UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Uma Nova Caracterização dos Espaços de Sobolev $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$

Thaysa Fernanda Elias

São Carlos

2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Uma Nova Caracterização dos Espaços de Sobolev $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$

Thaysa Fernanda Elias

Orientador: Prof. Dr Tiago Henrique Picon

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

São Carlos

2018

Dedico aos meus pais.

"O que faço agora, talvez não podes compreender,

todavia o compreenderás mais tarde."

João 13:7

"A tarefa não é tanto ver aquilo que ninguém viu,

mas pensar o que ninguém ainda pensou

sobre aquilo que todo mundo vê."

Arthur Schopenhauer

AGRADECIMENTOS

Essa é uma das partes mais difícies do trabalho, que nos faz refletir sobre a vida, nos questionarmos sobre o significado da palavra “Gratidão”. Comecei a pensar em todas as pessoas nas quais deveria direcionar meus agradecimentos, pessoas que me ajudaram ao longo desses 25 anos. Depois de algumas minutos percebi que seria impossível listar todos os nomes, então me restringi a tentar lembrar somente os nomes das pessoas que me ajudaram nesses últimos 7 anos, período no qual fiz graduação, intercâmbio e mestrado, também não foi uma tarefa nada fácil, por fim, me limitei a escrever os nomes das pessoas que me ajudaram nesses últimos 2 anos, mas meu medo de ter esquecido alguém falou mais alto, sendo assim optei por direcionar meus agradecimentos a Deus, Ele que é onipresente, unipotente e uniciente, sabe de cada uma das pessoas que me ajudaram, me inspiram, me desafiaram, me encorajaram, me fizeram ser quem eu sou hoje, peço para que Ele abençõe a vida dessas pessoas para que elas possam ajudar outras pessoas, bem como, ser ajudadas.

Agradeço também a CAPES pelo apoio financeiro.

RESUMO

Nessa dissertação apresentaremos uma nova caracterização para o espaço de Sobolev $W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$, além disso, daremos uma nova demonstração da caracterização $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ para $1 < p < \infty$, em termos da desigualdade de Poincaré. Ambas as caracterizações foram estabelecidas por Piotr Hajlasz no paper *"A new characterization of the Sobolev spaces"* publicado na Studia Mathematica em 2003.

Palavras chaves: Função Maximal de Hardy-Littlewood, Espaços de Sobolev, Desigualdades de Poincaré, Caracterização pontual dos Espaços de Sobolev.

ABSTRACT

In this work we will present a new characterization of the Sobolev space $W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$ and also we give another proof of the characterization of the Sobolev space $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, in terms of Poincaré inequalities. Both characterization was proved by Piotr Hajlasz in the paper *"A new characterization of the Sobolev spaces"* published in Studia Mathematica in 2003.

Key words: Hardy-Littlewood Maximal Functions, Sobolev Spaces, Inequality of Poincaré, Pointwise Characterization of the Sobolev Space.

SUMÁRIO

LISTA DE SÍMBOLOS

Ω	- Subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$
$C(\Omega)$	- Espaço das funções contínuas
$C^k(\Omega)$	- Espaço das funções k vezes diferenciáveis
$C^\infty(\Omega)$	- Espaço das funções infinitamente diferenciáveis
$C_c^\infty(\Omega)$	- Espaço das funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto
$C_0(\mathbb{R}^n)$	- Espaço das funções contínuas que decaem no infinito
$\mathcal{D}(\Omega)$	- Espaço das funções testes
$\mathcal{D}'(\Omega)$	- Conjunto das distribuições
δ_a	- Distribuição Delta de Dirac no ponto a
$f * g$	- f convolução com g
∇u	- Gradiente da função u
H_0	- Função de Heaviside no ponto 0
Mf	- Função maximal de Hardy-Littewood
$M_R f$	- Função maximal de Hardy-Littewood restrita
$\mathcal{S}(\Omega)$	- Espaço das funções de Schwartz
$\mathcal{S}'(\Omega)$	- Conjunto dos funcionais lineares contínuos em $\mathcal{S}$
$supp(f)$	- Suporte da função ou distribuição f
u_B	- $\frac{1}{\lvert B\rvert}\int_B u = \fint_B u$
$\omega_f(\lambda)$	- Função distribuição associada a f
$<<$	- Medida absolutamente contínua

INTRODUÇÃO

Nosso estudo inicial é dedicado a estabelecer uma nova caracterização dos espaços de Sobolev

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^p(\mathbb{R}^n); \nabla u \in L^p(\mathbb{R}^n)\}$$

para $1 \leq p < \infty$.

