Problemas e Soluções da OBM - Olimpíada Brasileira de Matemática

Nilton Oliveira de Abreu

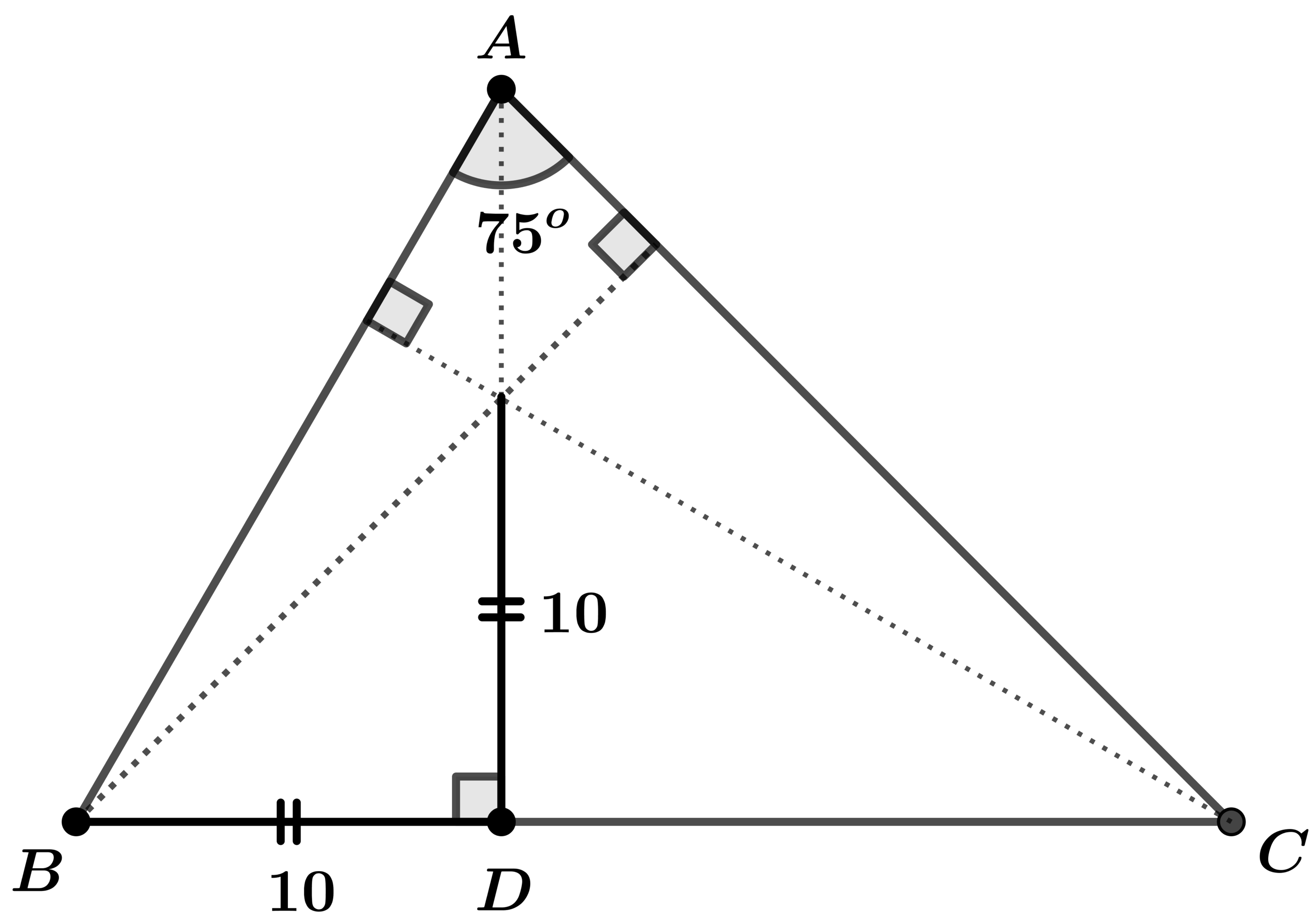
niltonabreu13@gmail.com

Sob orientação do Prof. Paulo A S Caetano - tutor do PET Matemática

Universidade Federal de São Carlos, SP, Brasil

OBM - 2011 - Segunda Fase - Ensino Médio - Problema 3

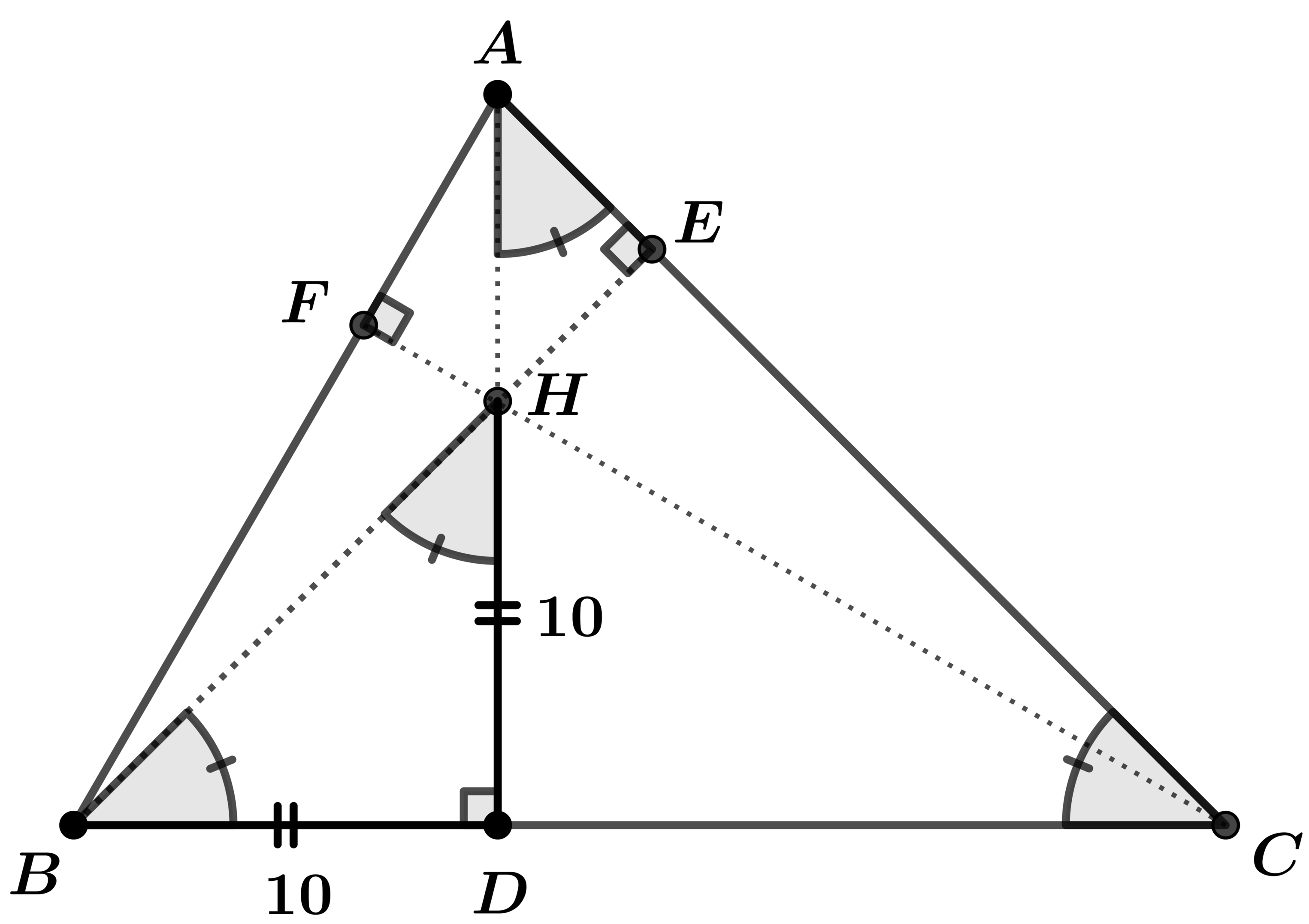
O ângulo interno do vértice A de um triângulo acutângulo ABC mede 75 graus. A altura relativa ao vértice A toca o lado BC no ponto D. As distâncias de D ao vértice B e ao ortocentro do triângulo são ambas iguais a 10 cm. Qual é a área do triângulo ABC, aproximada para o inteiro mais próximo? Se necessário, use $\sqrt{3} \simeq 1,732$.



Solução: Sejam H o ortocentro do triângulo, E o encontro da altura relativa ao vértice B com o lado AC e F o encontro da altura relativa ao vértice C com o lado AB.

Como o triângulo BDH é isósceles, segue que

- $\text{m}(D\widehat{B}H) = 45^o$
- $\text{m}(B\widehat{H}D) = 45^o$
