \subset r[P, a, b, c]$. Portanto, $r[P, a, b, c] = r[Q, a, b, c]$ \square

Para demonstrar o Lema 1.2 abaixo, usaremos a seguinte observação: Dada $r[P, a, b, c]$, o ponto $Q = P + (a, b, c)$ lhe pertence. Para constatar isso, basta examinar os casos r1 e r7 acima.

Lema 1.2: Dado $P \in \mathbb{R}^3$ e dadas ternas de números reais $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ e $(d, e, f) \neq (0, 0, 0)$, temos $r[P, a, b, c] = r[P, d, e, f]$ se, e somente se, (a, b, c) é múltiplo de (d, e, f) .

Demonstração: Vamos demonstrar apenas o caso em que $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0, e \neq 0$ e $f \neq 0$. Os demais casos são análogos.

Escrevemos $P = (x_0, y_0, z_0)$. Suponhamos primeiro que $r[P, a, b, c] = r[P, d, e, f]$. Como $Q = P + (a, b, c) = (x_0 + a, y_0 + b, z_0 + c) \in r[P, a, b, c]$, temos $Q \in r[P, d, e, f]$. Logo,

$$\frac{(x_0 + a) - x_0}{a} = \frac{(y_0 + b) - y_0}{b} = \frac{(z_0 + c) - z_0}{c} \Rightarrow \frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}.$$

Seja λ esse valor em comum. Então $a = \lambda d, b = \lambda e$ e $c = \lambda f$, de modo que $(a, b, c) = \lambda(d, e, f)$.

Assim, provamos que (a, b, c) é múltiplo de (d, e, f) .

Reciprocamente, suponhamos que (a, b, c) seja múltiplo de (d, e, f) . Então, existe um número real $\lambda \neq 0$ tal que $(a, b, c) = \lambda(d, e, f)$.

Para provar que $r[P, a, b, c] = r[P, d, e, f]$, começamos tomando $X = (x, y, z) \in r[P, a, b, c]$.

Temos

$$\begin{aligned}
& \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c} \\
\Rightarrow & \frac{x-x_0}{\lambda d} = \frac{y-y_0}{\lambda e} = \frac{z-z_0}{\lambda f} \\
\Rightarrow & \frac{x-x_0}{d} = \frac{y-y_0}{e} = \frac{z-z_0}{cf} \\
\Rightarrow & X \in r[P, d, e, f]
\end{aligned}$$

Portanto $r[P, a, b, c] \subset r[P, d, e, f]$. De modo análogo, se demonstra que $r[P, e, d, f] \subset r[P, a, b, c]$, e obtemos a igualdade desses dois conjuntos. \square

Proposição 1.2: Sejam $P, Q \in \mathbb{R}^3$, (a, b, c) e (d, e, f) ternas de números reais tais que $(a, b, c) \neq (0, 0, 0) \neq (d, e, f)$. Então, $r[P, a, b, c] = r[Q, a, b, c]$ se, e somente se, $Q \in r[P, a, b, c]$ e (a, b, c) é múltiplo de (d, e, f) .

Demonstração: Suponhamos primeiro que $r[P, a, b, c] = r[Q, d, e, f]$. Como $Q \in r[Q, d, e, f]$, isso implica $Q \in r[P, a, b, c]$. Pelo Lema 1.1, pg. 30, vem $r[P, a, b, c] = r[Q, a, b, c] \Rightarrow r[Q, a, b, c] = r[Q, d, e, f]$. Pelo Lema 1.2, pg. 31, segue que (a, b, c) é múltiplo de (d, e, f) . Isso demonstra a primeira parte da Proposição.

Reciprocamente, suponhamos agora que $Q \in r[P, a, b, c]$ e (a, b, c) seja múltiplo de (d, e, f) . Pelo Lema 1.1, vem $r[P, a, b, c] = r[Q, a, b, c]$. Pelo Lema 1.2, vem $r[Q, a, b, c] = r[Q, d, e, f]$. Portanto, $r[P, a, b, c] = r[Q, d, e, f]$, como queríamos demonstrar. \square

Com esses resultados, fica consolidada a nossa definição de reta. Observamos que para esta definição, utilizamos a equação simétrica da reta apresentada no capítulo 1.7.3, pg. 22. Notemos ainda que dada a reta $r[P, a, b, c]$ e o vetor $\vec{v} = (a, b, c)$ não nulo, temos

$$r[P, a, b, c] = \{X \in \mathbb{R}^3; X = P + \lambda \vec{v} \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{R} \}$$

Portanto, os conjuntos $r[P, a, b, c]$ podem ser expressos com a equação vetorial da reta. Passamos agora à demonstração de dois axiomas que foram comentados no início dessa seção.

O Axioma 1.1 pode ser reescrito da seguinte forma:

Teorema 1.1: Dados $P, Q \in \mathbb{R}^3$, com $P \neq Q$, existe uma única reta que os contém.

Demonstração: Seja $\overrightarrow{PQ} = (a, b, c)$, isto é, seja $Q - P = (a, b, c)$. Como $P \neq Q$ temos $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Considerando a reta $r = r[P, a, b, c]$, já sabemos que $P \in r$. Ainda, $Q = P + (a, b, c)$, e já foi observado que $Q \in r$ (observação feita imediatamente antes do Lema 1.2). Portanto, r contém P e Q , o que demonstra a existência da reta.

Para provarmos a unicidade, seja $s = r[S, d, e, f]$ uma reta qualquer que contém P e Q . Como $P \in r[S, d, e, f]$, o Lema 1.1 garante que $r[S, d, e, f] = r[P, d, e, f]$. portanto, $s = r[P, d, e, f]$. Como $Q \in s$, a expressão vetorial de s nos diz que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$Q = P + \lambda(d, e, f)$$

Logo

$$(a, b, c) = Q - P = \lambda(d, e, f)$$

O Lema 1.2 implica $r[P, a, b, c] = r[P, d, e, f]$. Portanto, $r = s$, e a reta que contém P e Q é única. □

Terminamos essa análise sobre as retas observando uma condição de colinearidade de três pontos. Três pontos se dizem colineares quando pertencem à mesma reta. Dados três pontos P, Q e R , já sabemos que P e Q determinam uma reta r . Portanto eles são colineares se, e somente se, $R \in r$. Isso ocorre quando

$$R = P + \lambda(Q - P) \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{R}$$

o que equivale a

$$R - P = \lambda(Q - P)$$

ou

$$\overrightarrow{PR} = \lambda \overrightarrow{PQ}$$

Temos assim demonstrada a

Proposição 1.3: Três pontos P, Q e R são colineares se, e somente se, \overrightarrow{PR} é múltiplo de \overrightarrow{PQ} .

Para continuar, necessitamos comentar a equação vetorial do plano. Dados dois vetores \vec{u} e \vec{v} não colineares e um ponto $P \in \mathbb{R}^3$, o conjunto

$$\{X \in \mathbb{R}^3; X = P + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

é um plano, isto é, existe uma quádrupla de números reais (a, b, c, d) , com $(a, b, c) \neq 0$ tal que

$$\alpha[a, b, c, d] = \{X \in \mathbb{R}^3; X = P + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

Por outro lado, todo plano pode ser descrito dessa forma. Dado $\alpha = \alpha[a, b, c, d]$, sejam P, Q e R três pontos não colineares de α . Sejam $\vec{u} = \overrightarrow{PQ}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{PR}$. Então

$$\alpha = \{X \in \mathbb{R}^3; X = P + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

A demonstração desses resultados está praticamente feita em [4], páginas 146 a 148.

Para as demais demonstrações, necessitamos do seguinte resultado que, por sua vez, costuma ser um axioma da Geometria Euclidiana.

Proposição 1.4: Se dois planos diferentes se intersectam, a interseção é uma reta.

Demonstração: Sejam $\alpha = \alpha[a, b, c, d]$ e $\beta = \beta[e, f, g, h]$ dois planos nas condições do enunciado da Proposição. Examinando a análise feita após a definição de plano na página 27, vemos que o único caso possível é (ii).

Assim, o sistema

$$\begin{cases} ax + by + cz = -d \\ ex + fy + gz = -h \end{cases} \quad (1.7)$$

é possível e indeterminado com grau de liberdade 1. Existem números p, q, m e n tais que a forma escalonada da matriz completa do sistema é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & p & m \\ 0 & 1 & q & n \end{bmatrix}$$

de modo que o sistema equivalente a equação 1.7 é

$$\begin{cases} 1 \cdot x + 0 \cdot y + p \cdot z = m \\ 0 \cdot x + 1 \cdot y + q \cdot z = n \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x + pz = m \\ y + qz = n \end{cases}$$

Se $z = -\lambda \in \mathbb{R}$, temos

$$(x, y, z) = (m, n, 0) + \lambda(p, q, -1)$$

que é a equação vetorial da reta determinada pelo ponto $(m, n, 0) \in \mathbb{R}^3$ e pelo vetor $(p, q, -1)$.

Com isso, encerramos a demonstração da Proposição 1.4. \square

Teorema 1.2: Dados três pontos não colineares, existe um único plano que os contém.

Demonstração: Sejam P, Q e R três pontos não colineares. Pelo que foi observado na Proposição 1.3, \overrightarrow{PQ} não é múltiplo de \overrightarrow{PR} , portanto, esses vetores geram um plano

$$\alpha = \{X \in \mathbb{R}^3; X = P + \lambda \overrightarrow{PQ} + \mu \overrightarrow{PR} \text{ para algum } \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

Tomando

- $\lambda = \mu = 0$, temos $P \in \alpha$.
- $\lambda = 1$ e $\mu = 0$, temos $Q \in \alpha$
- $\lambda = 0$ e $\mu = 1$, temos $R \in \alpha$

Portanto, α é um plano que contém os três pontos, demonstrando assim a existência do plano.

Para provar a unicidade, sejam $\alpha = \alpha[a, b, c, d]$ e $\beta = \beta[e, f, g, h]$ planos que contém P, Q e R. Consideremos os três casos analisados logo após a definição do plano, na página 27.

- (i) os planos não tem pontos em comum. Esse caso não ocorre aqui.
- (ii) a interseção dos plano é uma reta. Esse caso também não ocorre aqui.

Resta então o caso (iii), em que $\alpha = \beta$. Isso demonstra a unicidade do plano. \square

É possível prosseguir e reconstruir a Geometria Euclidiana a partir deste modelo, obtendo dedutivamente todos os seus axiomas. Existem resultados em livros esparsos, com notações e abordagens não homogêneas; um exemplo é [10]. Nele, diversos resultados similares aos desenvolvidos neste trabalho são obtidos, porém em \mathbb{R}^2 .

Capítulo 2

Propriedades básicas de algumas figuras do espaço em coordenadas e vetores

2.1 Ponto médio de um segmento

Sejam $A = (x_1, y_1, z_1)$ e $B = (x_2, y_2, z_2)$ dois pontos do sistema de coordenadas O_{xyz} . O ponto médio M do segmento AB é aquele tal que $AM = MB$, ou seja,

$$\begin{aligned}2 \overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{AB} \\ \Rightarrow 2(M - A) &= B - A \\ \Rightarrow 2M &= B - A + 2A \\ \Rightarrow M &= \frac{A + B}{2}\end{aligned}$$

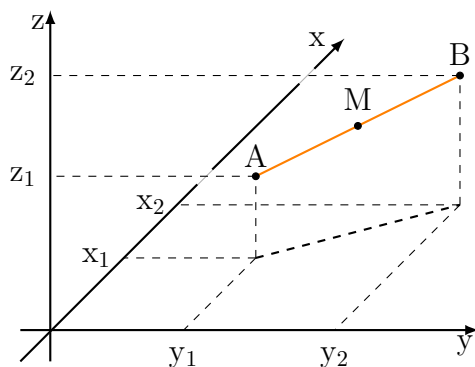


Figura 2.1: Representação do ponto médio de um segmento.

De maneira alternativa, podemos escrever o ponto médio em forma de coordenadas,

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right)$$

2.2 Condições de colinearidade de três pontos no espaço em coordenadas

Sabemos que dois pontos do espaço determinam um única reta. Por outro lado, três pontos podem ser colineares ou não. No primeiro caso, os três pontos pertencem a uma mesma reta. No segundo caso, tais pontos determinam um triângulo.

Dados três pontos do espaço \mathbb{R}^3 , queremos determinar condições sobre suas coordenadas para que elas sejam colineares ou não. Começaremos com o

Teorema 2.1: Dados três pontos distintos de \mathbb{R}^3 $A = (x_1, y_1, z_1)$, $B = (x_2, y_2, z_2)$ e $C = (x_3, y_3, z_3)$, consideremos os determinantes

$$D_1 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad D_3 = \begin{vmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Os pontos A , B e C são colineares se, e somente se, os três determinantes D_1 , D_2 e D_3 são simultaneamente nulos.

Demonstração: Por definição, os pontos A , B e C são colineares se, e somente se, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \lambda \overrightarrow{AC} \\ \Leftrightarrow B - A &= \lambda (C - A) \\ \Leftrightarrow (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) &= \lambda (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1) \\ \Leftrightarrow &\text{são proporcionais as duas linhas da matriz} \end{aligned}$$

$$M = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{bmatrix}$$

\Leftrightarrow o posto de M é 1

\Leftrightarrow todos os determinantes menores de M são nulos

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{e} \quad \begin{vmatrix} y_2 - x_1 & z_2 - y_1 \\ y_3 - x_1 & z_3 - y_1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{e} \quad \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & z_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & z_3 - y_1 \end{vmatrix} = 0$$

Observação: todas as entradas dessas matrizes são $\neq 0$.

Notemos agora que

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ \Leftrightarrow & D_1 = 0 \end{aligned}$$

O mesmo vale para os outros dois determinantes. Concluimos que os pontos A , B e C são colineares se, e somente se, os determinantes D_1 , D_2 e D_3 são simultaneamente nulos. \square

Outra forma de expressar este resultado é

Teorema 2.1': Os pontos $A = (x_1, y_1, z_1)$, $B = (x_2, y_2, z_2)$ e $C = (x_3, y_3, z_3)$ formam um triângulo se, e somente se,

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}^2 \neq 0$$

Observemos agora uma condição suficiente sobre as coordenadas de três pontos para que eles sejam não colineares.

Teorema 2.2: Sejam $A = (x_1, y_1, z_1)$, $B = (x_2, y_2, z_2)$ e $C = (x_3, y_3, z_3)$ pontos de \mathbb{R}^3 . Se

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

então A , B e C são não colineares.

Demonstração: Suponhamos que A , B e C sejam colineares. Então, existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tal que $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{AC}$. Note que $\lambda \neq 0$ pois $A \neq B$. Temos

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \lambda \overrightarrow{AC} \\ \Leftrightarrow B - A &= \lambda(C - A) \\ \Leftrightarrow (\lambda - 1)A + B - \lambda C &= 0 \\ \Leftrightarrow (\lambda - 1)(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) - \lambda(x_3, y_3, z_3) &= (0, 0, 0) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (\lambda - 1)x_1 + x_2 - \lambda x_3 = 0 \\ (\lambda - 1)y_1 + y_2 - \lambda y_3 = 0 \\ (\lambda - 1)z_1 + z_2 - \lambda z_3 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Portanto, se A, B e C são colineares, o sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} x_1 \cdot x + x_2 \cdot y + x_3 \cdot z \\ y_1 \cdot x + y_2 \cdot y + y_3 \cdot z \\ z_1 \cdot x + z_2 \cdot y + z_3 \cdot z \end{cases}$$

nas incógnitas x, y e z tem uma solução não nula $(x, y, z) = (\lambda - 1, 1, -\lambda)$. Isso implica que a matriz dos coeficientes

$$M = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix}$$

tem determinante $D = 0$.

Portanto, se $D \neq 0$ então A, B e C não são colineares.

Observação: A afirmação recíproca do Teorema 2.2 não é verdadeira. Tomando A, B e C não colineares no plano O_{xy} , a terceira coluna de D é nula, logo $D = 0$.

2.3 Área de paralelogramos e triângulos no espaço

A área de um paralelogramo ABCD no espaço pode ser calculada pelo módulo do produto vetorial dos vetores que determinam dois lados adjacentes, como vemos na Figura 2.2 abaixo.

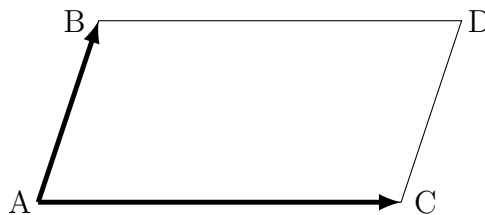


Figura 2.2: Vetores \vec{AB} e \vec{AD} do paralelogramo.

Assim, sua área é

$$a(\text{ABCD}) = |\vec{AB} \times \vec{AD}| \quad (2.1)$$

Uma demonstração desse resultado pode ser vista em [1] na página 179.

Dado um triângulo ABC, seja D o ponto definido por

$$D = C + \overrightarrow{AB}$$

Então

$$D - C = \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$$

Dessa forma, ABDC é um paralelogramo e \overrightarrow{BC} é uma diagonal de forma que a área do triângulo ABC é a metade da área do paralelogramo.

Portanto,

$$a(ABC) = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}|$$

Para obter uma expressão dessas áreas em coordenadas, façamos

$$A = (x_1, y_1, z_1), B = (x_2, y_2, z_2) \text{ e } C = (x_3, y_3, z_3)$$

Então, ([1] pg. 178)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_2 - y_1 & y_2 - z_1 \\ x_3 - y_1 & y_3 - z_1 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= D_1 \vec{i} + D_2 \vec{j} + D_3 \vec{k} \end{aligned}$$

Notemos agora que

$$D_1 = \begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 - y_1 & z_2 - z_1 & 0 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Do mesmo modo,

$$D_2 = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}$$

e

$$D_3 = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Calculando o módulo do produto vetorial, vem

$$a(ABCD) = \sqrt{D_1^2 + D_2^2 + D_3^2}$$

e

$$a(ABC) = \frac{1}{2} \sqrt{D_1^2 + D_2^2 + D_3^2}$$

2.4 Condições de coplanaridade de quatro pontos em coordenadas

Sabemos que três pontos do espaço são sempre coplanares. Dados quatro pontos, desejamos ter uma condição algébrica sobre suas coordenadas para definir se são coplanares ou não. Para isso, temos o

Teorema 2.3: Os pontos $A = (x_1, y_1, z_1)$, $B = (x_2, y_2, z_2)$, $C = (x_3, y_3, z_3)$ e $D = (x_4, y_4, z_4)$ são coplanares se, e somente se,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix} = 0$$

Demonstração: Os quatro pontos são coplanares se, e somente se, \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} e \overrightarrow{AD} são linearmente dependentes. Isso ocorre se, e somente se, as coordenadas desses vetores formam uma matriz como determinante nulo, isto é,

$$\begin{aligned}
& \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 & y_4 - y_1 \\ z_2 - z_1 & z_3 - z_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \\
\Leftrightarrow & \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 \\ 0 & y_2 - y_1 & y_3 - y_1 & y_4 - y_1 \\ 0 & z_2 - z_1 & z_3 - z_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \\
\Leftrightarrow & \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix} = 0
\end{aligned}$$

Isso demonstra o Teorema 2.3. □

Dados $n \geq 4$ pontos do espaço em coordenadas $A_i = (x_i, y_i, z_i), 1 \leq i \leq n$, para saber se são coplanares, podemos proceder do seguinte modo: calculamos a equação geral do plano determinados por três deles. Em seguida, verificamos se cada um dos outros pontos satisfaz àquela equação.

