

Universidade Federal de São Carlos

V Semana de Matemática

Notas de Aula do Minicurso

O gap fundamental para uma família especial de operadores de segunda ordem na forma divergente em um domínio convexo no espaço hiperbólico.

Prof. Dr. Júlio César Marinho da Fonseca - DM - UEA, Parintins - AM
Prof. Dr. José Nazareno Vieira Gomes - DM - UFSCar, São Carlos - SP

Agosto
2022

Prefácio

Nestas notas calculamos uma estimativa para o gap fundamental de uma classe de operadores diferenciais elípticos de segunda ordem definidos sobre uma família de domínios convexos no espaço Hiperbólico bidimensional. Nas preliminares estabelecemos as ferramentas básicas para trabalhar nesta linha de pesquisa, onde abordamos os seguintes tópicos: Operadores diferenciais em Superfícies: gradiente, divergente, Laplaciano e Hessiano; Operadores elípticos de segunda ordem na forma divergente; Além dos conceitos básicos sobre a caracterização variacional de autovalores.

Os pré-requisitos para ler estas notas de aula são Álgebra Linear, Equações Diferenciais Ordinárias, Cálculo Diferencial no \mathbb{R}^2 e Geometria Diferencial. As referências básicas são Araújo [2], Manfredo do Carmo [8] e Rodriguez [19]. Como leitura complementar indicamos os livros de Manfredo do Carmo [9], Peter Petersen [18], Jorge Sotomayor [21] e a Tese de doutorado do primeiro autor [12].

O minicurso consiste do terceiro capítulo da tese de doutorado do primeiro autor, sob a orientação do segundo autor, apresentada ao Programa de Doutorado em Matemática em Associação Ampla UFPA-UFAM, como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Matemática. O primeiro autor gostaria de expressar seus sinceros agradecimentos ao segundo autor pelo constante acompanhamento durante este minicurso e o doutorado, seu valioso tempo despendido na leitura destas notas de aula, comentários úteis e constantes encorajamentos. Os autores agradecem à UFSCar pela calorosa hospitalidade, onde parte deste trabalho foi escrito.

Este trabalho foi parcialmente apoiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), do Ministério da Ciência, Tecnologia e Inovação do Brasil.

Conteúdo

Prefácio	1
1 Preliminares	1
1.1 Operadores Diferenciais em Superfícies	1
1.2 Operador elíptico de segunda ordem na forma divergente	2
1.3 Conceitos básicos sobre uma equação diferencial parcial elíptica na forma divergente	2
1.4 Caracterização variacional dos autovalores	3
1.5 Teorema da comparação de Sturm	5
2 O gap fundamental para uma família especial de operadores de segunda ordem na forma divergente em um domínio convexo no espaço hiperbólico	7
2.1 A identificação dos primeiros dois autovalores.	10
2.2 Estimativas sobre o primeiro e segundo autovalores.	10
2.3 Estimativa do diâmetro por Bourni et al.	12
2.4 Estimativa do gap fundamental.	12
Bibliografia	17

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, apresentaremos uma série de resultados em superfícies que serão utilizadas ao longo do texto para demonstrar nossos principais resultados. Indicamos como leituras básicas: Araújo [2], Carmo [8] e Rodriguez [19] e como leituras complementares: Carmo [9], Lee [17] e Petersen [18]. Outras boas referências serão citadas em momento oportuno.

1.1 Operadores Diferenciais em Superfícies

Consideramos Σ uma superfície com uma métrica \langle, \rangle e sua correspondente conexão de Levi-Civita ∇ . Denotamos por $C^\infty(\Sigma)$ o anel das funções diferenciáveis reais sobre Σ .

Definição 1.1. *Seja $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. O gradiente de f é o campo vetorial diferenciável ∇f , definido sobre Σ por*

$$\langle \nabla f, X \rangle = \nabla_X f = X(f) = df(X). \quad (1.1)$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$.

Além disso, para $f, h \in C^\infty(\Sigma)$, valem:

$$\nabla(f + h) = \nabla f + \nabla h \quad \text{e} \quad \nabla(fh) = f\nabla h + h\nabla f.$$

Definição 1.2. *Seja X um campo de vetores diferenciáveis em Σ . A divergência de X é a função diferenciável $\text{div}X : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$, definida para $p \in \Sigma$ por*

$$\text{div}X(p) = \text{tr}\{v \mapsto \nabla_v X(p)\}. \quad (1.2)$$

em que tr denota o traço do operador linear $v \in T_p\Sigma \mapsto \nabla_v X(p)$.

Além disso, para $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ e $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$, valem:

$$\text{div}(X + Y) = \text{div}X + \text{div}Y \quad \text{e} \quad \text{div}(fX) = f\text{div}X + \langle \nabla f, X \rangle. \quad (1.3)$$

Definição 1.3. *Seja $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. O Laplaciano de f é a função $\Delta f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$\Delta f = \text{div}\nabla f. \quad (1.4)$$

Para o que segue um $(1, 1)$ -tensor em Σ , é um operador linear (sobre o anel das funções $C^\infty(\Sigma)$) em $\mathfrak{X}(\Sigma)$ que varia diferenciavelmente sobre Σ . Enquanto que um $(0, 2)$ -tensor em Σ é uma aplicação bilinear (sobre o anel das funções $C^\infty(\Sigma)$) em $\mathfrak{X}(\Sigma) \times \mathfrak{X}(\Sigma)$ com valores em $C^\infty(\Sigma)$ que varia diferenciavelmente sobre Σ .

Definição 1.4. *Seja $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Definimos o Hessiano de f como o $(1, 1)$ -tensor, dado por*

$$(\nabla^2 f)(X) = \nabla_X \nabla f, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(\Sigma).$$

Ou como $(0, 2)$ -tensor simétrico, dado por

$$\nabla^2 f(X, Y) = \langle \nabla_X \nabla f, Y \rangle = \nabla_{X, Y}^2(f).$$

Para encerrar esta parte, observamos a seguinte relação entre o Laplaciano e o Hessiano de uma função diferenciável $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$

$$\Delta f = \text{tr}(\nabla^2 f).$$

1.2 Operador elíptico de segunda ordem na forma divergente

Nessa seção, definimos a η -divergência de um campo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, e o operador elíptico de segunda ordem na forma divergente.

Fixando uma função $\eta \in C^\infty(\Sigma)$ definimos a η -divergência de um campo X do seguinte modo:

$$\text{div}_\eta X := \text{div} X - \langle \nabla \eta, X \rangle.$$

Segue das propriedades da divergência de campos de vetores em (1.3), que para toda $f \in C^\infty(\Sigma)$ e $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ vale:

$$\text{div}_\eta(fX) = f \text{div}_\eta X + \langle \nabla f, X \rangle \text{ e } \text{div}(e^{-\eta} X) = e^{-\eta} \text{div}_\eta X. \quad (1.5)$$

Definição 1.5. *Seja φ uma função positiva e diferenciável em Σ e seja $\eta \in C^\infty(\Sigma)$. Definimos o operador \mathcal{L} por*

$$\mathcal{L}f := \text{div}_\eta(\varphi \nabla f) = \text{div}(\varphi \nabla f) - \varphi \langle \nabla \eta, \nabla f \rangle, \quad (1.6)$$

para toda $f \in C^\infty(\Sigma)$.

Segue das propriedades de div_η que para $f, \ell \in C^\infty(\Sigma)$.

$$\mathcal{L}(f\ell) = f\mathcal{L}\ell + h\mathcal{L}f + 2\varphi \langle \nabla f, \nabla \ell \rangle.$$

1.3 Conceitos básicos sobre uma equação diferencial parcial elíptica na forma divergente

Ao longo destas notas, Σ denota uma superfície com um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ que varia diferenciavelmente sobre a superfície. O subconjunto $\Omega \subset \Sigma$ denota um domínio limitado conexo com fronteira suave $\partial\Omega$.

