PET MATEMÁTICA — SEMAT DM UFSCAR — DM ufscar

Problemas e Soluções da OBM - Olimpíada Brasileira de Matemática

Relissa Amanda Dias

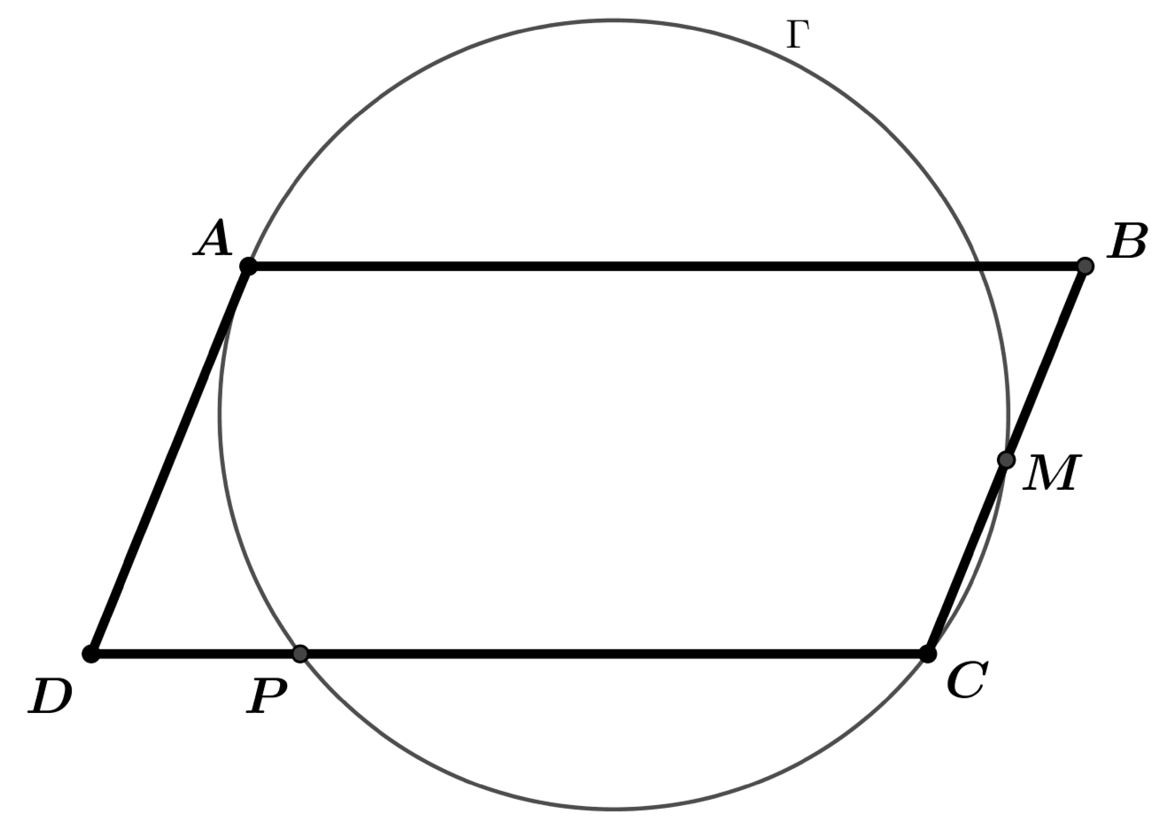
relissadias@gmail.com

Sob orientação do Prof. Paulo A S Caetano - tutor do PET Matemática

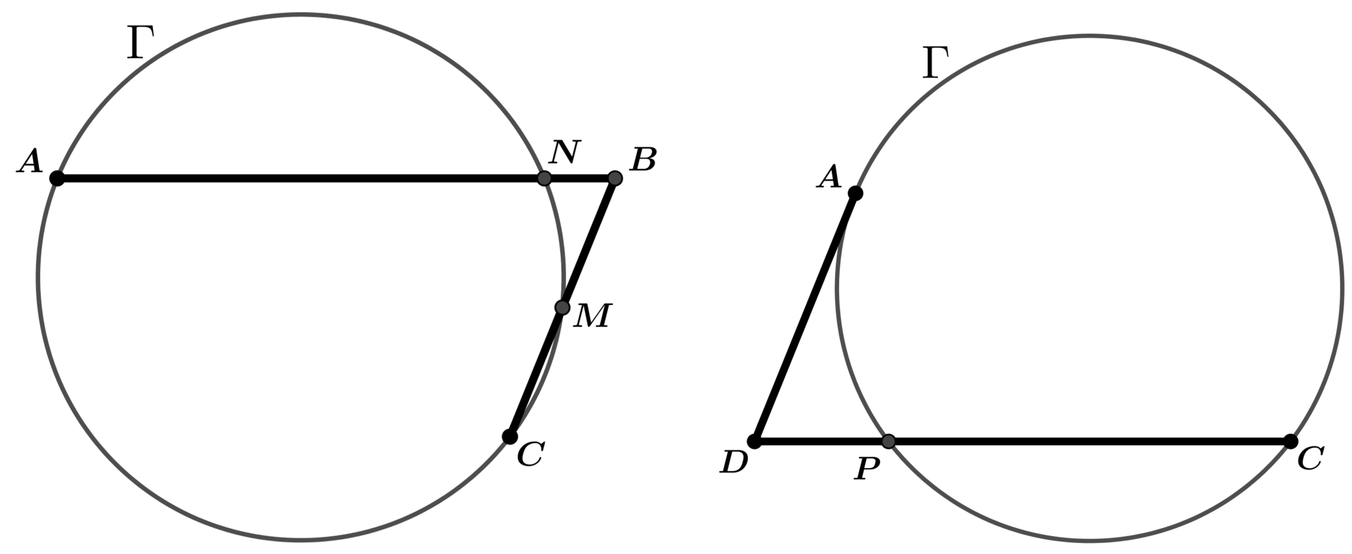
Universidade Federal de São Carlos, SP, Brasil

OBM - 2015 - Segunda Fase - Ensino Médio - Problema 2

Seja $ABCD$ um paralelogramo com $AB = 8$ e $BC = 4$. O círculo Γ passa por A, C e pelo ponto médio M de BC, e corta o lado CD no ponto $P \neq C$. Sabe-se que AD é tangente a Γ. Calcule a medida do segmento MP.



Uma solução. Iniciamos a solução considerando as potências dos pontos B e D em relação à Γ. Para isso, seja N o ponto de interseção do lado AB com a circunferência.