Podemos usar também o resultado do Teorema abaixo, pois atualmente dispomos de aplicativos computacionais que fornecem rapidamente o posto de qualquer matriz.

Teorema 2.4: Dada um quantidade $n \geq 4$ de pontos, em coordenadas $A_i = (x_i, y_i, z_i), 1 \leq i \leq n$, eles são coplanares se, e somente se, ≤ 3 o posto da matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ y_1 & y_2 & y_3 & \dots & y_n \\ z_1 & z_2 & z_3 & \dots & z_n \end{bmatrix}$$

2.5 Coordenadas baricêntricas no espaço relativamente a três pontos

Nesta seção, vamos obter o seguinte resultado: Sejam A , B e C pontos não colineares no espaço. Seja P um ponto qualquer do plano determinado por A , B e C . Então, podemos escrever

$$P = m_A \cdot A + m_B \cdot B + m_C \cdot C$$

em que m_A , m_B e m_C são números tais que $m_A + m_B + m_C = 1$. Veremos também a relação desses números com as áreas algébricas de diversos triângulos formados por A , B , C e P . Seguiremos ideias de [31].

Dados A , B e C não colineares no espaço, consideremos os vetores

$$\begin{aligned}\vec{e} &= \overrightarrow{AB} \\ \vec{f} &= \overrightarrow{AC} \\ \vec{g} &= \frac{\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}\end{aligned}$$

Então, $\{\vec{e}, \vec{f}, \vec{g}\}$ forma uma base positiva de \mathbb{R}^3 .

A seguir, anotaremos $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$ o produto misto de \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} . De acordo com [4], pg. 116, Problema 13, um vetor $\vec{h} \in \mathbb{R}^3$ se escreve nessa base na forma

$$\vec{h} = \frac{[\vec{h}, \vec{f}, \vec{g}]}{[\vec{e}, \vec{f}, \vec{g}]} \vec{e} + \frac{[\vec{e}, \vec{h}, \vec{g}]}{[\vec{e}, \vec{f}, \vec{g}]} \vec{f} + \frac{[\vec{e}, \vec{f}, \vec{h}]}{[\vec{e}, \vec{f}, \vec{g}]} \vec{g}$$

Agora, seja P um ponto do plano do triângulo ABC . Então, $\vec{h} = \overrightarrow{AP}$ é coplanar com \vec{e} e \vec{f} , de forma que $[\vec{e}, \vec{f}, \vec{h}] = 0$.

Com isso, ficamos com a expressão

$$\overrightarrow{AP} = \frac{[\vec{h}, \vec{f}, \vec{g}]}{[\vec{e}, \vec{f}, \vec{g}]} \vec{e} + \frac{[\vec{e}, \vec{h}, \vec{g}]}{[\vec{e}, \vec{f}, \vec{g}]} \vec{f}$$

Em outros termos,

$$\vec{AP} = m_B \cdot \vec{AB} + m_C \cdot \vec{AC}$$

sendo

$$m_B = \frac{[\vec{AP}, \vec{AC}, \vec{g}]}{[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{g}]} \text{ e } m_C = \frac{[\vec{AB}, \vec{AP}, \vec{g}]}{[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{g}]}$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \vec{AP} &= m_B \cdot \vec{AB} + m_C \cdot \vec{AC} \\ \Leftrightarrow P - A &= m_B (B - A) + m_C (C - A) \\ \Leftrightarrow P &= (1 - m_B - m_C) A + m_B \cdot B + m_C \cdot C \end{aligned}$$

Chamando $m_A = 1 - m_B - m_C$, chegamos à expressão

$$P = m_A \cdot A + m_B \cdot B + m_C \cdot C$$

com $m_A + m_B + m_C = 1$.

Para interpretarmos os coeficientes m_A , m_B e m_C , começamos observando que

$$m_A = 1 - m_B - m_C = \frac{[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{g}] - [\vec{AP}, \vec{AC}, \vec{g}] - [\vec{AB}, \vec{AP}, \vec{g}]}{[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{g}]}$$

Usando as “propriedades trilineares” do produto misto, o numerador m_A é:

$$\begin{aligned} &[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{g}] - [\vec{AP}, \vec{AC}, \vec{g}] - [\vec{AB}, \vec{AP}, \vec{g}] \\ &= [\vec{AB} - \vec{AP}, \vec{AC}, \vec{g}] - [\vec{AB}, \vec{AP}, \vec{g}] \\ &= [\vec{PB}, \vec{AC}, \vec{g}] - [\vec{AB}, \vec{AP}, \vec{g}] \\ &= [\vec{PB}, \vec{AP} + \vec{PC}, \vec{g}] - [\vec{AB}, \vec{AP}, \vec{g}] \\ &= [\vec{PB}, \vec{PC}, \vec{g}] + [\vec{PB}, \vec{AP}, \vec{g}] - [\vec{AB}, \vec{AP}, \vec{g}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [\vec{PB}, \vec{PC}, \vec{g}] + [\vec{PB} - \vec{AB}, \vec{AP}, \vec{g}] \\
&= [\vec{PB}, \vec{PC}, \vec{g}] + [\vec{PA}, \vec{AP}, \vec{g}] \\
&= [\vec{PB}, \vec{PC}, \vec{g}]
\end{aligned}$$

pois $[\vec{PA}, \vec{AP}, \vec{g}] = 0$

Em resumo, chegamos à representação

$$P = m_A \cdot A + m_B \cdot B + m_C \cdot C$$

com

$$m_A = \frac{[\vec{PB}, \vec{PC}, \vec{g}]}{[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{g}]}, \quad m_B = \frac{[\vec{AP}, \vec{AC}, \vec{g}]}{[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{g}]} \quad \text{e} \quad m_C = \frac{[\vec{AB}, \vec{AP}, \vec{g}]}{[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{g}]}$$

Notemos agora que

$$\begin{aligned}
[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{g}] &= (\vec{AB} \times \vec{AC}) \cdot \vec{g} \\
&= (\vec{AB} \times \vec{AC}) \cdot \frac{\vec{AB} \times \vec{AC}}{|\vec{AB} \times \vec{AC}|} \\
&= \frac{|\vec{AB} \times \vec{AC}|^2}{|\vec{AB} \times \vec{AC}|} \\
&= |\vec{AB} \times \vec{AC}| \\
&= 2S_{ABC}
\end{aligned}$$

onde S_{ABC} é a área (euclidiana) do triângulo ABC.

Vejamos agora o que representa o numerador $[\vec{PB}, \vec{PC}, \vec{g}]$ de m_A . Como \vec{PB} e \vec{PC} estão no plano do triângulo ABC, vemos que $\vec{PB} \times \vec{PC}$ é paralelo à \vec{g} , de forma que

$$\begin{aligned}
[\vec{PB}, \vec{PC}, \vec{g}] &= (\vec{PB} \times \vec{PC} \cdot \vec{g}) \\
&= |\vec{PB} \times \vec{PC}| |\vec{g}| \cos(\theta) \\
&= |\vec{PB} \times \vec{PC}| \cos(\theta) \\
&= \pm |\vec{PB} \times \vec{PC}|
\end{aligned}$$

sendo $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$ conforme $\vec{PB} \times \vec{PC}$ e \vec{g} tenham o mesmo sentido ou não.

Por outro lado, $|\vec{PB} \times \vec{PC}|$ é o dobro da área euclidiana do triângulo PBC. Isso nos leva a considerar a definição

$$S_{PBC} = \begin{cases} \text{área de PBC, se } \{\vec{PB}, \vec{PC}, \vec{g}\} \text{ for base de orientação positiva} \\ - \text{área de PBC, caso contrário} \end{cases}$$

Assim, S_{PBC} é o que denominamos “área algébrica” de PBC. O sinal de S_{PBC} depende da posição de P em relação à ABC. Vejamos dois exemplos.

Exemplo 2.1: P está no interior de ABC.

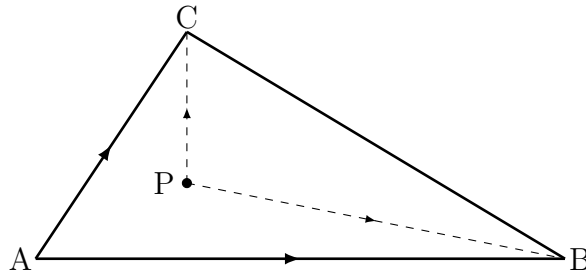


Figura 2.3: Representação do Exemplo 2.1.

Vemos que a orientação de \vec{PB} para \vec{PC} é a mesma que de \vec{AB} para \vec{AC} . Portanto, a orientação da base $\vec{PB}, \vec{PC}, \vec{g}$ é a mesma de $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{g}$. Dessa forma, S_{PBC} é positivo e seu valor coincide com a área euclidiana de PBC.

Exemplo 2.2: P está no interior do ângulo $\angle BAC$, mas exterior ao triângulo ABC.

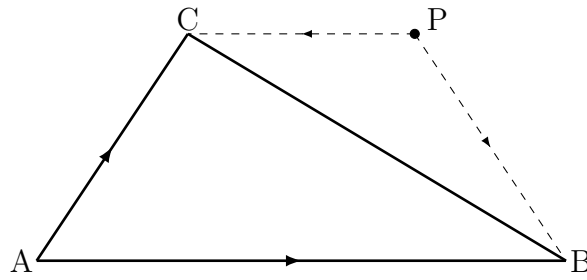


Figura 2.4: Representação do Exemplo 2.2.

Vemos que a orientação de \overrightarrow{PB} para \overrightarrow{PC} é contrária à de \overrightarrow{AB} para \overrightarrow{AC} . Portanto, a orientação da base $\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PC}, \vec{g}$ é negativa, e S_{PBC} é negativo, de valor oposto à área euclidiana de PBC.

Em resumo, se P está no interior de ABC,

$$[\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PC}, \vec{g}] = 2S_{PBC} > 0$$

e é o dobro da área de PBC.

Por outro lado, se P está no interior de $\angle BAC$ e no exterior de ABC,

$$[\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PC}, \vec{g}] = 2S_{PBC} < 0.$$

De forma análoga, conduzimos as interpretações dos numeradores de m_B e m_C , escrevendo

$$[\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AC}, \vec{g}] = 2S_{APC} \text{ e } [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AP}, \vec{g}] = 2S_{ABP}$$

em que $2S_{APC}$ e $2S_{ABP}$ são áreas algébricas dos triângulos APC e ABP, respectivamente.

Destacamos a fórmula

$$S_{PBC} + S_{APC} + S_{ABP} = S_{ABC} \tag{2.2}$$

De fato

$$\begin{aligned}
& \frac{S_{PBC}}{S_{ABC}} + \frac{S_{APC}}{S_{ABC}} + \frac{S_{ABP}}{S_{ABC}} \\
&= \frac{2S_{PBC}}{2S_{ABC}} + \frac{2S_{APC}}{2S_{ABC}} + \frac{2S_{ABP}}{2S_{ABC}} \\
&= m_A + m_B + m_C = 1
\end{aligned}$$

e segue a fórmula 2.2.

Vemos assim que a área S_{ABC} do triângulo ABC é a soma algébrica das áreas de PBC, APC e ABP.

Exemplo 2.2' - continuação. Vamos exemplificar a fórmula 2.2 para o caso em que P está no interior do ângulo $\angle BAC$, porém exterior ao triângulo ABC.

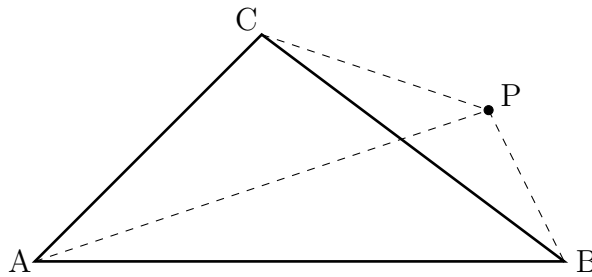


Figura 2.5: Representação do Exemplo 2.2'.

Já comentamos que nesse caso, S_{PBC} é negativo. Por outro lado, o sentido de \overrightarrow{AP} para \overrightarrow{AC} é positivo (o mesmo de \overrightarrow{AB} para \overrightarrow{AC}) logo, S_{APC} é positivo. Ainda, o sentido de \overrightarrow{AB} para \overrightarrow{AP} também é positivo, logo, S_{ABP} é positivo.

Observando agora a Figura 2.5, vemos que a região triangular ABC é a reunião de ABP e APC, menos a região de PBC. Vemos que isso ilustra a fórmula 2.2 para este caso.

Observação: A fórmula 2.2 também contempla os casos em que P está em um dos lados de ABC, ou mesmo coincida com um de seus vértices.

Em resumo, seja ABC um triângulo no espaço e seja S sua área euclidiana. Seja P um ponto qualquer do plano ABC. Então

$$P = \frac{S_{PBC}}{S} A + \frac{S_{APC}}{S} B + \frac{S_{ABP}}{S} C$$

sendo S_{PBC} , S_{APC} e S_{ABP} as áreas algébricas de PBC, APC e ABP, respectivamente, com $S_{PBC} + S_{APC} + S_{ABP} = S$.

2.6 Expressão vetorial e em coordenadas do incentro e do inraio de um triângulo no espaço

Seja ABC um triângulo dado pelas coordenadas de seus vértices (no espaço)

$$A = (x_a, y_a, z_a), B = (x_b, y_b, z_b) \text{ e } C = (x_c, y_c, z_c).$$

O incentro de ABC é um ponto I, centro da circunferência \mathcal{C} inscrita. Sabemos que I é o encontro das bissetrizes dos ângulos de ABC, de forma que I está no interior de ABC. Indicamos por r o raio da circunferência inscrita, o chamado inraio de ABC. Veja Figura 2.6

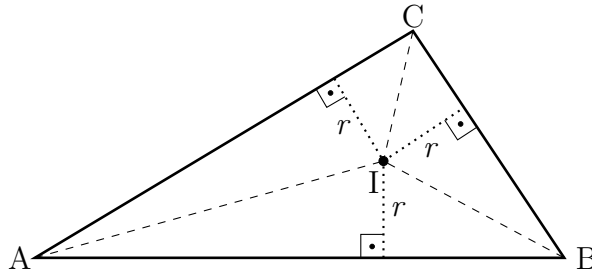


Figura 2.6: Representação do incentro de um triângulo.

As coordenadas baricêntricas de I, segundo o que foi visto na seção 2.5, são

$$I = \frac{S_{IBC}}{S} A + \frac{S_{AIC}}{S} B + \frac{S_{ABI}}{S} C \quad (2.3)$$

sendo S a área euclidiana de ABC. Como I é o ponto interior do triângulo ABC, as áreas algébricas S_{IBC} , S_{AIC} e S_{ABI} são positivas. Temos

$$S_{IBC} = \frac{r \cdot BC}{2} \quad S_{AIC} = \frac{r \cdot AC}{2} \quad S_{ABI} = \frac{r \cdot AB}{2}$$

Da Figura 2.6, vemos também que

$$S = S_{IBC} + S_{AIC} + S_{ABI} = \frac{BC + AC + AB}{2} r \quad (2.4)$$

De 2.4, vemos que

$$\begin{aligned} r &= \frac{2 \cdot S}{BC + AC + AB} \\ \Rightarrow r &= \frac{|\vec{AB} \times \vec{AC}|}{|\vec{BC}| + |\vec{AC}| + |\vec{AB}|} \end{aligned}$$

Essa fórmula nos dá uma expressão vetorial para o inraio r . Podemos também calcular $|\vec{BC}| + |\vec{AC}| + |\vec{AB}|$ e $|\vec{AB} \times \vec{AC}|$ usando as coordenadas de A, B e C e, assim, r pode ser expresso através dessas coordenadas.

Usando 2.3, obtemos uma expressão para I:

$$I = \frac{|\vec{BC}| \cdot A + |\vec{AC}| \cdot B + |\vec{AB}| \cdot C}{|\vec{BC}| + |\vec{AC}| + |\vec{AB}|}$$

de modo que I pode ser obtido em coordenadas.

2.7 Expressão vetorial e em coordenadas do circunraio de um triângulo no espaço

Seja ABC um triângulo no espaço, e R o seu circunraio (raio da circunferência \mathcal{C} circunscrita à ABC). Na Geometria Plana, o seguinte Teorema é notório:

Teorema 2.5: Se S é a área de ABC, então

$$R = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4S} \quad (2.5)$$

Demonstração: Seja $\theta = m(\angle BAC)$. Uma fórmula conhecida é

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \text{sen}(\theta)$$

Para vincular $\text{sen}(\theta)$ com R , consideramos três possibilidades sobre θ :

Caso 1: $\theta = 90^\circ$.

Neste caso, BC é um diâmetro de \mathcal{C} , de modo que o centro O de \mathcal{C} é o ponto médio de BC .

Assim, $2R = BC$ e, como $\text{sen}(\theta)=1$, temos

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \frac{BC}{2R} \\ \Rightarrow R &= \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4S} \end{aligned}$$

e vale a fórmula 2.5. Confira a Figura 2.7 abaixo.

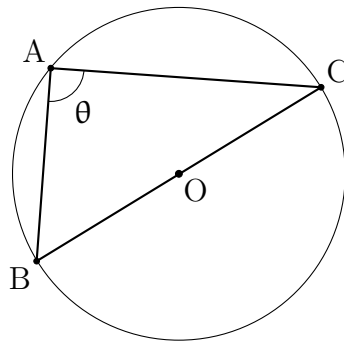


Figura 2.7: Circuncentro pertencente à uma das arestas do triângulo.

Caso 2: $\theta < 90^\circ$

Neste caso, $\angle BAC$ inscreve em \mathcal{C} um arco menor do que a semicircunferência. Temos a situação da Figura 2.8. Como $\angle BOC$ inscreve o mesmo arco que $\angle BAC$ e é central, vem $m(\angle BOC) = 2m(\angle BAC) = 2\theta$. Se M é o ponto médio de BC , temos $OM \perp BC$ e, assim, $\theta = m(\angle MOC)$. Logo,

$$\text{sen}(\theta) = \frac{MC}{OC} = \frac{\left(\frac{BC}{2}\right)}{R} = \frac{BC}{2R}$$

Portanto, novamente, temos a fórmula 2.5. Confira Figura 2.8

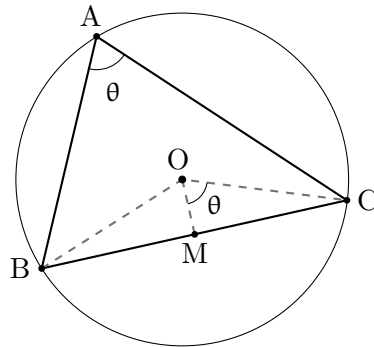


Figura 2.8: Circuncentro interno ao triângulo.

