

Problemas e Soluções da OBM - Olimpíada Brasileira de Matemática

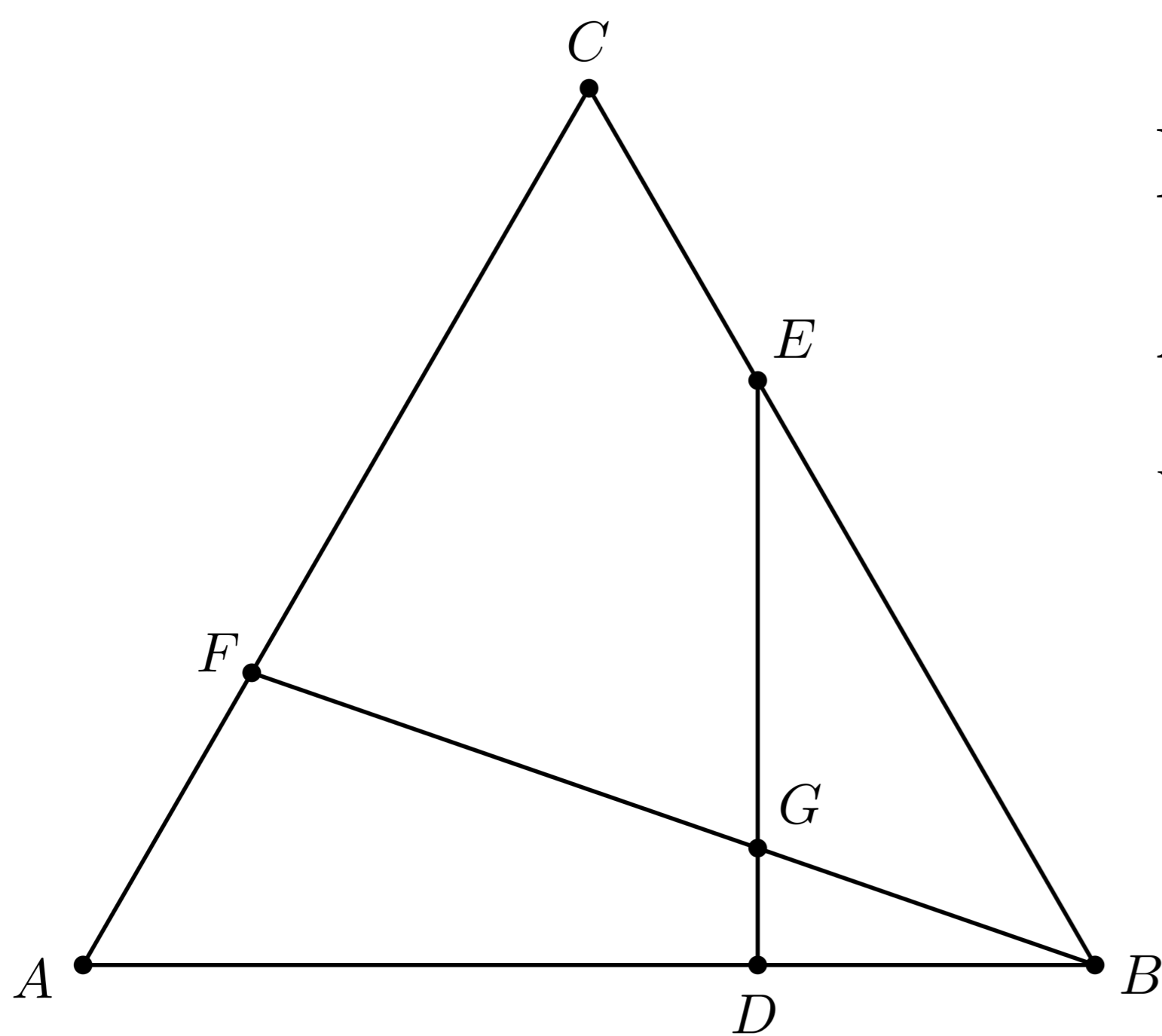
Kairo Gabriel Fracassi

kairofracassi@gmail.com

Sob orientação do Prof. Paulo A S Caetano - tutor do PET Matemática

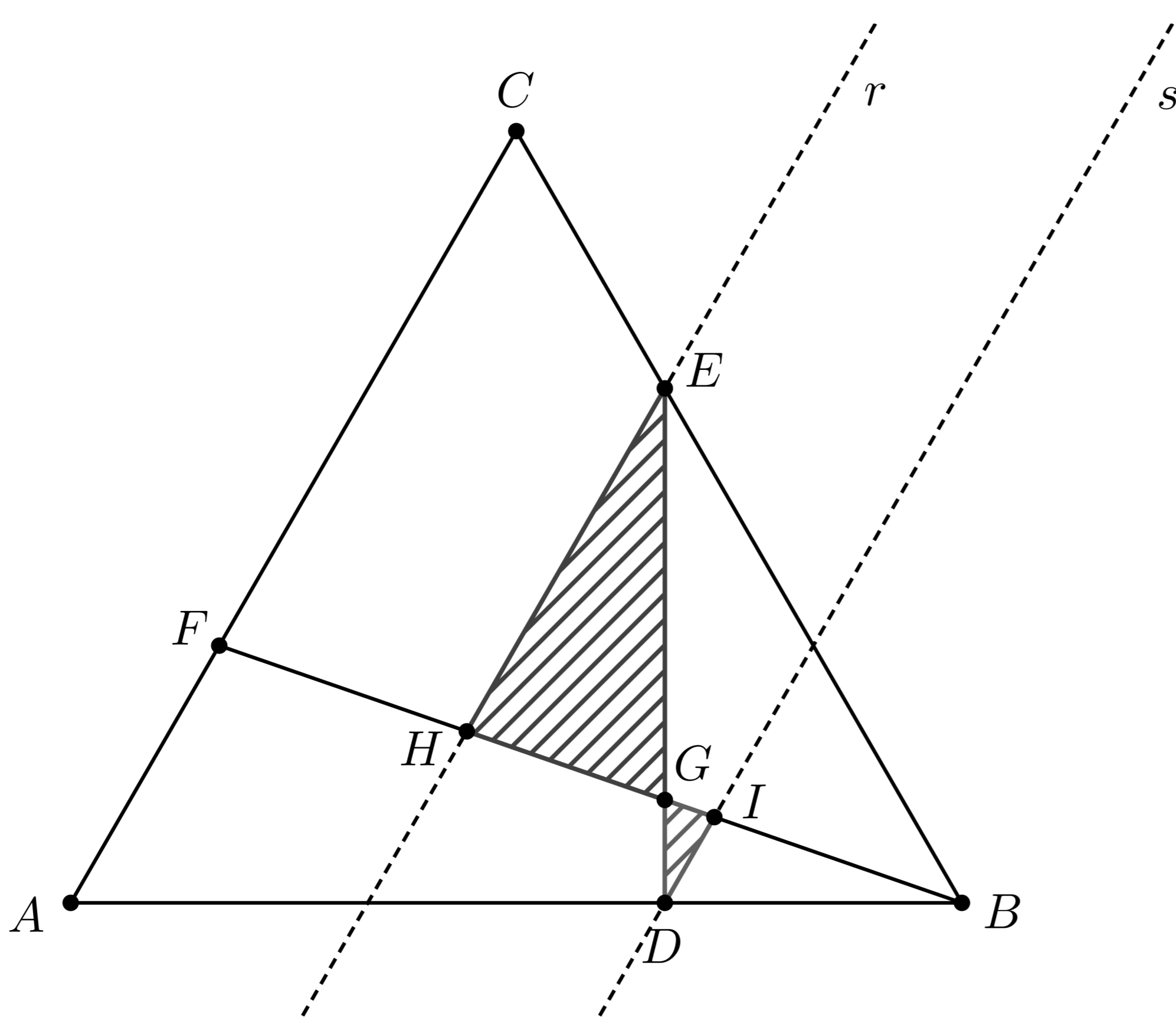
Universidade Federal de São Carlos, SP, Brasil

OBM - 2014 - Segunda Fase - Ensino Médio - Problema 1



No desenho, o triângulo ABC é equilátero e $BD = CE = AF = AB/3$. A razão EG/GD pode ser escrita na forma m/n , $\text{mdc}(m, n) = 1$. Quanto vale $m + n$?

Solução. Para resolver esse exercício utilizaremos conceitos relacionados a semelhanças de triângulos. Iniciamos traçando retas r e s paralelas a AC passando pelos pontos E e D , respectivamente, obtendo os pontos H e I em FB .



Através da semelhança de triângulos, temos:

$$HGE \sim IGD \Rightarrow \frac{EG}{GD} = \frac{EH}{ID} = \frac{HG}{GI} \quad (1)$$

