Navegando pela Terra

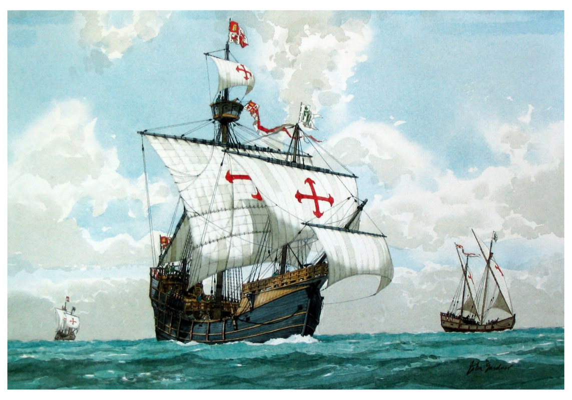
Caio Henrique Silva de Souza & Gabriel Longatto Clemente & Gabriel Silva Lucidio

Resumo

Neste trabalho tratamos sobre a medição de distância entre duas localidades na Terra a partir de suas respectivas latitudes e longitudes. Iniciamos esta discussão com uma breve motivação histórica e, depois disso, apresentamos duas fórmulas clássicas para resolver o problema desejado. Estas fórmulas, além de estarem intimamente relacionadas, passam pela compreensão de algumas noções de Trigonometria Esférica.

1 Um pouco de História

O navegador genovês *Cristóvão Colombo* (1451 – 1506) se aventurou, no final do século XV, em busca das terras indianas. Em sua soberba, Colombo se recusou a aceitar os cálculos já conhecidos de *Eratóstenes* (276 – 194) para o raio da Terra. Utilizando as informações sobre latitude obtidas por Eratóstenes, a distância entre a cidade de que partiria a frota de Colombo e a cidade de destino seria de aproximadamente 13642 quilômetros. Para aquela época, tal viagem era impossível dada a tecnologia disponível. Colombo, porém, utilizando estudos de um geógrafo árabe chamado *Alfraganus* (800 – 870), em conjunto com alguns cálculos próprios, fez equivocadas conversões de graus de latitude para milhas náuticas. Tais erros o levaram a uma viagem de 5704 quilômetros a oeste que, por sorte do destino, o conduziu às então desconhecidas terras americanas.



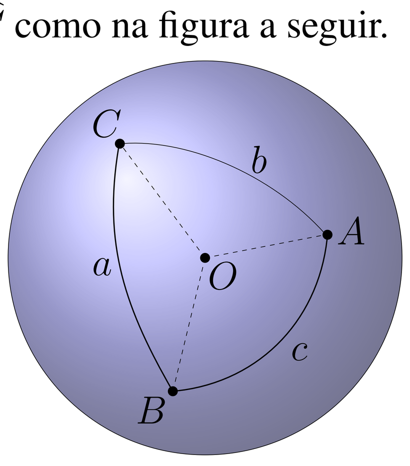
Um outro dado fundamental para a localização precisa de pontos na Terra, complementar à latitude, é a longitude. Todavia, apenas com o surgimento dos relógios no século XVII, cujos pioneiros foram *Galileu Galilei* (1564 – 1642) e *Christiaan Huygens* (1629 – 1695), foi possível calcular a longitude. Com a tecnologia moderna, nos é possível obter com boa precisão a latitude e longitude de pontos na Terra. Assim sendo, a partir destas informações, iremos aqui buscar maneiras de calcular a distância entre pontos do globo terrestre.

2 Algumas noções

- **Circunferência máxima:** é a interseção de uma esfera com um plano que contém seu centro.
- **Ângulo esférico:** é o ângulo formado por duas circunferências máximas em uma esfera, cuja medida é a mesma do ângulo formado pelas retas tangentes a esses arcos nos pontos de interseção.
- **Triângulo esférico:** é a superfície limitada por três arcos de circunferências máximas distintas em uma esfera, contida em algum hemisfério, sendo estes arcos menores do que uma circunferência máxima.
- **Latitude:** é o ângulo formado pela reta que liga um dado ponto de uma esfera a seu centro com o Plano da Linha do Equador. Todos os pontos localizados na Linha do Equador possuem latitude igual a 0°. Pontos situados ao norte da Linha do Equador têm latitudes maiores do que 0°, variando até 90°, que é a latitude do Polo Norte. Da mesma forma, variam as latitudes ao sul da Linha do Equador, de 0° a -90°, que é a latitude do Polo Sul.
- **Longitude:** é o ângulo formado pela reta que liga um dado ponto de uma esfera a seu centro com o Plano do Meridiano de Greenwich. Todos os pontos do Meridiano de Greenwich possuem longitude igual a 0°. Pontos situados ao leste do Meridiano de Greenwich têm latitudes maiores do que 0°, variando até 180°. Da mesma forma, variam as latitudes a oeste do Meridiano de Greenwich, de 0° a -180°.

3 Lei Esférica dos Cossenos

Consideramos uma esfera de centro O e raio unitário e, sobre ela, um triângulo esférico $\triangle ABC$ com lados a, b e c e com ângulos internos $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$ como na figura a seguir.



