Problemas e Soluções da OBM - Olimpíada Brasileira de Matemática

Elionai dos Santos Gouveia

elionaigouveia@gmail.com

Sob orientação do Prof. Paulo A S Caetano - tutor do PET Matemática

Universidade Federal de São Carlos, SP, Brasil

OBM - 2007 Nível 3 - Segunda Fase - Ensino Médio - Problema 3

Qual é a soma dos algarismos do inteiro mais próximo de $\sqrt{\underbrace{111\ldots1}_{\text{mil uns}}}$?

Resolução: Iniciamos observando que

$$\underbrace{111\ldots1}_{\text{mil uns}} = \frac{\overbrace{999\ldots9}^{\text{mil noves}}}{9}$$

Agora,

$$\overbrace{999\ldots9}^{\text{mil uns}} = 10^{1000} - 1$$

e

$$10^{1000} - 1 = \left(10^{500} + 1\right) \cdot \left(10^{500} - 1\right)$$

Podemos concluir então que

$$\begin{aligned} \sqrt{111\ldots1} &= \sqrt{\frac{999\ldots9}{9}} \\ &= \frac{\sqrt{10^{1000} - 1}}{3} \\ &= \frac{\sqrt{(10^{500} + 1) \cdot (10^{500} - 1)}}{3} \\ &= \frac{\sqrt{10^{500} + 1} \cdot \sqrt{10^{500} - 1}}{3} \end{aligned}$$

Como

$$\sqrt{10^{1000} - 1} < \sqrt{10^{1000}} = 10^{500}$$

podemos concluir que

$$\sqrt{111\ldots1} < \frac{10^{500}}{3}$$

De forma análoga, como

$$\sqrt{10^{500} - 1} < \sqrt{10^{500} + 1}$$

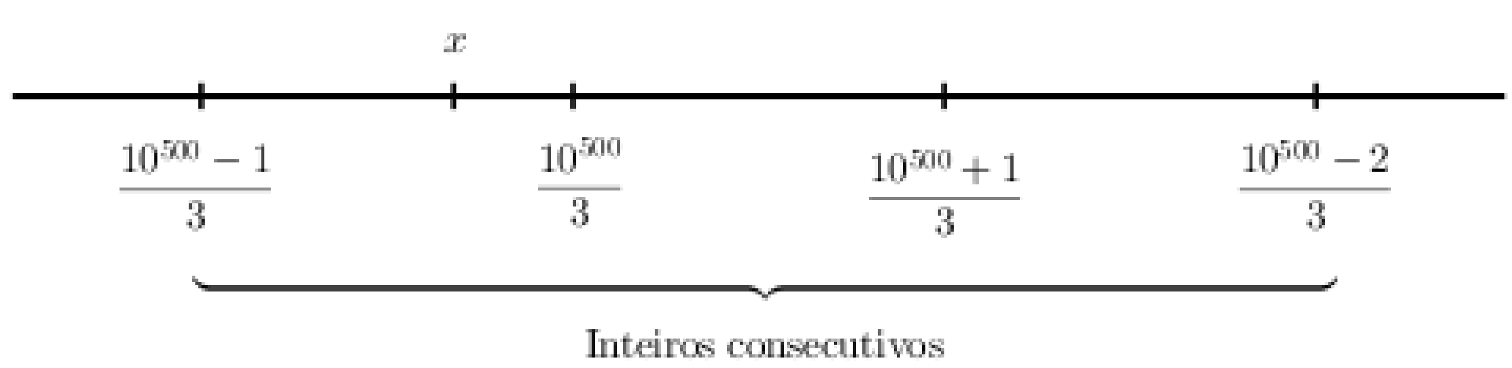
podemos concluir que

$$\sqrt{111\ldots1} > \frac{10^{500} - 1}{3}$$

Portanto,

$$\frac{10^{500} - 1}{3} < \sqrt{111\ldots1} < \frac{10^{500}}{3}$$

Além disso, como $\dfrac{10^{500} - 1}{3}$ é um número inteiro, então seu consecutivo é $\dfrac{10^{500} + 2}{3} > \dfrac{10^{500}}{3}$. Observe a imagem abaixo para melhor compreensão da posição desses números.



Assim, o inteiro mais próximo de $\sqrt{111\ldots1}$ é

$$\frac{10^{500} - 1}{3} = \frac{\overbrace{999\ldots9}^{\text{500 noves}}}{3} = \underbrace{333\ldots3}_{\text{500 três}}$$

e a soma de seus algarismos é $3 \cdot 500 = 1500$.