- $\text{m}(\widehat{C}) = 45^o$
- $\text{m}(C\widehat{A}D) = 45^o$



Logo, como $\text{m}\left(\widehat{A}\right) = 75^o$, $\text{m}\left(\widehat{C}\right) = 45^o$ e a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180^o, segue que

$$\text{m}\left(\widehat{B}\right) = 180^o - 75^o - 45^o = 60^o$$

Agora vamos usar a trigonometria do triângulo ABD para obter a medida da altura AD relativa à base BC, ou seja:

$$AD = BD \cdot \tan\left(\widehat{B}\right) = 10\sqrt{3}$$

Por outro lado, como o triângulo ACD é isósceles, segue que $AD = DC$ e, portanto,

$$\begin{aligned} BC &= BD + DC \\ &= 10 + 10\sqrt{3} \\ &= 10 \cdot \left(1 + \sqrt{3}\right) \end{aligned}$$

Por fim, como a área do triângulo ABC é a metade do produto da base BC pela altura AD, temos:

$$\text{Área}\,(ABC) = \frac{BC \cdot AD}{2} = 50 \cdot \left(1 + \sqrt{3}\right)$$

Usando $\sqrt{3} \simeq 1,732$ temos

$$\text{Área}\,(ABC) \simeq 136,6$$

e o valor inteiro mais próximo da área do triângulo ABC é 137.