Veremos a possibilidade de encontrar uma nova caracterização equivalente a $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ que não envolva derivadas. A caracterização que apresentaremos é devida a Piotr Hajlasz.

No artigo [13] Hajlasz provou que se $1 < p < \infty$ então $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ se, e somente se, existe $0 \leq g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ tal que satisfaz a desigualdade

$$|u(x) - u(y)| \leq |x - y|(g(x) + g(y)) \quad q.t.p.$$

Entretanto, para $p = 1$ esse resultado não é verdadeiro (apresentaremos um contraexemplo no decorrer do texto). Um dos objetivos da dissertação é apresentar uma versão, também dada por Hajlaz, que engloba o caso $p = 1$.

O texto fora estruturado da seguinte forma: no Capítulo 1 veremos resultados preliminares sobre Teoria da Medida, Análise Funcional e Teoria das Distribuições. No Capítulo 2 apresentaremos alguns tópicos em Análise Harmônica, definiremos o operador maximal de Hardy-Littlewood e provaremos o Teorema de Interpolação de Marcinkiewicz. O Capítulo 3 será dedicado a uma breve introdução aos Espaços de Sobolev $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

Mostraremos que para certas escolhas de p os espaços são de Banach, separável e reflexivo, bem como, alguns resultados sobre densidade e desigualdades nesse espaço. No que concerne o Capítulo 4, o principal capítulo da dissertação, cujo enfoque é estudar o artigo [10]. Alguns resultados dos capítulos iniciais não serão demonstrados, apenas citaremos as referências de suas demonstrações.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

Neste capítulo trataremos de diversos assuntos em Teoria da Medida e Integração, alguns resultados de Análise Funcional e de Teoria das Distribuições. Assumiremos familiaridade com alguns tópicos em Espaços Métricos e Topologia. As principais bibliografias utilizadas neste capítulo foram: [8], [18] e [20] (para referências adicionais consulte [2] e [3]).

1.1 Tópicos em Teoria da Medida e Integração

Nesta seção vamos recordar algumas definições e resultados de Teoria da Medida que serão essenciais no estudo dos espaços L^p. Em seguida enunciaremos alguns teoremas que serão recorrentes nas demonstrações dos resultados de Teoria das Distribuições como, por exemplo, Teorema da Convergência Monótona e Dominada. Por fim, definiremos medida de Radon e o Teorema de Radon-Nikodym, que serão importantes na demonstração de um lema fundamental que será enunciado no Capítulo 4.

Seja X um conjunto não vazio. Dizemos que uma álgebra $\mathcal{M}$ em X é uma coleção de subconjuntos de X tal que:

(i) Se $E \in \mathcal{M}$ então $E^c \in \mathcal{M}$;

(ii) Se $E_j \in \mathcal{M}$ para $j = 1, 2, \cdots, n$ então $\displaystyle\bigcup_{j=1}^{n} E_j \in \mathcal{M}$.

Uma σ–álgebra é uma álgebra fechada para união enumerável.

Observações: Seja $\mathcal{M}$ uma álgebra em X. Então

(1) $\emptyset \in \mathcal{M}$ e $X \in \mathcal{M}$. De fato, se $E \in \mathcal{M}$ então $E \cap E^c = \emptyset$ e $E \cup E^c = X$.

(2) Seja $E_j \in \mathcal{M}$ para $j = 1, 2, \cdots, n$, temos $\displaystyle\bigcap_{j=1}^{n} E_j = \left(\bigcup_{j=1}^{n} E_j^c\right)^c$, ou seja, é uma álgebra fechada em relação a interseção finita.