Temos

$$BM \cdot BC = BN \cdot AB \qquad (1)$$

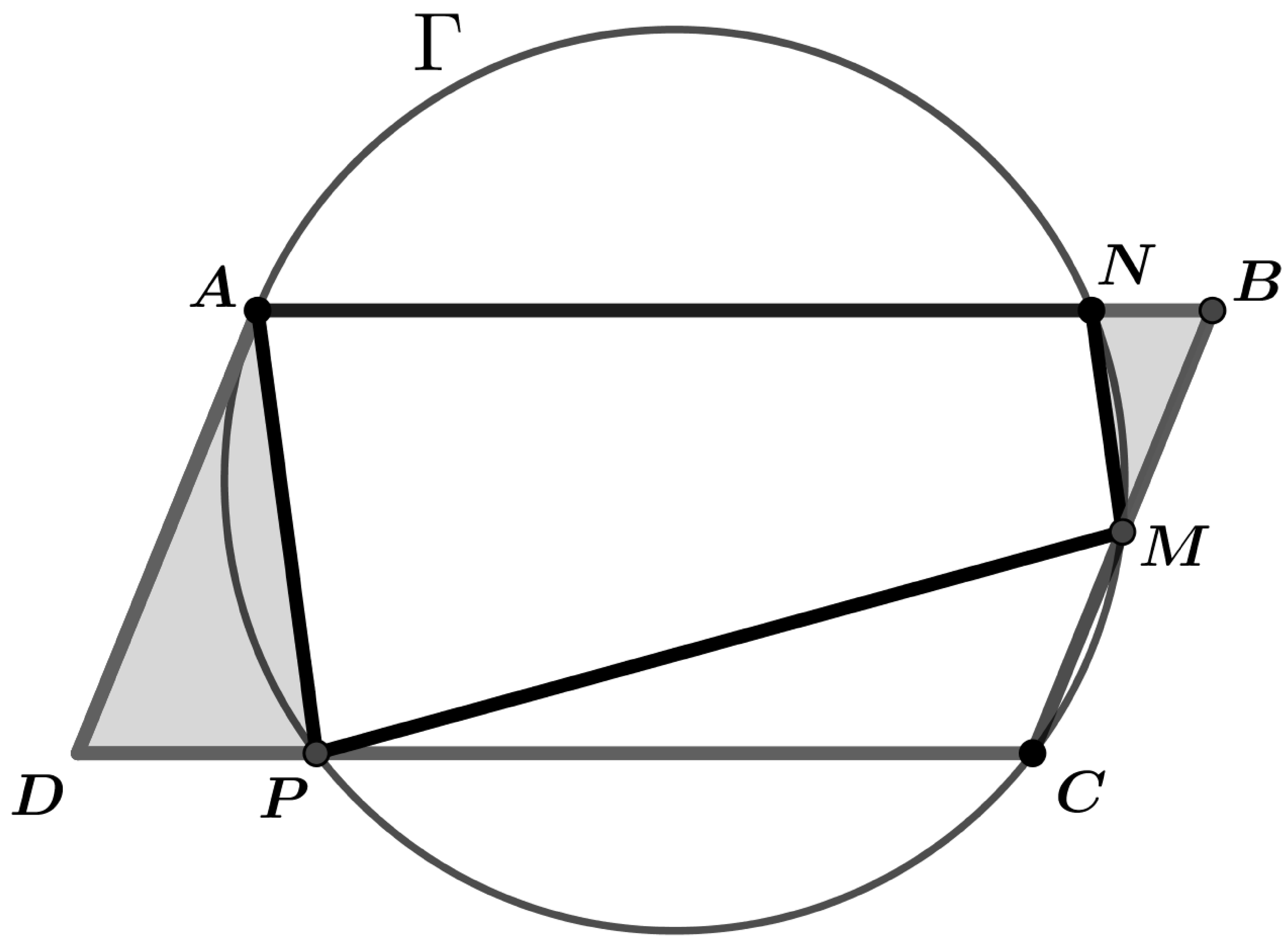
e como o lado AD tangencia a circunferência no ponto A,

$$AD \cdot AD = DP \cdot CD \qquad (2)$$

Dividindo a equação (1) pela equação (2) e usando que $AB = DC$ e $AD = BC$ temos

$$\frac{BM}{AD} = \frac{BN}{DP} \qquad (3)$$

A proporção (3) mais a igualdade das medidas dos ângulos $\widehat{B}$ e $\widehat{D}$ garantem que os triângulos ADP e MBN são semelhantes. Mais ainda, como $AD//BM$ e $DP//BN$ segue que os lados AP e MN também são paralelos.



Logo $ANMP$ é um trapézio inscrito na circunferência, sendo portanto um trapézio isósceles.

Assim

$$MP = AN = AB - BN \qquad (4)$$

Como $AB = 8$, $BC = 4$ e $BM = 2$, segue de (1) que

$$BN = \frac{BM \cdot BC}{AB} = \frac{2 \cdot 4}{8} = 1$$

Finalmente, segue de (4) que

$$MP = 8 - 1 = 7$$