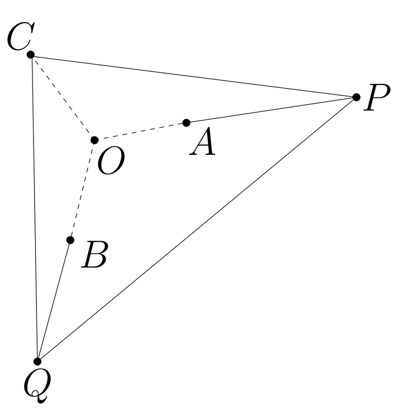
Então vale a *Lei Esférica dos Cossenos*:

$$cos(a) = cos(b)cos(c) + sen(b)sen(c)cos(\widehat{A})$$

$$cos(b) = cos(a)cos(c) + sen(a)sen(c)cos(\widehat{B})$$

$$cos(c) = cos(a)cos(b) + sen(a)sen(b)cos(\widehat{C}).$$

Demonstração. Observamos que, como a esfera tem raio unitário, um arco equivale ao seu ângulo central de abertura e, portanto, $a = C\widehat{O}B, b = A\widehat{O}C$ e $c = A\widehat{O}B$. O ângulo interno $\widehat{C}$ é formado pelas retas tangentes aos arcos $\overset{\frown}{CA}$ e $\overset{\frown}{CB}$ passando por C. Considerando as retas OA e OB, temos que estas intersectam as tangentes que passam por C, respectivamente, em P e Q, formando o tetraedro da figura a seguir.



Como CP e CQ são tangentes à esfera, $CO \perp CP$ e $CO \perp CQ$. Portanto, os triângulos $\triangle OCP$ e $\triangle OCQ$ são retângulos em C. Das relações trigonométricas clássicas: $cos(b) = \frac{\overline{CO}}{\overline{PO}}$, $sen(b) = \frac{\overline{CP}}{\overline{PO}}$, $cos(a) = \frac{\overline{CO}}{\overline{QO}}$ e $sen(a) = \frac{\overline{CQ}}{\overline{QO}}$. Ainda, do *Teorema de Pitágoras*: $\overline{PO}^2 = \overline{CO}^2 + \overline{CP}^2$ e $\overline{QO}^2 = \overline{CO}^2 + \overline{CQ}^2$. Logo, $2\overline{CO}^2 = (\overline{PO}^2 - \overline{CP}^2) + (\overline{QO}^2 - \overline{CQ}^2)$. Aplicando a *Lei Plana dos Cossenos* nos triângulos $\triangle POQ$ e $\triangle PCQ$, obtemos:

$$\begin{aligned} \overline{PQ}^2 &= \overline{PO}^2 + \overline{QO}^2 - 2\overline{PO} \cdot \overline{QO} \cdot cos(c), \\ \overline{PQ}^2 &= \overline{CP}^2 + \overline{CQ}^2 - 2\overline{CP} \cdot \overline{CQ} \cdot cos(\widehat{C}). \end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned} 2\overline{PO} \cdot \overline{QO} cos(c) &= (\overline{PO}^2 - \overline{CP}^2) + (\overline{QO}^2 - \overline{CQ}^2) + 2\overline{CP} \cdot \overline{CQ} \cdot cos(\widehat{C}) \\ &= 2\overline{CO}^2 + 2\overline{CP} \cdot \overline{CQ} \cdot cos(\widehat{C}). \end{aligned}$$

Logo:

$$cos(c) = \frac{\overline{CO} \cdot \overline{CO}}{\overline{PO} \cdot \overline{QO}} + \frac{\overline{CP} \cdot \overline{CQ}}{\overline{PO} \cdot \overline{QO}} \cdot cos(\widehat{C}).$$

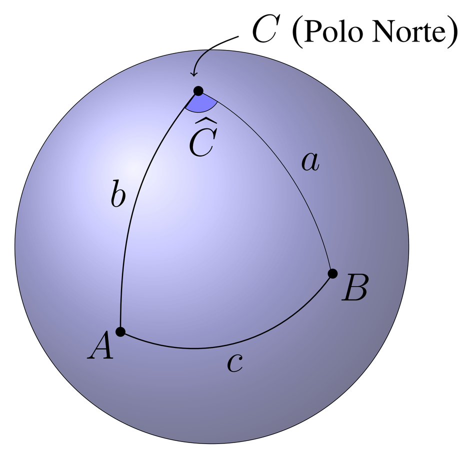
Utilizando as relações trigonométricas anteriores:

$$cos(c) = cos(a)cos(b) + sen(a)sen(b)cos(\widehat{C}).$$

De maneira análoga se obtêm as demais relações. ■

4 Primeira fórmula

Vamos calcular agora uma maneira de encontrar a distância entre dois pontos na Terra através da *Lei Esférica dos Cossenos*. Seja A um ponto com latitude $Lat1$ e longitude $Long1$, e seja B um ponto com latitude $Lat2$ e longitude $Long2$. Consideramos o ponto C como sendo o Polo Norte e olhamos para o triângulo esférico $\triangle ABC$ abaixo.



