Problemas e Soluções da OBM - Olimpíada Brasileira de Matemática

Guilherme Henrique Messias

guih.messias@gmail.com

Sob orientação do Prof. Paulo A S Caetano - tutor do PET Matemática

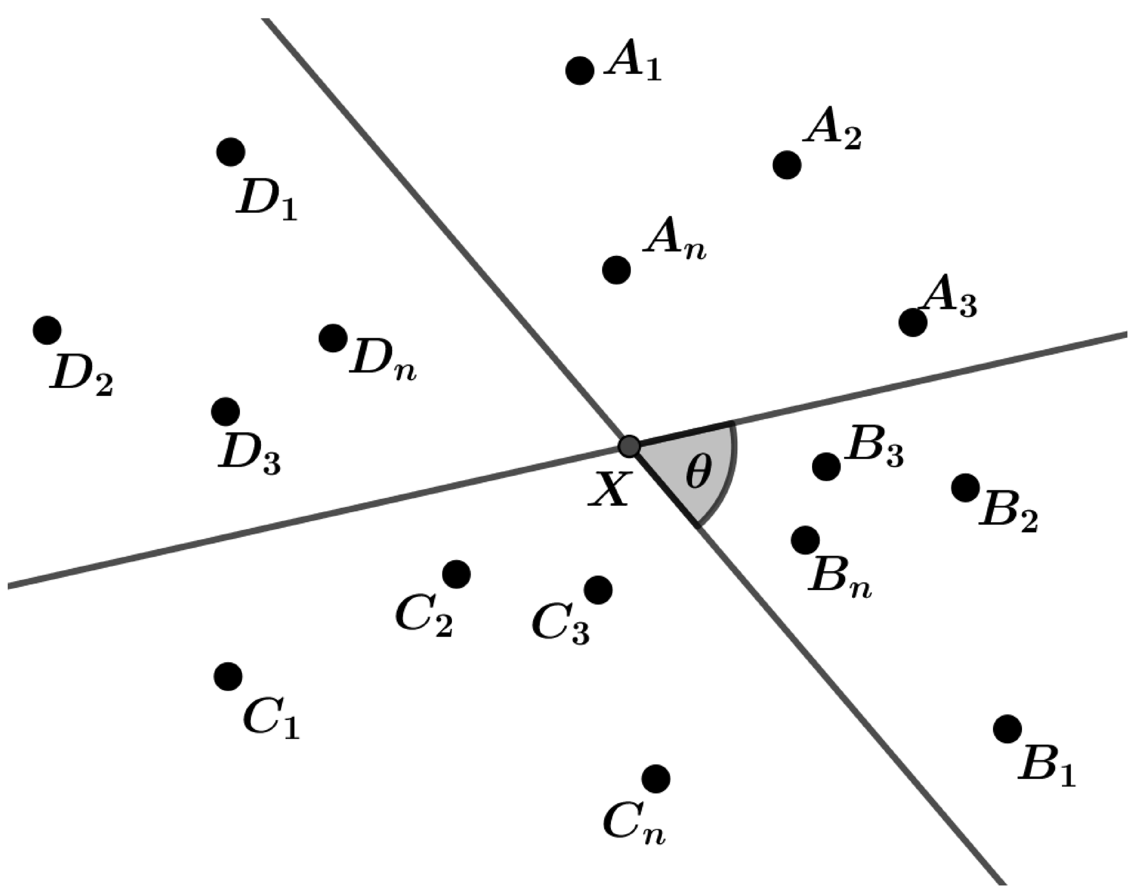
Universidade Federal de São Carlos, SP, Brasil

OBM - 2018 - Fase Única - Ensino Médio - Problema 6

Considere $4n$ pontos no plano, sem três colineares. Utilizando esses pontos como vértices, podemos formar $\binom{4n}{3}$ triângulos. Mostre que existe um ponto X do plano que pertence ao interior de pelo menos $2n^3$ desses triângulos.

