MOMENTOS-L NA ESTIMAÇÃO DOS PARÂMETROS DA DISTRIBUIÇÃO GENERALIZADA DE VALORES EXTREMOS

Mesek Felipe de Souza[1], **Luiz Alberto Beijo**[2], **Fabricio Goecking Avelar**[3]

[1]mekvemon@gmail.com, [2]luiz.beijo@unifal-mg.edu.br, [3]fabricio.avelar@unifal-mg.edu.br

1. Introdução

- A teoria de valores extremos atualmente está sendo amplamente estudada devido a necessidade de planejamento contra eventos extremos que podem ocasionar perdas graves.
- Uma distribuição frequentemente utilizada na modelagem de situações que envolve valores extremos é a Distribuição Generaliza de Valores Extremos (GEV) que possui três parâmetros: posição, escala e forma.
- Os estimadores de Máxima verossimilhança são os mais utilizados na estimação dos parâmetros da distribuição GEV.
- Os estimadores de máxima verossimilhança apresentam boas propriedades na estimação dos parâmetros, porém para valores do parâmetro forma maiores ou iguais a -1 e menores ou iguais a -0,5 o estimador perde a propriedade de regularidade.
- Para valores menores que -1 do parâmetro forma da GEV não existe o estimador pelo método da máxima verossimilhança.
- Uma proposta para evitar problemas na estimação dos parâmetros da distribuição GEV é utilizar a estimação pelo método dos momentos - L.

2. Objetivos

- Obter os estimadores de momentos-L dos parâmetros da distribuição GEV.
- Apresentar uma aplicação do conteúdo de Cálculo Diferencial e Integral na modelagem estatística.

3. Referencial Teórico

- Função densidade de probabilidade de uma variável aleatória $X \sim GEV(\mu, \sigma, \xi)$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma}\left[1+\xi\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)\right]^{-\left(\frac{1+\xi}{\xi}\right)} \exp\left\{-\left[1+\xi\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)\right]^{-\frac{1}{\xi}}\right\},$$

em que $\mu \in \mathbb{R}$ é o parâmetro de posição, $\sigma > 0$ de escala e $\xi \in \mathbb{R}$ de forma.

- Função de distribuição acumulada.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \exp\left\{-\left[1+\xi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right]^{-\frac{1}{\xi}}\right\}$$

- Função quantil.

$$Q(y) = F^{-1}(y) = \mu + \frac{\sigma}{\xi}\left((-\ln y)^{-\xi} - 1\right) \tag{1}$$

- Momentos ponderados por probabilidade introduzidos por [2], em que $p, r, s \in \mathbb{R}$

$$M_{p,r,s} = \int_0^1 [Q(y)]^p \cdot y^r \cdot (1-y)^s \, dy$$

- Um caso particular dos momentos ponderados por probabilidade são os α_s que de acordo com [1] possuem generalidade suficiente para estimação de parâmetros.

$$\alpha_s = M_{1,0,s} = \int_0^1 Q(y) \cdot (1-y)^s \, dy$$

- O r-ésimo momento-L populacional: combinação linear de α_s, denotadas por λ_r, da seguinte forma

$$\lambda_r = (-1)^{r-1} \sum_{k=0}^{r-1} P_{r-1,\,k} \cdot \alpha_k$$

em que $P_{r-1,\,k} = (-1)^{r-1-k} \cdot \binom{r-1}{k} \cdot \binom{r+k+1}{k}$.

