Equação de Euler-Lagrange

Autor: Gustavo H. M. Garcia; Orientador: Dirk Toben

gustavo-marques1@usp.br; dirktoben@dm.ufscar.br

Resumo

O formalismo Lagrangiano é uma reformulação da Mecânica Newtoniana e oferece um sofisticado aparato matemático para a física. O estudo da equação de Euler-Lagrange, deu origem ao cálculo das variações e é por meio dele que muitos problemas físicos são solucionados. Esse trabalho apresenta a equação de Euler-Lagrange e faz aplicações na geometria.

Introducão

Na formulação Lagrangiana da Mecânica, procuramos por curvas que representem a evolução do sistema físico. Para encontrar essas soluções, procuramos por curvas que são pontos críticos de um funcional (chamado de Ação). Isso é o Princípio da Mínima Ação de Hamilton. As equações de Euler-Lagrange, fornecem um meio de encontrar esses pontos extremos, através da resolução de sistemas de EDO's. As equações de Euler-Lagrange, podem ainda serem utilizadas em problemas gerais de otimização, como no caso de geodésicas.

Mecânica Lagrangiana

A formulação Lagrangiana da Mecânica Clássica, originalmente deduzida do *Princípio de d'Alembert*, é equivalente a Mecânica Newtoniana e fornece um sofisticado aparato matemático para a física.

As *equações de Euler-Lagrange* são o sistema de equações diferenciais

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_i}, \qquad i = 1, ..., n \qquad (1)$$

definidas para a função $L : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ chamada *Lagrangiano*, onde Q é o espaço de configurações do sistema.Vamos considerar inicialmente $Q = \mathbb{R}^{2dn}$, em que d é a dimensão espacial e n o número de partículas

Nesse caso, indicamos $L = L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))$, onde

$$(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) = (\mathbf{q}_1(t), \dots, \mathbf{q}_n(t), \dot{\mathbf{q}}_1(t), \dots, \dot{\mathbf{q}}_n(t))$$

e vemos $\mathbf{q}$ e $\dot{\mathbf{q}}$ como coordenadas independentes ($\mathbf{q}_j$ representa a posição da j-ésima partícula). A dependência temporal para L fica implícita e surge quando compomos a função L com $(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))$.

Se o lagrangiano é a função

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \|\dot{\mathbf{q}}_i\|^2 - V(\mathbf{q})$$

temos que

$$0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_i} = \frac{d}{dt}(m_i \dot{\mathbf{q}}_i) + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}_i} = m_i \ddot{\mathbf{q}}_i + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}_i}$$

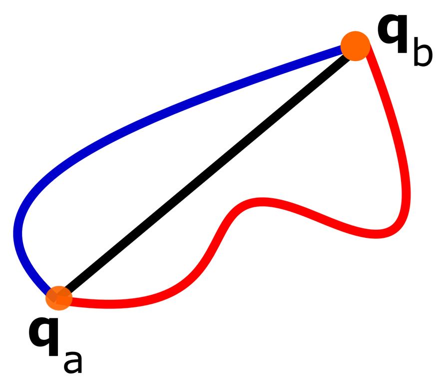
Onde $V : \mathbb{R}^{2dN} \longrightarrow \mathbb{R}$ é a energia potencial. A igualdade

$$m\ddot{\mathbf{q}} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}}$$

representa um sistema Newtoniano.

Princípio de Hamilton

Seja $\mathbf{q}_0 : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^{dn}$ uma curva suave. Uma deformação para $\mathbf{q}_0$ é uma função diferenciável $\mathbf{q}(t, s) : [a, b] \times (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^{dN}$, $\epsilon > 0$, tal que $\mathbf{q}(t, 0) = \mathbf{q}_0(t)$ para todo $t \in [a, b]$.



Deformação para uma curva. Elaborado pelo autor.

Uma variação para a curva $\mathbf{q}_0(.)$ correspondente a uma dada deformação é

$$\delta\mathbf{q}(.) = \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} \mathbf{q}(., s)$$

Considere agora o funcional $S : C^\infty([a, b], \mathbb{R}^{dn}) \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$S(\mathbf{r}(.)) = \int_a^b L(\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t))dt \qquad (2)$$

onde $\mathbf{r} : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^{dn}$ é uma curva diferenciável. Uma variação para esse funcional em $\mathbf{q}_0(.)$, para uma dada deformação de $\mathbf{q}_0$, é

$$\delta S = DS[\mathbf{q}_0(.)](\delta\mathbf{q}(.)) = \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} S(\mathbf{q}(., s))$$

Dizemos que $\mathbf{q}_0(t)$ é um ponto estacionário para S se $DS[\mathbf{q}_0(.)](\delta\mathbf{q}(.)) = 0$ para todas as deformações de $\mathbf{q}_0(.)$ de um certo conjunto.

Considere agora que $\mathbf{q}_0(.)$ representa a evolução de um sistema físico (a posição em função do tempo) entre os tempos $t = a$ e $t = b$. Com isso os pontos $\mathbf{q}_a = \mathbf{q}_0(a)$ e $\mathbf{q}_b = \mathbf{q}_0(b)$ ficam determinados.

