SOBRE SINGULARIDADES E DETERMINAÇÃO FINITA

Devis Ordoño Vilca, e-mail: devisvilca@dm.ufscar.br - Orientadora: Dra. Bruna Oréfice-Okamoto, e-mail: bruna@dm.ufscar.br - Auxílio financiero: CAPES

Introdução

Consideramos um corpo $\mathbb{K}$ algebricamente fechado com $char(\mathbb{K}) \geq 0$. Vamos definir singularidade isolada, hipersuperfície com singular isolada e estudar a relação com determinação finita.

Preliminares

Sejam $\alpha = (\alpha_1, ...\alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $\alpha! = (\alpha_1!, ...\alpha_n!)$ $\underline{x} = (x_1, ..., x_n)$. Denotamos $\underline{x}^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdot ... \cdot x_n^{\alpha_n}$. A norma de α é definida por $\mid \alpha \mid = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$, e o grau de $\underline{x}^\alpha$ é definido por $deg(\underline{x}^\alpha) = deg(x_1^{\alpha_1}...x_n^{\alpha_n}) = \mid \alpha \mid$.

1. A expressão $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha \underline{x}^\alpha$, com $a_\alpha \in \mathbb{K}$, denota uma série de potências formal a qual também denotaremos como $\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha \underline{x}^\alpha$
2. Seja $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^m} a_\alpha \underline{x}^\alpha$ uma serie de potências formal não nula, então definimos a *ordem* de f como $ord(f) := min\{\mid \alpha \mid /\alpha \in \mathbb{N}^n, a_\alpha \neq 0\}$ Se $f = 0$ é a série de potência formal nula então denotaremos $ord(f) = \infty$
3. Vamos denotar

$$\mathbb{K}[\![\underline{x}]\!] = \left\{ \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha \underline{x}^\alpha / a_\alpha \in \mathbb{K}, \alpha \in \mathbb{N}^n \right\}$$

o anel das séries de potência formais com a adição e multiplicação.

4. Seja $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha \underline{x}^\alpha \in \mathbb{K}[\![\underline{x}]\!], k \in \mathbb{N}$ então o $k-jato$ de f é definido por $j_k(f) := \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha \underline{x}^\alpha$, isto é a soma dos termos de ordem $\leq k$.
5. $\mathbb{K}[\![\underline{x}]\!]^\star$ denota as unidades de $\mathbb{K}[\![\underline{x}]\!]$ e $Aut(\mathbb{K}[\![\underline{x}]\!])$ denota o conjunto de automorfismos

$$\phi : \mathbb{K}[\![\underline{x}]\!] \to \mathbb{K}[\![\underline{x}]\!]$$

Números de Milnor e Tjurina

Definição 1. *Seja $f \in \mathbb{K}[\![\underline{x}]\!]$, denotamos por $j(f) = \langle f_{x_1} \dots f_{x_n} \rangle \subseteq \mathbb{K}[\![\underline{x}]\!]$ o ideal Jacobiano de f, onde f_{x_i} denota a derivada parcial de f em relação a x_i e chamamos à álgebra associada $M_f = \dfrac{\mathbb{K}[\![\underline{x}]\!]}{j(f)}$ de álgebra de Milnor de f. A dimensão, $\mu(f) := dim_{\mathbb{K}}(M_f)$, é o número de Milnor de f. Dizemos que f é uma singularidade isolada se $\mu(f) < \infty$.*

Teorema 1. *[GrYo12] f é uma singularidade isolada se e somente se existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{m}^k \subseteq j(f)$*

Definição 2. *Agora vamos considerar o ideal de Tjurina de f, denotado por $tj(f) = \langle f, f_{x_1} \dots f_{x_n} \rangle = \langle f \rangle + j(f) \subseteq \mathbb{K}[\![\underline{x}]\!]$. E chamamos à álgebra associada $T_f = \dfrac{\mathbb{K}[\![\underline{x}]\!])}{tj(f)}$ de álgebra de Tjurina de f. A dimensão $\tau(f) := dim_{\mathbb{K}}(T_f)$ o número de Tjurina de f. Dizemos que R_f é uma hipersuperfície singular isolada se $\tau(f) < \infty$.*