Nosso objetivo é estudar o problema de autovalor com a condição de fronteira de Dirichlet em uma superfície riemanniana para o operador \mathcal{L} definido em (1.6).

$$\begin{cases} -\mathcal{L}u = \lambda u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.7)$$

Usaremos a medida com peso $dm = e^{-\eta} d\text{vol}\Omega$, para alguma função suave η . Se ν é o campo de vetores normal exterior a fronteira $\partial\Omega$, então, pela segunda equação em (1.5), podemos inferir que o teorema da divergência permanece verdadeiro para o operador \mathcal{L} , como segue

$$\int_{\Omega} \mathcal{L}f dm = \int_{\partial\Omega} \varphi \langle \nu, \nabla f \rangle d\mu, \quad (1.8)$$

em que $d\mu = e^{-\eta} d\partial\Omega$ é a medida com peso sobre a fronteira induzido por ν . Assim, a fórmula da integração por parte é

$$\int_{\Omega} \ell \mathcal{L}f dm = - \int_{\Omega} \varphi \langle \nabla \ell, \nabla f \rangle dm + \int_{\partial\Omega} \ell \varphi \langle \nabla f, \nu \rangle d\mu, \quad (1.9)$$

do qual se conclui que \mathcal{L} é auto-adjunto no espaço de Hilbert $\mathcal{H}_0^1(\Omega, dm)$. Assim o problema (1.7) tem espectro real e discreto $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \dots$, em que, cada λ_i é repetido de acordo com sua multiplicidade. Os auto-espaços associados a autovalores distintos são ortogonais em $L^2(\Omega, dm)$, que é uma soma direta de todos os auto-espaços. Referimos a dimensão de cada auto-espaço como a multiplicidade do autovalor. Além disso, para as autofunções normalizadas u_i temos.

$$\lambda_i = - \int_{\Omega} u_i \mathcal{L}u_i dm = \int_{\Omega} \varphi |\nabla u_i|^2 dm. \quad (1.10)$$

1.4 Caracterização variacional dos autovalores

Nesta seção, apresentamos alguns resultados sobre a caracterização variacional dos autovalores do operador \mathcal{L} em (1.6), bem como o importante Teorema de Courant para domínios nodais.

Teorema 1.1 (Teorema Max-Min). *Dados $u_1, \dots, u_{k-1} \in L^2(\Omega, dm)$, seja*

$$\nu = \inf - \frac{\int_{\Omega} \phi \mathcal{L} \phi dm}{\int_{\Omega} \phi^2 dm}. \quad (1.11)$$

em que \inf é tomado sobre o conjunto $\{\phi \in \mathcal{H}_0^1(\Omega, dm); \int_{\Omega} \phi u_i dm = 0, \forall i = 1, \dots, k-1\}$. Então, os autovalores do operador \mathcal{L} satisfazem

$$\nu \leq \lambda_k. \quad (1.12)$$

Se $\{u_i\}$ é uma base ortonormal de autofunções correspondente a cada autovalor λ_i com $i = 1, \dots, k-1$, então $\nu = \lambda_k$.

Demonstração. Considere as funções f na forma $\sum_{j=1}^k \alpha_j \phi_j$ em que ϕ_1, \dots, ϕ_k , são ortonormais e cada ϕ_j é uma autofunção de λ_j , para $j = 1, \dots, k$, e f é ortogonal às funções u_1, \dots, u_{k-1} em $L^2(\Sigma, dm)$, isto é,

$$\sum_j^k \alpha_j (\phi_j, u_l) = 0, \quad l = 1, \dots, k-1. \quad (1.13)$$

Considerando $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ como incógnitas e (ϕ_j, u_l) como os coeficientes dados, então o sistema (1.13) de k incógnitas e $k - 1$ equações é possível e indeterminado, portanto existe uma solução não trivial para o referido sistema. Deste modo a função f

$$f = \sum_{j=1}^k \alpha_j \phi_j. \quad (1.14)$$

está em $\{\phi \in \mathcal{H}_0^1(\Omega, dm); \int_{\Omega} \phi u_i dm = 0, \forall i = 1, \dots, k - 1\}$ e é não nula e assim podemos assumir que f está normalizada. Então

$$\nu \leq - \int_{\Omega} f \mathcal{L} f dm \leq \sum_{j=1}^k \lambda_j \alpha_j^2 \leq \lambda_k. \quad (1.15)$$

o que implica a desigualdade desejada.

Se $\{u_i\}$ é uma base ortonormal de autofunções correspondente a cada autovalor λ_i com $i = 1, \dots, k - 1$, a igualdade $\nu = \lambda_k$ decorre do Teorema de Rayleigh. □

O próximo resultado é conhecido como teorema da continuação única.

Teorema 1.2 ([3]). *Sejam dados L um operador diferencial linear elíptico de segunda ordem em um domínio U de \mathbb{R}^n , e uma aplicação suave $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$|Lu|^2 \leq C(|\nabla u|^2 + |u|^2), \quad (1.16)$$

em que $C > 0$ é constante. Se u se anula em um subconjunto aberto e não-vazio de U , então u é identicamente nula em U .

Observação 1.1. *Seja Σ uma superfície conexa com fecho compacto e fronteira suave por partes. Seja L um operador diferencial linear elíptico de segunda ordem em Σ e $u : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ uma solução suave satisfazendo a inequação (1.16). Se u é nula em um subconjunto aberto e não-vazio de Σ , então u é identicamente nula em Σ .*

A seguir, o teorema de Courant para domínios nodais. Ele foi utilizado na estimativa do gap fundamental para o operador \mathcal{L} escolhido no Capítulo 2.

Definição 1.6. *Dada uma função contínua $u : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$, o conjunto nodal de u é o conjunto $u^{-1}(0)$, e o domínio nodal de u são as componentes conexas dos conjuntos abertos $\Omega_+ = \{x \in \Omega, u(x) > 0\}$ e $\Omega_- = \{x \in \Omega, u(x) < 0\}$.*

Teorema 1.3 (Teorema de Courant, ver, e.g., [14], p. 14-15). *Seja u_k , $k \geq 1$ a k -ésima autofunção do operador \mathcal{L} com a condição de fronteira de Dirichlet. Então, u_k possui no máximo k domínios nodais.*

Demonstração. Fazemos a prova supondo que todos os domínios nodais de u_k são domínios conexos com fecho compacto e fronteira suave por partes, ver [10, p. 19-21]. Supondo por contradição que u_k tem pelo menos $k + 1$ domínios nodais, digamos $\Omega_1, \dots, \Omega_k, \Omega_{k+1}$. Para $1 \leq j \leq k$. Seja

$$\phi_j = \begin{cases} u_k|_{\Omega_j}, & \text{em } \Omega_j \\ 0, & \text{em } \bar{\Sigma} \setminus \Omega_j, \end{cases} \quad (1.17)$$

onde para cada $1 \leq j \leq k$, ϕ_j é uma autofunção de λ_k restrita ao domínio Ω_j . Deste modo podemos escolher números reais $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, tais que $u = \sum_{j=1}^k \alpha_j \phi_j$ seja ortogonal a u_1, \dots, u_{k-1} , além disso $u|_{\partial\Sigma} = 0$. Portanto, pelo Teorema de Rayleigh em [14], e a caracterização max-min de λ_k , teremos

$$\lambda_k \leq -\frac{\int_{\Omega} u \mathcal{L} u \, dm}{\int_{\Omega} u^2 \, dm} \leq \lambda_k. \quad (1.18)$$

Portanto, novamente pelo Teorema de Rayleigh, u é uma autofunção associada a λ_k , a qual se anula em Ω_{k+1} . Como $|\mathcal{L}u|^2 = \lambda_k^2 |u|^2$, o princípio da continuação única de Aronszajn garante que $u \equiv 0$, o que é uma contradição. \square

Teorema 1.4 (Resultados de Courant, ver, e.g., [14], p. 14-15). *A autofunção u_1 do operador \mathcal{L} com a condição de fronteira de Dirichlet tem sinal constante em Σ ; λ_1 , possui multiplicidade 1; u_2 tem exatamente 2 domínios nodais e λ_1 é caracterizado como sendo o único autovalor com uma autofunção de sinal constante.*

Demonstração. Sabemos que u_1 não muda de sinal e $\int_{\Sigma} u_1 u_2 \, dm = 0$. Se $-\mathcal{L}u_2 = \lambda_1 u_2$, o teorema anterior garante imediatamente que u_2 também não muda de sinal em Σ e não se anula em $\text{int}(\Sigma)$, mas isso contradiz a igualdade $\int_{\Sigma} u_1 u_2 \, dm = 0$. O teorema anterior garante que u_2 tem no máximo dois domínios nodais. Por outro lado, como $\int_{\Sigma} u_1 u_2 \, dm = 0$ e u_1 não muda de sinal em Σ , então u_2 deve mudar de sinal e portanto possui exatamente dois domínios nodais. \square

1.5 Teorema da comparação de Sturm

Por conveniência, enunciamos nesta seção os teorema da comparação de Sturm para equações de Jacobi e também o Teorema de Sturm-Liouville.

