Problemas e Soluções da OBM - Olimpíada Brasileira de Matemática

Vinícius Marques da Silva

vinicius-marques_@hotmail.com

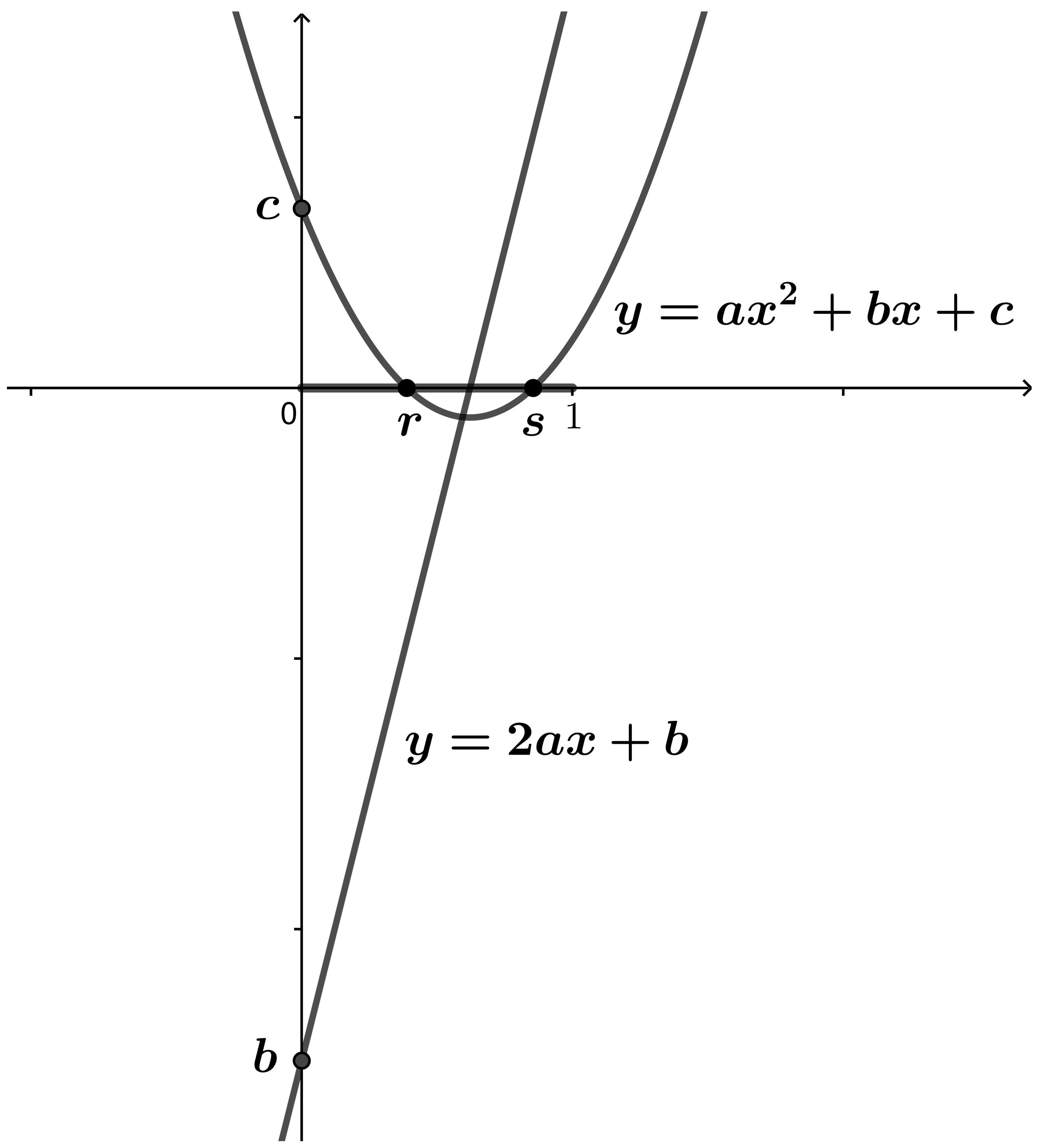
Sob orientação do Prof. Paulo A S Caetano - tutor do PET Matemática

Universidade Federal de São Carlos, SP, Brasil

OBM - 2012 - Segunda Fase - Ensino Médio - Problema 1

Considere a equação $ax^2+bx+c=0$, em que a, b e c são reais e $a>0$. Suponha que esta equação tenha duas raízes reais r e s tais que $0<r<1$ e $0<s<1$. Mostre que $b+c<0$.

Considere uma parábola $y = ax^2+bx+c$ com $a>0$ intersectando o eixo horizontal em dois pontos com abscissas $0<r\leq s<1$, como na figura.



Considere também a reta $y=2ax+b$, que intercepta o eixo horizontal exatamente no valor correspondente à abcissa do vértice da parábola, ou seja, o ponto médio entre r e s.

Devemos mostrar, então, que a ordenada b, em valor absoluto, onde a reta corta o eixo vertical é sempre maior do que a ordenada c onde a parábola corta o eixo vertical.

Iniciamos observando que

$$r+s=\frac{-b}{a} \quad , \quad r\cdot s=\frac{c}{a} \tag{1}$$

Segue diretamente de (1) que

$$b=-a\cdot(r+s) \quad , \quad c=ars$$

e, portanto,

$$b+c=a\cdot(rs-r-s) \tag{2}$$

Assim, como $a>0$, precisamos mostrar que $(rs-r-s)<0$, ou seja, que a soma $r+s$ é maior do que o produto rs. Para demonstrar esse fato, vamos colocar s em evidência no parênteses de (2)

$$rs-r-s=s\cdot(r-1)-r \tag{3}$$

Como $0<r<1$ e $s>0$ segue que o lado direito de (3) é um número real negativo e, portanto,

$$rs-r-s<0 \tag{4}$$

concluindo assim a resolução do problema.

Interessante observar que o resultado continua válido reduzindo a hipótese de s para $s>0$, pois não é usado em nenhum momento que $s<1$.