Logo, os três primeiros r-momentos-L populacionais são expressos por:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \alpha_0 &&= \int_0^1 Q(y)dy \\ \lambda_2 &= \alpha_0 - 2\alpha_1 &&= \int_0^1 Q(y) \cdot (2y-1)\, dy \\ \lambda_3 &= \alpha_0 - 6\alpha_1 + 6\alpha_2 &&= \int_0^1 Q(y) \cdot (1-6y+6) \cdot 6\,(1-y)^2\, dy \end{aligned} \tag{2}$$

- Segundo [3], uma medida de variabilidade de uma distribuição pode ser calculada por:

$$\tau_2 = \frac{\int_0^1 Q(y) \cdot (2y-1)\, dy}{\int_0^1 Q(y)dy} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

- Dada uma amostra ordenada $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ de tamanho n, os valores amostrais de α_s, denotados por a_s, podem ser obtidos por

$$a_s = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{\binom{n-i}{s}}{\binom{n-1}{s}} \cdot x_i.$$

- Os momentos-L amostrais l_r e t_2 são da forma

$$\begin{aligned} l_1 &= a_0 \\ l_2 &= a_0 - 2a_1 \\ l_3 &= a_0 - 6a_1 + 6a_2 \\ t_2 &= \frac{l_2}{l_1} \end{aligned} \tag{3}$$

- O método dos momentos-L consiste em encontrar e igualar os momentos-L populacionais aos momentos-L amostrais em um sistema linear.

$$\begin{cases} \lambda_1 = l_1 \\ \lambda_2 = l_2 \\ \tau_2 = t_2 \end{cases} \tag{4}$$

4. Metodologia

- Estudar os fundamentos da teoria da estimação.
- Estudar os fundamentos teóricos da estimação por momentos-L.
- Obter os estimadores de momentos-L para a GEV.

5. Resultados e Discussão

- De (1) e (2), os momentos-L populacionais da GEV são:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \int_0^1 \mu + \frac{\sigma}{\xi}\left[(-\ln y)^{-\xi} - 1\right] dy \\ \lambda_2 &= \int_0^1 \left\{\mu + \frac{\sigma}{\xi}\left[(-\ln y)^{-\xi} - 1\right]\right\} \cdot (2y-1)\, dy \end{aligned} \tag{5}$$

- De (3), (4) e (5), o sistema que perimite encontrar as estimativas dos parâmetros da GEV é expresso por:

$$\begin{cases} \widehat{\mu} + \frac{\widehat{\sigma}}{\widehat{\xi}} \cdot \left[\Gamma\left(1-\widehat{\xi}\right) - 1\right] &= a_0 \\ \frac{\widehat{\sigma}}{\widehat{\xi}} \cdot \left(2^{\widehat{\xi}} - 1\right) \cdot \Gamma\left(1-\widehat{\xi}\right) &= a_0 - 2a_1 \\ \frac{2\left(1-3^{\widehat{\xi}}\right)}{1-2^{\widehat{\xi}}} - 3 &= \frac{a_0-6a_1+6a_2}{a_0-2a_1} \end{cases} \tag{6}$$

em que $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} \cdot e^{-x} dx$ é a função Gama.

- A terceira equação do sistema expresso em (6) não possui solução analítica.

6. Conclusões

- Os estimadores de momentos-L existem para todos os parâmetros da distribuição generalizada de valores extremos.
- É necessário o uso de método numérico para o cálculo de $\widehat{\xi}$.

Referências

[1] HOSKING, J. R. M.; WALLIS, J. R. **Regional frequency analysis:** an approach based on L-moments. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.

[2] GREENWOOD, J. A.; LANDWEHR, J. M.; MATALAS, N. C. e WALLIS, J. R. Probability weighted moments: definition and relation to parameters expressible in inverse form. **Water Resources Research**, v. 15, n. 5, p. 1049-1054, 1979.

[3] NAGHETTINI, M.; PINTO, E. J. A. **Hidrologia Estatística**. Belo Horizonte: CPRM, 2007.

Agradecimentos

Agradecemos ao CNPq pela concessão da bolsa de Iniciação Científica.

Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico

[1]Discente de Licenciatura em Matemática - UNIFAL-MG - Bolsista CNPq
[2]Docente do Departamento de Estatística - UNIFAL-MG
[3]Docente do Departamento de Estatística - UNIFAL-MG