RIESZ-FISCHER E ESPAÇOS DE HILBERT SEPARÁVEIS: QUE RELAÇÃO EXISTE?

Giovanna Lia Iglesias[1]

Orientadora: Profa. Dra. Thaís Jordão[2]
ICMC - Universidade de São Paulo
São Carlos, SP, Brasil

giovannaiglesias@usp.br[1]
tjordao@icmc.usp.br[2]

1. Resumo

Este trabalho possui o objetivo de apresentar um teorema do tipo Riesz-Fischer, o qual afirma que todo espaço de Hilbert separável de dimensão infinita é isometricamente isomorfo ao espaço das sequências de quadrado somável. Introduzido em 1907, esse teorema é de suma importância para diversas áreas, como a topologia e a teoria dos espaços vetoriais parcialmente ordenados. Para enunciar sua demonstração, serão utilizados conceitos-chave e resultados conhecidos da Análise Funcional, tema da iniciação científica que motivou a criação deste trabalho. Fatos sobre espaços de Hilbert, a Identidade de Parseval e a Desigualdade de Bessel serão algumas das ferramentas que auxiliarão nesse objetivo.[1]

PALAVRAS-CHAVE: análise funcional, espaços de Hilbert.

2. Introdução

A Análise Funcional nasceu no contexto da aritmetização da Análise, como parte de uma tendência à abstração na matemática. Nesse período, David Hilbert (1862-1943) generalizou a noção de espaço euclidiano, por meio do conceito de espaço de Hilbert. Contudo, a caracterização dos espaços de Hilbert não foi consolidada de imediato. Ao longo dos anos, houve uma evolução desta através do trabalho de inúmeros matemáticos. Entre eles, encontram-se dois nomes notáveis: F. Riesz (1880-1956) e E. Fischer (1875-1954). Nascidos na Hungria e na Alemanha - respectivamente - Riesz e Fischer demonstraram diversas proposições na área de Análise Funcional. Dentre as suas contribuições, há um teorema primordial no que concerne à teoria dos espaços de Hilbert. Demonstrado em 1907, seu impacto foi tal que possibilitou uma definição geral de espaço de Hilbert antes de 1930, aprimorada por Von Neumann e ainda contendo a separabilidade como axioma.

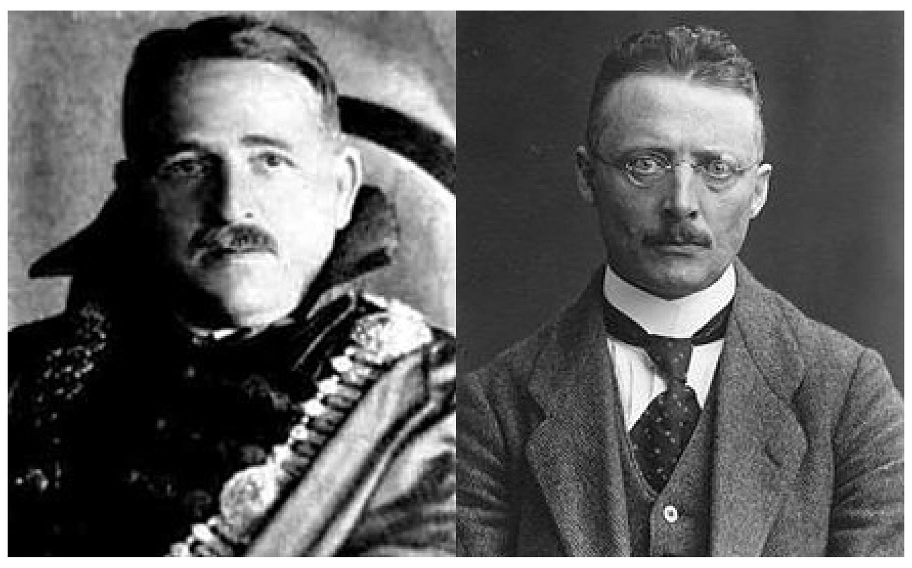

Figura 2: Frigyes Riesz (1880-1956) e Ernst Fischer (1875-1954). Fonte: Wikipédia, 2019.

3. Fundamentação teórica

A fim de apresentar uma demonstração do teorema abordado neste trabalho, algumas definições e resultados precisam ser enunciados.

