# Método de variáveis separáveis para equações diferenciais ordinárias e aplicações

**Gabriel Lacerda Ventura**
**Apoio: IC-PICME-CNPq 122949/2018-8**
gabriellacerdaventura@hotmail.com

**Orientador: Prof. Dr. Alex Carlucci Rezende (alexcrezende@dm.ufscar.br)**

Departamento de Matemática – Universidade Federal de São Carlos

## 1. Introdução e objetivos

O estudo de equações diferenciais ordinárias é interessante em relação a dois aspectos. O primeiro deles é teórico, pois seu estudo abrange várias áreas da Matemática (como Análise, Topologia e Geometria). O segundo é a possibilidade de aplicar ferramentas matemáticas para compreender fenômenos naturais.

Neste pôster propomos o estudo de um método de resolução de uma equação diferencial ordinária de primeira ordem e aplicamos os resultados na análise de dois modelos de dinâmica populacional.

## 2. Descrição do método das variáveis separáveis

Um dos métodos de resolução de equações diferenciais é o *Método de Variáveis Separáveis*. Neste método, usamos um processo de integração direta para resolver equações de primeira ordem. Seja uma equação

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y). \tag{1}$$

Dizemos que essa é uma **equação separável** se ela pode ser escrita da forma

$$N(y)\cdot dy/dx = M(x),$$

onde $f(x,y) = M(x)/N(y)$. Considerando $y = f(x)$, então $dy/dx = f'(x)$.

Dessa forma, a equação pode ser reescrita como:

$$N(f(x))\cdot f'(x) = M(x).$$

Integrando ambos os lados em função de $x$, temos:

$$\int N(f(x))\cdot f'(x)dx = \int M(x)dx.$$

A partir de uma simples troca de variável, é possível perceber que $dy = f'(x)dx$. Portanto:

$$\int N(y)dy = \int M(x)dx.$$

Considerando $H_1(y)$ e $H_2(x)$ primitivas de, respectivamente, $N(y)$ e $M(x)$, temos:

$$H_1(y) = H_2(x) + c,$$

que é uma solução da equação (1), sendo $c \in \mathbb{R}$ uma constante provinda da integração.

Agora, aplicaremos esse método em dois modelos biológicos de dinâmica populacional.

## 3. Aplicação: dinâmica populacional

A modelagem matemática, que envolve o uso de equações diferenciais ordinárias é utilizada para modelar diversos fenômenos naturais e sociais. Neste trabalho, apresentamos dois modelos de dinâmica populacional que envolve o método apresentado anteriormente para obter as soluções das equações e estudar o comportamento da população envolvida.

### 3.1 Crescimento Exponencial

Considere $y(t)$ a função que determina a população de uma espécie dada no instante $t$. A hipótese mais simples para a variação de uma população é que a taxa de variação é proporcional ao valor atual, ou seja,

$$\frac{dy}{dt} = r\cdot y(t), \tag{2}$$

onde $r$ tem o papel de uma taxa de crescimento ou de declínio. Resolvendo a equação (2) pelo método descrito anteriormente, temos:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{y}y'dt &= \int rdt \Rightarrow \\ \int \frac{1}{y}dy &= \int rdt \Rightarrow \\ \ln y &= rt + c \Rightarrow \\ y &= ke^{rt}. \end{aligned}$$

Considerando $y(0) = y_0$ a população inicial, obtemos $y_0 = k$. Assim,

$$y(t) = y_0 e^{rt}. \tag{3}$$

Portanto, concluímos que este modelo prevê que a população crescerá exponencialmente tendendo ao infinito, como mostra a Figura 1. Sob condições ideais, a equação satisfaz a dinâmica populacional por determinado tempo, mas é claro que, em algum momento, as limitações do espaço, suprimento alimentar ou outros recursos inibirão o crescimento de qualquer população. Faz-se, pois, necessário novas considerações.