Se X é um espaço topológico qualquer então a $\sigma-$álgebra gerada pela família de conjuntos abertos (fechados) de X é chamada de $\sigma-$álgebra de Borel e seus elementos são chamados de conjuntos de Borel.

Seja X um conjunto equipado com uma $\sigma-$álgebra $\mathcal{M}$. Uma medida em $\mathcal{M}$ é uma função $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ tal que

(i) $\mu(\emptyset) = 0$;

(ii) Se $\{E_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ é uma coleção enumerável disjunta então

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j).$$

O par $(X, \mathcal{M})$ é chamado de espaço mensurável e os conjuntos em $\mathcal{M}$ são chamados conjuntos mensuráveis. A terna $(X, \mathcal{M}, \mu)$ é chamado de espaço de medida.

Uma medida satisfaz as seguintes propriedades:

Proposição 1.1. *Seja $(X, \mathcal{M})$ um espaço mensurável. Então*

(i) Sejam E_1 e $E_2 \subset \mathcal{M}$ tais que $E_1 \subset E_2$ então $\mu(E_1) \leq \mu(E_2)$;

(ii) Se $\{E_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ então $\displaystyle\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j)$.

Demonstração. Vide [8] p. 25.

■

Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{N}, \sigma)$ espaços de medida. Dizemos que $f : X \to Y$ é mensurável se $f^{-1}(B) \in \mathcal{M}$ para qualquer $B \in \mathcal{N}$. Denotamos por $M^+ = M^+(X, \mathcal{M}, \mu)$ o espaço das funções a valores reais, não negativos e mensuráveis.

Uma função em M^+ é chamada simples se pode ser escrita da seguinte forma:

$$\phi(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{A_j},$$

no qual $a_j \in \mathbb{R}^+$ e $A_j \in \mathcal{M}$ disjuntos. Assim, podemos definir a integral de uma função simples em M^+ como:

$$\int_X \varphi d\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(A_j).$$

Uma vez que definimos a integral de funções simples, podemos definir a integral para qualquer $f \in M^+$, nesse sentido o próximo resultado afirma que qualquer função mensurável não negativa pode ser aproximada por funções simples.

Proposição 1.2. *Se $f \in M^+$ então existe uma sequência $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ de funções simples tais que $\varphi_j \leq \varphi_{j+1}$ e $\varphi \leq f$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Além disso, $\varphi_j \to f$ pontualmente e uniformemente em qualquer conjunto no qual f seja limitada.*

Demonstração. Vide [8] p. 47.

■

Agora podemos estender o conceito de integral a todas as funções mensuráveis a valores positivos.

Se $f \in M^+$ então a integral de f com respeito a μ é

$$\int_X f d\mu = \sup \int_X \varphi d\mu,$$

no qual o supremo é tomado sobre todas as funções simples $\varphi \in M^+$ que satisfazem $0 \leq \varphi \leq f$.

Os próximos resultados seguem na direção de definir a integral para funções mensuráveis a valores reais.

Seja $f : X \to [-\infty, +\infty]$ definimos a parte positiva e parte negativa de f, respectivamente, como

$$f^+(x) = \max(f(x), 0), \qquad f^-(x) = \max(-f(x), 0).$$

Observemos que f é mensuravel se, e somente se, f^+ e f^- pertencem a M^+. Se, ao menos, uma das partes (positiva ou negativa) possuem integrais finitas com respeito a μ, definimos a integral de f por

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu,$$

e dizemos que f integrável.

Teorema 1.3. ***(Teorema Convergência Monótona)*** *Seja $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções em M^+ tais que $f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \leq f(x)$ para todo n. Suponha que a sequência converge para uma função f em quase todo ponto. Então*

$$\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n.$$

Demonstração. Vide [8] p. 31.

■

Teorema 1.4. ***(Teorema Convergência Dominada)*** *Seja $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções integráveis que convergem para uma função mensurável f em quase todo ponto. Além disso, suponha que exista uma função g integrável tal que $|f_n(x)| \leq g(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então*

$$\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n.$$

Demonstração. Vide [8] p. 44.