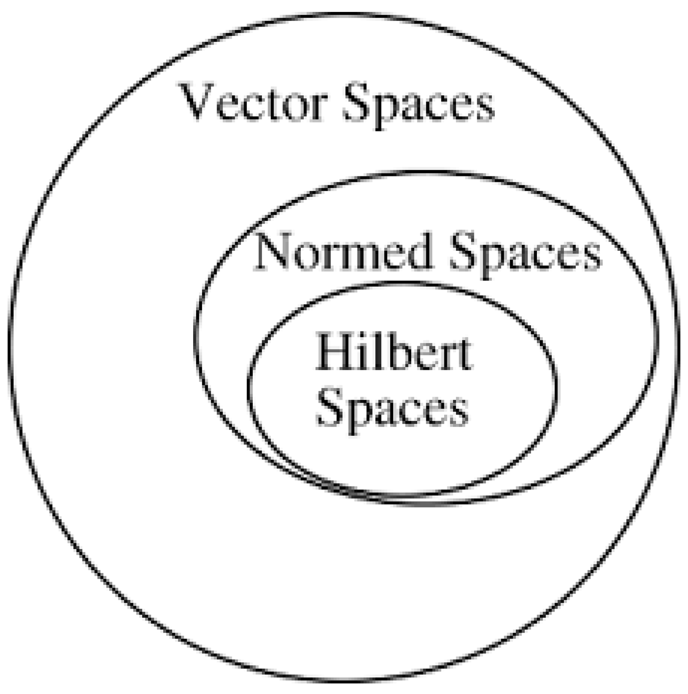

Figura 4: Diagrama de Venn representando a relação entre alguns espaços estudados na Análise Funcional.

Definição 1. *Um espaço com produto interno que é completo na norma induzida pelo produto interno é chamado de **espaço de Hilbert**.*

Teorema 1. *Um espaço de Hilbert é separável se, e somente se, existe em H um sistema ortonormal completo enumerável.*

Proposição 1. *Seja $S = \{x_i : i \in I\}$ um conjunto ortonormal no espaço de Hilbert H. São equivalentes as seguintes afirmações:*

1. Para cada $x \in H$, $x = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, x_i \rangle x_i$.

2. S é um sistema ortonormal completo.

*3. Para cada $x \in H$, $\|x\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle x, x_i \rangle|^2$ (**Identidade de Parseval**).*

4. Para cada $x, y \in H$, $\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle \overline{\langle y, x_n \rangle}$.

OBS 1. *A Identidade de Parseval é um caso particular da **Desigualdade de Bessel**.*

Definição 2. *Sejam $(X, \|.\|_X)$ e $(Y, \|.\|_Y)$ espaços normados. Uma função linear sobrejetora $T\colon X \to Y$ é um **isomorfismo isométrico** entre X e Y se, para todo $u \in X$, tem-se $\|T(u)\|_Y = \|u\|_X$.*

4. Resultados

Considere o seguinte teorema do tipo Riesz-Fischer:

Teorema 2. *Todo espaço de Hilbert separável de dimensão infinita é isometricamente isomorfo ao espaço das sequências de quadrado somável (ℓ^2).*

Rascunho da demonstração: Seja H um espaço de Hilbert separável de dimensão infinita. A demonstração do teorema segue dos passos abaixo:

1. Verificar, por meio do **Teorema 1**, que existe um sistema ortonormal completo S em H tal que $S = \{x_j : j \in \mathbb{N}\}$.
2. Da **Desigualdade de Bessel**, concluir que, para todo $x \in H$, $(\langle x, x_n \rangle)_{n=1}^{\infty} \in \ell^2$.
3. Mostrar que o operador dado por $T\colon H \to \ell^2, T(x) = (\langle x, x_n \rangle)_{n=1}^{\infty}$ está bem definido e é linear.
4. Da **Proposição 1**, obter que todo x em H é representado pela série $x = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, x_i \rangle x_i$. Daí, utilizar a **Identidade de Parseval** para deduzir $\|T(x)\| = \|x\|$.
5. Por construção, T é injetora. Resta provar que T é sobrejetora.
   - Seja $(a_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell^2$. A partir disso, escrever para cada $k \in \mathbb{N}$ $S_k = \sum_{j=1}^{k} a_j x_j$.
   - Do **Teorema de Pitágoras**, concluir que, para $n > m$, $\|S_n - S_m\|^2 = \sum_{j=m+1}^{n} |a_j|^2$.
   - Pela convergência da série obtida, constatar que $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em H.
   - Daí, depreender que $x \sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j \in H$ está bem definido.
6. Pela condição $\langle x_j, x_n \rangle = \delta_{jn}$, concluir que $T(x) = (a_j)_{j=1}^{\infty}$. $\square$

5. Conclusões

Os resultados obtidos por F. Riesz e E. Fischer são de suma importância, principalmente no que concerne aos espaços de Hilbert separáveis. Por conseguinte, pode-se afirmar que a relação entre os autores e seus objetos de estudo é de grande valor matemático, pois, através dela, obtém-se - por exemplo - que há uma correspondência biunívoca entre os elementos de um espaço de Hilbert de dimensão infinita separável e do espaço das sequências de quadrado somável, que preserva as distâncias de ambos.

6. Agradecimentos

À Profa. Dra. Thaís Jordão, pelo apoio e orientação, e à Universidade de São Paulo, por financiar o projeto de iniciação científica que motivou a criação deste trabalho.

Referências

[1] BOTELHO, G. M. A.; PELLEGRINO, D. M.; TEIXEIRA, E. V. Fundamentos de análise funcional. v. 2, 2015.

[2] OLIVEIRA, C. R. Introdução à análise funcional. v. 1, 2010.

[1] Este trabalho é uma parte do projeto intitulado "Uma iniciação à análise Funcional, por resolução de problemas" no. 106 do Programa Unificado de Bolsas de Estudos 2019/2020.

PROGRAMA UNIFICADO DE BOLSAS DE ESTUDO PARA ESTUDANTES DE GRADUAÇÃO