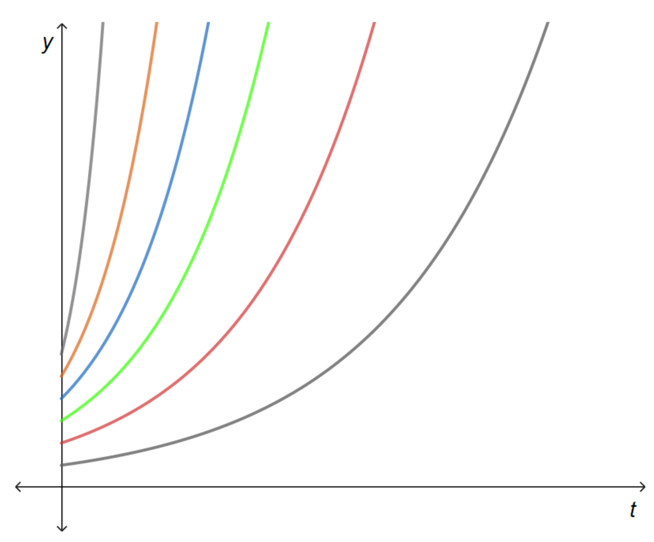


**Figura 1:** *Soluções para o Crescimento Exponencial*

### 3.2 Crescimento Logístico

Como visto, devemos levar em consideração que a taxa de crescimento também deve variar conforme varia a população. Dessa forma, substituiremos $r$ por uma função $h(y)$, e a escolheremos de modo que, quando $y$ for pequeno, $h(y)$ se aproxime de $r$, e quando $y$ for grande, $h(y)$ seja menor do que zero. A função mais simples que contém essas propriedades é $h(y) = r - ay$, sendo $a$ uma constante positiva.

Substituindo na equação (2) e considerando $k = r/a$, temos a *equação de Verhulst* ou *equação logística*:

$$\frac{dy}{dx} = r\left(1 - \frac{y}{k}\right)y. \tag{4}$$

Faremos, primeiramente, um estudo qualitativo da equação (4). Procurando as soluções mais simples dessa equação, as soluções constantes (quando $dy/dx = 0$), vemos que isso ocorre em $y(x) = 0$ e $y(x) = k$. Essas são chamadas de **soluções de equilíbrio**, pois correspondem ao caso em que não há variação da população independente do tempo $t$.

Para analisar outras soluções e esboçar seus gráficos, construiremos o gráfico de $f(y) = dy/dt$ em função de $y$, que é a parábola da Figura 2. Observe que:

$$\begin{aligned} y = \frac{k}{2} &\Rightarrow f \text{ atinge seu valor máximo}, \\ 0 < y < k &\Rightarrow \frac{dy}{dt} > 0 \text{ e } y \text{ é crescente em } t, \\ y > k &\Rightarrow \frac{dy}{dt} < 0 \text{ e } y \text{ é decrescente em } t. \end{aligned}$$

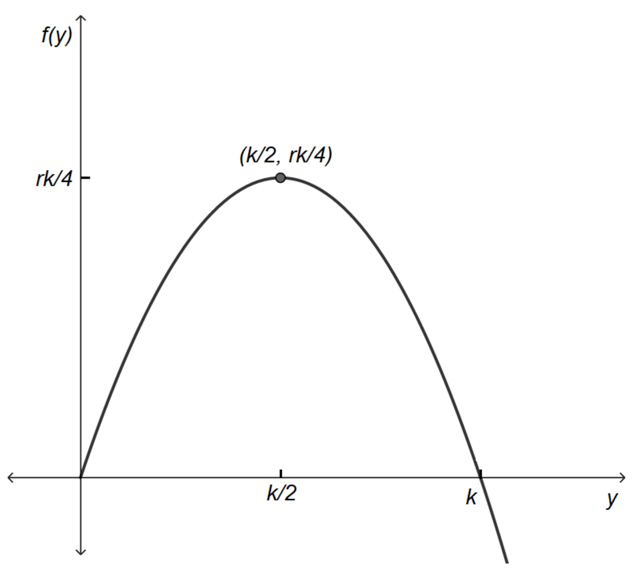


**Figura 2:** *Gráfico* $f(y) = r(1 - y/k)y$

Por fim, para esboçar os gráficos da equação diferencial estudada, começamos com as soluções de equilíbrio. Depois desenhamos outras curvas que são crescentes quando $0 < y < k$, decrescentes quando $y > k$ e cujas tangentes se aproximam da horizontal quando $y$ se aproxima de $0$ ou de $k$. Logo, os gráficos das soluções devem seguir o formato da Figura 3, de acordo com $r$ e $k$.