■

Teorema 1.5. ***(Lema de Fatou)*** *Seja $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções em M^+ que convergem para a função f em quase todo ponto. Então*

$$\int_{n\to\infty} \liminf f_n \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n.$$

Demonstração. Vide [8] p. 52.

∎

Definição 1.6. *Seja* $(X, \mathcal{M})$ *um espaço mensurável. Uma medida com sinal em* $(X, \mathcal{M})$ *é uma função* $\nu : \mathcal{M} \to [-\infty, +\infty]$ *tal que*

1. $\nu(\emptyset) = 0$;

2. ν *assume apenas um dos valores* $+\infty$ *ou* $-\infty$;

3. *Se* $\{E_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência de conjuntos disjuntos em* $\mathcal{M}$ *então*

$$\nu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(E_j),$$

no qual a soma converge absolutamente se $\nu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right)$ *é finita.*

Exemplo 1.7. *Toda medida é uma medida com sinal.*

Definição 1.8. *Se* ν *é uma medida com sinal em* $(X, \mathcal{M})$*, um conjunto* $E \in \mathcal{M}$ *é positivo em relação uma medida* ν *(respectivamente negativo em relação a medida* ν*) se* $\nu(F) \geq 0$ *(respectivamente* $\nu(F) \leq 0$*) para toda* $F \in \mathcal{M}$ *tal que* $F \subset E$*. Dizemos que o conjunto* $F \in \mathcal{M}$ *é nulo em relação uma medida* ν *se* $\nu(F) = 0$ *para toda* $F \in \mathcal{M}$ *tal que* $F \subset E$*.*

Definição 1.9. *Suponhamos que* ν *é uma medida com sinal e* μ *é uma medida positiva em* $(X, \mathcal{M})$*. Dizemos que* ν *é absolutamente contínua com respeito a* μ *se*

$$\mu(E) = 0 \text{ implicar } \nu(E) = 0 \text{ para qualquer } E \in \mathcal{M},$$

e escrevemos $\nu << \mu$*.*

Vejamos um exemplo no qual as medidas não são absolutamente contínuas.

Exemplo 1.10. *Considere uma enumeração* $\{r_1, r_2, \cdots\}$ *do conjunto* $\mathbb{Q}$*. Defina*

$$\mu(A) = \sum_{r_i \in A} \frac{1}{2^i}.$$

Observemos que μ é uma medida positiva para qualquer aberto da reta, pois necessariamente A contém algum r_i.

Seja $| \ |$ a medida de Lebesgue, sabemos que $|\mathbb{Q}| = 0$. Porém, a medida μ de $\mathbb{Q}$ é $\mu(\mathbb{Q}) = \sum_{r_i \in A} \frac{1}{2^i} = 1$. Portanto, μ não é absolutamente contínua com respeito à medida de Lebesgue.

$\square$

Definição 1.11. *Dizemos que duas medidas com sinais μ e ν em $(X, \mathcal{M})$ são mutualmente singulares, se existe E, $F \in \mathcal{M}$ tais que $E \cap F = \emptyset$, $E \cup F = X$, E é nulo com respeito a medida μ e F é nulo com respeito a medida ν. Denotamos por $\mu \perp \nu$.*

O próximo teorema afirma que quando $\nu << \mu$, a medida ν pode ser vista como integral, com respeito a medida μ, de uma certa função mensurável f.

Teorema 1.12. ***(Teorema de Radon-Nikodym)***[1] *Sejam ν uma medida σ-finita e μ uma medida σ-finita positiva em $(X, \mathcal{M})$. Existem únicas medidas λ, ρ $\sigma-$finitas tais que*

$$\lambda \perp \mu, \qquad \rho << \mu \qquad e \qquad \mu = \lambda + \rho.$$

Além disso, existe uma única função q.t.p μ-integrável $f : X \to \mathbb{R}$ tal que

$$d\rho = f d\mu.$$

Demonstração. Vide [8] p. 90.

$\blacksquare$

Definição 1.13. *Seja μ uma medida de Borel positiva em X e E um conjunto de Borel em X. Dizemos que uma medida μ é regular exterior em E se*

$$\mu(E) = \inf\{\mu(U); \ E \subset U, \ U \text{ aberto}\}.$$

[1]Otto Marcin Nikodym (1887 - 1974) matemático polonês, um de seus trabalhos mais famosos foi o teorema enunciado.