Teorema 1.5 (Teorema de comparação de Sturm, ver [21], p. 104). *Para $i = 1, 2$, seja f_i soluções não triviais de*

$$(p(x)f_i'(x))' + b_i(x)f_i(x) = 0,$$

onde $0 < p \in C^1$, b_1 e b_2 são contínuas e $b_1 \geq b_2$ para todo x . Se $x_1 < x_2$ são dois zeros consecutivos de f_2 , então f_1 se anula pelo menos uma vez em (x_1, x_2) , a menos que $b_1(x) = b_2(x)$ e $f_2(x) = kf_1(x)$, $k \in \mathbb{R}$.

Agora destacamos o conhecido problema de autovalor de Sturm-Liouville.

$$\begin{aligned} -(py')' + qy &= \lambda \rho y \text{ em } [a, b], \\ y(a) = y(b) &= 0. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Os coeficientes p e q e a função peso ρ cumprem as seguintes condições:

$$\begin{aligned} p \in C^1[a, b], \quad q, \rho \in C[a, b], \\ p(x) \geq d > 0 \text{ e } q(x) + c_2 \rho(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b], \\ \rho(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b). \end{aligned} \quad (1.20)$$

Teorema 1.6 (Sturm-Liouville, ver, e.g., [15], p. 174-175). *Com as hipóteses (1.20), o problema de autovalor de Sturm- Liouville (1.19) possui uma infinidade de autofunções linearmente independentes $u_n \in C^2[a, b]$ com autovalores $\lambda_n \in \mathbb{R}$, que satisfazem*

$$\int_a^b \rho u_n u_m = \delta_{nm}$$

$$\lambda_1 < \dots < \lambda_k < \dots \rightarrow \infty,$$

Além disso, a menos de uma constante, existe apenas uma autofunção u_n associada a cada λ_n e u_n tem exatamente $n - 1$ zeros em (a, b) .

Teorema 1.7. *(Teorema de Rayleigh, ver [15, p. 177]) Para qualquer $\phi \in \mathcal{H}_0^1(a, b)$, $\phi \neq 0$, o primeiro autovalor λ_1 do problema (1.19) satisfaz*

$$\lambda_1 \leq \frac{\int_a^b (p(\phi')^2 + q\phi^2) dx}{\int_a^b \rho\phi^2 dx}. \quad (1.21)$$

Igualdade ocorre se, e somente, ϕ é uma autofunção de λ_1 .

Capítulo 2

O gap fundamental para uma família especial de operadores de segunda ordem na forma divergente em um domínio convexo no espaço hiperbólico

Nesta seção, calculamos o gap fundamental para uma família especial de operadores \mathcal{L} , mais precisamente, estimamos a diferença entre os dois primeiros autovalores do problema de autovalor para uma certa classe de \mathcal{L} sobre uma classe de domínios limitados com condição de fronteira de Dirichlet.

Iniciamos com uma breve contextualização histórica. O problema $y''(t) + \lambda y(t) = 0$ em $(0, \ell)$, com $\lambda > 0$ e a condição de fronteira de Dirichlet $y(0) = y(\ell) = 0$, possui como solução $y(t) = \sum_n (A_n \sin(\sqrt{\lambda_n}t) + B_n \cos(\sqrt{\lambda_n}t))$, em que $\lambda_n = (n\pi)^2/\ell^2$, portanto, $\lambda_2 - \lambda_1 = 3\pi^2/\ell^2$. Este gap nos motiva a pensar no caso mais geral do Laplaciano em domínios convexos e limitados $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Para este caso, foi observado na década de 80 por Michiel van den Berg [5] que para muitos domínios convexos, $\lambda_2 - \lambda_1 \geq 3\pi^2/D^2$, onde D é o diâmetro de Ω . Isto também foi sugerido independentemente por Ashbaugh e Benguria [4] e Yau [22]. Isto ficou conhecido como a conjectura do gap fundamental.

Em 2011, Andrews e Clutterbuck [1] demonstraram tal conjectura e sugeriram que o resultado permanece verdadeiro para espaços com curvatura constante. Em 2019, Seto, Wang e Wei [20] demonstraram a nova conjectura para o caso de domínios convexos com diâmetro $D \leq \pi/2$ na esfera unitária \mathbb{S}^n , $n \geq 3$. Em 2020, He, Wei e Zhang [13] estenderam os resultados de Seto-Wang-Wei para domínios convexos com diâmetro $D < \pi$ na esfera unitária \mathbb{S}^n , $n \geq 3$. Em 2021, Dai, Seto e Wei [11] provaram a conjectura para qualquer domínio convexo limitado em \mathbb{S}^2 .

Entretanto, para o caso do espaço hiperbólico, Bourni *et al.* [6] construíram domínios convexos em $\mathbb{H}^2(-1)$, com diâmetro D , tal que $\lambda_2 - \lambda_1 < \frac{3\pi^2}{D^2}$, mostrando assim que o gap fundamental para o Laplaciano se comporta de maneira diferente em espaços com curvatura negativa. Recentemente, para o caso mais geral de domínios convexos em $\mathbb{H}^n(-1)$, $n \geq 2$, os mesmos autores demonstraram que $(\lambda_2 - \lambda_1)D^2$ pode ser arbitrariamente pequeno para domínios de qualquer diâmetro, ver Bourni et al. [7, Teorema 1.1]. Como a quantidade $(\lambda_2 - \lambda_1)D^2$ é invariante por reescalonamento da métrica, então este mesmo resultado também é verdadeiro para qualquer variedade Riemanniana completa simplesmente conexa de curvatura constante negativa.

A essência desses resultados nos motivaram a trabalhar no comportamento do gap

fundamental para o caso do nosso operador \mathcal{L} sobre domínios convexos no espaço Hiperbólico.

Aqui, nós encontramos uma classe especial de funções φ e funções deformadoras η que definem o operador $\mathcal{L} = \operatorname{div}(\varphi \nabla u) - \langle \nabla \eta, \varphi \nabla u \rangle$ sobre um domínio $\Omega \subset \mathbb{H}^2(-1)$, com diâmetro D , para respondermos positivamente às duas questões seguintes:

1) *Existe algum domínio convexo no espaço hiperbólico para o qual o gap fundamental para o operador $\operatorname{div}(\varphi \nabla u)$ satisfaça: $(\lambda_2 - \lambda_1)D^2 < 3\pi^2\delta$?*

2) *Existe alguma função deformadora η para o qual o gap fundamental para o operador $\operatorname{div}(\varphi \nabla u) - \langle \nabla \eta, \varphi \nabla u \rangle$ ainda satisfaça a desigualdade $(\lambda_2 - \lambda_1)D^2 < 3\pi^2\delta$ sobre algum domínio convexo no espaço hiperbólico?*

Como já falamos anteriormente, a primeira pergunta foi motivada pelo resultado de Bourni et al. [6], que responde o caso de $\varphi = \text{cte}$. Aqui, seguiremos a abordagem deste último trabalho com as devidas adaptações para o nosso caso. Devido a invariância de $(\lambda_2 - \lambda_1)D^2$, podemos sem perda de generalidade, trabalhar no espaço hiperbólico $\mathbb{H}^2(-1)$ com curvatura constante -1 , i.e., o semi-espaço superior $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ com a métrica $g_{ij} = y^{-2}\delta_{ij}$. Tal métrica nas coordenadas $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$, em que $r > 0$ e $0 < \theta < \pi$, se escreve como segue

$$ds^2 = \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{dr^2}{r^2} + \frac{d\theta^2}{\sin^2 \theta}, \quad (2.1)$$

de modo que $e_1 = r \sin \theta \frac{\partial}{\partial r}$ e $e_2 = \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}$ formam um referencial ortonormal, cujos símbolos de Christoffel não nulos são $\Gamma_{11}^2 = -\Gamma_{12}^1 = -\Gamma_{21}^1 = \cos \theta$. Trabalharemos para definir \mathcal{L} em $\mathbb{H}^2(-1)$ para alguma $\varphi \in C^\infty(\mathbb{H}^2)$, com $\varepsilon \leq \varphi \leq \delta$, a ser escolhida adequadamente.