Teorema 2. *[GrYo12] R_f é uma hipersuperfície singular isolada se e somente se existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{m}^k \subseteq tj(f)$*

Definição 3. *Dadas $f, g \in \mathbb{K}[\![\underline{x}]\!]$, são chamadas de equivalentes pela direita se $\exists \varphi \in Aut(\mathbb{K}[\![\underline{x}]\!])$ tal que $f = \varphi(g)$ e denotaremos isto como $f \sim_r g$*

Exemplo 1. *Consideremos o corpo $\mathbb{R}$ dos números reais, $char(\mathbb{R}) = 0$, fixamos $t \in \mathbb{R}$ não nulo e sejam os polinômios com coeficientes em $\mathbb{R}$: $f_t := x^2 + y^2(t+y)$ e $g := x^2 + y^2$. Definimos $\varphi_t : \mathbb{R}[\![\underline{x}]\!] \to \mathbb{R}[\![\underline{x}]\!]$ tal que $x \to x$ e $y \to y\sqrt{t+y}$. Assim $\varphi_t(g) = \varphi_t(x^2+y^2) = x^2 + y^2(t+y) = f_t$. Por tanto $f_t \sim_r g$*

Definição 4. *Dadas $f, g \in \mathbb{K}[\![\underline{x}]\!]$ são chamadas de equivalentes por contato se $\exists \varphi \in Aut(\mathbb{K}[\![\underline{x}]\!])$, $u \in \mathbb{K}[\![\underline{x}]\!]^\star$ tal que $f = u \cdot \varphi(g)$, denotaremos isto como $f \sim_c g$*

Exemplo 2. *Seguimos do Exemplo 1, e consideramos $1 \in \mathbb{R}[\![\underline{x}]\!]^\star$ e tem-se $f_t = 1 \cdot \varphi_t(g)$. Por tanto $f_t \sim_c g$*

Do exemplo anterior podemos ver que $f \sim_r g$ implica $f \sim_c g$, mas o recíproco não é verdade em geral pelo seguinte:

Exemplo 3. *Em $\mathbb{C}$ sejam $f_t := x^p + y^q + z^r + txyz$ e $f_s := x^p + y^q + z^r + sxyz$, com $s \neq t$. Definamos φ automorfismo mudança de coordenadas $x \to \lambda^{1/p}x$, $y \to \lambda^{1/p}y$ e $z \to \lambda^{1/p}z$, com $\lambda = (\frac{t}{s})^{\frac{1}{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}-1}}$. Assim $f_t \sim_c {}_s$. Agora suponhamos que $f \sim_r g$, assim existe φ : automorfismo tal que $f_t = \varphi(f_s)$ daí $\varphi(s) = t$ o qual é uma contradição.*

Teorema 3. *([GrLoShu07], 119) Sejam $f, g \in \mathbb{C}[\![\underline{x}]\!]$, $char(\mathbb{C}) = 0$ Então*
(1) $f \sim_r g$ implica que $M_f \cong M_g$ e $T_f \cong T_g$ como álgebras analíticas. Em particular, $\mu(f) = \mu(g)$ e $\tau(f) = \tau(g)$.
(2) $f \sim_c g$ implica que $T_f \cong T_g$ e daí $\tau(f) = \tau(g)$.

Em corpos de característica positiva não se verifica o Teorema 3.

Exemplo 4. *Seja um corpo $\mathbb{K}$, $char(\mathbb{K} = 3)$ e dados $f := x^3 + y^4$ um polinômio e uma unidade $u = 1 + x \in \mathbb{K}[\![\underline{x}]\!]^\star$. Temos $\mu(f) = \infty$, mas $\mu(u \cdot f) < \infty$. Isto é um exemplo onde o número de Milnor não é um invariante para a relação de equivalencia por contato.*

Definição 5. *Dada $f \in \mathbb{K}[\![\underline{x}]\!]$ chamamos à $\mathbb{K}$-álgebra analítica $R_f = \dfrac{\mathbb{K}[\![\underline{x}]\!]}{\langle f \rangle}$ a hipersuperfície singular induzida.*