Caso 3: $\theta > 90^\circ$.

Neste caso, $\angle BAC$ inscreve em \mathcal{C} um arco maior do que um semicircunferência, e $\angle BOC$ é o ângulo central que inscreve o arco oposto. Logo, se $2n = m(\angle BOC)$, temos

$$\begin{aligned} m(\angle BOC) + 2 m(\angle BAC) &= 360^\circ \\ \Rightarrow 2n &= 360^\circ - 2\theta \\ \Rightarrow n &= 180^\circ - \theta \end{aligned}$$

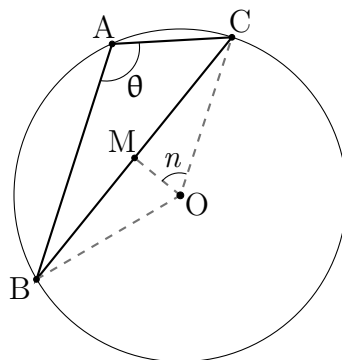


Figura 2.9: Circuncentro externo ao triângulo.

Confira a ilustração na Figura 2.9. Se M é o ponto médio de BC, temos

$$\begin{aligned} \text{sen}(n) &= \frac{MC}{OC} = \frac{BC}{2R} \\ \Rightarrow \text{sen}(\theta) &= \frac{BC}{2R} \end{aligned}$$

Assim, novamente temos a fórmula 2.5. Isso termina a demonstração do Teorema 2.5. \square

Teorema 2.6: O circunraio R de um triângulo ABC (no espaço) é dado por

$$R = \frac{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}| \cdot |\vec{BC}|}{2|\vec{AB} \times \vec{AC}|}$$

Demonstração: Aplicamos à fórmula do Teorema 2.5 a expressão vetorial da área S de ABC que, conforme visto, é

$$S = \frac{1}{2}|\vec{AB} \times \vec{AC}|$$

Isso nos dá a fórmula do Teorema 2.6. \square

Para calcular R dadas as coordenadas $A = (x_1, y_1, z_1)$, $B = (x_2, y_2, z_2)$ e $C = (x_3, y_3, z_3)$, basta usar a fórmula do Teorema 2.6, e as expressões em coordenadas de seus elementos:

$$\begin{aligned} |\vec{AB}| &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \\ |\vec{AC}| &= \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2} \\ |\vec{BC}| &= \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + (z_3 - z_2)^2} \\ |\vec{AB} \times \vec{AC}| &= \sqrt{D_1^2 + D_2^2 + D_3^2} \end{aligned}$$

onde D_1, D_2 e D_3 estão dadas em 2.3.

2.8 Expressão vetorial e em coordenadas do circuncentro de um triângulo no espaço

Sejam A, B e C pontos não colineares (no espaço). Seja O o seu circuncentro (centro da circunferência \mathcal{C} circunscrita à ABC). Vimos que a representação em coordenadas baricêntricas de O é

$$O = \frac{S_{OBC}}{S} A + \frac{S_{AOC}}{S} B + \frac{S_{ABO}}{S} C$$

em que S é a área euclidiana de ABC , e S_{OBC} , S_{AOC} e S_{ABO} são as áreas algébricas dos triângulos OBC , AOC e ABO , respectivamente.

Seja R o circunraio de ABC . Já vimos na seção 2.7 que

$$R = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4S}$$

Para simplificar a notação, escrevemos $a = BC$, $b = AC$ e $c = AB$. Então

$$S = \frac{abc}{4R}$$

Vamos ver expressões para S_{OBC} , S_{AOC} e S_{ABO} . Anotaremos por \hat{A} , \hat{B} e \hat{C} as medidas dos ângulos de ABC , relativas aos vértices A , B e C , respectivamente.

Temos o

Lema 2.1: $S_{OBC} = R^2 \operatorname{sen}(\hat{A}) \cos(\hat{A})$

Demonstração: Temos três casos a considerar, levando em conta que $0 < \hat{A} < 180^\circ$.

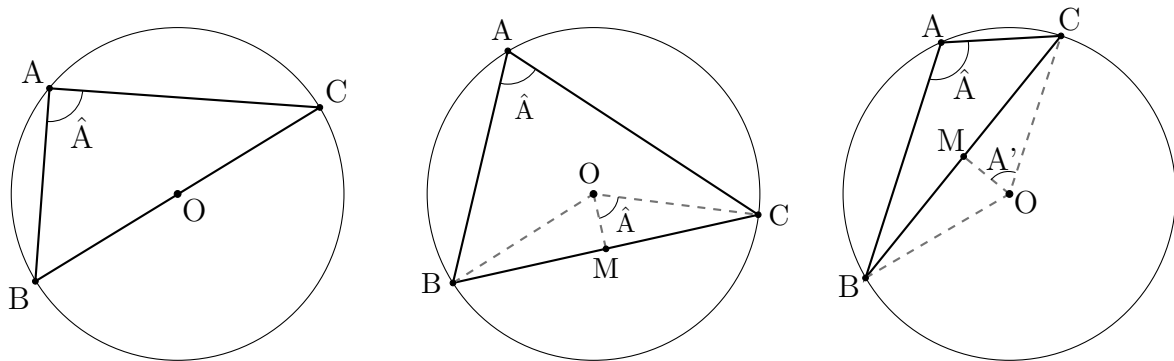


Figura 2.10: Circuncentro pertencente à uma das arestas do triângulo (esquerda), interno ao triângulo (centro) e externo ao triângulo (direita).

Caso 1: $\hat{A} = 90^\circ$.

Então, BC é um diâmetro da circunferência, e o circuncentro O é o seu ponto médio. Nesse caso, S_{OBC} é igual a zero.

Como $\cos(90^\circ) = 0$, vale a fórmula do Lema 2.1 para este caso. Confira a Figura 2.10.

Caso 2: $\hat{A} < 90^\circ$.

Nesse caso, $\angle BAC$ inscreve na circunferência um arco menor do que a semicircunferência. Temos a situação da Figura 2.10 (podendo O estar fora da região triangular). Como $\angle BAC$ inscreve o mesmo arco que $\angle BOC$ e é central, temos

$$m(\angle BOC) = 2 m(\angle BAC) = 2\hat{A}$$

Logo

$$|S_{OBC}| = \frac{OB \cdot OC}{2} \text{sen}(\hat{A})$$

Notemos agora que o sinal de S_{OBC} é positivo, e o de $\text{sen}(2\hat{A})$ também. Portanto,

$$S_{OBC} = \frac{R^2}{2} \text{sen}(2\hat{A}) = \frac{R^2}{2} 2 \text{sen}(\hat{A}) \cos(\hat{A}) = R^2 \text{sen}(\hat{A}) \cos(\hat{A})$$

e vale a fórmula do Lema 2.1 para este caso.

Caso 3: $\hat{A} > 90^\circ$.

Neste caso, $\angle BAC$ inscreve na circunferência um arco maior do que uma semicircunferência e $\angle BOC$ é o ângulo central que inscreve o arco oposto. Se chamarmos $2\hat{A}' = m(\angle BOC)$, temos

$$\begin{aligned} m(\angle BOC) + 2m(\angle BAC) &= 360^\circ \\ \Rightarrow 2\hat{A}' &= 360^\circ - 2\hat{A} \end{aligned}$$

Vemos agora que

$$\begin{aligned} |S_{OBC}| &= \frac{1}{2} R^2 \text{sen}(2\hat{A}') \\ &= \frac{1}{2} R^2 \text{sen}(360^\circ - 2\hat{A}) \\ &= \frac{1}{2} R^2 \text{sen}(-2\hat{A}) \\ &= -\frac{1}{2} R^2 \text{sen}(2\hat{A}) \\ &= -R^2 \text{sen}(\hat{A}) \cos(\hat{A}) \end{aligned}$$

Notemos agora que o sinal de S_{OBC} é negativo, pois sua orientação é contrária à de S_{ABC} . Por outro lado, temos $\text{sen}(\hat{A}) > 0$ e $\text{cos}(\hat{A}) < 0$, de modo que

$$S_{OBC} = R^2 \text{sen}(\hat{A}) \text{cos}(\hat{A})$$

e vale a fórmula do Lema 2.1 para este caso.

De forma análoga, se prova que

Lema 2.2: $S_{AOC} = R^2 \text{sen}(\hat{B}) \text{cos}(\hat{B})$ e $S_{ABO} = R^2 \text{sen}(\hat{C}) \text{cos}(\hat{C})$.

Temos agora o

Teorema 2.7: As coordenadas baricêntricas de O são

$$O = \frac{a^2(-a^2 + b^2 + c^2)}{16S^2} A + \frac{b^2(a^2 - b^2 + c^2)}{16S^2} B + \frac{c^2(a^2 + b^2 - c^2)}{16S^2} C$$

Demonstração: Pela Lei dos Senos aplicada ao triângulo ABC , temos

$$2R = \frac{a}{\text{sen}(\hat{A})} = \frac{b}{\text{sen}(\hat{B})} = \frac{c}{\text{sen}(\hat{C})}$$

Por outro lado, a Lei dos Cossenos nos dá

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \text{cos}(\hat{A})$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \text{cos}(\hat{B})$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \text{cos}(\hat{C})$$

Assim,

$$\begin{aligned}
S_{OBC} &= R^2 \sin(\hat{A}) \cos(\hat{A}) \\
&= R^2 \frac{a}{2R} \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc} \\
&= \frac{R a^2 (-a^2 + b^2 + c^2)}{4 abc} \\
&= \frac{a^2 (-a^2 + b^2 + c^2)}{16 \left(\frac{abc}{4R}\right)} \\
&= \frac{a^2 (-a^2 + b^2 + c^2)}{16S}
\end{aligned}$$

Do mesmo modo, se prova que

$$\frac{S_{AOC}}{S} = \frac{b^2(a^2 - b^2 + c^2)}{16S^2} \text{ e } \frac{S_{ABO}}{S} = \frac{c^2(a^2 + b^2 - c^2)}{16S^2}$$

Lembrando que

$$O = \frac{S_{OBC}}{S} A + \frac{S_{AOC}}{S} B + \frac{S_{ABO}}{S} C$$

segue o resultado do Teorema 2.7. □

Uma expressão equivalente para O , utilizando vetores, é

Teorema 2.8: As coordenadas baricêntricas de I são

$$O = \frac{|\vec{BC}|^2 \vec{AB} \cdot \vec{AC}}{2 |\vec{AB} \times \vec{AC}|^2} A + \frac{|\vec{AC}|^2 \vec{BA} \cdot \vec{BC}}{2 |\vec{AB} \times \vec{AC}|^2} B + \frac{|\vec{AB}|^2 \vec{CA} \cdot \vec{CB}}{2 |\vec{AB} \times \vec{AC}|^2} C$$

Demonstração: Vemos que $S_{OBC} = R^2 \sin(\hat{A}) \cos(\hat{A})$. Da Lei dos Senos, temos $\sin(\hat{A}) = \frac{a}{2R}$, e do produto escalar, temos $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = bc \cos(\hat{A})$. Logo,

$$\begin{aligned}
S_{OBC} &= R^2 \frac{a}{2R} \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{bc} \\
&= \frac{a^2}{8 \left(\frac{abc}{4R}\right)} \vec{AB} \cdot \vec{AC} \\
&= \frac{a^2}{8S} \vec{AB} \cdot \vec{AC}
\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{S_{OBC}}{S} = \frac{|\vec{BC}|^2 \vec{AB} \cdot \vec{AC}}{8S^2} = \frac{|\vec{BC}|^2 \vec{AB} \cdot \vec{AC}}{8|\vec{AB} \times \vec{AC}|^2}$$

Do mesmo modo, se verifica que

$$\frac{S_{AOC}}{S} = \frac{|\vec{BC}|^2 \vec{AB} \cdot \vec{AC}}{8|\vec{AB} \times \vec{AC}|^2} \quad \text{e} \quad \frac{S_{ABO}}{S} = \frac{|\vec{AB}|^2 \vec{CA} \cdot \vec{CB}}{8|\vec{AB} \times \vec{AC}|^2}$$

Lembrando que

$$\vec{O} = \frac{S_{OBC}}{S} \vec{A} + \frac{S_{AOC}}{S} \vec{B} + \frac{S_{ABO}}{S} \vec{C}$$

isso encerra a demonstração do Teorema 2.8. □

Capítulo 3

Propriedades do paralelepípedo

3.1 Definição do Paralelepípedo

Chamamos de paralelepípedo aos prismas cujo a base é um paralelogramo. A definição de prisma pode ser vista em [20]. Um paralelepípedo se diz reto quando as arestas laterais são perpendiculares aos planos das bases e, de maneira particular, definimos como paralelepípedo reto retângulo o prisma reto cujo a base é um retângulo. Veja Figura 3.1.

Sabemos que todas as faces de um paralelepípedo são paralelogramos e, se o paralelepípedo for reto, suas faces laterais serão retângulos. Duas arestas se dizem opostas quando são paralelas e não pertencem à mesma face do paralelepípedo.

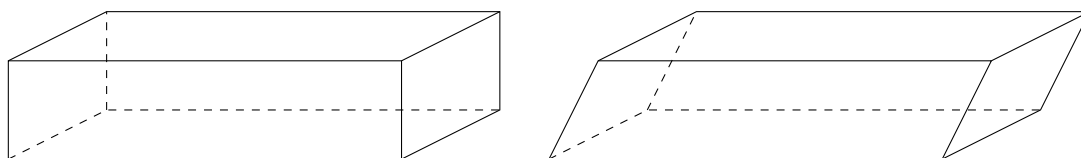


Figura 3.1: Paralelepípedo reto e paralelepípedo oblíquo.

Buscamos agora representar os segmentos que constroem um paralelepípedo como vetores, de forma que a notação para qualquer paralelepípedo seja igual. Temos, na figura 3.2, as seguintes relações:

$$AE \parallel BF \parallel CG \parallel DH \text{ e } AE = BF = CG = DH$$

$$AD \parallel BC \parallel EH \parallel FG \text{ e } AD = BC = EH = FG$$

$$AB \parallel DC \parallel EF \parallel HG \text{ e } AB = DC = EF = HG$$

Dado que todas as 6 faces do paralelepípedo são paralelogramos, podemos chegar à conclusão de que os segmentos que são paralelos entre si também são congruentes. Então,

$$\vec{AE} = \vec{BF} = \vec{CG} = \vec{DH}$$

$$\vec{AD} = \vec{BC} = \vec{EH} = \vec{FG}$$

$$\vec{AB} = \vec{DC} = \vec{EF} = \vec{HG}$$



Figura 3.2: Arestas do paralelepípedo representadas como vetores.

3.2 Centroide do Paralelepípedo

Dados n pontos A_1, A_2, \dots, A_n quaisquer no espaço, seu centroide é o ponto G definido por

$$O = \frac{A_1 + A_2 + \dots + A_n}{n} \quad (3.1)$$

O conceito de centroide (também chamado de centro geométrico) coincide com o de bari-centro para o qual foram atribuídos pesos iguais aos pontos A_1, A_2, \dots, A_n .

Sejam ABCDEFGH os pontos que definem um paralelepípedo. Sabemos então que seu centroide O pode ser calculado como

$$G = \frac{A + B + C + D + E + F + G + H}{8}$$

Vejam algumas propriedades deste centroide.

Propriedade 3.1: O centroide de um paralelepípedo é o ponto médio de qualquer diagonal.

Demonstração: Considere o segmento diagonal AG da Figura 3.3 abaixo. Seu ponto médio M é dado por

$$M = \frac{A + G}{2} = \frac{4 \cdot (A + G)}{4 \cdot 2} = \frac{(A + G) + (A + G) + (A + G) + (A + G)}{8} \quad (3.2)$$

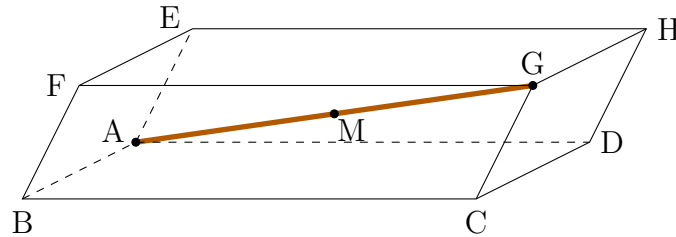


Figura 3.3: Diagonal AG do paralelepípedo.

Pelas igualdades desenvolvidas no capítulo 3.1, temos que

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{HG} \Rightarrow B - A = G - H \Rightarrow B + H = G + A$$

De maneira análoga, podemos concluir que

$$A + G = D + F = C + E = B + H \quad (3.3)$$

Ao substituirmos a equação 3.3 na equação 3.2, obtemos

$$M = \frac{(A + G) + (B + H) + (C + E) + (D + F)}{8} = O$$

Os mesmos passos podem ser realizados partindo de outro segmento diagonal do paralelepípedo ABCDEFGH. Podemos constatar ainda que o centroide do paralelepípedo é o ponto de encontro das diagonais AG, BH, CE e DF.

Propriedade 3.2: O centroide de um paralelepípedo é o ponto médio do segmento que une os pontos médios de duas arestas opostas quaisquer.

Demonstração: Sabendo da definição de arestas opostas, escolhemos duas delas para demonstrarmos esta propriedade. Sejam BC e EH e sejam P e Q seus respectivos pontos médios, como podemos ver na Figura 3.4. Temos que

$$Q = \frac{B + C}{2} \text{ e } P = \frac{E + H}{2}$$

O ponto médio M do segmento PQ é obtido por

$$M = \frac{Q + P}{2} = \frac{\frac{(B + C)}{2} + \frac{(E + H)}{2}}{2}$$

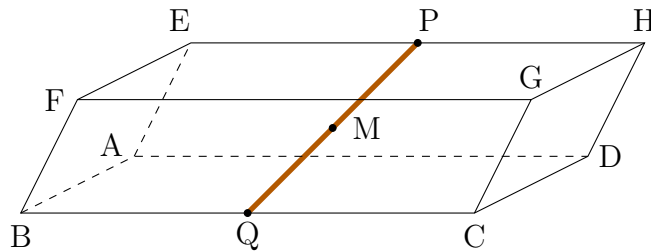


Figura 3.4: Segmento que une os pontos médios de duas arestas opostas.