Primeiro vamos calcular o $\operatorname{div}(\varphi \nabla u)$ de uma função suave u sobre $\mathbb{H}^2(-1)$. Para isso, escrevemos $\nabla u = u_1 e_1 + u_2 e_2$, em que $u_1 = e_1(u) = r \sin \theta u_r$ e $u_2 = e_2(u) = \sin \theta u_\theta$. Portanto,

$$\begin{aligned} \langle \nabla_{e_1} \nabla u, e_1 \rangle &= (u_{11} + u_2 \Gamma_{12}^1) = r^2 \sin^2 \theta u_{rr} + r \sin^2 \theta u_r - \sin \theta \cos \theta u_\theta, \\ \langle \nabla_{e_2} \nabla u, e_2 \rangle &= u_{22} = \sin^2 \theta u_{\theta\theta} + \sin \theta \cos \theta u_\theta. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \Delta u &= \langle \nabla_{e_1} \nabla u, e_1 \rangle + \langle \nabla_{e_2} \nabla u, e_2 \rangle \\ &= r^2 \sin^2 \theta u_{rr} + r \sin^2 \theta u_r - \sin \theta \cos \theta u_\theta + \sin^2 \theta u_{\theta\theta} + \sin \theta \cos \theta u_\theta \\ &= r^2 \sin^2 \theta u_{rr} + r \sin^2 \theta u_r + \sin^2 \theta u_{\theta\theta}. \end{aligned}$$

Além disso, $\varphi_1 = e_1(\varphi) = r \sin \theta \varphi_r$ e $\varphi_2 = e_2(\varphi) = \sin \theta \varphi_\theta$ de modo que

$$\langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle = u_1 \varphi_1 + u_2 \varphi_2 = r^2 \sin^2 \theta \varphi_r u_r + \sin^2 \theta \varphi_\theta u_\theta \quad (2.2)$$

e note que

$$\operatorname{div}(\varphi \nabla u) = \varphi \Delta u + \langle \nabla \varphi, \nabla u \rangle. \quad (2.3)$$

Sob a hipótese adicional de φ ser radialmente constante, obtemos $\varphi_r = 0$, donde a equação (2.3) se escreve como

$$\operatorname{div}(\varphi \nabla u) = \varphi (r^2 \sin^2 \theta u_{rr} + r \sin^2 \theta u_r) + \varphi \sin^2 \theta u_{\theta\theta} + \sin^2 \theta \varphi_\theta u_\theta. \quad (2.4)$$

Isso cumpre a nossa primeira etapa.

Passemos a estimar o gap fundamental para $\text{div}(\varphi \nabla u)$ em (2.4). Iniciamos com o seguinte problema de autovalor com condição de fronteira de Dirichlet:

$$\begin{aligned} \varphi(r^2 \sin^2 \theta u_{rr} + r \sin^2 \theta u_r) + \varphi \sin^2 \theta u_{\theta\theta} + \sin^2 \theta \varphi_\theta u_\theta + \lambda u &= 0, \quad \text{em } \Omega, \\ u &= 0, \quad \text{sobre } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Consideramos a família de domínios $\Omega_{\ell, \theta_0, \theta_1} = \{(r, \theta) : 1 < r < e^{\frac{\pi}{\ell}}, \theta_0 < \theta < \theta_1\}$, em que $\ell > 0$, $\theta_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$ e $\theta_1 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, ver Figura 2.1. Uma vez que as geodésicas são linhas verticais $x = cte$ ou semi-círculos centrados sobre o eixo x , segue que os conjuntos $\Omega_{\ell, \theta_0, \theta_1}$ são domínios convexos em $\mathbb{H}^2(-1)$.

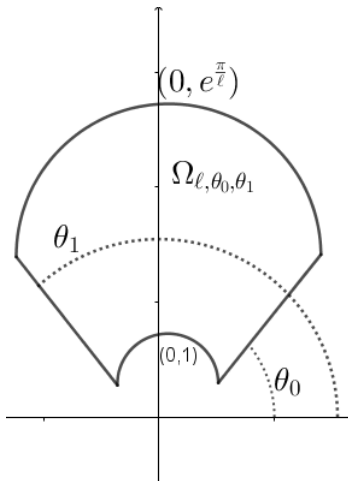


Figura 2.1: $\Omega_{\ell, \theta_0, \theta_1} = \{(r, \theta) : 1 < r < e^{\frac{\pi}{\ell}} \text{ e } \theta_0 < \theta < \theta_1\}$.

Como a métrica em (2.1) é um produto deformado, podemos utilizar o método da separação de variáveis (ver, e.g., [10, página 41]), escrevendo $u(r, \theta) = f(r)h(\theta)$, temos $u_r = f_r h$, $u_{rr} = f_{rr} h$, $u_\theta = f h_\theta$ e $u_{\theta\theta} = f h_{\theta\theta}$. Portanto, dividindo a primeira equação do Problema (2.5) por $\varphi \sin^2 \theta$, obtemos

$$(r^2 f_{rr} + r f_r)h + (h_{\theta\theta} + \frac{\varphi_\theta}{\varphi} h_\theta + \frac{\lambda}{\varphi} \csc^2 \theta h) f = 0, \quad (2.6)$$

como f só depende de r e h só depende de θ , segue que existe uma constante μ tal que podemos transformar o Problema (2.5) nas duas equações de autovalor:

$$r^2 f_{rr} + r f_r = -\mu f, \quad r \in (1, e^{\frac{\pi}{\ell}}) \quad (2.7)$$

$$h_{\theta\theta} + \frac{\varphi_\theta}{\varphi} h_\theta + \frac{\lambda}{\varphi} \csc^2 \theta h = \mu h, \quad \theta \in (\theta_0, \theta_1), \quad (2.8)$$

com a condição de fronteira de Dirichlet $f(1) = f(e^{\frac{\pi}{\ell}}) = 0$ e $h(\theta_0) = h(\theta_1) = 0$.

Como $1 < r < e^{\frac{\pi}{\ell}}$, podemos fazer a mudança de variável $f(r) = f(e^t)$, para $0 < t < \frac{\pi}{\ell}$. Daí, $f_t = r f_r$ e $f_{tt} = r f_r + r^2 f_{rr}$. Assim, pela equação (2.7), obtemos

$$f_{tt} = -\mu f, \quad 0 < t < \frac{\pi}{\ell}. \quad (2.9)$$

Segue de (2.9) e da condição de fronteira que $f(t) = \sin(\sqrt{\mu}t)$, com $\mu = (k\ell)^2 > 0$, onde k é um inteiro não nulo, i.e., $f(t) = \sin(k\ell t)$. Além disso, a equação (2.8) pode ser reescrita como

$$-(\varphi h_\theta)_\theta + \mu \varphi h = \lambda \csc^2 \theta h. \quad (2.10)$$

2.1 A identificação dos primeiros dois autovalores.

Para identificarmos os dois primeiros autovalores utilizaremos os resultados de Sturm-Liouville (Teorema 1.6) e os de Courant (Teorema 1.4) para domínios nodais.

De acordo com o Teorema 1.4, o primeiro autovalor λ_1 do problema (2.5) em $\Omega_{\ell, \theta_0, \theta_1}$ corresponde a uma autofunção estritamente positiva. Deste modo, $\mu = \ell^2$, pois $f > 0$ em $(0, \frac{\pi}{\ell})$, além disso, $h > 0$ em (θ_0, θ_1) , e pelo Teorema 1.6, temos que λ_1 é o menor $\lambda_1^{\ell^2}$ que resolve o seguinte problema:

$$\begin{aligned} -(\varphi h_\theta)_\theta + \ell^2 \varphi h &= \lambda \csc^2 \theta h, & \theta \in (\theta_0, \theta_1), \\ h(\theta_0) = h(\theta_1) &= 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Novamente pelo Teorema 1.4, sabemos que λ_2 corresponde a uma autofunção que muda uma única vez de sinal, portanto, f ou h devem mudar de sinal.