Teorema 4. *$f \sim_c g$ se e somente se $\frac{\mathbb{K}[\![\underline{x}]\!]}{\langle f \rangle} \cong \frac{\mathbb{K}[\![\underline{x}]\!]}{\langle g \rangle}$.*

Determinação finita

Definição 6. *Dizemos que $f \in \mathbb{K}[\![\underline{x}]\!]$ é $k-$determinada pela direita se para cada $g \in \mathbb{K}[\![\underline{x}]\!]$ tal que $j_k(f) = j_k(g)$ então $f \sim_r g$*

Definição 7. *Dizemos que $f \in \mathbb{K}[\![\underline{x}]\!]$ é $k-$determinada por contato se para cada $g \in \mathbb{K}[\![\underline{x}]\!]$ tal que $j_k(f) = j_k(g)$ então $f \sim_c g$*

Assim, nas duas situações dizemos que f é finitamente determinada se $\exists k \in \mathbb{N}$ tal que f seja $k - determinada$ e ao menor k chamaremos o índice de determinação de f.

Teorema 5. *[GrYo12] Seja $f \in \mathbb{K}[\![\underline{x}]\!], f \neq 0$ e $f \in \mathfrak{m}^2$ com $k \in \mathbb{N}$ fixo. Então:*
1) Se $\mathfrak{m}^{k+2} \subseteq \mathfrak{m}^2 \cdot j(f)$ então f é $(2k - ord(f) + 2) -$ determinado pela direita.
2) Se $\mathfrak{m}^{k+2} \subseteq \mathfrak{m} \cdot \langle f \rangle + \mathfrak{m}^2 \cdot j(f)$ então f é $(2k - ord(f) + 2) - determinado$ por contato.

Observação 1. *Por ([Bo09], 64), é certo que quando $char(\mathbb{K}) = 0$ e $f \in \mathfrak{m} \subseteq \mathbb{K}[\![\underline{x}]\!]$ se $\mathfrak{m}^{k+2} \subseteq \mathfrak{m}^2 \cdot j(f)$ então f é $(k+1) - determinada$ pela direita, e se $\mathfrak{m}^{k+2} \subseteq \mathfrak{m} \cdot \langle f \rangle + \mathfrak{m}^2 \cdot j(f)$ então f é $(k+1) - determinada$ por contato. De manera particular cuando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, pode-se ver em ([GrLoShu07], 130)*

Observação 2. *Os limites de determinação não sempre são iguais quando muda a característica do corpo. Por exemplo: Consideremos $char(\mathbb{K}) = 2$, seja $f = y^2 + x^3y \in \mathbb{K}[\![\underline{x}]\!]$, $ord(f) = 2$, $f \in \mathfrak{m}^2 \subseteq \mathfrak{m}$, então o número de tjurina é $\tau(f) = 5$. Em particular, f define uma hipersuperfície singular isolada R_f. Além disso tem-se $\mathfrak{m}^{4+2} \subseteq \mathfrak{m}^5 \subseteq \mathfrak{m}\langle f \rangle + \mathfrak{m}^2 \langle j(f) \rangle$, e se o limite de determinação fosse como quando $char(K) = 0$ teríamos que f seria $(4+1 = 5)-determinada$ por contato, mas este fato não é certo pois se dado $g := f + x^5 = y^2 + x^3y + x^5$, $j(g) = \langle y^2, x^3y, x^4 \rangle$ e como no caso de f, tem-se $\mathfrak{m}^{4+2} \subseteq \mathfrak{m}^5 \subseteq \mathfrak{m}\langle g \rangle + \mathfrak{m}^2 \langle j(g) \rangle$, daqui g deberia ser $5 - determinado$ por contato. Assim temos que $f \sim_c g \iff R_f \cong R_g$ mas R_f não pode ser isomorfo a R_g devido que $f = (y + x^3) \cdot y$ é redutível e $g = y^2 + x^3y + x^5$ é irredutível.*

Proposição 1 ([Bo09], 67). *Seja $f \in \mathfrak{m}^2 \subset \mathbb{K}[\![\underline{x}]\!]$, com $char(\mathbb{K}) \geq 0$ então:*
1. Se $\mu(f) < \infty$ então $\mathfrak{m}^{\mu(f)} \subset j(f)$
2. Se $\tau(f) < \infty$ então $\mathfrak{m}^{\tau(f)} \subset tj(f)$