Utilizando do mesmo processo realizado na equação 3.2, página 63, e das igualdades desenvolvidas na equação 3.3, temos

$$\begin{aligned} M &= \frac{\frac{(B + C)}{2} + \frac{(E + H)}{2}}{2} = \frac{\frac{(B + C)}{2} + \frac{(E + H)}{2} + \frac{(B + C)}{2} + \frac{(E + H)}{2}}{4} \\ M &= \frac{(B + C) + (E + H) + (B + C) + (E + H)}{8} \\ M &= \frac{A + B + C + D + E + F + G + H}{8} = O \end{aligned}$$

De fato, encontramos que o ponto médio M de PQ equivale ao ponto O, centroide do paralelepípedo estudado. Vale ressaltar que este resultado é invariável, independentemente das arestas opostas tomadas para o cálculo.

Propriedade 3.3: O centroide de um paralelepípedo é o ponto médio do segmento que une os centros de duas faces opostas quaisquer.

Demonstração: Para esta propriedade, começamos encontrando os centros de duas faces opostas. Sejam ABCD e EFGH tais faces. Seus centros N e J podem ser encontrados utilizando a equação 3.1, pg. 62. Veja Figura 3.5.

$$N = \frac{A + B + C + D}{4}$$

$$J = \frac{E + F + G + H}{4}$$

O ponto médio M do segmento NJ é dado por $\frac{N + J}{2}$. Desta maneira, temos

$$\begin{aligned} M &= \frac{N + J}{2} = \frac{\frac{(A + B + C + D)}{4} + \frac{(E + F + G + H)}{4}}{2} \\ \Rightarrow M &= \frac{A + B + C + D + E + F + G + H}{8} = O \end{aligned}$$

Novamente, podemos chegar a mesma conclusão para as demais faces. Concluimos então que o ponto médio do segmento que une os centros de duas faces opostas é o ponto M, centroide do paralelepípedo ABCDEFGH.

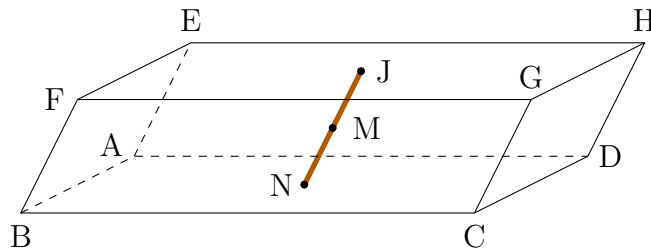


Figura 3.5: Segmento que une o centro de duas faces opostas.

Essas propriedades nos oferecem três alternativas para encontrar o centroide de um paralelepípedo qualquer a partir de suas arestas e vértices. Em particular, no paralelepípedo reto retângulo, podemos obter também a distância do centro a esses objetos, uma vez que os segmentos utilizados para encontrar o centro também são perpendiculares às faces e arestas do paralelepípedo.

Propriedade 3.4: Consideremos um paralelepípedo reto retângulo ABCDEFGH. Sejam $\overrightarrow{AB} = a$, $\overrightarrow{AD} = b$ e $\overrightarrow{AE} = c$, como vemos na Figura 3.6.

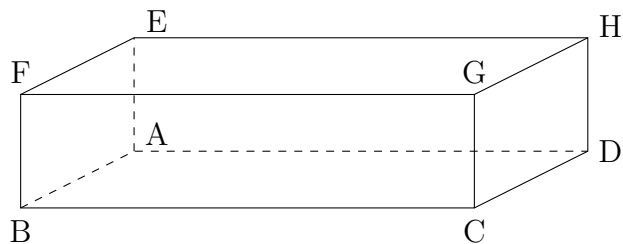


Figura 3.6: Representação da Propriedade 3.4.

i) A distância de G aos vértices:

Como visto na Propriedade 3.1, na página 63, sabemos que G é o ponto médio do segmento diagonal do paralelepípedo, isto é, O equidista a todos os vértices. Calculemos então esta distância para o vértice A em particular.

$$d(O, A) = \left| \overrightarrow{AO} \right| = \left| \frac{\overrightarrow{AG}}{2} \right| \quad (3.4)$$

Como $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$, é possível então a construção do triângulo retângulo ABC, onde

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \quad (3.5)$$

Construímos também o triângulo retângulo ACG tal que

$$AG^2 = AC^2 + CG^2 \quad (3.6)$$

Ao substituírmos a equação 3.6 na 3.5, obtemos $AG^2 = AB^2 + BC^2 + CG^2$ e, com as medidas propostas no enunciado da propriedade, temos

$$\begin{aligned} AG &= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \\ \Rightarrow d(O, A) = AO &= \frac{AG}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{2} \end{aligned}$$

ii) A distância de G às arestas:

Por questão de conveniência, utilizamos os pontos criados na Propriedade 3.2, na página 63, para encontrarmos a distância do ponto O às arestas do paralelepípedo. Para isto, note que as arestas paralelas entre si são equidistantes ao centroide O. Devemos então calcular essa distância para três arestas, perpendiculares duas a duas. Sejam AB, AD e AE tais arestas.

Iniciamos calculando a distância de O à AB. Sejam T e T' pontos médios de AB e GH respectivamente. Temos

$$T = \frac{A+B}{2} \text{ e } T' = \frac{G+H}{2}$$

$$\overrightarrow{TT'} = T' - T = \left(\frac{G+H}{2}\right) - \left(\frac{A+B}{2}\right) = \left(\frac{G-B}{2}\right) + \left(\frac{H-A}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{TT'} = \frac{\overrightarrow{BG}}{2} + \frac{\overrightarrow{AH}}{2}$$

Como os vetores \overrightarrow{BG} e \overrightarrow{AH} são iguais, podemos concluir que

$$\overrightarrow{TT'} = \frac{2 \times \overrightarrow{BG}}{2}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{TT'} = \overrightarrow{BG}$$

Obtemos então que o vetor $\overrightarrow{TT'}$ é igual ao vetor perpendicular à \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{BG} . Como existe essa relação de perpendicularidade, podemos assumir que a distância de O à AB é o comprimento do vetor $\frac{\overrightarrow{TT'}}{2}$

$$\Rightarrow d(O, AB) = \left| \frac{\overrightarrow{TT'}}{2} \right| = \left| \frac{\overrightarrow{BG}}{2} \right| = \frac{\sqrt{b^2 + c^2}}{2}$$

De maneira análoga, podemos calcular a distância de O às demais arestas

$$d(O, AD) = d(O, BC) = d(O, EH) = d(O, FG) = \frac{\sqrt{a^2 + c^2}}{2}$$

$$d(O, AE) = d(O, BF) = d(O, CG) = d(O, DG) = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$$

iii) A distância de G às faces:

De maneira similar ao desenvolvido em na Propriedade 3.4.ii, na página 66, sabemos que os vetores distância de O a uma face qualquer do paralelepípedo são perpendiculares às faces que operamos. Diante disso, vemos que essa distância equivale a metade do valor da aresta correspondente, de maneira que encontramos as seguintes igualdades:

$$d(O, AEHD) = d(O, BFGC) = \frac{a}{2}$$

$$d(O, ABFE) = d(O, DCGH) = \frac{b}{2}$$

$$d(O, ABCD) = d(O, EFGH) = \frac{c}{2}$$

3.2.1 Volume do Paralelepípedo

Pela Geometria Espacial, sabemos que o volume de um paralelepípedo é calculado pelo produto da área de sua base pela altura do sólido.

$$V = a \cdot h$$

Sejam \vec{AB} , \vec{AD} e \vec{AE} três vetores não coplanares que representam as arestas de um paralelepípedo ABCDEFGH. Se considerarmos que \vec{AB} e \vec{AD} são os vetores que definem a base deste paralelepípedo, sobra a \vec{AE} ser a hipotenusa do cateto que define a altura do paralelepípedo, como vemos na Figura 3.7.

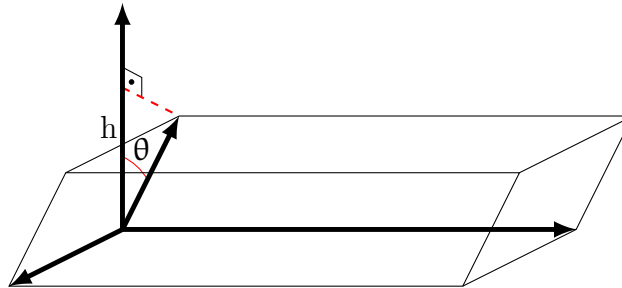


Figura 3.7: Representação da altura h de um paralelepípedo.

Para calcular a área da base desta figura, utilizamos do fato de que a área A do paralelogramo formado por dois vetores \vec{u} e \vec{v} é dada por $|\vec{u} \times \vec{v}|$. Temos então no paralelepípedo estudado que

$$A = |\vec{AB} \times \vec{AD}|$$

Pela trigonometria, sabemos que

$$\cos(\theta) = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} \Rightarrow \cos(\theta) = \frac{h}{|\vec{AE}|}$$
$$\Rightarrow h = |\vec{AE}| \cos(\theta)$$

Temos então que

$$V = a \cdot h = |\vec{AB} \times \vec{AD}| \cdot |\vec{AE}| \cos(\theta)$$

Sabemos porém que esta é a definição do produto escalar entre os vetores $\vec{AB} \times \vec{AD}$ e \vec{AE} , ou seja

$$V = \vec{AB} \times \vec{AD} \cdot \vec{AE}$$

De maneira geral, usamos a notação de produto misto para o volume de um paralelepípedo

$$V = |[\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE}]| \tag{3.7}$$

3.3 Propriedades do Cubo

De maneira particular, podemos construir um paralelepípedo reto retângulo onde o comprimento de todos os vetores que o compõe possuem o mesmo valor. Chamamos esse sólido de cubo.

3.3.1 Representação do cubo em coordenadas

Já observamos que, dado um sólido geométrico qualquer, podemos, através de transformações isométricas do espaço, colocá-lo em uma posição mais favorável, onde essa mudança irá preservar todas as propriedades da figura que dependem da distância entre os pontos. Com isso, ao construir o cubo em um sistema cartesiano, optamos por posicionar um vértice no ponto de origem, tal que as arestas que a ele concorrem sejam paralelas aos eixos coordenados.

Em nossos estudos, adotamos o posicionamento do cubo como na Figura 3.8 abaixo

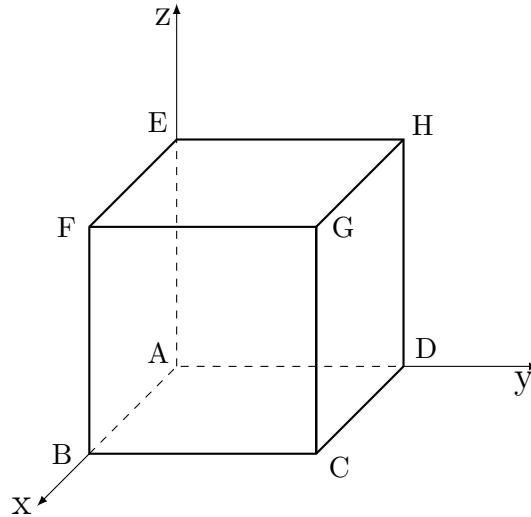


Figura 3.8: Representação de um cubo no espaço.

Desta forma, as coordenadas dos vértices do cubo são:

$$\begin{array}{llll}
 A = (0, 0, 0) & B = (\ell, 0, 0) & C = (\ell, \ell, 0) & D = (0, \ell, 0) \\
 E = (0, 0, \ell) & F = (\ell, 0, \ell) & G = (\ell, \ell, \ell) & H = (0, \ell, \ell)
 \end{array}$$

onde ℓ é a medida da aresta do cubo.

3.3.2 Coordenadas do centroide

O centroide do cubo se mantém o mesmo do paralelepípedo, porém podemos observar que dadas as diversas simetrias, podemos obter fórmulas simplificadas às apresentadas anteriormente. Vamos observar algumas destas propriedades.

Propriedade 3.5: A distância do centroide do cubo à seus vértices.

Sabemos pela Propriedade 3.4.i, na página 66, que a distância do centroide do paralelepípedo à seus vértices é dado pela seguinte expressão

$$d(O, \text{vertice}) = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{2}$$

Então, dada a congruência dos lados do cubo, temos que

$$d(O, \text{vertice}) = \frac{\sqrt{\ell^2 + \ell^2 + \ell^2}}{2} = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

Propriedade 3.6: A distância do centroide do cubo às suas arestas.

Demonstração: Em relação à distância do centroide do cubo às arestas, concluímos na Propriedade 3.4.ii, na página 66, que

$$d(O, AB) = \frac{\sqrt{b^2 + c^2}}{2}$$

$$d(O, AD) = \frac{\sqrt{a^2 + c^2}}{2}$$

$$d(O, AE) = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$$

Mais uma vez utilizando das congruências do cubo, concluímos que

$$d(O, AB) = d(O, AD) = d(O, AE) = \frac{\sqrt{\ell^2 + \ell^2}}{2} = \frac{1\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow d(O, \text{aresta}) = \frac{1\sqrt{2}}{2}$$

Propriedade 3.7: A distância do centroide do cubo às suas faces.

Sobre a distância de O às faces, temos da Propriedade 3.4.iii, na página 67, que

$$d(O, AEHD) = \frac{a}{2}$$

$$d(O, ABFE) = \frac{b}{2}$$

$$d(O, ABCD) = \frac{c}{2}$$

Desta maneira, como no cubo $a = b = c = \ell$, obtemos

$$d(O, AEHD) = d(O, ABFE) = d(O, ABCD) = \frac{\ell}{2}$$

Capítulo 4

Propriedades do tetraedro

Apresentamos neste capítulo resultados sobre o tetraedro, incluindo sua representação, propriedades e definições.

4.1 Definição do Tetraedro

O tetraedro, também conhecido como pirâmide triangular, é o poliedro composto por quatro faces triangulares, seis arestas e quatro vértices. É possível construí-lo a partir de quatro pontos não coplanares quaisquer no espaço, de tal forma que cada um desses pontos representa um único vértice deste sólido.

Cabe definir também o conceito de arestas opostas no tetraedro, que ocorrem quando duas arestas não pertencem à mesma face do poliedro. As arestas de um tetraedro qualquer se organizam em três pares de arestas opostas.

4.2 Volume do Tetraedro

Para calcularmos o volume de um tetraedro, retornamos ao que foi demonstrado no capítulo 3.2.1, onde mostramos que o volume V do paralelepípedo ABCDEFGH é dado por $V = |[\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE}]|$. Vemos na Figura 4.1 que podemos repartir o paralelepípedo em dois prismas triangulares de mesmo volume, tal que o volume V_{prisma} de um destes prismas é dado por

$$V_{\text{prisma}} = \frac{V_{\text{paralelepípedo}}}{2}$$

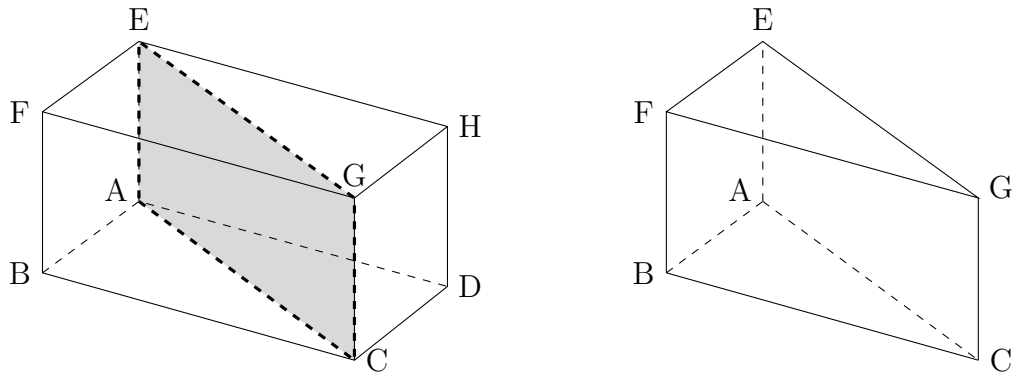


Figura 4.1: Segmentando um paralelepípedo em dois prismas triangulares de mesmo volume.

Pela Geometria de Posição, é possível mostrar que o prisma triângulo ABCEFG pode ser dividido em 3 tetraedros de mesmo volume, sendo eles o tetraedro AEFG, ACGF e ABCF. Veja a Figura 4.2.

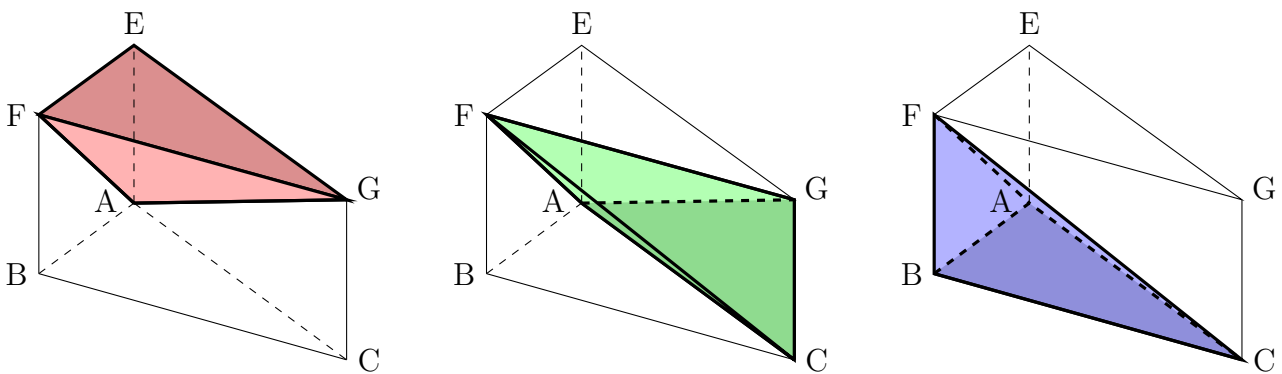


Figura 4.2: Representação dos tetraedros de mesmo volume contidos em um prisma triangular

Temos então o volume V de qualquer um desses tetraedros

$$V = \frac{V_{\text{prisma}}}{3} = \frac{V_{\text{paralelepípedo}}}{2 \times 3}$$

$$\Rightarrow V = \frac{|[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]|}{6} \quad (4.1)$$

Observamos que qualquer tetraedro pode ser obtido de um paralelepípedo ao qual podemos aplicar o processo de decomposição descrito acima.