Se f mudar de sinal, então $\mu = 4\ell^2$ e $f(t) = \sin(2\ell t)$, ver (2.9). Neste caso, $h > 0$, com isso, o Teorema 1.6 garante que λ_2 é o menor $\lambda_1^{4\ell^2}$ que resolve o problema

$$\begin{aligned} -(\varphi h_\theta)_\theta + 4\ell^2 \varphi &= \lambda \csc^2 \theta h, & \theta \in (\theta_0, \theta_1) \\ h(\theta_0) = h(\theta_1) &= 0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Se h mudar o sinal, então f é positiva, sendo, portanto, dada por $\sin(\ell t)$ com $\mu = \ell^2$. Neste caso, λ_2 é dado por $\lambda_2^{\ell^2}$ resolvendo (2.11) com h mudando o sinal exatamente uma vez, de acordo com o Teorema 1.6. Consequentemente, o segundo autovalor é:

$$\lambda_2 = \min\{\lambda_1^{4\ell^2}, \lambda_2^{\ell^2}\}. \quad (2.13)$$

2.2 Estimativas sobre o primeiro e segundo autovalores.

Nesta seção, vamos estimar os dois primeiros autovalores do problema (2.5) com condição de fronteira de Dirichlet sobre um domínio a ser escolhido adequadamente. Para tanto, definimos um ângulo conveniente para simplificar a exposição. Seja

$$\theta_* = \min(\theta_0, \pi - \theta_1).$$

Como a função $\csc^2 \theta$ é decrescente no intervalo $(0, \pi/2]$ e crescente em $[\pi/2, \pi)$, temos que $1 \leq \csc^2 \theta \leq \csc^2(\theta_*)$, para todo $\theta \in [\theta_0, \theta_1]$.

Lema 2.1. *O primeiro autovalor do Problema (2.8), denotado por λ_1^μ , satisfaz*

$$\varepsilon \sin^2(\theta_*) \left(\mu + \frac{\pi^2}{(\theta_1 - \theta_0)^2} \right) \leq \lambda_1^\mu \leq \delta \left(\mu + \frac{\pi^2}{(\theta_1 - \theta_0)^2} \right). \quad (2.14)$$

Demonstração. Para a estimativa inferior, consideramos h uma solução de (2.8). Multiplicamos ambos os lados da equação (2.10) por h , e integramos de θ_0 a θ_1 , para obter

$$\lambda_1^\mu = \frac{\int_{\theta_0}^{\theta_1} \varphi (|h_\theta|^2 + \mu h^2) d\theta}{\int_{\theta_0}^{\theta_1} \csc^2 \theta h^2 d\theta} \geq \frac{\varepsilon}{\csc^2(\theta_*)} \left(\mu + \frac{\int_{\theta_0}^{\theta_1} (|h_\theta|^2) d\theta}{\int_{\theta_0}^{\theta_1} h^2 d\theta} \right) \geq \varepsilon \sin^2(\theta_*) \left(\mu + \frac{\pi^2}{(\theta_1 - \theta_0)^2} \right),$$

em que, na última desigualdade utilizamos a desigualdade de Wirtinger $\int_0^D (h')^2 dx \geq \frac{\pi^2}{D^2} \int_0^D h^2 dx$.

Para a estimativa superior, escolhamos a função teste $\phi = \sin(\frac{\theta-\theta_0}{\theta_1-\theta_0}\pi)$. Sabendo que o primeiro autovalor minimiza o quociente de Rayleigh, ver Teorema 1.7, e que $\csc^2 \theta \geq 1$, obtemos

$$\lambda_1^\mu \leq \frac{\int_{\theta_0}^{\theta_1} \varphi(|\phi_\theta|^2 + \mu\phi^2)d\theta}{\int_{\theta_0}^{\theta_1} \csc^2 \theta \phi^2 d\theta} \leq \delta \left(\mu + \frac{\int_{\theta_0}^{\theta_1} (|\phi_\theta|^2)d\theta}{\int_{\theta_0}^{\theta_1} \phi^2 d\theta} \right) = \delta \left(\mu + \frac{\pi^2}{(\theta_1 - \theta_0)^2} \right).$$

□

Lema 2.2. *O segundo autovalor do Problema (2.8), denotado por λ_2^μ , satisfaz*

$$\varepsilon \sin^2 \theta_* \left(\mu + \frac{4\pi^2}{(\theta_1 - \theta_0)^2} \right) \leq \lambda_2^\mu \leq \delta \left(\mu + \frac{4\pi^2}{(\theta_1 - \theta_0)^2} \right). \quad (2.15)$$

Demonstração. Seja h_2^μ uma autofunção correspondente ao segundo autovalor λ_2^μ . Pelo Teorema 1.6, existe um único $\theta_2 \in (\theta_0, \theta_1)$ tal que $h_2^\mu(\theta_2) = 0$, além disso, o autovalor λ_2^μ coincide com o primeiro autovalor de $-(\varphi h_\theta)_\theta + \mu\varphi h = \lambda \csc^2 \theta h$ com condição de fronteira de Dirichlet em qualquer $[\theta_0, \theta_2]$ ou $[\theta_2, \theta_1]$. Os limites inferior e superior em (2.15) são obtidos por meio do Lema 2.1 considerando, respectivamente, os intervalos com menor e maior comprimento dentre $[\theta_0, \theta_2]$ e $[\theta_2, \theta_1]$ e notando que $\min\{\theta_2 - \theta_0, \theta_1 - \theta_2\} \leq (\theta_1 - \theta_0)/2$ e $\max\{\theta_2 - \theta_0, \theta_1 - \theta_2\} \geq (\theta_1 - \theta_0)/2$. Para isso, basta observar que $\lambda_2^\mu([\theta_0, \theta_2]) = \lambda_1^\mu([\theta_0, \theta_2])$ e $\lambda_2^\mu([\theta_2, \theta_1]) = \lambda_1^\mu([\theta_2, \theta_1])$. □

Agora vamos escolher adequadamente o λ_2 . Para isso, fixamos $\theta_* > \frac{\pi}{6}$ e $\varepsilon > \delta/4$, de modo que $\frac{4\varepsilon \sin^2 \theta_* - \delta}{4\delta - \varepsilon \sin^2 \theta_*} > 0$, então podemos escolher ℓ tal que

$$\frac{\pi^2}{(\theta_1 - \theta_0)^2} \frac{4\varepsilon \sin^2 \theta_* - \delta}{4\delta - \varepsilon \sin^2 \theta_*} \geq \ell^2. \quad (2.16)$$

Tomando $\mu = 4\ell^2$ em (2.14) e $\mu = \ell^2$ em (2.15), obtemos

$$\begin{aligned} \lambda_2^{\ell^2} - \lambda_1^{4\ell^2} &\geq \varepsilon \sin^2 \theta_* \left(\ell^2 + \frac{4\pi^2}{(\theta_1 - \theta_0)^2} \right) - \delta \left(4\ell^2 + \frac{\pi^2}{(\theta_1 - \theta_0)^2} \right) \\ &= \ell^2 \left(\varepsilon \sin^2 \theta_* - 4\delta \right) + \frac{\pi^2}{(\theta_1 - \theta_0)^2} \left(4\varepsilon \sin^2 \theta_* - \delta \right) \\ &= \ell^2 \left(\varepsilon \sin^2 \theta_* - 4\delta \right) + \frac{\pi^2}{(\theta_1 - \theta_0)^2} \left(\frac{4\varepsilon \sin^2 \theta_* - \delta}{4\delta - \varepsilon \sin^2 \theta_*} \right) (4\delta - \varepsilon \sin^2 \theta_*). \end{aligned}$$

Assim, usando (2.16), concluímos que

$$\lambda_2^{\ell^2} - \lambda_1^{4\ell^2} \geq \ell^2 \left(\varepsilon \sin^2 \theta_* - 4\delta \right) + \ell^2 \left(4\delta - \varepsilon \sin^2 \theta_* \right) = 0.$$

Portanto, o segundo autovalor do Problema (2.5) em $\Omega_{\ell, \theta_0, \theta_1}$ deve ser $\lambda_1^{4\ell^2}$, ver (2.13). Geometricamente, isso corresponde a um domínio, conforme mostrado na Figura 2.1, em que a abertura do ângulo é pequena em comparação com o comprimento vertical.

