Problemas e Soluções da OBM - Olimpíada Brasileira de Matemática

Nelson Prata Pravato Serrano

nelsonppserrano@gmail.com

Sob orientação do Prof. Paulo A S Caetano - tutor do PET Matemática

Universidade Federal de São Carlos, SP, Brasil

OBM - 2016 - Segunda Fase - Ensino Médio - Problema 2

Seja r uma raiz da equação $x^2 - 12x - 12 = 0$. Sabe-se que r também é raiz da equação $x^4 - ax^3 - b = 0$, sendo a e b racionais positivos. Calcule $a + b$.

Uma solução. Como r é uma raiz da equação $x^2 - 12x - 12 = 0$ segue que $r \neq 0$ e que

$$r^2 = 12r + 12 \tag{1}$$

Multiplicando (1) por r temos

$$r^3 = 12r^2 + 12r \tag{2}$$

e substituindo (1) em (2) temos

$$r^3 = 12\,(12r + 12) + 12r$$

ou seja,

$$r^3 = 156r + 144 \tag{3}$$

Podemos isolar r em (3) e obter

$$r = \frac{r^3 - 144}{156} \tag{4}$$

Multiplicando agora (3) por r temos

$$r^4 = 156r^2 + 144r \tag{5}$$

e, novamente, substituindo (1) em (5) temos

$$r^4 = 156\,(12r + 12) + 144r$$

ou seja,

$$r^4 = 2016r + 1872 \tag{6}$$

Por fim, substituindo (4) em (6) temos

$$r^4 = 2016\left(\frac{r^3 - 144}{156}\right) + 1872$$

ou seja,

$$r^4 = \frac{168}{13}r^3 + \frac{144}{13} \tag{7}$$

Sendo r raiz da equação $x^4 - ax^3 - b = 0$ segue de (7) que

$$a = \frac{168}{13} \quad \text{e} \quad b = \frac{144}{13}$$

e, portanto,

$$a + b = \frac{168 + 144}{13} = 24$$

A hipótese de que a e b são racionais é usada para mostrar a unicidade desses coeficientes. De fato, supondo que r seja raiz de

$$x^2 - 12x - 12 = 0$$

segue que r é um dos números irracionais abaixo:

$$r = \frac{12 \pm \sqrt{192}}{2} = 6 \pm 4\sqrt{3}$$

Supondo também que r é raiz de duas equações de quarto grau

$$x^4 - ax^3 - b = 0 \ , \quad x^4 - a'x^3 - b' = 0$$

com a, a', b, b' racionais positivos, então

$$r^4 = ar^3 + b = a'r^3 + b'$$

e, portanto

$$(a - a')r^3 = (b' - b)$$

Logo temos duas possibilidades para a equação acima:

- $0 = 0$: em que $a = a'$ e $b = b'$
- $r^3 = \frac{b'-b}{a'-a}$: em que $a \neq a'$ e $b \neq b'$

Como a, a', b, b' são racionais, a segunda possibilidade é impossível, pois se fosse possível, então $r^3 = (6 \pm 4\sqrt{3})^3$ seria um número racional.