Problemas e Soluções da OBM - Olimpíada Brasileira de Matemática

Kaique Micael Moreira de Oliveira

kaiquedisponivel@gmail.com

Sob orientação do Prof. Paulo A S Caetano - tutor do PET Matemática

Universidade Federal de São Carlos, SP, Brasil

OBM - 2009 - Segunda Fase - Ensino Médio - Problema 5

Determine o maior inteiro n menor que 10000 tal que $2^n + n$ seja divisível por 5.

Solução. Sabemos que um número inteiro é divisível por 5 se e somente se o algarismo das unidades desse número é 0 ou 5.

Assim, para resolver esse exercício, precisamos determinar uma relação entre o algarismo das unidades de $2^n + n$ com n.

A relação entre o algarismo das unidades de 2^n com n pode ser observada abaixo:

$$2^1 = 2$$
$$2^2 = 4$$
$$2^3 = 8$$
$$2^4 = 16$$
$$2^5 = 32$$
$$\vdots$$

Como o algarismo das unidades de 2^n se repete de 4 em 4 e como o algarismo das unidades de n se repete de 10 em 10, o algarismo das unidades da soma $2^n + n$ vai se repetir de 20 e 20, pois $\text{mmc}(4, 10) = 20$.

Assim, precisamos analisar a tabela do algarismo das unidades somente para os 20 primeiros números da forma $2^n + n$.

n	2^n	n	$2^n + n$
1	2	1	$2+1 \sim 3$
2	4	2	$4+2 \sim 6$
3	8	3	$8+3 \sim 1$
4	6	4	$6+6 \sim 2$
5	2	5	$2+5 \sim 7$
6	4	6	$4+6 \sim 0$
7	8	7	$8+7 \sim 5$
8	6	8	$6+8 \sim 4$
9	2	9	$2+9 \sim 1$
10	4	0	$4+0 \sim 4$
11	8	1	$8+1 \sim 9$
12	6	2	$6+2 \sim 8$
13	2	3	$2+3 \sim 5$
14	4	4	$4+4 \sim 8$
15	8	5	$8+5 \sim 3$
16	6	6	$6+6 \sim 2$
17	2	7	$2+7 \sim 9$
18	4	8	$4+8 \sim 2$
19	8	9	$8+9 \sim 7$
20	6	0	$6+0 \sim 6$

Como podemos observar na tabela, a última ocorrência do algarismo das unidades ser igual a 0 ou 5 é para $n = 13$.

Logo o maior inteiro n menor que 10000 tal que $2^n + n$ seja divisível por 5 será

$$10000 - 20 + 13 = 9987$$