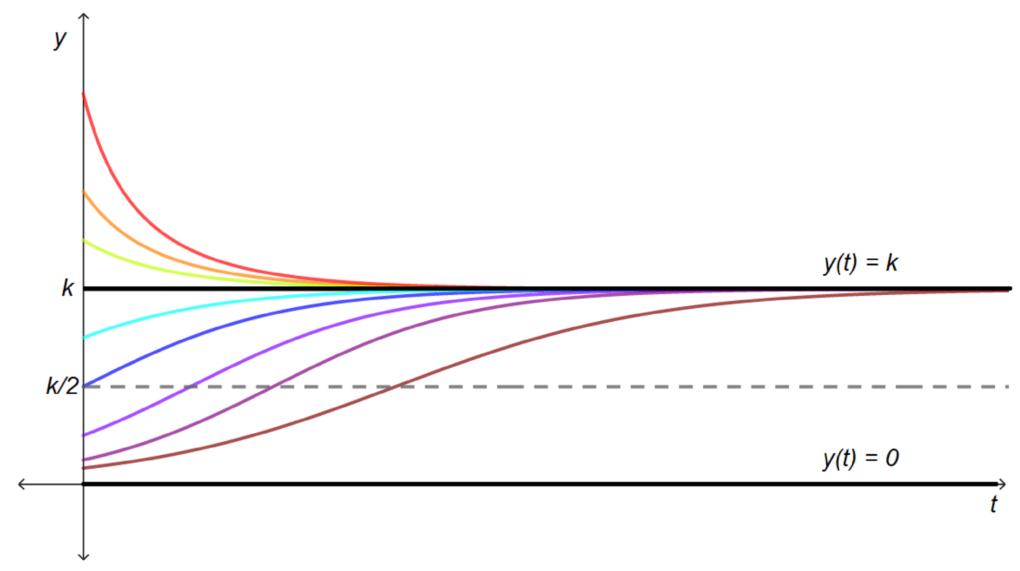


**Figura 3:** *Soluções para o Crescimento Logístico*

Note que $k$ é a cota superior da equação, ou seja, qualquer solução que comece abaixo dela, irá se aproximar de $k$, mas nunca irá ultrapassar a reta $y = k$. Por isso, esse é conhecido como **nível de saturação**.

Resolvendo a equação pelo método estudado, temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-\frac{y}{k})y}\cdot y' &= r \Rightarrow \\ \int \frac{1}{(1-\frac{y}{k})y}dy &= \int rdx \Rightarrow \\ \int \frac{1}{y} + \frac{\frac{1}{k}}{1-\frac{y}{k}}dy &= \int rdx \Rightarrow \\ \ln y - \ln\left(1 - \frac{y}{k}\right) &= rt + c, \end{aligned}$$

em que $c$ uma constante arbitrária da integração. Calculando a exponencial dos termos, obtemos:

$$\frac{y}{1-\frac{y}{k}} = C\cdot e^{rt},$$

onde, para $y(0) = y_0$, temos $C = \frac{y_0}{1-\frac{y_0}{k}}$.

Substituindo na equação e resolvendo para $y$:

$$y = \frac{y_0\cdot k}{y_0 + (K - y_0)e^{-rt}}. \tag{5}$$

## 4. Conclusão

Analisando os resultados obtidos, podemos observar que no primeiro caso, as soluções cresciam exponencialmente com o passar do tempo, não havendo limites para o crescimento da população, o que, como dito, não pode acontecer, pois há fatores naturais que delimitam esse crescimento. Quando adicionado o termo não linear na equação (4), observamos que as soluções não tendem mais ao infinito, e sim a um valor $k$, que é chamado de nível de saturação da população (por exemplo, $k$ pode ser escassez de comida ou até a presença de um predador). Portanto, concluímos que, dentre os modelos vistos, o de crescimento logístico é o que melhor descreve a Dinâmica Populacional.

## Referências

[1] .E. Boyce, R.C. DiPrima, *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno.* 9.ed. Rio de Janeiro: LTC, 2010.

[2] .G. Zill, M.R. Cullen, *Equações diferenciais.* v.1. 3.ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 2008.