4.3 Altura do Tetraedro

Novamente da Geometria de Posição, temos a seguinte fórmula para calcular o volume do tetraedro

$$V = \frac{A \cdot h}{3}, \text{ onde } A \text{ é a área da base do tetraedro e } h, \text{ sua altura}$$

$$\Rightarrow h = \frac{3V}{A}$$

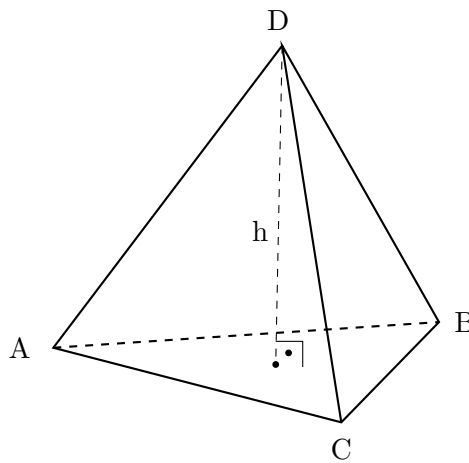


Figura 4.3: Altura h do tetraedro.

Como o valor de V já é conhecido (eq.4.1, pg.73), devemos calcular o valor de A para encontrarmos a altura h , representada na Figura 4.3 acima. Da propriedade 2.3, pg.42, temos que $\vec{AB} \times \vec{AC}$ gera a área do paralelogramo ABCD. Sabemos, porém, que metade desta área corresponde a área do triângulo ABC.

$$\Rightarrow A = \frac{|\vec{AB} \times \vec{AC}|}{2}$$

Logo

$$h = \frac{3V}{A} = \frac{3 \cdot |[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]|}{\frac{6}{\frac{|\vec{AB} \times \vec{AC}|}{2}}}$$

$$\Rightarrow h = \frac{|[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]|}{|\vec{AB} \times \vec{AC}|} \quad (4.2)$$

4.4 Coordenadas do centroide de um tetraedro

Dado um tetraedro ABCD, seu baricentro ou centroide é o ponto

$$G = \frac{A + B + C + D}{4}$$

Veamos algumas propriedades

Propriedade 4.1: Num tetraedro qualquer, os pontos médios dos três segmentos que unem os pontos médios das arestas opostas é G.

Iniciamos escolhendo duas arestas opostas do tetraedro. Considere AB e DC como tais arestas, de maneira que M e N sejam, respectivamente, seus pontos médios. Temos $M = \frac{A+B}{2}$ e $N = \frac{C+D}{2}$. O ponto médio de MN é

$$\frac{M+N}{2} = \frac{\left(\frac{A+B}{2}\right) + \left(\frac{C+D}{2}\right)}{2} = \frac{A+B+C+D}{4} = G$$

O mesmo pode ser determinado à partir das arestas opostas restantes. Concluimos então que o ponto médio do segmento que une os pontos médios de duas arestas opostas resulta no centroide do tetraedro. Veja Figura 4.4.

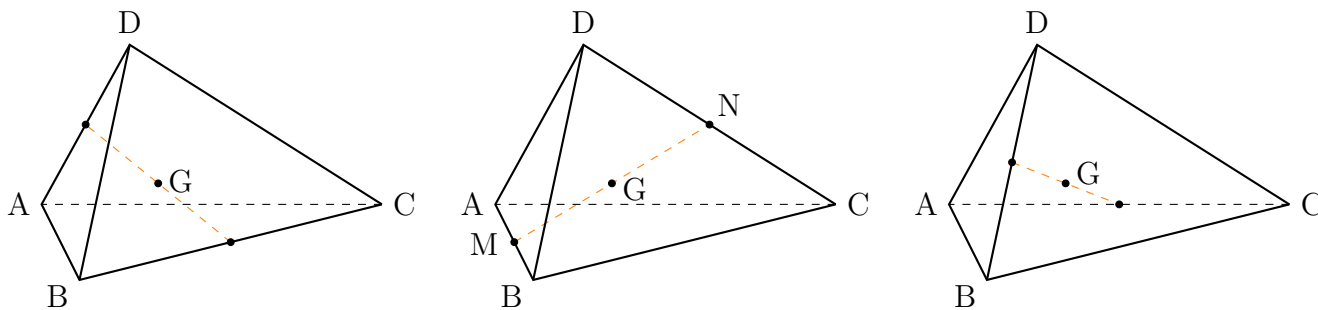


Figura 4.4: Os segmentos que unem os pontos médios de duas arestas opostas no tetraedro.

Propriedade 4.2: Em um tetraedro, seja G' o centroide de uma face qualquer e A o vértice oposto a essa face. O centroide G do tetraedro está no segmento AG' e $AG = \frac{3}{4}AG'$

Para esta demonstração, seja ABCD o tetraedro. Temos que $G' = \frac{B + C + D}{3}$. Então

$$\begin{aligned} G &= \frac{A + B + C + D}{4} = \frac{A + 3\left(\frac{B+C+D}{3}\right)}{4} = \frac{A + 3G'}{4} \\ \Rightarrow 4G &= A + 3G' \\ \Rightarrow 4G &= 4A = 3A + 3G' \\ \Rightarrow 4(G - A) &= 3(G' - A) \\ \Rightarrow 4\overrightarrow{AG} &= 3\overrightarrow{AG'} \end{aligned}$$

Como os vetores \overrightarrow{AG} e $\overrightarrow{AG'}$ são paralelos, com $|\overrightarrow{AG}| < |\overrightarrow{AG'}|$, segue que G está no segmento AG' , e $AG = \frac{3}{4}AG'$, como vemos na Figura 4.5 abaixo.

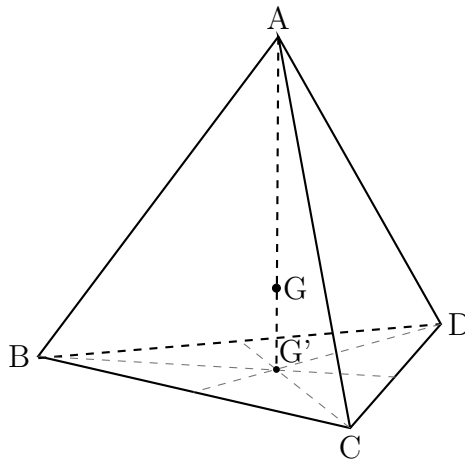


Figura 4.5: Ilustração da Propriedade 4.2.

4.5 Coordenadas do centro da Esfera Circunscrita

Sabemos que todo tetraedro é inscrito em uma esfera. Vamos aqui determinar o raio e o centro desta esfera em função das coordenadas dos vértices do tetraedro.

Seguiremos o texto [32], no qual o autor faz os mesmos cálculos para a circunferência circunscrita a um triângulo. Aqui, adaptamos a demonstração para o espaço.

Sejam $A = (A_x, A_y, A_z)$, $B = (B_x, B_y, B_z)$, $C = (C_x, C_y, C_z)$ e $D = (D_x, D_y, D_z)$ quatro pontos não coplanares. Seja $u = (u_x, u_y, u_z)$ o centro da esfera circunscrita ao tetraedro ABCD

e $v = (v_x, v_y, v_z)$ um ponto qualquer desta esfera. Como a distância de u à cada um desses pontos é constante e igual ao raio r da esfera, temos então as seguintes relações:

$$\left\{ \begin{array}{l} |v - u|^2 = r^2 \\ |A - u|^2 = r^2 \\ |B - u|^2 = r^2 \\ |C - u|^2 = r^2 \\ |D - u|^2 = r^2 \end{array} \right.$$

Utilizando a propriedade (viii) dos vetores, página 18, desenvolvemos cada uma das relações acima. Assim,

$$\left\{ \begin{array}{l} |v|^2 - 2v \cdot u + |u|^2 - r^2 = 0 \\ |A|^2 - 2A \cdot u + |u|^2 - r^2 = 0 \\ |B|^2 - 2B \cdot u + |u|^2 - r^2 = 0 \\ |C|^2 - 2C \cdot u + |u|^2 - r^2 = 0 \\ |D|^2 - 2D \cdot u + |u|^2 - r^2 = 0 \end{array} \right.$$

Desenvolvemos cada produto escalar usando as suas respectivas coordenadas, como visto no capítulo 1.5, página 18.

$$\left\{ \begin{array}{l} |v|^2 - 2v_x u_x - 2v_y u_y - 2v_z u_z + |u|^2 - r^2 = 0 \\ |A|^2 - 2A_x u_x - 2A_y u_y - 2A_z u_z + |u|^2 - r^2 = 0 \\ |B|^2 - 2B_x u_x - 2B_y u_y - 2B_z u_z + |u|^2 - r^2 = 0 \\ |C|^2 - 2C_x u_x - 2C_y u_y - 2C_z u_z + |u|^2 - r^2 = 0 \\ |D|^2 - 2D_x u_x - 2D_y u_y - 2D_z u_z + |u|^2 - r^2 = 0 \end{array} \right.$$

Consideremos o sistema de 5 equações nas 5 incógnitas $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ e ϵ , definido por

$$\left\{ \begin{array}{l} |v|^2 \alpha - 2 v_x \beta - 2 v_y \gamma - 2 v_z \delta - \epsilon = 0 \\ |A|^2 \alpha - 2 A_x \beta - 2 A_y \gamma - 2 A_z \delta - \epsilon = 0 \\ |B|^2 \alpha - 2 B_x \beta - 2 B_y \gamma - 2 B_z \delta - \epsilon = 0 \\ |C|^2 \alpha - 2 C_x \beta - 2 C_y \gamma - 2 C_z \delta - \epsilon = 0 \\ |D|^2 \alpha - 2 D_x \beta - 2 D_y \gamma - 2 D_z \delta - \epsilon = 0 \end{array} \right. \quad (4.3)$$

Vemos pelas equações que $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon) = (1, u_x, u_y, u_z, r^2 - |u|^2)$ é uma solução não nula para a equação 4.3 acima; como essa solução é não nula, este sistema é indeterminado. Logo, o determinante da matriz principal K é 0. Temos então

$$\begin{vmatrix} |v|^2 & -2 v_x & -2 v_y & -2 v_z & -1 \\ |A|^2 & -2 A_x & -2 A_y & -2 A_z & -1 \\ |B|^2 & -2 B_x & -2 B_y & -2 B_z & -1 \\ |C|^2 & -2 C_x & -2 C_y & -2 C_z & -1 \\ |D|^2 & -2 D_x & -2 D_y & -2 D_z & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Como o determinante da matriz é 0, podemos simplificá-la, obtendo

$$\begin{vmatrix} |v|^2 & v_x & v_y & v_z & 1 \\ |A|^2 & A_x & A_y & A_z & 1 \\ |B|^2 & B_x & B_y & B_z & 1 \\ |C|^2 & C_x & C_y & C_z & 1 \\ |D|^2 & D_x & D_y & D_z & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Vamos calcular este determinante desenvolvendo-o pela primeira linha. Para simplificar a notação, sejam:

$$S_x = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} |A|^2 & A_y & A_z & 1 \\ |B|^2 & B_y & B_z & 1 \\ |C|^2 & C_y & C_z & 1 \\ |D|^2 & D_y & D_z & 1 \end{vmatrix} \quad S_y = -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} |A|^2 & A_x & A_z & 1 \\ |B|^2 & B_x & B_z & 1 \\ |C|^2 & C_x & C_z & 1 \\ |D|^2 & D_x & D_z & 1 \end{vmatrix} \quad S_z = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} |A|^2 & A_x & A_y & 1 \\ |B|^2 & B_x & B_y & 1 \\ |C|^2 & C_x & C_y & 1 \\ |D|^2 & D_x & D_y & 1 \end{vmatrix}$$

$$a = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z & 1 \\ B_x & B_y & B_z & 1 \\ C_x & C_y & C_z & 1 \\ D_x & D_y & D_z & 1 \end{vmatrix} \quad -b = \begin{vmatrix} |A|^2 & A_x & A_y & A_z \\ |B|^2 & B_x & B_y & B_z \\ |C|^2 & C_x & C_y & C_z \\ |D|^2 & D_x & D_y & D_z \end{vmatrix}$$

Temos assim

$$(-1)^{(1+1)} \cdot a|v|^2 + (-1)^{(1+2)} \cdot 2S_x v_x + (-1)^{(1+3)} \cdot 2(-S_y)v_y + (-1)^{(1+4)} \cdot 2S_z v_z + (-1)^{(1+5)} \cdot 1 \cdot (-b) = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow a|v|^2 - 2S_x v_x - 2S_y v_y - 2S_z v_z - b &= 0 \\ \Rightarrow a|v|^2 - 2S \cdot v - b &= 0 \\ \Rightarrow b &= a|v|^2 - 2S \cdot v \end{aligned}$$

Observe que os pontos A, B, C e D não são colineares. Assim, $a \neq 0$. Faremos o seguinte cálculo

$$\begin{aligned} \left|v - \frac{S}{a}\right|^2 &= |v|^2 - 2v \cdot \frac{S}{a} + \left|\frac{S}{a}\right|^2 \\ &= \frac{1}{a} (a|v|^2 - 2v \cdot S) + \left|\frac{S}{a}\right|^2 \\ &= \frac{1}{a} b + \left|\frac{S}{a}\right|^2 \\ &= \frac{b}{a} + \frac{|S|^2}{a^2} \end{aligned}$$

Observe que o segundo termo desta equação é um número que só depende dos pontos A, B, C e D. Concluimos então que o centro da esfera circunscrita é $\frac{S}{a}$, e o seu raio é $\sqrt{\frac{b}{a} + \frac{|S|^2}{a^2}}$

4.6 Tetraedro Trirretângulo e suas propriedades

4.6.1 Definição de Tetraedro Trirretângulo

Definimos como trirretângulo o tetraedro que possui três triângulos retângulos como faces, de forma que os vértices correspondentes ao ângulo reto de cada uma das faces se encontram em um mesmo vértice do tetraedro. Chamamos esse vértice de *ângulo reto do tetraedro trirretângulo* que, por consequência de sua construção, pertence a reta suporte da altura do tetraedro em relação à qualquer um de seus vértices. Veja uma representação deste tetraedro na Figura 4.6 abaixo.

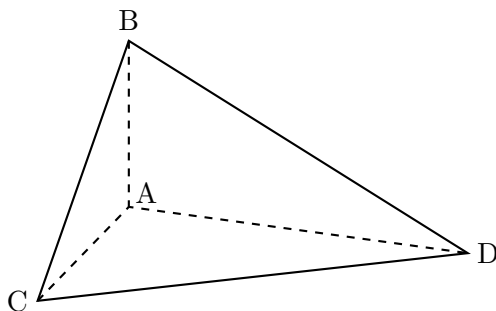


Figura 4.6: Exemplo de tetraedro trirretângulo.

4.6.2 Teorema de Gua

Apresentado pelo matemático francês Jean Paul de Gua de Malves (1713–1785), o Teorema de Gua, conhecido também como Teorema de Pitágoras para tetraedros, nos diz que dado um tetraedro trirretângulo ABCD, tal que o vértice A seja o encontro de suas alturas, temos que

$$a^2 = b^2 + c^2 + d^2$$

onde a é a área de BCD, b a área de ACD, c a de ABD e d a área do triângulo ABC.

Para a demonstrar este teorema, supomos que o vértice A esteja na origem do sistema

cartesiano, para simplificar os cálculos. Do enunciado, temos as seguintes relações:

$$a = \frac{|\overrightarrow{DB} \times \overrightarrow{DC}|}{2} \quad b = \frac{|\overrightarrow{C} \times \overrightarrow{D}|}{2} \quad c = \frac{|\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{D}|}{2} \quad d = \frac{|\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{C}|}{2}$$

Expandindo a área a do triângulo BCD, temos

$$a = \frac{|\overrightarrow{DB} \times \overrightarrow{DC}|}{2} = \frac{|(\overrightarrow{B} - \overrightarrow{D}) \times (\overrightarrow{C} - \overrightarrow{D})|}{2}$$

Como visto na propriedade **v.** do produto vetorial, página 18, sabemos que este produto é distributivo sobre uma adição. Assim,

$$a = \frac{|(\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{C}) - (\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{D}) - (\overrightarrow{D} \times \overrightarrow{C}) + (\overrightarrow{D} \times \overrightarrow{D})|}{2}$$

Utilizando agora das propriedades **i.** e **ii.** do produto escalar, temos então que

$$a = \frac{|(\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{C}) + (\overrightarrow{D} \times \overrightarrow{B}) + (\overrightarrow{C} \times \overrightarrow{D}) + \vec{0}|}{2}$$

Elevando a igualdade ao quadrado, temos

$$a^2 = \frac{|\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{C} + \overrightarrow{D} \times \overrightarrow{B} + \overrightarrow{C} \times \overrightarrow{D}| \cdot |\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{C} + \overrightarrow{D} \times \overrightarrow{B} + \overrightarrow{C} \times \overrightarrow{D}|}{4}$$

$$a^2 = \frac{1}{4} (|(\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{C} \cdot \overrightarrow{B} \times \overrightarrow{C}) + (\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{C} \cdot \overrightarrow{D} \times \overrightarrow{B}) + (\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{C} \cdot \overrightarrow{C} \times \overrightarrow{D}) + (\overrightarrow{D} \times \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{B} \times \overrightarrow{C}) + (\overrightarrow{D} \times \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{D} \times \overrightarrow{B}) + (\overrightarrow{D} \times \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{C} \times \overrightarrow{D}) + (\overrightarrow{C} \times \overrightarrow{D} \cdot \overrightarrow{B} \times \overrightarrow{C}) + (\overrightarrow{C} \times \overrightarrow{D} \cdot \overrightarrow{D} \times \overrightarrow{B}) + (\overrightarrow{C} \times \overrightarrow{D} \cdot \overrightarrow{C} \times \overrightarrow{D})|)$$

Eliminando os produtos vetoriais que possuem dois vetores perpendiculares entre si (Propriedade **iv.**, página 18), nos resta

$$a^2 = \frac{|(\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{C} \cdot \overrightarrow{B} \times \overrightarrow{C}) + (\overrightarrow{D} \times \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{D} \times \overrightarrow{B}) + (\overrightarrow{C} \times \overrightarrow{D} \cdot \overrightarrow{C} \times \overrightarrow{D})|}{4}$$

$$a^2 = \left(\frac{|\overrightarrow{C} \times \overrightarrow{D}|}{2} \right)^2 + \left(\frac{|\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{D}|}{2} \right)^2 + \left(\frac{|\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{C}|}{2} \right)^2$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 + d^2$$

4.6.3 Coordenadas do Tetraedro Trirretângulo

Para representarmos o Tetraedro Trirretângulo em coordenadas, primeiramente devemos estabelecer as seguintes condições para cada vértice.