$$FCB \sim HEM \Rightarrow \frac{EH}{CF} = \frac{EB}{CB} = \frac{HB}{FB} \quad (2)$$

$$FBA \sim IBD \Rightarrow \frac{ID}{FA} = \frac{IB}{FB} = \frac{DB}{AB} \quad (3)$$

Vamos assumir que a medida do lado do triângulo equilátero ABC é $3x$, ou seja,

$$AB = BC = CA = 3x$$

Assim, de acordo com o enunciado,

$$BD = CE = AF = x$$

e

$$CF = BE = AD = 2x$$

Segue então de (2) que

$$EH = \frac{CF \cdot EB}{CB} = \frac{2x \cdot 2x}{3x} = \frac{4x}{3} \quad (4)$$

De forma análoga, segue de (3) que

$$ID = \frac{DB \cdot FA}{AB} = \frac{x \cdot x}{3x} = \frac{x}{3} \quad (5)$$

Por fim, segue de (1), (4) e (5) que

$$\frac{EG}{GD} = \frac{EH}{ID} = \frac{\frac{4x}{3}}{\frac{x}{3}} = \frac{12x}{3x} = \frac{4}{1} \quad (6)$$

Logo, $m = 4$, $n = 1$ e $m + n = 5$, concluindo então a resolução do exercício.