Problemas e Soluções da OBM - Olimpíada Brasileira de Matemática

Adrielli Eduarda Canova

adriellicanova@yahoo.com

Sob orientação do Prof. Paulo A S Caetano - tutor do PET Matemática

Universidade Federal de São Carlos, SP, Brasil

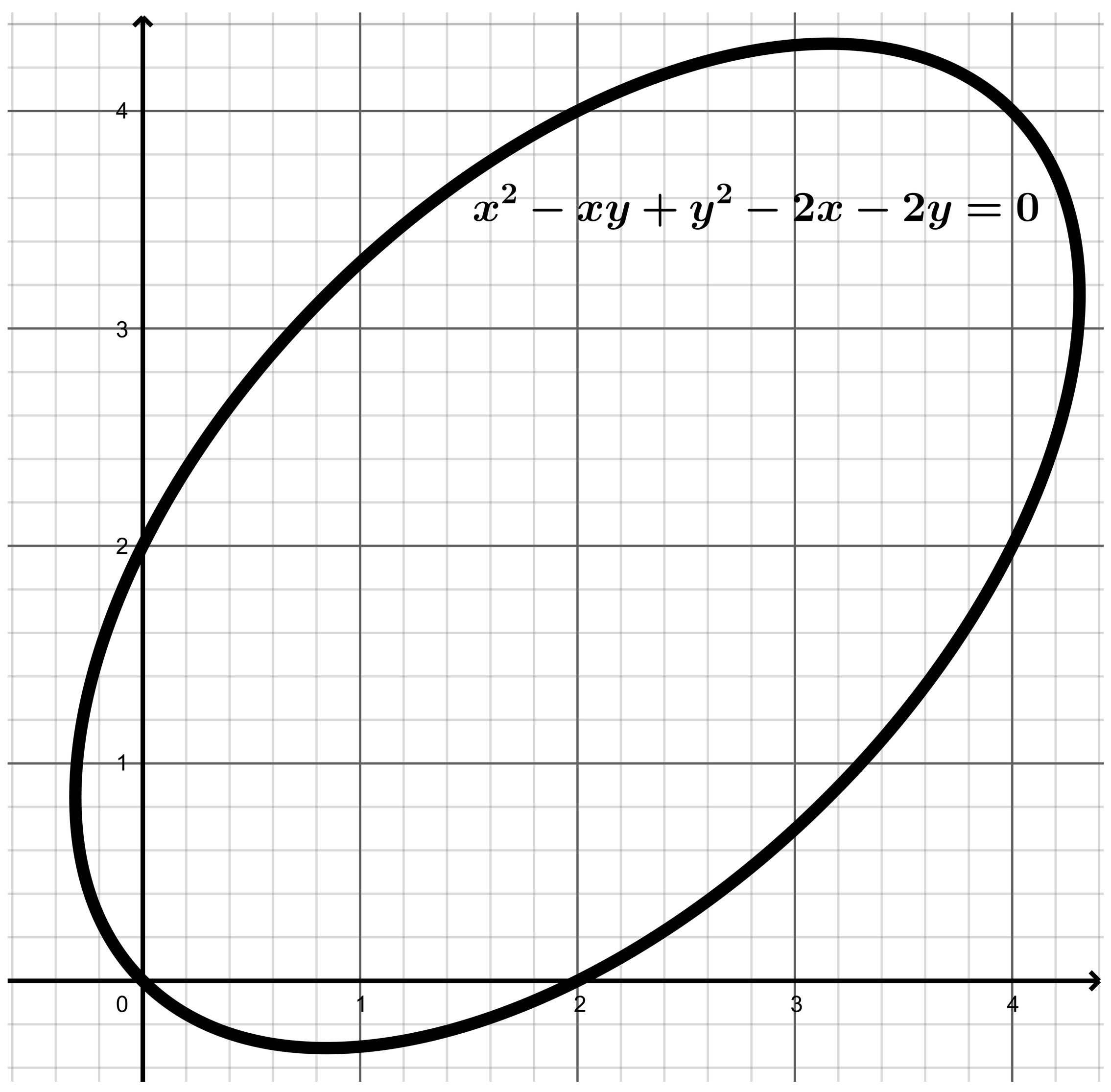
OBM - 2007 - Segunda Fase - Ensino Médio - Problema 1

Ache todos os pares (x, y) de inteiros positivos tais que $2(x + y) + xy = x^2 + y^2$.

Antes de buscarmos uma solução algébrica para o problema, observamos que a equação em questão pode ser reescrita na forma

$$x^2 - xy + y^2 - 2x - 2y = 0 \qquad (1)$$

sendo, portanto, a equação de uma cônica no plano. Esta cônica é a elipse da figura abaixo,



Assim, podemos repensar o problema como: "quais os pares ordenados (x, y) sobre a elipse, tais que x e y são números inteiros positivos?"
Pela figura, vemos que as possíveis soluções são

$$(0,0)\ ,\ (2,0)\ ,\ (0,2)\ ,\ (2,4)\ ,\ (4,4)\ ,\ (4,2)$$

Vamos provar que de fato esses pontos são as únicas soluções inteiras positivas da equação em questão.

Solução 1. Multiplique (1) por 2, depois some 8 a ambos os lados para completar quadrados e obter

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 + (x-y)^2 = 8 \qquad (2)$$

Só existem três maneiras diferentes de somar três quadrados e obter 8 como resultado, e cada uma dessas maneiras fornece duas soluções distintas para o problema:

$$4+4+0=8 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}(0-2)^2+(0-2)^2+(0-0)^2 \Rightarrow (x,y)=(0,0)\\ (4-2)^2+(4-2)^2+(4-4)^2 \Rightarrow (x,y)=(4,4)\end{array}\right.$$

$$4+0+4=8 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}(0-2)^2+(2-2)^2+(0-2)^2 \Rightarrow (x,y)=(0,2)\\ (4-2)^2+(2-2)^2+(4-2)^2 \Rightarrow (x,y)=(4,2)\end{array}\right.$$

$$0+4+4=8 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}(2-2)^2+(0-2)^2+(2-0)^2 \Rightarrow (x,y)=(2,0)\\ (2-2)^2+(4-2)^2+(2-4)^2 \Rightarrow (x,y)=(2,4)\end{array}\right.$$

Solução 2. Podemos escrever a equação dada como uma equação do segundo grau em x como abaixo:

$$x^2 - (y+2)x + (y^2 - 2y) = 0 \qquad (3)$$

O discriminante desta equação é

$$\Delta = (y+2)^2 - 4(y^2 - 2y) = -3y^2 + 12y + 4$$

Para esse discriminante ser positivo devemos ter

$$2 - \frac{4\sqrt{3}}{3} \leqslant y \leqslant 2 + \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

Assim, as possibilidades para y inteiro positivo são $y = 0, y = 1, y = 2, y = 3$ ou $y = 4$.

- Se $y = 1$ ou $y = 3$ então $\Delta = 13$ e x não será inteiro.
- Se $y = 0$ então $\Delta = 4$ e $x = 0$ ou $x = 4$. Logo temos as soluções $(0, 0)$ e $(4, 0)$.
- Se $y = 2$ então $\Delta = 16$ e $x = 0$ ou $= 4$. Logo temos as soluções $(0, 2)$ e $(4, 2)$.
- Se $y = 4$ então $\Delta = 4$ e $x = 2$ ou 4. Logo temos as soluções $(2, 4)$ e $(4, 4)$.