Da Proposição 1] e o Teorema 5 acima escrevemos:
1. Se $\mu(f) < \infty$ então $\mathfrak{m}^{\mu(f)} \subseteq j(f)$ então $\mathfrak{m}^{\mu(f)+2} \subseteq \mathfrak{m}^2 \cdot j(f)$, assim f é $(2 \cdot \mu(f) - ord(f) + 2)-$determinada pela direita.
2. Se $\tau(f) < \infty$ então $\mathfrak{m}^{\tau(f)} \subseteq tj(f)$ logo $\mathfrak{m}^{\tau(f)+2} \subseteq \mathfrak{m} \cdot \langle f \rangle + \mathfrak{m}^2 \cdot j(f)$, assim f é $(2 \cdot \tau(f) - ord(f) + 2)-$determinada por contato.

Teorema 6. *([GrKö90],345) Seja $char(\mathbb{K}) \geq 0$ e seja $f \in \mathbb{K}[\![\underline{x}]\!]$*
1. Se $\mu(f) < \infty$ então f é $2 \cdot \mu(f)-$determinado pela direita.
2. Se $\tau(f) < \infty$ então f é $2 \cdot \tau(f)-$determinado por contato.

Observação 3. *Os limites de determinação são melhores no [Teorema 5] comparado com o [Teorema 6].*

Observação 4. *No software SINGULAR pode-se estimar os valores k que são potências do $\mathfrak{m}$ no [Teorema 6] . Por exemplo: seja $char(\mathbb{K} = 23)$ e $f = y^8 + x^8y^4 + x^{23} \in \mathbb{K}[\![x, y]\!]$ e o cálculo mediante o software da resultados como $\tau(f) = 105$, $ord(f) = 8$ e $\mathfrak{m}^{23} \subset tj(f)$, onde $23 = deg(x^{22}y^2) - 1$. Enquanto pelo [Teorema 6] a determinação por contato é 210 e pelo [Teorema 5] a determinação por contato é $2 \cdot 23 - ord(f) + 2 = 40$*

O recíproco do [Teorema 5] quando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ é certo, isto é formulado em [[GrLoShu07], 141]: Seja $f \in \mathbb{C}[\![\underline{x}]\!], f(\underline{0}) = 0$ então (a) f tem um ponto crítico isolado $\Leftrightarrow$ (b) f é finitamente determinada pela direita $\Leftrightarrow$ f é finitamente por contato.
Quando $char(\mathbb{K}) \geq 0$ a prova não é trivial.

Referências Bibliográficas

Referências

[GrKö90] G.-M. Greuel and H. Kröning, *Simple Singularities in Positive Characteristic*, Mathematische Zeitschrift. **203**, 339-354 (1990)

[GrLoShu07] G.-M. Greuel, C. Lossen, E. Shustin *Introduction to Singularities and Deformations*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (2007).

[GrYo12] Gert-Martin Greuel and Yousra Boubakri, *Invariants of hypersurface singularities in positive characteristic*, Revista Matemática Complutense. **25**, 61-85 (2012)

[GrPha18] Gert-Martin Greuel and Thuy Huong Pham, *On finite determinacy for matrices of power series*, Mathematische Zeitschrift. **290**, 759-774 (2018)

[GrPha19] Gert-Martin Greuel and Thuy Huong Pham, *Finite determinacy of matrices and ideals*, Journal of Algebra. **530**, 195-214 (2019)

[Bo09] Yousra Boubakri, *Hypersurface singularities in positive characteristic*. Ph.D. thesis, Technischen Universität Kaiserslautern, (2009).

[ZS60] Oscar Zariski and Pierre Samuel *Commutative Algebra, Vol. 2*, D. Van Nostrand Company, (1960)

[ZSC58] Oscar Zariski, Pierre Samuel and I.S. Cohen *Commutative Algebra, Vol. 1*, D. Van Nostrand Company, (1958)

[GrPf08] Gert-Martin Greuel and Gerhard Pfister *A Singular Introduction to Commutative Algebra, Second Extended Edition*, Springer Berlin Heidelberg New York, (2008)