Dizemos que uma medida μ é regular interior em E se

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K);\ K \subset E, K \text{ compacto}\}.$$

Definição 1.14. *A medida de Radon*[2] *em X é uma medida de Borel que é finita em todo conjunto compacto (localmente finita), regular exterior em todo conjunto de Borel e regular interior em todo conjunto aberto ou qualquer $E \in \mathcal{M}$ tal que $\nu(E) < \infty$.*

Vejamos alguns exemplos de medidas de Radon.

Exemplo 1.15. *A medida de Lebesgue em espaços Euclidianos restrita a subconjuntos de Borel é uma medida de Radon.*

Exemplo 1.16. *Sejam $(X, \mathcal{M})$ mensurável e $E \in \mathcal{M}$. A medida da contagem em X definida por:*

$$\mu(E) = \begin{cases} \#E, & \text{se } \ E \text{ é finito}, \\ \infty \ , & \text{se } \ E \text{ é infinito}, \end{cases}$$

no qual $\#E$ denota a cardinalidade do conjunto E, não é uma medida de Radon, uma vez que não é localmente finita.

□

Definição 1.17. *Definimos $C_0(\mathbb{R}^n)$ o espaço das funções que decaem rapidamento no infinito, ou seja,*

$$C_0(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}; |f(x)| \to 0 \text{ quando } |x| \to +\infty\}.$$

Para entendermos o próximo resultado, precisamos estabelecer a convergência em $C_0(\mathbb{R}^n)$. Uma vez que $C_0(\mathbb{R}^n) \subset C(\mathbb{R}^n)$ é um espaço métrico completo com a norma herdada de $C(\mathbb{R}^n)$, a convergência nesse espaço é dada da seguinte forma:

Uma sequência φ_j converge para zero em $C_0(\mathbb{R}^n)$ se existe um compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ tal que $supp(\varphi_j) \subset K$ para todo $j \in \mathbb{N}$ e $\varphi_j \to 0$ uniformemente quando $j \to \infty$ (veja [20] página 69).

[2] Johann Radon (1887 - 1956) matemático austríaco, foi aluno de David Hilbert.

Teorema 1.18. ***(Teorema de Representação de Riesz)*** *Se Ψ é um funcional linear contínuo em $C_0(\mathbb{R}^n)$ então existe uma única medida de radon μ tal que*

$$\Psi(f) = \int f d\mu,$$

para toda $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Vide [8] p. 223.

■

Um outro resultado utilizado durante o texto é o Teorema de Integração em coordenadas polares no $\mathbb{R}^n$.

Teorema 1.19. *Se f é Borel mensurável em $\mathbb{R}^n$, com $f \geq 0$ ou f uma função integrável definida q.t.p, então*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} f(r\omega)r^{n-1}d\sigma(\omega)dr,$$

no qual $d\sigma(\omega)$ é uma medida de Borel na esfera S^{n-1}.

Demonstração. Vide [8] p. 78.

■

Corolário 1.20. ***(Integração de uma função radial)*** *Seja f uma função mensurável definida em $\mathbb{R}^n$ e integrável tal que $f(x) = g(|x|)$ para alguma g definida $(0, \infty)$ então*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \sigma(S^{n-1}) \int_0^\infty g(r)r^{n-1}dr.$$

Demonstração. Vide [8] p. 79.

■

A seguir vejamos uma propriedade geral dos espaços com medida.

Definição 1.21. *Dizemos que um espaço $(X, \mathcal{M}, \mu)$ é s-regular ($s > 0$) com respeito a medida μ, se $\mu(X) < \infty$ e existe uma constante b tal que para qualquer $x \in X$ e para todo $r \leq diam\ X$ temos*

$$\mu(B(x,r)) \geq br^s.$$

Exemplo 1.22. *A bola do $\mathbb{R}^n$ com a medida de Lebesgue é n-regular.*

Demonstração. De fato,

$$|B(x,r)| = \omega_n r^n,$$

no qual ω_n denota o volume da bola unitária do $\mathbb{R}^n$.