A partir de agora estaremos considerando o operador $\operatorname{div}(\varphi \nabla u)$ sobre a família de domínios

$$\Omega_{\ell, \theta_0, \theta_1} = \left\{ (r, \theta) : 1 < r < e^{\frac{\pi}{\ell}} \text{ e } \theta_0 < \theta < \theta_1, \text{ satisfazendo (2.16)} \right\}. \quad (2.17)$$

2.3 Estimativa do diâmetro por Bourni et al.

Para estimar o gap fundamental para $\operatorname{div}(\varphi \nabla u)$, com $\varepsilon \leq \varphi \leq \delta$ e $\varphi_r = 0$, precisaremos da estimativa de diâmetro de $\Omega_{\ell, \theta_0, \theta_1}$ calculada por Bourni *et al.* [6] na configuração mais geral deste domínio. Eles utilizaram a fórmula da distância entre dois pontos quaisquer no plano hiperbólico, a saber:

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &= \operatorname{arcosh}\left(1 + \frac{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}{2y_1 y_2}\right) \\ &= \operatorname{arcosh}\left(\frac{(x_1^2 + y_1^2) + (x_2^2 + y_2^2) - 2x_1 x_2}{2y_1 y_2}\right). \end{aligned}$$

Eles mostraram que o diâmetro $D_{\ell, \theta_0, \theta_1}$ de cada domínio da família $\Omega_{\ell, \theta_0, \theta_1}$ satisfaz:

$$\operatorname{arcosh}(\csc \theta_* \cosh(\pi/\ell)) \leq D_{\ell, \theta_0, \theta_1} \leq \operatorname{arcosh}(\csc^2 \theta_* \cosh(\pi/\ell) + \cot^2 \theta_*).$$

Além disso, eles obtiveram uma estimativa mais explícita para este diâmetro, a saber:

$$\ell^2 \left(1 + \frac{\ell}{\pi} (2 \ln(\csc \theta_*) + \eta)\right)^{-2} \leq \frac{\pi^2}{D_{\ell, \theta_0, \theta_1}^2} \leq \ell^2 \left(1 + \frac{\ell}{\pi} (\ln(\csc \theta_*))\right)^{-2} \leq \ell^2. \quad (2.18)$$

em que $\eta = \eta(\theta_*, \ell) = \frac{\cos^2 \theta_*}{\sinh(\frac{\pi}{\ell})} + \frac{\sqrt{1 - \sin^4 \theta_*}}{b + \sqrt{b^2 - 1}}$, com $b = \cosh(\frac{\pi}{\ell}) + \cos^2 \theta_*$, sendo esta estimativa fundamental para concluir que:

Lema 2.3. (Bourni et al. [6]) $\frac{\pi^2}{\ell^2 D_{\ell, \theta_0, \theta_1}^2} \rightarrow 1$ quando $\ell \rightarrow 0$ ou $\theta_* \rightarrow \frac{\pi}{2}$.

2.4 Estimativa do gap fundamental.

Lema 2.4. O gap fundamental para $\operatorname{div}(\varphi \nabla u)$, com $\varepsilon \leq \varphi \leq \delta$ e $\varphi_r = 0$, sobre cada domínio em (2.17) satisfaz

$$3\varepsilon \sin^2 \theta_* \ell^2 < \lambda_2 - \lambda_1 < 3\delta \ell^2. \quad (2.19)$$

Em particular, quando $\varepsilon = \delta$ e fazendo $\theta_* \rightarrow \frac{\pi}{2}$, então o gap fundamental se aproxima de $3\delta \ell^2$.

Demonstração. Nas condições do presente lema temos $\lambda_1 = \lambda_1^{\ell^2}$ e $\lambda_2 = \lambda_1^{4\ell^2}$. Sejam $h^{(1)}$ e $h^{(2)}$ as respectivas autofunções correspondentes a esses autovalores, segue de (2.11) e (2.12) que

$$\begin{aligned} (\varphi h_\theta^{(1)})_\theta + (\lambda_1 \csc^2 \theta - \ell^2 \varphi) h^{(1)} &= 0, \\ (\varphi h_\theta^{(2)})_\theta + (\lambda_2 \csc^2 \theta - 4\ell^2 \varphi) h^{(2)} &= 0. \end{aligned}$$

Para obtermos a desigualdade inferior, relembramos que $\csc^2 \theta \leq \csc^2 \theta_*$. Argumentamos do seguinte modo: Suponhamos por contradição que $\lambda_2 \leq \lambda_1 + 3\varepsilon \ell^2 \sin^2 \theta_*$, então

$$\lambda_2 \csc^2 \theta - 4\ell^2 \varphi \leq \lambda_1 \csc^2 \theta + 3\ell^2 \varepsilon \sin^2 \theta_* \csc^2 \theta - 4\ell^2 \varphi \leq \lambda_1 \csc^2 \theta - \ell^2 \varphi,$$

além disso, observamos que $\lambda_1 \csc^2 \theta + 3\ell^2 \varepsilon \sin^2 \theta_* \csc^2 \theta - 4\ell^2 \varphi = \lambda_1 \csc^2 \theta - \ell^2 \varphi$ é equivalente a $\sin^2 \theta = \frac{\varepsilon}{\varphi} \sin^2 \theta_*$, como $\frac{\varepsilon}{\varphi} \leq 1$, segue que $\sin \theta \leq \sin \theta_*$, então, $\theta \leq \theta_*$ ou $\theta \geq \pi - \theta_*$ e portanto, $\theta \leq \theta_0$ ou $\theta \geq \theta_1$. Logo a desigualdade é estrita no intervalo (θ_0, θ_1) , o que nos permite utilizar o Teorema 1.5 para concluir que $h^{(1)}$ se anula uma vez no intervalo (θ_0, θ_1) , o que contradiz o Teorema 1.6. A desigualdade superior é provada da mesma forma usando que $\csc^2 \theta \geq 1$. \square

Com intuito de obtermos a estimativa do gap fundamental para o operador $\text{div}(\varphi \nabla u)$ em (2.4) sobre cada domínio da família em (2.17), utilizamos argumentos variacionais como em [16, Seção 3] e [6, Seção 5], bem como os resultados do teorema de Sturm-Liouville, ver Teorema 1.6. A técnica consiste em considerar a família a um parâmetro de problemas

$$\begin{aligned} (\varphi h_\theta)_\theta + \lambda \csc^2 \theta h &= \mu(s) \varphi(\theta) h \quad \text{em } (\theta_0, \theta_1) \\ h(\theta_0) = h(\theta_1) &= 0, \end{aligned} \quad (2.20)$$

em que $h(\theta) = h^s(\theta)$, $\lambda = \lambda(s)$ e $\mu(s)$ é uma curva suave tal que $\mu(0) = \ell^2$ e $\mu(1) = 4\ell^2$, com $0 \leq s \leq 1$. Para cada s , seja $\lambda(s)$ o menor autovalor, que é suave em s , e $h^s(\theta)$ a sua primeira autofunção que é garantida pelo Teorema 1.6 satisfazendo $\int_{\theta_0}^{\theta_1} \csc^2 \theta (h^s(\theta))^2 d\theta = 1$ e $h^s(\theta) > 0$ sobre (θ_0, θ_1) . Denotando por \dot{f} as derivadas com respeito a s de uma função $f(s)$, temos

$$(\varphi(\theta) \dot{h}_\theta)_\theta + \lambda(s) \csc^2 \theta \dot{h} - \mu(s) \varphi(\theta) \dot{h} + \dot{\lambda}(s) \csc^2 \theta h = \dot{\mu}(s) \varphi(\theta) h \quad \text{sobre } (\theta_0, \theta_1). \quad (2.21)$$

Multiplicamos (2.21) por h e integramos de θ_0 a θ_1 , obtemos

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} ((\varphi(\theta) \dot{h}_\theta)_\theta + \lambda(s) \csc^2 \theta \dot{h} - \mu(s) \varphi(\theta) \dot{h}) h d\theta + \int_{\theta_0}^{\theta_1} \dot{\lambda}(s) \csc^2 \theta h^2 d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \dot{\mu}(s) \varphi(\theta) h^2 d\theta. \quad (2.22)$$