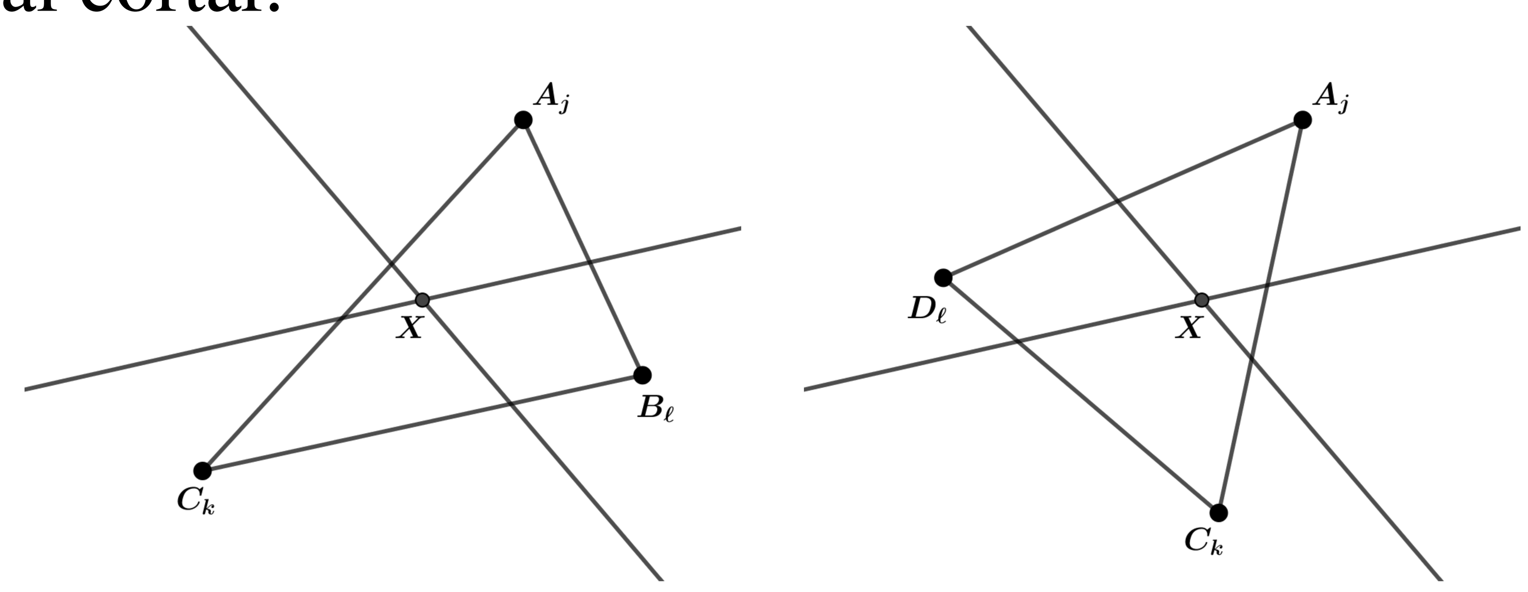
Solução. Considere $4n$ pontos no plano sem que três quaisquer deles sejam colineares. Considere também duas retas r e s concorrentes num ponto X de tal forma que o menor ângulo entre elas seja $0 < \theta < 90^o$. Com isso, as retas r e s dividem o plano em quatro regiões.

Um fato intuitivo, que pode ser justificado pelo Princípio da Casa dos Pombos, é que sempre podemos escolher uma localização no plano para o ponto X e um ângulo $0 < \theta < 90^o$ entre as retas r e s tal que cada uma das quatro regiões determinadas por essas retas contenha exatamente n dos $4n$ pontos considerados no plano.



Vamos mostrar que o ponto X pertence ao interior de pelo menos $2n^3$ triângulos com vértices nesses $4n$ pontos.

Para tal, escolha um ponto A_j qualquer em uma das regiões, um ponto C_k qualquer na região oposta à do ponto A_j e um terceiro ponto B_ℓ ou D_ℓ, sempre na região oposta à que o segmento A_jC_k vai cortar.



Observe que o ponto X sempre vai ficar no interior do triângulo $A_jC_kB_\ell$ ou $A_jC_kD_\ell$.

A contagem dos triângulo possíveis é feita pelo princípio multiplicativo.

- Existem n possibilidades para a escolha de A_j;
- Para cada escolha de A_j, existem n possibilidades para a escolha de C_k;
- Para cada escolha de A_j e de C_k, existem n possibilidades para a escolha de B_ℓ ou de D_ℓ.

Logo, já garantimos que o ponto X está no interior de n^3 triângulos do tipo $A_jC_kB_\ell$ ou $A_jC_kD_\ell$.

Aplicando o mesmo raciocínio, podemos garantir também que o ponto X está no interior de n^3 triângulos do tipo $B_jD_kA_\ell$ ou $B_jD_kC_\ell$.

Portanto existem pelo menos $2n^3$ triângulos em que o ponto X é ponto interior.