(i) $A = (0, 0, 0)$

(ii) $B \in O_x$

(iii) $C \in O_y$

(iv) $D \in O_z$

Assim, se $AB = b$, $AC = c$ e $AD = d$ com A na origem do espaço cartesiano, temos que

$$A = (0, 0, 0) \quad B = (b, 0, 0) \quad C = (0, c, 0) \quad D = (0, 0, d)$$

4.6.4 Altura do Tetraedro Trirretângulo

Sabendo que a altura de um tetraedro é dada por $\frac{|[\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{BD}]|}{|\vec{AB} \times \vec{AC}|}$ (equação 4.3, pg. 75) e conhecendo as coordenadas dos vértices do Tetraedro Trirretângulo, podemos facilmente calcular que

$$\begin{aligned} h &= \frac{|[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]|}{|\vec{BC} \times \vec{BD}|} = \frac{\begin{vmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & d \end{vmatrix}}{\sqrt{(cd)^2 + (bd)^2 + (bc)^2}} = \frac{bcd}{\sqrt{(cd)^2 + (bd)^2 + (bc)^2}} \\ &\Rightarrow \frac{1}{h^2} = \frac{(cd)^2 + (bd)^2 + (bc)^2}{b^2 c^2 d^2} \\ &\Rightarrow \frac{1}{h^2} = \frac{(cd)^2}{b^2 c^2 d^2} + \frac{(bd)^2}{b^2 c^2 d^2} + \frac{(bc)^2}{b^2 c^2 d^2} \\ &\Rightarrow \frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} \end{aligned}$$

4.6.5 Volume do Tetraedro Trirretângulo

Como o volume de um tetraedro é dado por $V = \frac{|[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]|}{6}$ (equação 4.1, pg. 73), para o caso particular do Tetraedro Trirretângulo, seu volume V é dado por

$$V = \frac{|[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]|}{6} = \frac{b c d}{6}$$

4.7 Tetraedro Regular e suas propriedades

4.7.1 Definição de um Tetraedro Regular

Definimos por tetraedro regular aquele para o qual suas quatro faces são triângulos equiláteros. Um resultado imediato desta definição é que, dado um tetraedro regular qualquer, suas arestas possuem as mesmas medidas e, conseqüentemente, todas as faces são congruentes.

4.7.2 Altura de um Tetraedro Regular

Para calcularmos a altura h de um Tetraedro Regular, os resultados dos seguintes lemas são necessários.

Lema 4.1: Seja $ABCD$ um tetraedro regular. Então, duas arestas opostas quaisquer são ortogonais, ou seja,

$$AB \perp CD \quad AC \perp BD \quad AD \perp BC.$$

Vamos provar que $AD \perp BC$. Seja N o ponto médio de BC , e consideremos os segmentos AN e DN , como vemos na Figura 4.7 abaixo. Como os triângulos ABC e BCD são equiláteros, então $AN \perp BC$ e $DN \perp BC$. Segue que BC é perpendicular ao plano $[AND]$ e, assim, BC é ortogonal a qualquer segmento deste plano. Logo, $AD \perp BC$.

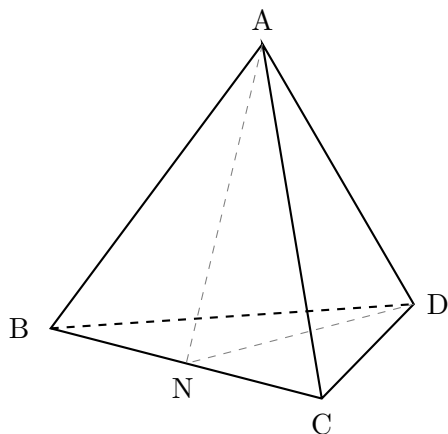


Figura 4.7: Representação da demonstração do Lema 4.1.

Do mesmo modo, se prova que $AB \perp CD$ e $AC \perp BD$. □

Lema 4.2: Dado um tetraedro regular $ABCD$, seja H_A o pé da altura relativa ao vértice A . Então, $\overleftrightarrow{DH_A}$ é a altura do triângulo BCD relativa ao vértice D .

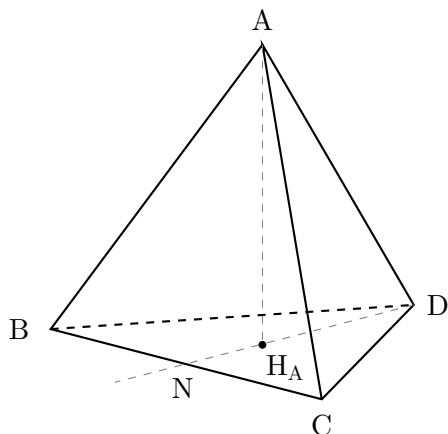


Figura 4.8: Representação da demonstração do Lema 4.2.

Demonstração: Precisamos provar que $\overleftrightarrow{DH_A} \perp \overleftrightarrow{BC}$, como vemos na Figura 4.8 acima. Temos $\overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{AH_A}$, pois $\overleftrightarrow{AH_A} \perp [\overline{BCD}]$ e \overleftrightarrow{BC} está nesse plano. Ainda, $\overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{AD}$ pelo lema Lema 4.1.

Logo,

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DH_A} &= \overrightarrow{BC} \cdot [\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AH_A}] \\
 &= \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AH_A} \\
 &= 0 + 0 = 0
 \end{aligned}$$

Assim, $\overleftrightarrow{DH_A} \perp \overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{DH_A}$ é a altura de BCD relativa ao vértice D. □

Lema 4.3: Dado um tetraedro regular ABCD, seja H_A o pé da altura relativa a A, como visto na Figura 4.8 acima. Então, H_A é o ortocentro de BCD.

Demonstração: Pelo Lema 4.2, H_A está na altura de BCD relativa a D, ou a qualquer outro vértice.

Logo, H_A está nas três alturas de BCD e, assim, é seu ortocentro

Demonstrados estes três Lemas, podemos agora calcular a altura de um tetraedro regular. Como consequência do Lema 4.3, sabemos que no tetraedro regular o pé H_A da altura relativa ao vértice A é o ortocentro da face BCD. Da Geometria de Posição, sabemos também que o ortocentro de um face divide sua altura $\ell\sqrt{3}/2$ em um proporção de 2/3. Assim, temos que o triângulo ABH_A é um triângulo retângulo, onde AH_A é a altura relativa ao vértice A do tetraedro regular.

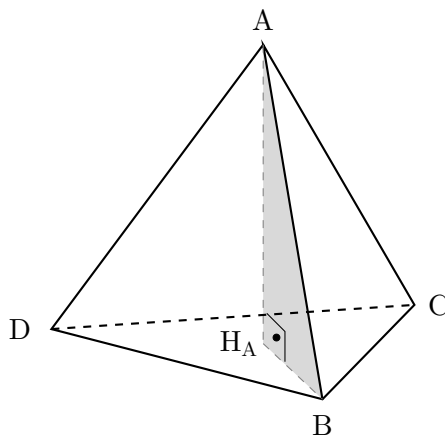


Figura 4.9: Representação do Lema 4.3.

Dessa forma, como vemos na Figura 4.9,

$$AB^2 = AH_A^2 + BH_A^2$$

Como AB é uma aresta do tetraedro, $AB = \ell$. Da Geometria Plana, sabemos que a altura

de um triângulo equilátero de lado ℓ é $\ell\sqrt{3}/2$; seja N é o pé da altura de BCD relativa ao vértice B. Temos

$$\begin{aligned} BH_A &= \frac{2}{3}BN \\ \Rightarrow BH_A &= \frac{2}{3} \left(\frac{\ell\sqrt{3}}{2} \right) \\ \Rightarrow BH_A &= \frac{\ell\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} AB^2 &= AH_A^2 + BH_A^2 \\ \Rightarrow \ell^2 &= AH_A^2 + \left(\frac{\ell\sqrt{3}}{3} \right)^2 \\ \Rightarrow AH_A^2 &= \frac{9\ell^2 - 3\ell^2}{9} \\ \Rightarrow AH_A &= \frac{\ell\sqrt{6}}{3} \end{aligned}$$

De maneira geral, denotamos a altura AH_A do tetraedro pela letra h. Dessa forma

$$h = \frac{\ell\sqrt{6}}{3}$$

4.7.3 Coordenadas do Tetraedro Regular

Assim como no capítulo 3.3.1, onde adotamos uma tripla de coordenadas para cada vértice do cubo, buscaremos um conjunto de coordenadas similar para a classe dos tetraedros regulares.

Sejam ABCD as arestas de um tetraedro regular, de centro O. Para este ponto, atribuiremos a tripla (0,0,0), uma vez que os quatro vértices do tetraedro ABCD equidistam do mesmo.

Estabelecemos as seguintes condições:

- (i) $A \in O_z$, no semieixo $z > 0$
- (ii) $B \parallel O_{xz}$, no quadrante $x < 0$ e $z < 0$

A condição (i) implica que a face BCD é perpendicular ao eixo O_z e, portanto, paralela O_{xy} . Logo, os vértices B, C e D tem a mesma coordenada z.

Ainda, serão utilizadas as seguintes notações para as coordenadas de ABCD

$$A : (x_a, y_a, z_a)$$

$$B : (x_b, y_b, z_b)$$

$$C : (x_c, y_c, z_c)$$

$$D : (x_d, y_d, z_d)$$

Como apresentado anteriormente, temos que o centro O divide a altura $l\sqrt{6}/3$ do tetraedro em um proporção de $3/4$. Assim, tomando H_A como o pé da altura de ABCD em relação ao vértice A, temos

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} &= \frac{3}{4} \cdot \frac{l\sqrt{6}}{3} = \frac{l\sqrt{6}}{4} \\ \overrightarrow{OH_A} &= \frac{1}{4} \cdot \frac{l\sqrt{6}}{3} = \frac{l\sqrt{6}}{12}\end{aligned}$$

Por fim, como $A \in O_z$, temos que

$$\Rightarrow A = \left(0, 0, \frac{l\sqrt{6}}{4} \right)$$

Analisaremos agora a face que não contém o ponto A, como representado na Figura 4.10 abaixo.

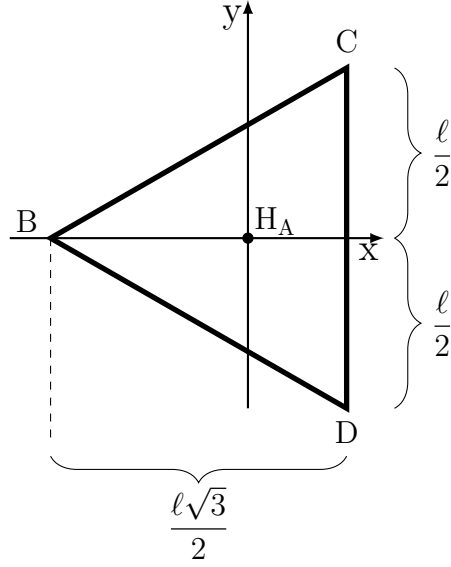


Figura 4.10: Base BCD do tetraedro.

Como $B \in O_{xz}$ e $BCD \parallel O_{xy}$, suas coordenadas nos eixos y e z são triviais. Sabendo que H_A coincide como o centro de um triângulo equilátero, e tal centro divide a altura $l\sqrt{3}/2$ em uma proporção de $2/3$, temos que

$$B : \begin{cases} x_b = -\frac{2}{3} \cdot \frac{l\sqrt{3}}{2} = -\frac{l\sqrt{3}}{3} \\ y_b = 0 \\ z_b = -\frac{1}{4} \cdot \frac{l\sqrt{6}}{3} = -\frac{l\sqrt{6}}{12} \end{cases}$$

$$B = \left(-\frac{l\sqrt{3}}{3}, 0, -\frac{l\sqrt{6}}{12} \right)$$

Ainda considerando a projeção anterior, as relações a seguir são dedutíveis

$$C : \begin{cases} x_c = x_b + \frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{l\sqrt{3}}{6} \\ y_c = y_b + \frac{l}{2} = \frac{l}{2} \\ z_c = z_b = -\frac{l\sqrt{6}}{12} \end{cases} \quad D : \begin{cases} x_d = x_b + \frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{l\sqrt{3}}{6} \\ y_d = y_b - \frac{l}{2} = -\frac{l}{2} \\ z_d = z_b = -\frac{l\sqrt{6}}{12} \end{cases}$$

Assim, padronizamos as coordenadas de um tetraedro regular ABCD tal que

$$A = \left(0, 0, \frac{l\sqrt{6}}{4} \right) \quad B = \left(-\frac{l\sqrt{3}}{3}, 0, -\frac{l\sqrt{6}}{12} \right) \quad C = \left(\frac{l\sqrt{3}}{6}, \frac{l}{2}, -\frac{l\sqrt{6}}{12} \right) \quad D = \left(\frac{l\sqrt{3}}{6}, -\frac{l}{2}, -\frac{l\sqrt{6}}{12} \right)$$

4.7.4 Propriedades do Tetraedro Regular

Propriedade 4.3: As alturas relativas à cada vértice de um tetraedro regular se encontram em seu centro.

Suponha que as alturas de fato se encontram no centro O do tetraedro regular. Para isso, temos que os vetores \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} , \overrightarrow{OC} e \overrightarrow{OD} são perpendiculares às faces opostas aos seus vértices correspondentes.

Temos que, por exemplo,

$$\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BD} = \left(0, 0, -\frac{\ell\sqrt{6}}{4}\right) \cdot \left(\frac{\ell\sqrt{3}}{2}, -\frac{\ell}{2}, 0\right) = 0$$

Como consequência deste resultado, temos que o vetor \overrightarrow{OA} é perpendicular ao plano BCD e, como \overrightarrow{OA} pertence à altura relativa ao vértice A do tetraedro ABCD, o ponto O nela está contido. O mesmo resultado pode ser obtido com os demais vetores, onde podemos então concluir que todas as alturas contém o centro O de um tetraedro regular, isto é, O é a intersecção das alturas de ABCD.

4.7.5 Volume de um Tetraedro Regular

Utilizando a equação 4.1, pg. 73, podemos determinar uma fórmula para o cálculo de volumes em tetraedros regulares em função apenas da medida de seu lado.

Pelo capítulo anterior, podemos calcular com facilidade os vetores \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} e \overrightarrow{AD} . Assim,

$$V = \frac{[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]}{6} = \frac{1}{6} \cdot \begin{vmatrix} -\frac{\ell\sqrt{3}}{3} & 0 & -\frac{\ell\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\ell\sqrt{3}}{6} & \frac{\ell}{2} & -\frac{\ell\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\ell\sqrt{3}}{6} & -\frac{\ell}{2} & -\frac{\ell\sqrt{6}}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \cdot \frac{\ell^3}{\sqrt{2}} = \frac{\ell^3}{6\sqrt{2}}$$

Assim, temos que o volume de um tetraedro regular qualquer de lado ℓ é dado por $\frac{\ell^3}{6\sqrt{2}}$ ou $\frac{\ell^3\sqrt{2}}{12}$, como normalmente é enunciado em livros didáticos

4.7.6 Ângulo Tetraédrico do Tetraedro Regular

Chamamos de ângulo tetraédrico ao ângulo entre dois vetores distintos de origem em O e extremidade em vértices do tetraedro. Para calcular tal ângulo, utilizamos as coordenadas descritas no capítulo 4.7.3, página 86

$$\begin{aligned}\cos(\theta) &= \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}|} = \frac{(\overrightarrow{A-O}) \cdot (\overrightarrow{B-O})}{|\overrightarrow{A-O}| |\overrightarrow{B-O}|} \\ &= \frac{\left(0, 0, \frac{\ell\sqrt{6}}{4}\right) \cdot \left(-\frac{\ell\sqrt{3}}{3}, 0, -\frac{\ell\sqrt{6}}{12}\right)}{\frac{\ell\sqrt{6}}{4} \frac{\ell\sqrt{6}}{4}} = -\frac{1}{3} \\ \Rightarrow \theta &= \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) \approx 109.47^\circ\end{aligned}$$

O mesmo resultado pode ser encontrado calculando o ângulo entre os demais segmentos dentro de um tetraedro regular.

4.8 Tetraedros Ortocêntricos

Na Geometria Euclidiana Plana, sabemos que todo triângulo possui um ortocentro, ponto pelo qual passam as três retas suportes de suas alturas. Essa propriedade, porém, não se estende ao tetraedro, uma vez que as alturas relativas a cada vértice não necessariamente se encontram em um mesmo ponto.

Para estudarmos este assunto, consultamos [22] e [24], que apresentam na forma de problemas algumas condições para caracterizar os tetraedros ortocêntricos. Apresentamos aqui três dessas condições, enunciadas nos Teoremas 4.1 (pg. 97), 4.2 (pg. 98) e 4.3 (pg. 101).

Definição 4.1: Um tetraedro se diz *ortocêntrico* quando as retas suporte de suas alturas se encontram em um ponto, denominado *ortocentro* tetraedro.

Exemplo 4.1: Todo tetraedro trirretângulo é ortocêntrico. O seu ortocentro é o vértice do

tetraedro ao qual concorrem as três arestas, que são mutuamente perpendiculares.

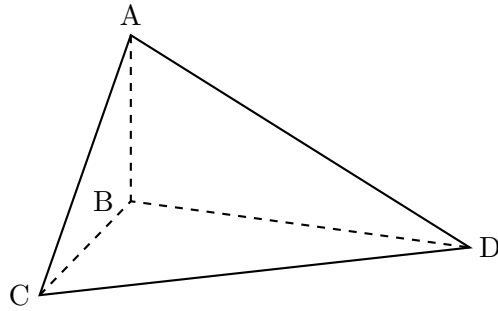


Figura 4.11: Ilustração do Exemplo 4.1.

No exemplo ilustrado acima, o ortocentro se encontra no vértice B.

Exemplo 4.2: Todo tetraedro regular é ortocêntrico.

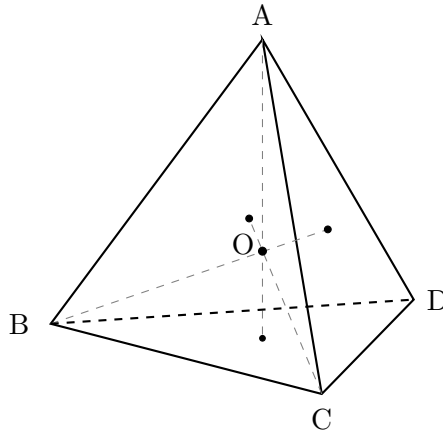


Figura 4.12: Ilustração do Exemplo 4.2.

Acima, vemos que o ponto O é o encontro das alturas do tetraedro regular

Vejamos alguns resultados preliminares.

Lema 4.4 (Identidade de Euler): Em um tetraedro ABCD qualquer, se tem que

$$\vec{BA} \cdot \vec{DC} + \vec{AC} \cdot \vec{DB} + \vec{CB} \cdot \vec{DA} = 0$$

Demonstração:

Uma forma de se demonstrar essa identidade é

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{DA} = \\ \Rightarrow & (A - B) \cdot (C - D) + (C - A) \cdot (B - D) + (B - C) \cdot (A - D) = \\ \Rightarrow & A \cdot C - A \cdot D - B \cdot C + B \cdot D + C \cdot B - C \cdot D - A \cdot B + A \cdot D + B \cdot A - B \cdot D - C \cdot A + C \cdot D = \end{aligned}$$

Lembrando que vale a comutatividade no produto escalar, vemos que o resultado

$$\begin{aligned} & (A \cdot C - C \cdot A) + (C \cdot D - C \cdot D) + (A \cdot D - A \cdot D) + (B \cdot A - A \cdot B) + \\ & (B \cdot D - B \cdot D) + (C \cdot B - B \cdot C) = 0 \end{aligned}$$

Seja agora ABCD um tetraedro, e suponhamos que $AB \perp CD$ e $AC \perp BD$. Assim, $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{DC} = 0$ e $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$. Da identidade acima, vem que $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{DA} = 0$, de modo que $AD \perp BC$. \square

Lema 4.5: Em um tetraedro qualquer, se são ortogonais as arestas opostas de dois pares, as arestas do terceiro par também serão ortogonais.

