Teoria Analítica dos Números: Uma Introdução

Isabela Monteiro Massano, Humberto Luiz Talpo (O)

isabelaamassano@gmail.com
DM - UFSCar

htalpo@dm.ufscar.br
DM - UFSCar

INTRODUÇÃO

A teoria analítica dos números é o ramo da teoria dos números que utiliza métodos e resultados da análise matemática real e complexa para resolver problemas relacionados aos inteiros. Estes podem ser divididos entre números primos e compostos, sendo que um número inteiro $p > 1$ é dito primo se seus únicos divisores positivos são 1 e p, e composto caso ocorra o contrário. Além disso, por causa do teorema fundamental aritmética, o qual afirma que todo inteiro maior que 1 pode ser decomposto em um produto de primos, sendo essa representação única, a menos da ordem dos fatores, os números primos podem então ser vistos como os blocos de construção de todos os inteiros, o que torna seu estudo ainda mais essencial.
De fato, as propriedades dos números primos e sua distribuição dentro dos inteiros foram estudadas por vários matemáticos reconhecidos: desde a primeira demonstração de Euclides da infinitude dos primos até a extensão da função zeta de Riemann aos números complexos passando por diversas aplicações em outras áreas, principalmente na criptografia, sendo que nesta é muito utilizado o fato de que dado um número inteiro muito grande é extremamente difícil descobrir sua fatoração em primos.

OBJETIVO

Definição. Seja $x > 0$ um número real, defina a função, denotada por $\pi(x)$, que conta a quantidade de primos menores que ou igual a x.

Temos abaixo uma tabela com dados comparando $\pi(x)$ e $x/\ln x$.

x	$\pi(x)$	$x/\ln x$	$\frac{\pi(x)}{x/\ln x}$	$\frac{\pi(x)}{x}$
10	4	4.3	0.93	0.4
10^2	25	21.7	1.15	0.2500
10^3	168	144.8	1.16	0.168
10^4	1,229	1,086	1.13	0.1229
10^5	9,592	8,686	1.10	0,0959
10^6	78,498	72,382	1.08	0.0785
10^7	664,579	620,420	1.07	0.0664
10^8	5,761,455	5,428,681	1.06	0.0576
10^9	50,847,534	48,254,942	1.05	0.0508
10^{10}	455,052,511	434,294,482	1,048	0.0455

Podemos observar pela tabela que mesmo o conjunto de números primos sendo infinito eles se encontram mais espaçados conforme avançamos os números inteiros. Além disso, foi através de inspeções de tabelas como essa que levaram Gauss e Legendre a conjecturarem o seguinte teorema, que foi provado posteriormente por Hadamard e de la Vallée Poussin.

Teorema do Número Primo

Teorema. Dado $x > 0$ real, temos que $\pi(x)$ é *assintoticamente* $\frac{x}{\ln x}$, isto é,

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$$

ou seja $\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\ln x} = 1$.

Outra interpretação do teorema do número primo é que se tomarmos um inteiro positivo x qualquer, a probabilidade de tal número ser primo é aproximadamente $\frac{1}{\ln x}$.

FUNÇÕES DE CHEBYSHEV

Definição. Dado $x > 0$ real

$$\vartheta(x) = \sum_{p\leq x} \ln p \qquad \text{e} \qquad \psi(x) = \sum_{p^m\leq x} \ln p$$

Se agruparmos os termos de $\psi(x)$ para os quais m possui o mesmo valor teremos

$$\psi(x) = \vartheta(x) + \vartheta(x^{1/2}) + \vartheta(x^{1/3}) + \cdots$$

onde a série da direita contém um número finito de termos não-nulos pois $\vartheta(y) = 0$ se $y < 2$.
Por outro lado, considerando que dado um número real y denotamos por $[y]$ o maior inteiro menor do que ou igual a y, se agruparmos os termos os quais p tem o mesmo valor teremos

$$\vartheta(x) = \sum_{p\leq x} \left[\frac{\ln x}{\ln p}\right] \ln p$$

Teorema. Os três quocientes

$$\frac{\pi(x)}{x/\ln x}, \quad \frac{\vartheta(x)}{x} \quad \text{e} \quad \frac{\psi(x)}{x}$$

possuem o mesmo limite quando $x \to \infty$.

Agora usamos essa equivalência de limites para mostrar que existem constantes limitando $\frac{\pi(x)}{x/\ln x}$.

Lema. A quantidade de vezes que um primo p divide $m!$ é exatamente

$$\left[\frac{m}{p}\right] + \left[\frac{m}{p^2}\right] + \left[\frac{m}{p^3}\right] + \ldots$$

sendo que tal série possui um número finito de termos não nulos pois $[x] = 0$ quando $0 < x < 1$.

Teorema. Existem constantes positivas a e A tais que

$$a\frac{x}{\ln x} < \pi(x) < A\frac{x}{\ln x}$$

para x suficientemente grande.

FUNÇÃO ZETA DE RIEMANN

Definição. Tome $s > 1$ definimos a função *zeta de Riemann* por

$$\zeta(s) = \sum n^{-s}$$

Tal função é de grande importância dentro da teoria dos números. Ela é base da "Hipótese de Riemann", uma conjectura sobre a distribuição dos zeros da função zeta, sugerindo que o valor da função é igual a zero apenas nos pontos que caem em uma única linha quando a função é representada graficamente, com exceção de certos pontos óbvios.

