

Problemas e Soluções da OBM - Olimpíada Brasileira de Matemática

Guilherme Marques Sonoda

guilherme.sonoda98@gmail.com

Sob orientação do Prof. Paulo A S Caetano - tutor do PET Matemática

Universidade Federal de São Carlos, SP, Brasil

OBM - 2012 Nivel 3 - Segunda Fase - Ensino Médio - Problema 4

Os dois menores números primos da forma $n^2 + 5$ são $6^2 + 5 = 41$ e $12^2 + 5 = 149$. Qual é o terceiro menor primo dessa forma?

Solução. Iniciamos a solução observando que n ser par é uma condição necessária para $n^2 + 5$ ser primo

$$n^2 + 5 \text{ é primo} \Rightarrow n = 2k \quad (1)$$

pois se n é ímpar então n^2 também é ímpar e $n^2 + 5$ é par, não podendo ser primo. Observe também que n ser múltiplo de três também é uma condição necessária para $n^2 + 5$ ser primo,

$$n^2 + 5 \text{ é primo} \Rightarrow n = 3k \quad (2)$$

pois se $n = 3k + 1$ ou $n = 3k + 2$ então $n^2 + 5$ é da forma $(3k + 1)^2 + 5 = 3 \cdot (3k^2 + 2k + 2)$ ou $(3k + 2)^2 + 5 = 3 \cdot (3k^2 + 4k + 3)$.

Segue de (1) e (2) que

$$n^2 + 5 \text{ é primo} \Rightarrow n = 6k \quad (3)$$

Nosso problema, então, fica equivalente a encontrar qual é o menor $k > 2$ tal que

$$(6k)^2 + 5 \quad (4)$$

é primo. Assim, devemos testar se (4) é um número primo para $k = 3, 4, 5, 6, \dots$

Substituindo $k = 3$ em (4) vamos obter um número composto, pois

$$\begin{aligned} 18^2 + 5 &= 18^2 - 3^2 + 14 = (18 + 3)(18 - 3) + 14 \\ &= 21 \cdot 15 + 14 = 7 \cdot (3 \cdot 15 + 2) \end{aligned}$$

Substituindo $k = 4$ em (4) vamos obter um número

composto, pois

$$\begin{aligned} 24^2 + 5 &= 24^2 - 3^2 + 14 = (24 + 3)(24 - 3) + 14 \\ &= 27 \cdot 21 + 14 = 7 \cdot (27 \cdot 3 + 2) \end{aligned}$$

Substituindo $k = 5$ em (4) vamos obter um número composto, pois

$$30^2 + 5 = 5 \cdot (5 \cdot 6^2 + 1)$$

Substituindo $k = 6$ em (4) vamos obter

$$36^2 + 5 = 1301$$

que é um número primo. Para mostrar isso, precisamos olhar para o resto da divisão de 36 , 36^2 e $36^2 + 5$ pelos números primos p menores que $\sqrt{1301} \sim 36$, conforme tabela abaixo:

p	36	36^2	$36^2 + 5$	$36^2 + 5$
2	0	0	$0 + 5$	1
3	0	0	$0 + 5$	2
5	1	1	$1 + 5$	1
7	1	1	$1 + 5$	6
11	-3	9	$9 + 5$	3
13	3	9	$9 + 5$	1
17	-2	4	$4 + 5$	9
19	2	4	$4 + 5$	9
23	-10	100	$100 + 5$	10
29	7	49	$49 + 5$	25
31	5	25	$25 + 5$	30

Como nenhum dos restos da última coluna é 0 segue que $36^2 + 5$ é um número primo.