Integrando por parte e usando (2.20), obtemos

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} (\varphi(\theta) \dot{h}_\theta)_\theta h d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta_1} (\varphi(\theta) h_\theta)_\theta \dot{h} d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta_1} (\mu(s) \varphi(\theta) h \dot{h} - \lambda(s) \csc^2 \theta h \dot{h}) d\theta.$$

Logo, a equação (2.22) reduz-se a

$$\dot{\mu}(s) \int_{\theta_0}^{\theta_1} \varphi(\theta) h^2 d\theta = \dot{\lambda}(s) \int_{\theta_0}^{\theta_1} \csc^2 \theta h^2 d\theta = \dot{\lambda}(s).$$

Note que podemos tomar a curva $\mu(s) = \ell^2 + 3\ell^2 s$, como em [6], de modo que

$$\dot{\lambda}(s) = 3\ell^2 \int_{\theta_0}^{\theta_1} \varphi(\theta) (h^s(\theta))^2 d\theta.$$

Integrando de 0 a 1, e notando que $\lambda(0) = \lambda_1$ e $\lambda(1) = \lambda_2$, encontramos

$$\lambda_2 - \lambda_1 \leq 3\ell^2 \delta \max_{s \in [0,1]} \int_{\theta_0}^{\theta_1} (h^s(\theta))^2 d\theta. \quad (2.23)$$

Agora basta trabalharmos para estimar o lado direito de (2.23). Como consequência da próxima proposição e do Lema 2.3 obteremos o resultado principal desta seção.

Proposição 2.1. *Independente de ℓ , é válido que*

$$\max_{s \in [0,1]} \int_{\theta_0}^{\theta_1} (h^s(\theta))^2 d\theta < 1. \quad (2.24)$$

Demonstração. Notamos primeiro que $\int_{\theta_0}^{\theta_1} (h^s(\theta))^2 d\theta \leq \int_{\theta_0}^{\theta_1} \csc^2 \theta (h^s(\theta))^2 d\theta = 1$. Vamos mostrar que $\int_{\theta_0}^{\theta_1} (h^s(\theta))^2 d\theta < 1$ para todo $s \in [0, 1]$. Para tanto, consideramos um ângulo α tal que

$$\theta_0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

Suponha por absurdo que a igualdade seja verdadeira para algum s , então

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} \csc^2 \theta (h^s(\theta))^2 d\theta = 1 = \int_{\theta_0}^{\theta_1} (h^s(\theta))^2 d\theta.$$

Lembrando que $\frac{\pi}{2} < \theta_1$, de modo que, podemos escrever

$$\int_{\theta_0}^{\alpha} \csc^2 \theta (h^s(\theta))^2 d\theta + \int_{\alpha}^{\theta_1} \csc^2 \theta (h^s(\theta))^2 d\theta = \int_{\theta_0}^{\alpha} (h^s(\theta))^2 d\theta + \int_{\alpha}^{\theta_1} (h^s(\theta))^2 d\theta.$$

A escolha de α nos permite concluir que $\csc^2 \theta \geq \csc^2 \alpha$, no intervalo $(\theta_0, \alpha]$, além disso, $1 \leq \csc^2 \theta$, então

$$\csc^2 \alpha \int_{\theta_0}^{\alpha} (h^s(\theta))^2 d\theta + \int_{\alpha}^{\theta_1} (h^s(\theta))^2 d\theta \leq \int_{\theta_0}^{\alpha} (h^s(\theta))^2 d\theta + \int_{\alpha}^{\theta_1} (h^s(\theta))^2 d\theta.$$

Portanto,

$$(\csc^2 \alpha - 1) \int_{\theta_0}^{\alpha} (h^s(\theta))^2 d\theta \leq 0,$$

o que é um absurdo, pois $\csc^2 \alpha > 1$. Logo, $\int_{\theta_0}^{\theta_1} (h^s(\theta))^2 d\theta < 1$, para todo $s \in [0, 1]$, o que é suficiente para obter o resultado da proposição. \square

Teorema 2.1. *O gap fundamental para o operador $\operatorname{div}(\varphi \nabla u)$, com $\varepsilon \leq \varphi \leq \delta$ e $\varphi_r = 0$, sobre cada conjunto da família de domínios convexos $\lim_{\theta_* \rightarrow \frac{\pi}{2}} \Omega_{\ell, \theta_0, \theta_1}$, com $\Omega_{\ell, \theta_0, \theta_1}$ definido em (2.17), satisfaz*

$$\lambda_2 - \lambda_1 < \frac{3\delta\pi^2}{D^2}, \quad (2.25)$$

onde $D = \lim_{\theta_* \rightarrow \frac{\pi}{2}} D_{\ell, \theta_0, \theta_1}$ é o diâmetro de cada conjunto da família $\lim_{\theta_* \rightarrow \frac{\pi}{2}} \Omega_{\ell, \theta_0, \theta_1}$.

Demonstração. Pela inequação (2.23) e Proposição 2.1 obtemos

$$\lambda_2 - \lambda_1 < 3\ell^2\delta.$$

Por outro lado, pelo Lema 2.3

$$3\ell^2\delta = \lim_{\theta_* \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{3\pi^2\delta}{D_{\ell, \theta_0, \theta_1}^2} \quad (2.26)$$

o que é suficiente para concluir o resultado do teorema. \square

Como aplicação do Teorema 2.1 provamos o seguinte resultado para o operador \mathcal{L} definido em (1.6), com $\varphi_r = 0$.

Corolário 2.1. *Considere o operador $\operatorname{div}(\varphi\nabla u)$, com $\varepsilon \leq \varphi \leq \delta$ e $\varphi_r = 0$, sobre cada conjunto da família de domínios convexos $\lim_{\theta_* \rightarrow \frac{\pi}{2}} \Omega_{\ell, \theta_0, \theta_1}$, com $\Omega_{\ell, \theta_0, \theta_1}$ definido em (2.17). Existe uma função deformadora η tal que o gap fundamental para $\operatorname{div}(\varphi\nabla u)$ permanece invariante por uma perturbação de primeira ordem deste operador, mais precisamente, para o operador $\mathcal{L}u = \operatorname{div}(\varphi\nabla u) - \langle \nabla \eta, \varphi\nabla u \rangle$, é válido que*

$$\lambda_2 - \lambda_1 < \frac{3\delta\pi^2}{D^2}, \quad (2.27)$$

onde $D = \lim_{\theta_* \rightarrow \frac{\pi}{2}} D_{\ell, \theta_0, \theta_1}$ é o diâmetro de cada conjunto da família $\lim_{\theta_* \rightarrow \frac{\pi}{2}} \Omega_{\ell, \theta_0, \theta_1}$.

Demonstração. Afirmamos que qualquer solução da equação

$$2\operatorname{div}(\varphi\nabla\eta) - \langle \nabla\eta, \varphi\nabla\eta \rangle = 0 \quad (2.28)$$

pode ser tomada como função deformadora tal que o gap fundamental do operador $\mathcal{L}u = \operatorname{div}(\varphi\nabla u) - \langle \nabla\eta, \varphi\nabla u \rangle$, com $\varepsilon \leq \varphi \leq \delta$ e $\varphi_r = 0$, sobre cada conjunto da família de domínios convexos $\lim_{\theta_* \rightarrow \frac{\pi}{2}} \Omega_{\ell, \theta_0, \theta_1}$, em que $\Omega_{\ell, \theta_0, \theta_1}$ é definida em (2.17), satisfaz a estimativa desejada. De fato, tomando u tal que $-\lambda u = \operatorname{div}(\varphi\nabla u)$, e a mudança de variável, $u = ve^{-\frac{\eta}{2}}$, juntamente com a propriedade da divergência de um campo de vetores (1.3), obtemos

$$\operatorname{div}(\varphi\nabla u) = e^{-\frac{\eta}{2}} \left(\operatorname{div}(\varphi\nabla v) - \langle \nabla v, \varphi\nabla\eta \rangle \right) - \frac{e^{-\frac{\eta}{2}}v}{4} \left(2\operatorname{div}(\varphi\nabla\eta) - \langle \nabla\eta, \varphi\nabla\eta \rangle \right).$$

Se η resolve a equação (2.28), então $-\lambda e^{-\frac{\eta}{2}}v = -\lambda u = \operatorname{div}(\varphi\nabla u) = e^{-\frac{\eta}{2}}\mathcal{L}v$. Portanto, $\mathcal{L}v = -\lambda v$ e assim a estimativa do gap fundamental para o operador \mathcal{L} segue do Teorema 2.1. \square