Considere agora somente as deformações para $\mathbf{q}_0$ tais que $\mathbf{q}(s, a) = \mathbf{q}_a$ e $\mathbf{q}(s, b) = \mathbf{q}_b$ para todo $s \in (-\epsilon, \epsilon)$. Daí $\delta\mathbf{q} = \delta\mathbf{q}(b) = 0$. Então $\mathbf{q}_0$ é um ponto estacionário para S se e somente se é uma solução para (1). Para ver isso, note inicialmente que

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \delta\dot{\mathbf{q}}\, dt &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \int_a^b \delta\dot{\mathbf{q}}\, dt \\ &\qquad - \int_a^b \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right)\right] \cdot \delta\mathbf{q}\, dt \\ &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \delta\mathbf{q}\bigg|_a^b - \int_a^b \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right)\right] \cdot \delta\mathbf{q}\, dt \\ &= -\int_a^b \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right)\right] \cdot \delta\mathbf{q}\, dt\end{aligned}$$

onde usamos a regra da cadeia e notamos que $\delta\dot{\mathbf{q}} = \frac{d}{dt}\delta\mathbf{q}$. Com isso vemos que

$$\begin{aligned}DS[\mathbf{q}_0(.)] &= \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} \int_a^b L(\mathbf{q}(t, s), \mathbf{q}(\dot{t}, s))dt \\ &= \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{\partial}{\partial s}\bigg|_{s=0} \mathbf{q}(t, s) \right. \\ &\qquad \left. + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \frac{\partial}{\partial s}\bigg|_{s=0} \dot{\mathbf{q}}(t, s)\right] dt \\ &= \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \cdot \delta\mathbf{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \delta\dot{\mathbf{q}}\right] dt \\ &= \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right)\right] \cdot \delta\mathbf{q}\, dt\end{aligned}$$

Se $\mathbf{q}_0$ é uma solução para (1), é imediato verificar que $DS[\mathbf{q}_0(.)] = 0$, para todas as deformações $\delta\mathbf{q}$ da curva. A recíproca segue com a seguinte escolha para a variação:

$$\delta\mathbf{q} = \left[\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right)\right]$$

de modo que

$$\int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right)\right]^2 dt = 0$$

e portanto $\left[\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right)\right] = 0$.

Mecânica Lagrangiana em Variedades

No caso mais geral, consideramos o funcional $S : C^\infty([a, b], Q) \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$S(\mathbf{r}(.)) = \int_a^b L(\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t))dt$$

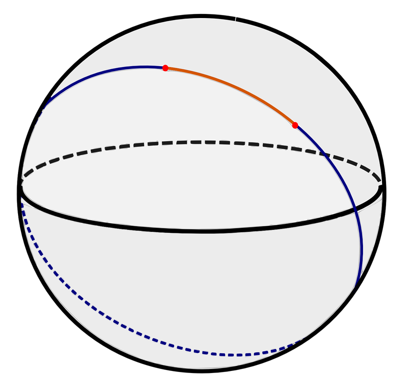
onde agora $\mathbf{r} : [a, b] \longrightarrow Q$, $L : TQ \longrightarrow \mathbb{R}$ é o Lagrangiano e Q é uma variedade Riemanniana que representa o espaço de configurações. Definimos δS e uma variação para uma curva da mesma forma que anteriormente.

Para cada carta (U, φ) em Q denotamos: $\hat{L} = L \circ \varphi_{-1}$ (expressão de L em coordenadas locais) e definimos as equações de Euler-Lagrange para $\hat{L}$ da mesma forma que em (1). Se $(p, X) \in TU$ escrevemos também $(T\varphi)(p, X) = (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = (q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$.

Temos então que uma curva $\mathbf{q}(t) : [a, b] \longrightarrow Q$ é um ponto crítico para S se e somente se $T\varphi(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))$ satisfaz (1) para todas as cartas (que cobrem $\mathbf{q}([a, b])$) de Q.

Geodésicas

Podemos usar a aparelhagem do Lagrangiano para definir geodésicas. Considere, por exemplo, dois pontos na superfície de uma esfera ligados por uma curva. Mantenha esses pontos fixos. Se para mudanças infinitesimais nessa curva, o seu comprimento não varia, dizemos que essa curva é uma geodésica.



As curvas coloridas representam duas geodésicas que ligam dois pontos na esfera. Elaborado pelo autor.

Mais precisamente, uma curva diferenciável $\mathbf{r}_0 : [a, b] \longrightarrow M$, onde M é uma variedade Riemanniana, é uma geodésica se $\| \dot{\mathbf{r}}_0 \|_{\mathbf{r}_0(t)} = c$ para todo $t \in [a, b]$ e $\mathbf{r}_0(.)$ é um ponto estacionário para o funcional comprimento:

$$S_l(\mathbf{r}) = \int_a^b \| \dot{\mathbf{r}} \|_{\mathbf{r}(t)}\, dt$$

onde consideramos somente as deformações $\mathbf{r}(., s)$ para $\mathbf{r}_0(.)$ tais que $\mathbf{r}(a, s) = \mathbf{r}_0(a)$ e $\mathbf{r}(b, s) = \mathbf{r}_0(b)$.

No entanto, como o Princípio de Hamilton é satisfeito em variedade, isso é equivalente a $\mathbf{r}(.)$ ser solução para as equações de Euler-Lagrange para $L(\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t)) = \| \dot{\mathbf{r}} \|_{\mathbf{r}(t)}$.

Um resultado equivalente diz ainda que uma curva $\mathbf{r}(.)$ é uma geodésica se e somente se é uma solução para o lagrangiano definido por

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2} \| \dot{\mathbf{r}} \|^2_{\mathbf{r}(t)}$$

Conclusão

Podemos usar as equações de Euler-Lagrange para, no geral, solucionar problemas físicos e em problemas de otimização. Isso é equivalente a encontrar pontos críticos para o funcional Ação. Podemos ainda usar essas ferramentar para definir geodésicas.

Referências

[1] D. Holm, T. Schmah, C. Stoica, and D. Ellis. *Geometric Mechanics and Symmetry: From Finite to Infinite Dimensions.* Oxford Texts in Applied and En. OUP Oxford, 2009.

Apoio

O presente trabalho foi realizado com apoio do CNPq, Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - Brasil.