□

1.2 Tópicos de Análise Funcional

Neste seção veremos alguns resultados sobre os espaços L^p. Daqui em diante dx representa a medida de Lebesgue.

Definição 1.23. *Sejam $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $1 \leq p < \infty$, definimos*

$$L^p(\Omega) = \{f \ \textit{mensurável}; \int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty\},$$

que é munida pela norma

$$||f||_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Ainda,

$$L^p_{loc}(\Omega) = \{f \ \textit{mensurável}; \int_K |f(x)|^p dx < \infty, \ \textit{para qualquer } K \subset \Omega \ \textit{compacto}\}.$$

Para $p = \infty$, definimos

$$L^\infty(\Omega) = \{f \ \textit{mensurável}; |f(x)| \leq C \ q.t.p\},$$

neste caso a norma é dada por

$$||f||_\infty = ess \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)| = \inf\{a \geq 0; \mu(x; |f(x) > a|) = 0\},$$

chamada de supremo essencial.

Proposição 1.24. ***(Desigualdade de Hölder)*** *Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e $1 \leq q \leq \infty$ são* *tais que* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. *Se* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *e* $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ *então* $fg \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *e*

$$||fg||_1 = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)g(x)|dx \leq ||f||_p ||g||_q.$$

Demonstração. Vide [8] p. 182.

■

Agora segue duas consequências da Desigualdade de Hölder.

Proposição 1.25. ***(Desigualdade de Minkowski)*** *Se* $f, g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *então* $f+g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *e*

$$||f+g||_p \leq ||f||_p + ||g||_p.$$

Demonstração. Vide [8] p. 194.

■

Proposição 1.26. ***(Desigualdade de Hölder generalizada)*** *Sejam* $g_1, g_2, \cdots, g_m$ *funções tais que* $g_i \in L^{p_i}(\mathbb{R}^n)$ *com* $p_i \geq 1$ *para todo* $i = 1, 2, \cdots, m$ *e*

$$\frac{1}{p} = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{p_i} \leq 1.$$

Então $\prod_{i=1}^m g_i \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *e vale a desigualdade*

$$||\prod_{i=1}^{m} g_i||_p \leq \prod_{i=1}^{m} ||g_i||_{p_i}.$$

Demonstração. Vide [3] p. 93.

■

Proposição 1.27. $L^p(\mathbb{R}^n)$ *é um subespaço de* $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ *para qualquer* $1 \leq p \leq \infty$.

Demonstração. De fato, para $p = 1$ é imediato. Suponhamos $1 < p < \infty$ e $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto,

$$\int_K |f(x)|dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)\chi_K(x)|dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx\right)^{1/p} \left(\int_K dx\right)^{1/q} = ||f||_p |K|^{1/q} < \infty.$$

Para o caso $p = \infty$, temos

$$\int_K |f(x)|dx \leq ||f||_\infty \int_K dx \leq ||f||_\infty |K| < \infty.$$

Portanto, $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. ■

Teorema 1.28.

(i) $L^p(\mathbb{R}^n)$ *é um espaço de Banach para* $1 \leq p \leq \infty$;

(ii) $L^p(\mathbb{R}^n)$ *é um espaço separável para* $1 \leq p < \infty$*;*

(iii) $L^p(\mathbb{R}^n)$ *é um espaço reflexivo para* $1 < p < \infty$*.*

Demonstração. Vide [3] p. 93, 95 e 98.

■

1.3 Teoria das Distribuições

Na primeira metade do século XX o matemático francês Laurent Schwartz introduziu o formalismo ao que chamamos de Teoria das Distribuições. Com a criação dessa importante subárea da matemática Schwartz recebeu uma medalha Fields em 1950.

Considere $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e o gradiente $\nabla = (\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \cdots, \partial_{x_n})$, no qual $\partial_{x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}$. Dado $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ com $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ escrevemos

$$\partial^\alpha = \partial^{\alpha_1}_{x_1} \cdots \partial^{\alpha_n}_{x_n},$$

denominamos α de multi-índice. Note que $\partial^0 f = \partial^0_{x_1}\partial^0_{x_2} \cdots \partial^0_{x_n} f = f$.

Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ contínua definimos o suporte de f por

$$supp(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n; f(x) \neq 0\}}.$$

Observemos que o suporte é sempre um subconjunto fechado. Além disso, segue imediatamente da definição que se $x_0 \notin supp(f)$ então f é nula em uma vizinhança de

x_0. Dizemos que uma função f tem suporte compacto se o $supp(f)$ for um conjunto compacto. O conjunto $C^k(\mathbb{R}^n)$ será o espaço das funções k vezes diferenciáveis em $\mathbb{R}^n$ e $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ o espaço das funções infinitamente diferenciáveis em $\mathbb{R}^n$. Definimos o espaço $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ como sendo o espaço das funções definidas em $\mathbb{R}^n$ infinitamente diferenciáveis com suporte compacto, denominado espaço das funções testes. Alguns autores denotam o espaço das funções testes por $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Vale ressaltar que $C_0(\mathbb{R}^n)$ é o espaço das funções contínuas definidas em $\mathbb{R}^n$ que decaem no infinito. Observemos que $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset C_0(\mathbb{R}^n)$. Poderíamos nos questionar sobre a existência de alguma função em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. O exemplo abaixo nos garante que o conjunto de tais funções é não vazio.

Exemplo 1.29. *Seja $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que*

$$\varphi(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{||x||^2-1}\right), & se \quad ||x|| < 1, \\ 0 \quad , & se \quad ||x|| \geq 1. \end{cases}$$

□

Vamos definir o conceito de convergência em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, essa definição induzirá uma topologia no espaço das funções testes.

Definição 1.30. *Dada uma sequência $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ dizemos que a sequência converge para zero, ou seja, $\varphi_j \to 0$, se existe um conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto tal que $supp(\varphi_j) \subseteq K$, para todo $j \in \mathbb{N}$, e para qualquer α multi-índice temos $\partial^\alpha \phi_j$ converge uniformemente para 0 em K, quando $j \to 0$.*

Definição 1.31. *Um funcional linear contínuo $f : C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ é chamado de distribuição em $\mathbb{R}^n$. Denotamos o espaço das distribuições em $\mathbb{R}^n$ por $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $< f, \varphi >:= f(\varphi)$ para qualquer $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Em outras palavras, sejam $\varphi_1, \varphi_2 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ e $\{\phi_j\}$ uma sequência em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, satisfazendo:*

(i) $f(\varphi_1 + \lambda\varphi_2) = f(\varphi_1) + \lambda f(\varphi_2)$;

(ii) $\varphi_j \to 0 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ *então* $f(\varphi_j) \to 0 \in \mathbb{C}$.

Exemplo 1.32. *Sejam $a \in \mathbb{R}^n$ e $\delta_a : C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ definida por $\delta_a(\phi) := \phi(a)$. Então δ_a é uma distribuição chamada de Delta de Dirac*[3].

[3]Como fato histórico, é interessante saber que a ideia da distribuição Delta como pico de uma função

Demonstração. De fato, para qualquer $\phi_1, \phi_2 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, temos

$$\delta_a(\phi_1 + \lambda\phi_2) = (\phi_1 + \lambda\phi_2)(a) = \phi_1(a) + \lambda\phi_2(a) = \delta_a(\phi_1) + \lambda\delta_a(\phi_2).$$

Agora mostremos a continuidade de δ_a. Consideremos uma sequência $\{\phi_j\}_{j\in\mathbb{N}} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\phi_j \to 0$. Pela definição de convergência, isto significa que existe $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto tal que $supp(\phi_j) \subseteq \mathbb{R}^n$ para qualquer $j \in \mathbb{N}$ e para qualquer α multi-índice $\partial^\alpha\phi_j(x) \to 0$ uniformemente para qualquer $x \in K$. Se $a \notin K$ então $\phi_j(a) = 0$, o que implica $\phi_j(a) \to 0$. Se $a \in K$, em particular, consideremos o multi-índice $\alpha = (0, \cdots, 0)$, assim $\partial^\alpha\phi_j(a) = \phi_j(a) \to 0$.