Demonstração: Seja ABCD um tetraedro, e suponhamos que $AB \perp CD$ e $AC \perp BD$. Assim $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{DC} = 0$ e $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$. Da identidade acima, vem que $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{DA} = 0$, de modo que $AD \perp BC$. \square

Lema 4.6: Dado um tetraedro ABCD tal que $AB \perp CD$, a altura AH_A relativa ao vértice A tem pé H_A na altura do triângulo BCD, relativa ao vértice B.

Demonstração: Se $H_A = B$, não há nada à demonstrar, uma vez que neste caso H_A já está na altura de BCD relativa a B. Suponhamos então $H_A \neq B$. Seja N o ponto em que \overleftrightarrow{CD} encontra $\overleftrightarrow{BH_A}$. Queremos provar que $\overleftrightarrow{BN} \perp \overleftrightarrow{CD}$.

Por hipótese, temos que $AB \perp CD$ e, pela construção, que $AH_A \perp CD$. Então

$$\overrightarrow{BH_A} \cdot \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AH_A}) \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AH_A} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 + 0 = 0$$

Como $\overrightarrow{BN} \parallel \overrightarrow{BH_A}$ segue que $\overleftrightarrow{BN} \perp \overleftrightarrow{CD}$. Veja Figura 4.13

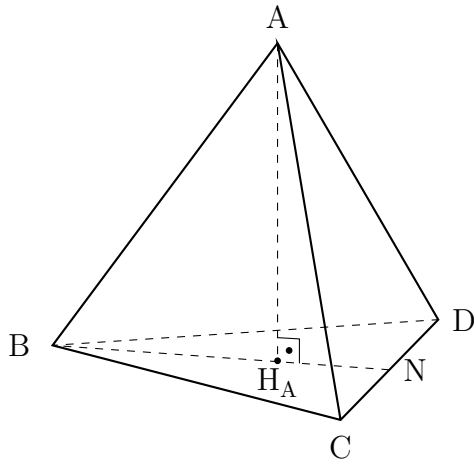


Figura 4.13: Representação do Lema 4.6

Lema 4.7: Seja ABCD um tetraedro tal que $AB \perp CD$. Seja $N \in \overleftrightarrow{CD}$ o pé da altura do triângulo BCD relativa ao vértice B. Então N também é pé da altura relativa ao vértice A do triângulo ACD.

Demonstração: Considere o plano $[ABN]$. Temos, por hipótese, que $CD \perp AB$ e $\overleftrightarrow{CD} \perp BN$, por BN ser altura do triângulo BCD. Logo $\overleftrightarrow{CD} \perp [ABN]$, que implica $\overleftrightarrow{CD} \perp AN$. Assim, \overleftrightarrow{AN} é a altura de ACD relativa ao vértice A. Veja Figura 4.14

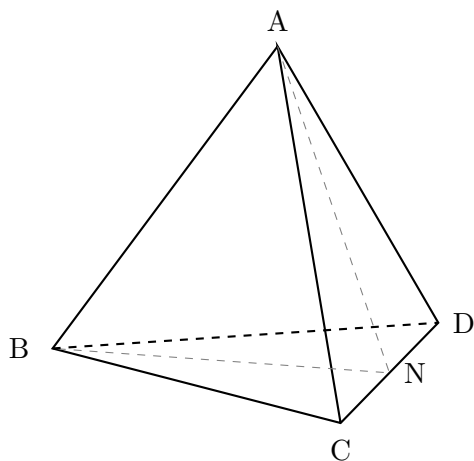


Figura 4.14: Representação do Lema 4.7.

Lema 4.8: Seja $ABCD$ um tetraedro tal que $AB \perp CD$. Sejam AH_A e BH_B suas alturas relativas aos vértices A e B , respectivamente, sendo H_A e H_B seus pés. Então $\overleftrightarrow{AH_A}$ e $\overleftrightarrow{BH_B}$ se encontram em um ponto H_{AB} .

Demonstração:

Seja $N \in \overleftrightarrow{CD}$ o pé da altura de BCD relativa a B . Sabemos do Lema 4.7, pg. 92, que $H_A \in \overleftrightarrow{BN}$. Do Lema 4.7, pg. 93, sabemos que \overleftrightarrow{AN} é a altura de ACD relativa a A . Como $AB \perp CD$ é o mesmo que $BA \perp CD$, aplicando novamente o Lema 4.6, temos que $H_B \in \overleftrightarrow{AN}$. Observe agora que $\overleftrightarrow{AH_A}$ e $\overleftrightarrow{BH_B}$ são duas retas do plano $[ABN]$ não paralelas. Logo, existe $H_{AB} \in \overleftrightarrow{AH_A} \cap \overleftrightarrow{BH_B}$. Veja Figura 4.15

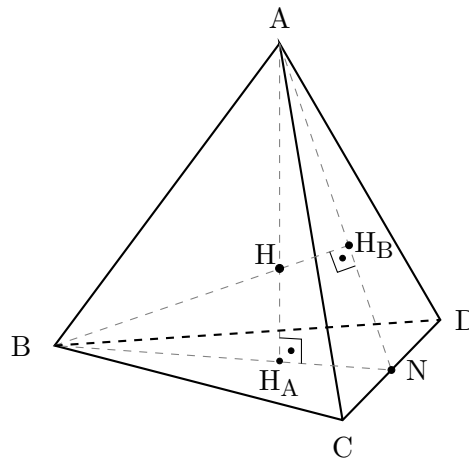


Figura 4.15: Representação do Lema 4.8.

Lema 4.9: Seja $ABCD$ um tetraedro tal que $AB \perp CD$ e $AD \perp BC$. Seja H_A o pé da altura relativa a A . Então H_A é o ortocentro de BCD .

Demonstração: Já vimos que H_A está na altura \overleftrightarrow{BN} de BCD (Lema 4.6, pg. 92), usando que $AB \perp CD$. Aplicando o mesmo Lema, mas agora com a hipótese $AD \perp BC$, vemos que H_A está na altura de BCD relativa à D . Portanto, H_A está em duas alturas de BCD , sendo assim seu ortocentro.

Proposição 4.1: Se em um tetraedro são ortogonais dois pares de arestas opostas, então o tetraedro é ortocêntrico.

Demonstração: Seja $ABCD$ um tetraedro tal que $AB \perp CD$ e $AC \perp BD$. Pelo Lema 4.5, pg. 92, temos também que $AD \perp BC$.

Sejam H_A , H_B , H_C e H_D os pés das alturas relativas aos vértices A, B, C e D, respectivamente. Observando que o resultado do Lema 4.8, pg. 94, não depende de vértices particulares, temos

$$(i) \quad AB \perp CD \Rightarrow \overleftrightarrow{AH_A} \cap \overleftrightarrow{BH_B} = H_{AB}$$

$$(ii) \quad AC \perp BD \Rightarrow \overleftrightarrow{AH_A} \cap \overleftrightarrow{BH_C} = H_{AC}$$

$$(iii) \quad AD \perp BC \Rightarrow \overleftrightarrow{AH_A} \cap \overleftrightarrow{BH_D} = H_{AD}$$

$$(iv) \quad DB \perp CA \Rightarrow \overleftrightarrow{AH_D} \cap \overleftrightarrow{BH_B} = H_{DB}$$

Observamos que a hipótese (iv) é a mesma de (ii), apenas foi considerada em outra ordem.

Notemos agora que $\overleftrightarrow{DH_D}$ intersecta o plano $[ABH_AH_B]$ nos pontos H_{AD} e H_{BD} , logo $H_{AD} = H_{BD}$. Isso implica que

$$\overleftrightarrow{AH_A} \cap \overleftrightarrow{BH_B} \cap \overleftrightarrow{DH_D} = H_{ABD}$$

Da mesma forma, provamos que

$$\overleftrightarrow{AH_A} \cap \overleftrightarrow{BH_B} \cap \overleftrightarrow{CH_C} = H_{ABC}$$

Como H_{ABC} e H_{ABD} estão em $\overleftrightarrow{AH_A} \cap \overleftrightarrow{BH_B}$, então $H_{ABC} = H_{ABD}$. Segue que as quatro alturas do tetraedro se encontram em um único ponto, e ele é ortocêntrico.

Lema 4.10: Seja ABCD um tetraedro e sejam H_A e H_B is pés das alturas relativas a A e B,

respectivamente. Se $\overleftrightarrow{AH_A}$ e $\overleftrightarrow{BH_B}$ se encontram, então $AB \perp CD$.

Demonstração: Se $H \in \overleftrightarrow{AB}$, então H_A está em \overleftrightarrow{AB} , e $AB \perp [BCD]$. Portanto, $AB \perp CD$. Suponhamos que $H \notin \overleftrightarrow{AB}$, de forma que A, B e H determinam um plano $[ABH]$, ao qual pertencem H_A e H_B .

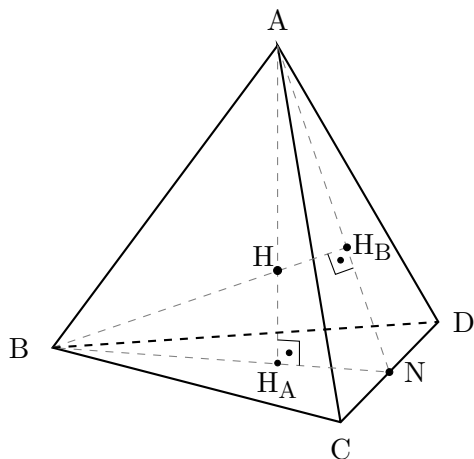


Figura 4.16: Representação do Lema 4.10.

Como $AH_A \perp [BCD]$ vem $CD \perp AH_A$, e como $BH_B \perp [ACD]$ vem $CD \perp BH_B$, como vemos na Figura 4.16. Assim, CD é ortogonal a duas direções diferentes de $[ABH]$, de modo que $CD \perp [ABH]$. Segue que $CD \perp AB$.

Lema 4.11: Se em um tetraedro três alturas se encontram em um mesmo ponto, então duas arestas opostas quaisquer são ortogonais.

Demonstração: Seja $ABCD$ um tetraedro tal que

$$\overleftrightarrow{AH_A} \cap \overleftrightarrow{BH_B} \cap \overleftrightarrow{CH_C} = H$$

tal que H_A , H_B e H_C são os pés das alturas relativas a A , B e C , respectivamente.

Em virtude do Lema 4.10, pg. 95, temos

$$\overleftrightarrow{AH_A} \cap \overleftrightarrow{BH_B} = H \Rightarrow AB \perp CD$$

e

$$\overleftrightarrow{AH_A} \cap \overleftrightarrow{CH_C} = H \Rightarrow AC \perp BD$$

Do Lema 3.2, pg. 92, vem que $AD \perp BC$, e terminamos. □

Proposição 4.2: Em todo tetraedro ortocêntrico, duas arestas opostas quaisquer são ortogonais.

Demonstração: Segue do Lema 4.11.

Teorema 4.1: Um tetraedro é ortocêntrico se, e somente se, duas arestas opostas quaisquer são ortogonais.

Demonstração: Segue das Proposições 4.1 e 4.2, pg. 94 e pg. 97.

Prosseguimos nossas investigações observando com maior cuidado o Lema 4.9, pg. 94. Juntamente com o Teorema acima, o lema nos diz que em um tetraedro ortocêntrico os pés das alturas são ortocentros das suas respectivas faces. Vejamos se vale a recíproca.

Lema 4.12: Seja ABCD um tetraedro, e suponhamos que o pé H_A da altura relativa a A esteja na altura de BCD relativa a B. Então $AB \perp CD$.

Demonstração: Seja \overleftrightarrow{BN} a altura relativa de BCD relativa a B, com $N \in \overleftrightarrow{CD}$. Por hipótese $H_A \in \overleftrightarrow{BN}$, como vemos na Figura 4.17

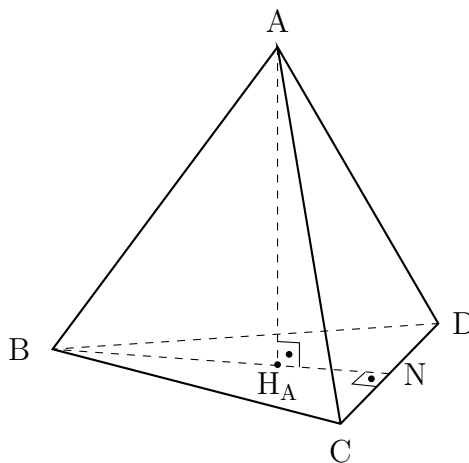


Figura 4.17: Representação do Lema 4.12

Se $H_A = B$ então $AB \perp [BCD] \Rightarrow AB \perp CD$. Suponhamos $H_A \neq B$, de forma que $\beta = [ABH_A]$ é um plano. Como $CD \perp \overleftrightarrow{BN}$ e $CD \perp AH_A$, vemos que CD é ortogonal a duas direções diferentes desse plano e, assim, $CD \perp \beta$. Como $AB \subset \beta$, vem que $AB \perp CD$.

Proposição 4.3: Se em um tetraedro existir um altura cujo o pé é o ortocentro da face, então duas arestas opostas quaisquer são ortogonais.

Demonstração: Seja ABCD um tetraedro, e suponhamos que o pé H_A da altura relativa a A seja o ortocentro de BCD.

Como H_A está na altura de BCD relativa a B, então $AB \perp CD$, pelo Lema 34.9 acima.

Como H_A está na altura de BCD relativa a C, então o mesmo Lema diz que $AC \perp BD$.

Como H_A está na altura de BCD relativa a D, novamente o Lema 4.12 nos garante que $AD \perp BC$.

Portanto, duas arestas opostas quaisquer são ortogonais.

Resumimos estes resultados abaixo.

Teorema 4.2: Em um tetraedro ortocêntrico, os pés das alturas são ortocentros de suas respectivas faces. Por outro lado, se em um tetraedro o pé de uma altura é ortocentro da face correspondente, então o tetraedro é ortocêntrico.

Vejamos agora outra condição para que um tetraedro seja ortocêntrico. Começamos com

Proposição 4.4: Se ABCD é um tetraedro ortocêntrico, então

$$AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$$

isto é, a soma dos quadrados de duas arestas opostas quaisquer é constante.

Demonstração: Já sabemos do Teorema 4.1, pg. 97, que duas arestas opostas quaisquer são ortogonais. Assim, temos

$$AB \perp CD \Rightarrow \vec{AB} \cdot \vec{CD} = 0$$

$$AC \perp BD \Rightarrow \vec{AC} \cdot \vec{BD} = 0$$

$$AD \perp BC \Rightarrow \vec{AD} \cdot \vec{BC} = 0$$

Notemos que

$$|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}|^2 = |\overrightarrow{AB}|^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + |\overrightarrow{CD}|^2 = |\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{CD}|^2 = AB^2 + CD^2$$

e

$$|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}|^2 = |\overrightarrow{AD}|^2 + 2\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} + |\overrightarrow{BC}|^2 = |\overrightarrow{AD}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 = AD^2 + BC^2$$

Por outro lado,

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = (B - A) + (D - C) = (D - A) + (B - C) = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$$

do que segue

$$|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}|^2 = |\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}|^2 \Rightarrow AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$$

Agora calculamos

$$|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD}|^2 = |\overrightarrow{BA}|^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CD} + |\overrightarrow{CD}|^2 = |\overrightarrow{BA}|^2 + |\overrightarrow{CD}|^2 = BA^2 + CD^2$$

e

$$|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BD}|^2 = |\overrightarrow{CA}|^2 + 2\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BD} + |\overrightarrow{BD}|^2 = |\overrightarrow{CA}|^2 + |\overrightarrow{BD}|^2 = CA^2 + BD^2$$

Como

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD} = (A - B) + (D - C) = (A - C) + (D - B) = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BD}$$

vem

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD}| &= |\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA}| \Rightarrow |\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD}|^2 = |\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA}|^2 \\ &\Rightarrow AB^2 + CD^2 = AC^2 + BA^2 \end{aligned}$$

Com isso terminamos.

Vejamos agora a recíproca.

Proposição 4.5: Se no tetraedro ABCD se tem $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$, então o tetraedro é ortocêntrico.

Demonstração: Temos

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} \Rightarrow |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}|^2 = |\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}|^2 \\ \Rightarrow |\overrightarrow{AB}|^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + |\overrightarrow{CD}|^2 &= |\overrightarrow{AD}|^2 + 2\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} + |\overrightarrow{BC}|^2 \\ \Rightarrow AB^2 + CD^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} &= AD^2 + BC^2 + 2\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} \\ \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} &\Rightarrow \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{DC} \end{aligned}$$

Da mesma forma,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BD} \Rightarrow |\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD}|^2 = |\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BD}|^2 \\ \Rightarrow |\overrightarrow{BA}|^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CD} + |\overrightarrow{CD}|^2 &= |\overrightarrow{CA}|^2 + 2\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BD} + |\overrightarrow{BD}|^2 \\ \Rightarrow AB^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CD} + CD^2 &= AC^2 + 2\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BD} + BD^2 \\ \Rightarrow \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BD} &\Rightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{DC} \end{aligned}$$

Da identidade de Euler (Lema 4.4, pg. 91), temos

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{DA} &= 0 \\ \Rightarrow \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{DC} &= 0 \\ \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{DC} &= 0 \end{aligned}$$

Logo, $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{DA} = 0$ e $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$. Segue que $AB \perp CD$, $AC \perp BD$ e $AD \perp BC$. Portanto, ABCD tem arestas opostas ortogonais. Pelo Teorema 4.1, pg. 97, ele é ortocêntrico.

Da Proposição 4.4 e 4.5, temos

Teorema 4.3: Seja ABCD um tetraedro qualquer. Então ABCD é ortocêntrico se, e somente se,

$$AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$$

Capítulo 5

Problemas sobre objetos no espaço

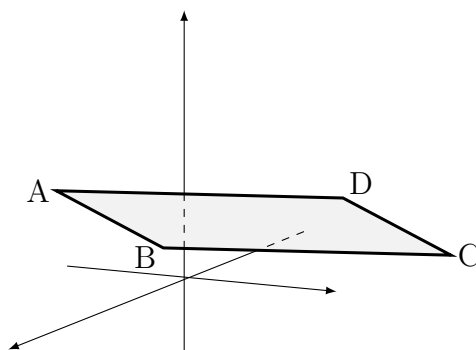
Problema 1. Dados os pontos $A = (5, -3, 4)$, $B = (4, 1, 2)$ e $C = (-3, 5, 3)$, encontrar o ponto D tal que $ABCD$ determine um paralelogramo. Calcule sua área.