Exemplo 2.1. *Seja $\varphi : (1, e^{\frac{\pi}{\ell}}) \times (\pi/3, 2\pi/3) \subset \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $\varphi(r, \theta) = \sin \theta$. Note que a função φ e o ângulo θ satisfazem às condições do domínio em (2.17), para $\theta_0 = \pi/3$, $\theta_1 = 2\pi/3$, $\theta_* = \pi/3$, $\varepsilon = \sqrt{3}/2$, $\delta = 1$ e ℓ a ser escolhido adequadamente. Nestas condições, as funções $\eta(r, \theta) = -2\ln(1 - \ln \tan \frac{\theta}{2})$ e $\eta(r, \theta) = -2\ln(\pi - \ell \ln r)$ satisfazem a equação (2.28).*

De fato, precisamos provar que $2\operatorname{div}(\varphi\nabla\eta) - \langle \nabla\eta, \varphi\nabla\eta \rangle = 0$. Para isso, basta procedermos como em (2.2) e (2.4), para obtemos a próxima expressão, que é válida para qualquer φ radialmente constante e para qualquer η ,

$$\begin{aligned} 2\operatorname{div}(\varphi\nabla\eta) - \langle \nabla\eta, \varphi\nabla\eta \rangle &= 2(\varphi(r^2 \sin^2 \theta \eta_{rr} + r \sin^2 \theta \eta_r) + \varphi \sin^2 \theta \eta_{\theta\theta} + \sin^2 \theta \varphi_\theta \eta_\theta) \\ &\quad - \varphi(r^2 \sin^2 \theta \eta_r \eta_r + \sin^2 \theta \eta_\theta \eta_\theta). \end{aligned}$$

Para $\eta(r, \theta) = -2\ln(1 - \ln \tan \frac{\theta}{2})$, temos

$$\eta_r = 0, \quad \eta_\theta = \frac{2 \csc \theta}{1 - \ln \tan \frac{\theta}{2}} \text{ e } \eta_{\theta\theta} = \frac{-2 \csc \theta \cot \theta}{1 - \ln \tan \frac{\theta}{2}} + \frac{2 \csc^2 \theta}{(1 - \ln \tan \frac{\theta}{2})^2} \quad (2.29)$$

Assim,

$$2\operatorname{div}(\varphi\nabla\eta) - \langle \nabla\eta, \varphi\nabla\eta \rangle = 2\varphi \sin^2 \theta \eta_{\theta\theta} + 2 \sin^2 \theta \varphi_\theta \eta_\theta - \varphi \sin^2 \theta \eta_\theta^2 = 0.$$

Para $\eta(r, \theta) = -2\ln(\pi - \ell \ln r)$ a conta é simples e direta como o caso anterior.

Exemplo 2.2. *Seja $\varphi : (1, e^{\frac{\pi}{\ell}}) \times (\pi/3, 2\pi/3) \subset \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $\varphi(r, \theta) = e^{\frac{\theta}{2}}$. Note que a função φ e o ângulo θ satisfazem às condições do domínio em (2.17), para $\theta_0 = \pi/3$, $\theta_1 = 2\pi/3$, $\theta_* = \pi/3$, $\varepsilon = e^{\frac{\pi}{6}}$, $\delta = e^{\frac{\pi}{3}}$ e ℓ a ser escolhido adequadamente. Nestas condições, as funções $\eta(r, \theta) = \theta$ e $\eta(r, \theta) = -2 \ln(\pi - \ell \ln r)$ satisfazem a equação (2.28). De um modo mais geral podemos tomar $0 < \theta_1 - \theta_0 < 2 \ln 2$, $\theta_0 \in (0, \pi/2)$ e $\theta_1 \in (\pi/2, \pi)$.*

Observação 2.1. *Em 2022, Bourni et al. [7], demonstram que no espaço hiperbólico \mathbb{H}^n , $n \geq 2$, para quaisquer constantes $\epsilon > 0$, $D > 0$, existe um domínio convexo Ω com diâmetro D cujo gap fundamental satisfaz $\lambda_2 - \lambda_1 < \frac{\epsilon \pi^2}{D^2}$, então podemos concluir que para o operador Laplaciano deformado com função deformadora η satisfazendo a equação $2\Delta\eta - |\nabla\eta|^2 = 0$ o resultado continua válido.*

Bibliografia

- [1] B. Andrews and J. Clutterbuck, Proof of the fundamental gap conjecture, *J. Amer. Math. Soc.* 24 (3) (2011), 899–916.
- [2] P. V. Araújo, *Geometria Diferencial*, 3. ed., IMPA, Rio de Janeiro, 2016.
- [3] N. Aronszajn, A unique continuation theorem for solutions of elliptic partial differential equations or inequalities of second order. *J. Math. Pures Appl.* 36 (1957), 235-249.
- [4] M. S. Ashbaugh and R. Benguria, Optimal lower bound for the gap between the first two eigenvalues of one-dimensional Schrödinger operators with symmetric single-well potentials, *Proc. Amer. Math. Soc.* 105 (1989), no. 2, 419-424.
- [5] M. van den Berg, On condensation in the free-boson gas and the spectrum of the Laplacian, *J. Stat. Phys.* 31 (1983), 623-637.
- [6] T. Bourni, J. Clutterbuck, X. H. Nguyen, A. Stancu, G. Wei, V.M. Wheeler. Explicit Fundamental gap estimates for some convex domains in \mathbb{H}^2 . To appear in *Mathematical Research Letters*.
- [7] T. Bourni, J. Clutterbuck, X. H. Nguyen, A. Stancu, G. Wei, V.M. Wheeler. The vanishing of the fundamental gap of convex domains in \mathbb{H}^n . *Ann. Henri Poincaré* 23, 595–614 (2022).
- [8] M. P. Carmo, *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*, 6. ed., SBM, Rio de Janeiro, 2012.
- [9] M. P. Carmo, *Geometria Riemanniana, Projeto Euclides*, IMPA, Rio de Janeiro, 2011.
- [10] I. Chavel, *Eigenvalues in Riemannian Geometry*, Academic Press, New York, 1984.
- [11] X. Dai, S. Seto and G. Wei, Fundamental gap estimate for convex domains on sphere - the case $n = 2$. *Comm. Anal. Geom.* 29 (5) (2021), 1095-1125.
- [12] J.C. M. da Fonseca, Estimativas de autovalores para o operador de Cheng-Yau deformado sobre domínios limitados em variedades Cartan-Hadamard pinçadas. Tese (Doutorado em Matemática), Universidade Federal do Amazonas, Manaus, 2022.
- [13] C. He, G. Wei and Q. S. Zhang, Fundamental gap of convex domains in the spheres, *Amer. J. Math.* 142 (4) (2020), 1161-1192.
- [14] A. Henrot, *Extremum problems for eigenvalues of elliptic operators*. Springer Science & Business Media, 2006.

- [15] H. Kielhöfer, *Calculus of Variations: An introduction to the one-dimensional theory with examples and exercises*. Springer. Rimsting, Bayern Germany. 2018.
- [16] R. Lavine, The eigenvalue gap for one-dimensional convex potentials. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 121 (3) (1994), 815-821.
- [17] J. M. Lee, *Riemannian Manifolds An Introduction to Curvature*, Springer. New York, 1997.
- [18] P. Petersen, *Riemannian Geometry, Third Edition*, Springer, Los Angeles, USA, 2016.
- [19] L. Rodríguez, *Introdução à Geometria Diferencial*, IMPA, Rio de Janeiro, 1977.
- [20] S. Seto, L. Wang, G. Wei, Sharp fundamental gap estimate on convex domains of sphere. *J. Differential Geometry*, 112 (2) (2019), 347-389.
- [21] J. Sotomayor, *Lições de equações diferenciais ordinárias*, Projeto Euclides. Impa. 1979.
- [22] S.-T. Yau, *Nonlinear analysis in geometry*, *Monographies de L'Enseignement Mathématique*, vol. 33, L'Enseignement Mathématique, Geneva, 1986. Série des Conférences de l'Union Mathématique Internationale, 8.MR865650 (88e:53001).