Supondo inicialmente o raio da esfera acima como sendo a unidade, temos a conveniência de corresponder diretamente ângulos e arcos. O ângulo $\widehat{C}$ é equivalente à diferença das longitudes, isto é, $\widehat{C} = Long2 - Long1$. Ainda, o lado b mede $90^\circ - Lat1$ ao passo que o lado a mede $90^\circ - Lat2$. Logo, devido à *Lei Esférica dos Cossenos*, vale a igualdade:

$$c = arccos\big(cos(a)cos(b) + sen(a)sen(b)cos(\widehat{C})\big).$$

Observamos que $cos(90^\circ - x) = sen(x)$ e $sen(90^\circ - x) = cos(x)$ para todo x real. Agora, adotando a medida correta de 6371 km para o raio da Terra, e fazendo a devida conversão de unidades, obtemos a distância D entre os pontos A e B, por uma circunferência máxima, em função das latitudes e longitudes dos pontos através da Fórmula I:

$$D = 111,17 \cdot arccos\big(sen(Lat2)sen(Lat1) + cos(Lat2)cos(Lat1)cos(Long2 - Long1)\big).$$

Utilizando a linguagem de programação Python, criamos o seguinte código para a Fórmula I:

```
def Distancia_FormulaI(Lat1, Long1, Lat2, Long2):
V = Grau_Radiano(Lat1, Long1, Lat2, Long2)
A = math.sin(V[1][0])*math.sin(V[0][0])+math.cos(V[1][0])*math.cos(V[0][0])*math.cos(V[1][1]-V[0][1])
R = math.acos(A)
G = (R*180)/pi
D = G * 111.17
return(D)
```

5 Lei dos Haversines e segunda fórmula

A forma mais utilizada da Fórmula I nos tempos da navegação no século XIX não era em termos de cosseno e arco cosseno. O haversine, que apresentamos a seguir, juntamente com o versine, que é o dobro do haversine, eram relações trigonométricas muito utilizadas nas tabelas para navegação. A Fórmula II para a distância, que exibiremos a seguir, era muito útil para os marinheiros quando estes possuíam tabelas de haversines e arco haversines que, por exemplo, apareceram já em 1805. Definimos o haversine de x, para todo x real, da seguinte forma:

$$hav(x) := sen^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - cos(x)}{2}.$$

Desse modo, $cos(x) = 1 - 2hav(x)$ para todo x real. Consequentemente, sendo $hav(a-b) = \frac{1-cos(a-b)}{2}$, temos que $cos(a)cos(b) = 1 - 2hav(a-b) - sen(a)sen(b)$. Assim, da *Lei Esférica dos Cossenos*, obtemos a igualdade:

$$hav(c) = hav(a-b) + sen(a)sen(b)hav(\widehat{C}).$$

Essa é a chamada *Lei dos Haversines*. Daí, mais uma vez fazendo a devida conversão de unidades, obtemos a distância D entre os pontos A e B, por uma circunferência máxima, em função das latitudes e longitudes dos pontos pela Fórmula II:

$$D = 111,17 \cdot archav\big(hav(Lat2 - Lat1) + cos(Lat1)cos(Lat2)hav(Long2 - Long1)\big).$$

Utilizando a linguagem de programação Python, e notando que $archav(x) = 2 \cdot arcsen(\sqrt{x})$, criamos o seguinte código para a Fórmula II:

```
def Distancia_FormulaII(Lat1, Long1, Lat2, Long2):
V = Grau_Radiano(Lat1, Long1, Lat2, Long2)
A = math.sqrt(hav(V[1][0]-V[0][0])+math.cos(V[0][0])*math.cos(V[1][0])*hav(V[1][1]-V[0][1]))
R = 2 * math.asin(A)
G = (R * 180)/pi
D = G * 111.17
return(D)
```

6 Conclusão

Aqui supomos a Terra como sendo uma esfera. Geologicamente, isto não é o caso porque o formato da superfície terrestre, devido ao achatamento do polos, se distancia desta forma geométrica. Assim, a Terra poderia ser melhor descrita, por exemplo, por um elipsóide ou por um esferóide. Outras fórmulas são obtidas levando-se em conta qual é a menor distância entre dois pontos nestas superfícies.

Referências

[1] ABREU, Shyrlene Martins de; OTTONI, Jose Eloy. **Geometria Esférica e Trigonometria Esférica Aplicadas à Astronomia de Posição.** 2015. 41 pp. Trabalho de Conclusão de Curso (PROFMAT) - Universidade Federal de São João del-Rei, Campus Alto Paraopeba, 2015.

[2] COTTER, Charles H. **Sines, Versines and Haversines in Nautical Astronomy.** Disponível em: <https://www.cambridge.org/core/services/aop-cambridge-core/content/view/S0373463300029337>. Acesso em: 04 de ago. 2019.

[3] MCCORMICK, Douglas. **Columbus's Geographical Miscalculations.** Disponível em: <https://spectrum.ieee.org/tech-talk/at-work/test-and-measurement/columbuss-geographical-miscalculations>. Acesso em: 04 de ago. 2019.