Teorema. Seja $f(n)$ uma função multiplicativa, isto é, $f \neq 0$ e

$$f(m)f(n) = f(mn)$$

sempre que m e n são primos entre si. Então

$$\sum f(n) = \prod\{1 + f(p) + f(p^2) + \ldots\}$$

desde que s série da esquerda seja absolutamente convergente, sendo que, nesse caso, o produto também é absolutamente convergente. Além disso, se $f(n)$ é completamente multiplicativa temos que

$$\sum f(n) = \prod \frac{1}{1 - f(p)}$$

Assim, tomando $f(n) = n^{-s}$ com $s > 1$ temos que pelo teste da integral tal série converge e então

$$\sum n^{-s} = \prod \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

Posto isto, tomando o logaritmo natural e usando a expansão da série de Maclaurin de $\ln(1 - p^{-s})$ obtemos

$$\ln \zeta(s) = -\sum \ln(1 - p^{-s}) = \sum_{p,m} \frac{\ln p}{p^{ms}}$$

Agora, derivando em relação a s temos

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum \frac{p^{-s}\ln p}{1 - p^{-s}} = \sum_{p,m} \frac{\ln p}{p^{ms}}$$

Dessa maneira podemos escrever

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$$

onde $\Lambda(n)$ é $\ln p$ se n é uma potência de um primo e zero caso contrário.

Teorema. Seja $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ uma sequência real crescente e que possui limite infinito. Seja

$$C(x) = \sum_{\lambda_n\leq x} c_n$$

onde c_n é um número real ou complexo e a soma é sobre os inteiros positivos n tais que $\lambda_n \leq x$ (conjunto finito). Então, se $X \geq \lambda_1$ e $\phi(x)$ é uma função com derivada contínua temos

$$\sum_{\lambda_n\leq X} c_n\phi(\lambda_n) = -\int_{\lambda_1}^{X} C(x)\phi'(x)dx + C(X)\phi(X)$$

E se, além disso, $C(X)\phi(X) \to 0$ quando $X \to \infty$ então

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n\phi(\lambda_n) = -\int_{\lambda_1}^{\infty} C(x)\phi'(x)dx$$

desde que ambos os lados sejam convergentes.
Logo, tomando $\lambda_n = n$, $c_n = \Lambda(n)$ e $\phi(x) = x^{-s}$ temos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = s\int_1^{\infty} \frac{\psi(x)}{x^{s+1}}dx \Rightarrow -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = s\int_1^{\infty} \frac{\psi(x)}{x^{s+1}}dx$$

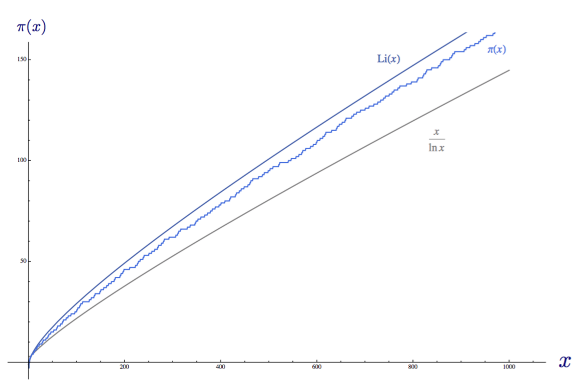
.
Agora temos todas as ferramentas necessárias para demonstrar que se $\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\ln x}$ existe então tem que ser 1.

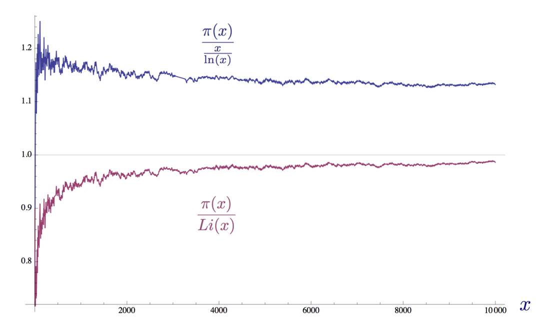
FUNÇÃO LOGARITMO INTEGRAL

Definição. A função *logaritmo integral* pode ser definida para todo número real $x > 2$ por

$$Li(x) = \int_2^x \frac{1}{\ln t}dt$$

Plotando essa função ao lado da contagem de primos e da fórmula do teorema do número primo vemos que $Li(x)$ é na verdade uma melhor aproximação que $x/\ln x$. No entanto, ambas as funções convergem para $\pi(x)$, temos que $Li(x)$ converge mais rapidamente mas, conforme x tende para infinito, a razão da contagem dos primos com ambas as funções tende a 1.





Referências

[1] INGHAM, A.E., The Distribution of Prime Number, Cambridge University Press, 1992

[2] APOSTOL, T.M. , Intoduction to Analytic Number Theory, Springer-Verlag, New York, 1976

[3] BATEMAS, P.T.; DIAMOND, H.G., Analytic Number Theory: An Introductory Course, World Scientific, 2004