No paralelogramo, temos que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$$\Rightarrow B - A = C - D$$

$$\Rightarrow D = C + A - B$$

$$D = (-3, 5, 3) + (5, -3, 4) - (4, 1, 2) = (-2, 1, 5)$$



Por fim, para calcularmos a área de $ABCD$, calculamos $a(ABCD) = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}|^2$ (eq. 2.3, pg. 42)

Temos que

$$\overrightarrow{AB} = (B - A) = (4, 1, 2) - (5, -3, 4) = (-1, 4, -2)$$

$$\overrightarrow{AD} = (D - A) = (-2, 1, 5) - (5, -3, 4) = (-7, 4, 1)$$

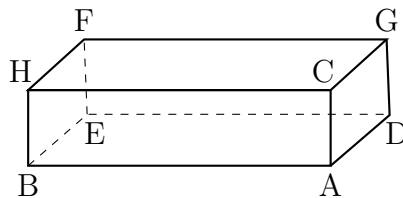
$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 4 & -2 \\ -7 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 12\vec{i} + 15\vec{j} + 24\vec{k} = (12, 15, 24)$$

$$a(ABCD) = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}|^2 = \sqrt{(12)^2 + (15)^2 + (24)^2} = \sqrt{144 + 225 + 576} = \sqrt{945} \approx 30.74$$

Alternativamente, o mesmo exercício poderia ser resolvido encontrando as equações das retas paralelas aos vetores \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{BC} pelos pontos C e A , respectivamente. A intersecção dessas retas resultaria no ponto D , tal que $ABCD$ fosse um paralelogramo.

É possível inferir que o método apresentado neste Trabalho para resolver alguns problemas de natureza geométrica requer um número menor de passos, uma vez que para se encontrar tais equações (como visto em 1.7.1 pg. 21), é necessário trabalhar com parâmetros não explícitos no enunciado do exercício.

Problema 2. Dados os pontos $A = (-12, 2, 4)$, $B = (2, -5, 2)$, $C = (-6, -7, 11)$ e $D = (-2, 2, 8)$, encontre os pontos E , F , G e H , como organizados na figura abaixo, tal que $ABEDCHFG$ é um paralelepípedo. Encontre seu volume.

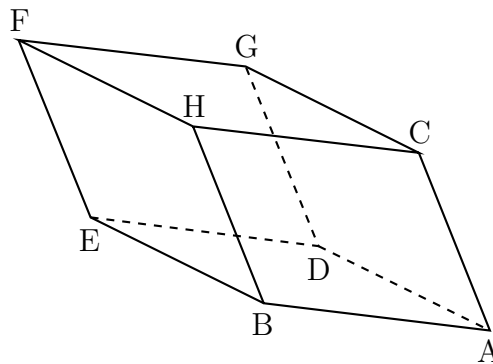


Com a representação acima, podemos facilmente interpretar as relações entre as coordenadas do paralelepípedo $ABEDCHFG$. São elas:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BE} &= \overrightarrow{AD} \Rightarrow E - B = D - A \Rightarrow E = D + B - A \\ \overrightarrow{EF} &= \overrightarrow{AC} \Rightarrow F - E = C - A \Rightarrow F = C + E - A \\ \overrightarrow{CG} &= \overrightarrow{AD} \Rightarrow G - C = D - A \Rightarrow G = D + C - A \\ \overrightarrow{CH} &= \overrightarrow{AB} \Rightarrow H - C = B - A \Rightarrow H = B + C - A\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}E &= (-2, 2, 8) + (2, -5, 2) - (-12, 2, 4) = (12, -5, 6) \\ F &= (-6, -7, 11) + (12, -5, 6) - (-12, 2, 4) = (18, -14, 13) \\ G &= (-2, 2, 8) + (-6, -7, 11) - (-12, 2, 4) = (4, -7, 15) \\ H &= (2, -5, 2) + (-6, -7, 11) - (-12, 2, 4) = (8, -14, 9)\end{aligned}$$

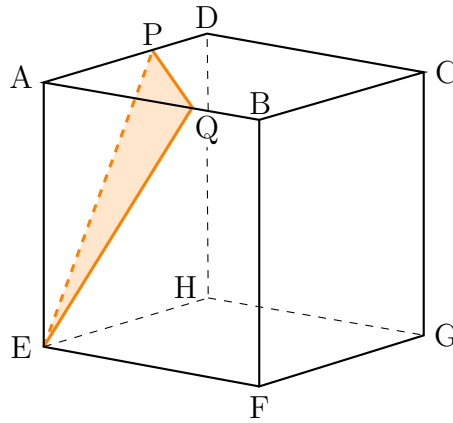


Para calcular o volume deste paralelepípedo, basta calcularmos $V = |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}]|$ (eq. 3.7, pg. 69)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= B - A = (-12, 2, 4) - (2, -5, 2) = (-14, 7, 2) \\ \overrightarrow{AC} &= C - A = (-6, -7, 11) - (2, -5, 2) = (-8, -2, 9) \\ \overrightarrow{AD} &= D - A = (-2, 2, 8) - (2, -5, 2) = (-4, 7, 6)\end{aligned}$$

$$V = \begin{vmatrix} -14 & 7 & 2 \\ -8 & -2 & 9 \\ -4 & 7 & 6 \end{vmatrix} = 1006$$

Problema 3. Considere o cubo ABCDEFGH com arestas de medida ℓ , com os vértices organizadas como na figura abaixo. Esse cubo é intersectado por um plano, determinando o triângulo EPQ, como mostra a figura a seguir.



Sabe-se que $AP = AQ = \frac{2\ell}{3}$.

- Calcule a área do triângulo EPQ.
- Determine a distância do vértice A ao plano que contém o triângulo EPQ.

Do capítulo 3.3.1, pg. 69, sabemos que $A = (\ell, 0, \ell)$ e $E = (\ell, 0, 0)$. Analisando a figura e sabendo que $AP = AQ = \frac{2\ell}{3}$, temos que

$$P = \left(\frac{\ell}{3}, 0, \ell\right) \quad Q = \left(\ell, \frac{2\ell}{3}, \ell\right)$$

a) A área EPQ é dada por $a(\text{EPQ}) = \frac{|\vec{EP} \times \vec{EQ}|^2}{2}$

$$\vec{EP} = P - E = \left(-\frac{2\ell}{3}, 0, \ell\right)$$

$$\vec{EQ} = Q - E = \left(0, \frac{2\ell}{3}, \ell\right)$$

$$\text{Temos que } \vec{EP} \times \vec{EQ} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\frac{2\ell}{3} & 0 & \ell \\ 0 & \frac{2\ell}{3} & \ell \end{bmatrix} = \left(\frac{2\ell^2}{3}\right)\vec{i} + \left(-\frac{2\ell^2}{3}\right)\vec{j} + \left(-\frac{4\ell^2}{9}\right)\vec{k} = \left(\frac{2\ell^2}{3}, -\frac{2\ell^2}{3}, -\frac{4\ell^2}{9}\right)$$

$$a(\text{EPQ}) = \frac{|\vec{\text{EP}} \times \vec{\text{EQ}}|^2}{2} = \frac{\sqrt{\frac{4\ell^4}{9} + \frac{4\ell^4}{9} + \frac{16\ell^4}{81}}}{2} = \frac{\ell^2\sqrt{88}}{2}$$

$$\Rightarrow \text{Área} = \frac{\ell^2\sqrt{22}}{9}$$

b) A distância entre o ponto A e o plano $\alpha[\text{EPQ}]$ é dada por $\text{dist}(A, \alpha) = \frac{|\text{AP} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$, onde P é um ponto qualquer tal que $P \in \alpha$, e $\vec{n} = (a, b, c)$ é um vetor normal à α .

Uma maneira de se encontrar \vec{n} é utilizando os vetores do plano já conhecidos para estabelecer sua equação geral. Assim,

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{\text{EP}} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{\text{EQ}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (-2\ell/3, 0, \ell) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (0, 2\ell/3, \ell) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{2a\ell}{3} + c\ell = 0 \\ \frac{2b\ell}{3} + c\ell = 0 \end{cases}$$

Isolando os valores de a e b, temos que $\vec{n} = \left(\frac{3c}{2}, -\frac{3c}{2}, c\right)$ é um vetor normal à α . Em particular, temos que quando $c = 2$, $\vec{n} = (3, -3, 2)$.

Como $P \in \alpha$, $\vec{\text{AP}} = \left(-\frac{2\ell}{3}, 0, 0\right)$

$$\text{dist}(A, \alpha) = \frac{|\text{AP} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{|(-2\ell/3, 0, 0) \cdot (3, -3, 2)|}{|(3, -3, 2)|} = \frac{2\ell}{\sqrt{9+9+4}}$$

$$\Rightarrow \text{dist}(A, \alpha) = \frac{\ell\sqrt{22}}{11}$$

Problema 4. Consideremos um cubo ABCDEFGH com arestas de medida ℓ . Seja X o ponto médio de EH, Y o ponto médio de AB e, Z, o de CG.

- Mostre que o plano [XYZ] passa pelo centro do cubo.
- Calcule, em função de ℓ , a área do triângulo XYZ.

a) Primeiramente, calculemos as coordenadas dos pontos X, Y e Z.

$$\begin{aligned} X &= \frac{E + H}{2} = \frac{(0, 0, \ell) + (0, \ell, \ell)}{2} = \left(0, \frac{\ell}{2}, \ell\right) \\ Y &= \frac{A + B}{2} = \frac{(0, 0, 0) + (\ell, 0, 0)}{2} = \left(\frac{\ell}{2}, 0, 0\right) \\ Z &= \frac{C + G}{2} = \frac{(\ell, \ell, 0) + (\ell, \ell, \ell)}{2} = \left(\ell, \ell, \frac{\ell}{2}\right) \end{aligned}$$

Se o plano $\beta : [XYZ]$ passa pelo centro O do cubo, O, X, Y e Z são coplanares. Assim, utilizando dos resultados demonstrados no capítulo 2.4, na página 43, temos que

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{\ell}{2} & \ell & 1 \\ \frac{\ell}{2} & 0 & 0 & 1 \\ \ell & \ell & \frac{\ell}{2} & 1 \\ \frac{\ell}{2} & \frac{\ell}{2} & \frac{\ell}{2} & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \text{O, X, Y e Z são coplanares}$$

Como este determinante resulta em um vetor nulo, o centro O está contido no plano β .

b) Temos que a área de β pode ser dada por $a(\beta) = \frac{|\overrightarrow{XY} \times \overrightarrow{XZ}|^2}{2}$. Para isso, temos que

$$\begin{aligned} \overrightarrow{XY} &= Y - X = \left(\frac{\ell}{2}, 0, 0\right) - \left(0, \frac{\ell}{2}, \ell\right) = \left(\frac{\ell}{2}, -\frac{\ell}{2}, -\ell\right) \\ \overrightarrow{XZ} &= Z - X = \left(\ell, \ell, \frac{\ell}{2}\right) - \left(0, \frac{\ell}{2}, \ell\right) = \left(\ell, \frac{\ell}{2}, -\frac{\ell}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\text{Como } \overrightarrow{XY} \times \overrightarrow{XZ} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\ell}{2} & -\frac{\ell}{2} & -\ell \\ \ell & \frac{\ell}{2} & -\frac{\ell}{2} \end{vmatrix} = \left(\frac{3\ell^2}{4}\right)\vec{i} + \left(-\frac{3\ell^2}{4}\right)\vec{j} + \left(\frac{3\ell^2}{4}\right)\vec{k} = \left(\frac{3\ell^2}{4}, -\frac{3\ell^2}{4}, \frac{3\ell^2}{4}\right)$$

$$a(\beta) = \frac{|\overrightarrow{XY} \times \overrightarrow{XZ}|^2}{2} = \frac{\sqrt{\frac{9\ell^4}{16} + \frac{9\ell^4}{16} + \frac{9\ell^4}{16}}}{2} = \frac{3\sqrt{3}\ell^2}{8}$$

Problema 5. Calcule:

a) As medidas dos ângulos formados por segmentos que unem o centro de um cubo com dois vértices.

b) As medidas dos ângulos formados por uma diagonal do cubo e as arestas que concorrem no mesmo vértice.

a) Sejam A e E vértices tal que AOE seja formado por segmentos que unem o centro O aos vértices do cubo. Temos que

$$\begin{aligned}\vec{OA} &= A - O = \left(-\frac{\ell}{2}, \frac{\ell}{2}, \frac{\ell}{2}\right) \\ \vec{OE} &= E - O = \left(-\frac{\ell}{2}, -\frac{\ell}{2}, \frac{\ell}{2}\right)\end{aligned}$$

Como uma consequência da equação 1.5, pg. 17, temos que $\cos(\theta) = \frac{\langle \vec{OA}, \vec{OE} \rangle}{|\vec{OA}| \cdot |\vec{OE}|}$, onde θ é o ângulo formado pelo vetores \vec{OA} e \vec{OE} .

$$\Rightarrow \cos(\theta) = \frac{\frac{\ell^2}{4} - \frac{\ell^2}{4} + \frac{\ell^2}{4}}{\sqrt{\frac{\ell^2}{4} + \frac{\ell^2}{4} + \frac{\ell^2}{4}} \cdot \sqrt{\frac{\ell^2}{4} + \frac{\ell^2}{4} + \frac{\ell^2}{4}}} = \frac{\frac{\ell^2}{4}}{\frac{\ell^2 \sqrt{3}}{4}} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \theta = 70.53^\circ$$

b) Sejam A e B os vértices tal que $\angle OAB$ seja o buscado pelo exercício. Temos

$$\begin{aligned}\vec{AO} &= \left(\frac{\ell}{2}, \frac{\ell}{2}, \frac{\ell}{2}\right) \\ \vec{AB} &= (\ell, 0, 0)\end{aligned}$$

Seja $\phi = \angle OAB$

$$\cos \phi = \frac{\frac{\ell^2}{2}}{\sqrt{3} \ell^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\phi = 54.74^\circ$$

Referências e Bibliografia

- [1] Baldin, Y. Y e Furuya, Y. K. S. *Geometria Analítica para todos e atividades com Octave e GeoGebra*. Editora EdUFScar, Edição 01, São Carlos, 2011.
- [2] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. (3^o e 4^o ciclos do ensino fundamental)*. Brasília: MEC, 1998.
- [3] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio)*. Brasília: MEC, 2000.
- [4] Boulos, P. e Camargo, I. *Geometria Analítica-um tratamento vetorial* Prentice Hall, 2^a Edição, 2007.
- [5] Delgado, J. *Geometria Analítica Volume II: Vetores e Coordenadas Espaciais*, 2014.
- [6] Dolce, O. e Iezzi, G. *Álgebra II*. São Paulo, Editora Moderna, 1977.
- [7] Figueiredo, J. O. *Usando coordenadas baricêntricas para estudar a Geometria do Triângulo*. Niterói, RJ. Dezembro, 2008.
- [8] Giovani, R. J. et al *A conquista da Matemática, Teoria e Aplicação*. Volumes 5, 6, 7 e 8. São Paulo: FTD, 1992.
- [9] Heath, T. L. *A Manual of Greek Mathematics*. New York, Dover Publications, 1963.
- [10] Hvidsten, M. *Geometry*. Boston, McGrowtill, 2006.
- [11] Iezzi, G. et al. *Matemática 2^o grau*. Volumes 1, 2 e 3: Ensino Médio. São Paulo, 1990.
- [12] Iezzi, G. et al. *Matemática: Ciência e aplicações*. Coleção Ensino Médio, Volumes 1, 2 e 3. São Paulo: Saraiva, 2010.

- [13] Imenes, L. I. e Lellis, M. *Matemática*. Volumes 6, 7, 8 e 9. São Paulo: Moderna, 2009.
- [14] Lelong-Ferrand, J. e Arnaudiès, J-M. *Cours de Mathématiques: 3. géométrie et cinématique*. Paris, Dunod, 1997.
- [15] Lima, R. B. *Análise de Livros de Matemática para o Ensino Médio*. Revista do Professor de Matemática, Número 46, Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática, 2001.
- [16] Lima, R. B. *Elementos da Álgebra Vetorial*. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1973.
- [17] Matrix Calculator. Disponível em: <http://matrixcalc.org/pt/>. Consultado em 10 de maio de 2018.
- [18] Moise, E. E e Downs, F. L. *Geometria Moderna*. São Paulo, Editora Edgard Blucher Ltda, 1971.
- [19] Morgado, A. C. *Coordenadas para os centros do triângulo*. Revista do Professor de Matemática, Número 43, Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática, 2000.
- [20] Paterlini, R. R. *Geometria Elementar, gênese e desenvolvimento*. São Carlos: Departamento de Matemática, 2010.
- [21] Pedro, J. C. *Conexões da Geometria Analítica com a Geometria Plana de Posição*. Trabalho de Conclusão de Curso. São Carlos, UFSCar, 2017.
- [22] Prasolov, V. V. e Tikhomirov, V. M., *Geometry*. Providence, American Mathematical Society, 2001.
- [23] Rezende, E. Q. F. e Queiroz, M. L B. de. *Geometria euclidiana plana e construções geométricas*. Série Livro Texto. São Paulo: Editora da Unicamp, 2008.
- [24] Rosado, F. B. *Geometría del tetraedro*. Revista Escolar de la Olimpiáda Iberoamericana de Matemática. OEI, 2008.

- [25] Souto, A. M. S. *A reta de Euler e a circunferência dos nove pontos: um olhar algébrico*. 2013. 72 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2013.
- [26] Tauvel, P. *Géométrie*. 2a. Edição. Paris, Dunod, 2005.
- [27] Tondeur, P. *Transformations in Plane Geometry*. Houston, Publish or Perish, 1993.
- [28] Truffault, B. *Cours et Exercices de Géométrie Élémentaire*. Paris, Ellipses, 2001.
- [29] Vincze, C. e Kozma, L. *College Geometry*, 2014. Disponível em: math.unideb.hu/media/nagy-abris/Collegegeom-main-1.pdf.
- [30] Wagner E. *Sobre o ensino de geometria analítica*. Revista do Professor de Matemática, Número 41, Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática, 1999.
- [31] Wikipedia, *Barycentric Coordinate System*. Disponível em: en.wikipedia.org/wiki/Barycentric_coordinate_system. Consultado em 23/05/2018.
- [32] Wikipedia, *Circumscribed Circle*. Disponível em: en.wikipedia.org/wiki/circumscribed_circle. Consultado em 23/05/2018.