□

Abaixo um dos principais exemplos de distribuição.

Exemplo 1.33. *Seja $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ então definimos uma distribuição associada a função f denotada por T_f como*

$$T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx,$$

para qualquer $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Primeiro vejamos que o funcional T_f está bem definido. De fato, como $||\varphi||_\infty < M$, temos

$$|T_f(\varphi)| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx\right| \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)||\varphi(x)|dx \leqslant M\int_{supp(\varphi)} |f(x)|dx < \infty.$$

Portanto, $T_f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

A linearidade segue imediatamente das propriedades de integração. Mostremos agora que T_f é contínua. De fato, dado $\varepsilon > 0$, como $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ existem um compacto $K \in \mathbb{R}^n$ tal que $supp(\varphi_j) \subset K$ e $j_0 \in \mathbb{N}$ no qual, se $j \geqslant j_0$ implica $|\varphi_j(x)| < \varepsilon$, para qualquer $x \in K$. Então,

$$|T_f(\varphi_j)| = \int_{supp(\varphi_j)} |f(x)||\varphi_j(x)dx| \leqslant \int_K |f(x)||\varphi_j(x)|dx \leqslant \varepsilon\int_K |f(x)|dx.$$

concentrada em um ponto foi introduzida pela engenheiro elétrico, graduado em matemática, Paul Dirac (1902 - 1984). Essa função aparece no seu livro Principles Quantum Mechanics (1930). Para saber mais sobre essa função veja [4].

para qualquer $j \geqslant j_0$.

$\square$

A partir desse exemplo, inferimos que $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) \subset D'(\mathbb{R}^n)$, ou seja, podemos identificar as funções localmente integráveis como distribuições. À vista da Proposição 1.27, qualquer função f em $L^p(\mathbb{R}^n)$ pode ser vista como distribuição por meio do operador T_f, mais ainda, qualquer função nos subespaços $C(\mathbb{R}^n), C^k(\mathbb{R}^n), C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, pode ser visto como distribuição. Vale a pena ressaltar que a recíproca nem sempre é válida. Vamos assumir por hora que $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $L^p(\mathbb{R}^n)$ para $1 \leq p < \infty$ (esta demonstração encontra-se no Capítulo 4). Um contraexemplo é a distribuição Delta de Dirac vista no Exemplo 1.33, é uma distribuição, contudo, não define uma função em $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. De fato, suponhamos que exista $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ tal que $T_f = \delta$, ou seja,

$$< \delta, \phi > = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x)dx,$$

para qualquer $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Definamos

$$\eta_k(x) := \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{|kx|^2 - 1}\right), & \text{se} \quad |x| \leq \frac{1}{k}, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Como $\eta_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, temos

$$\int \eta_k(x) f(x) dx = \delta(\eta_k) = \eta_k(0) = e^{-1}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Assim,

$$e^{-1} = \left| \int \eta_k(x) f(x) dx \right| \leq ||\eta_k||_\infty \int_{B(0,1/k)} |f(x)| dx.$$

Como $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e $||\eta_k||_\infty \leq e^{-1}$, pelo Teorema de Convergência Dominada segue

$$e^{-1} \leq e^{-1} \inf_{k \in \mathbb{N}} \int_{B(0,1/k)} |f(x)| dx = 0.$$

Absurdo. Portanto, a distribuição delta de Dirac não define uma função em $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Proposição 1.34. *Sejam $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Então $f = g$ em quase todo ponto se, e somente se, $T_f = T_g$ no sentido das distribuições.*

Demonstração. Vide [18] p. 35.

■

Em vista das proposições acima, não faremos distinção entre $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ e a distribuição T_f associada a ela.

Motivados por integração por partes, definimos a derivada de uma distribuição $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ como

$$\langle \partial_{x_j} u, \varphi \rangle \ := -\langle u, \partial_{x_j}\varphi \rangle, \tag{1.1}$$

para qualquer $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e para qualquer $j = 1, 2, \cdots, n$. Analogamente, para α multi-índice e $u \in D'(\mathbb{R}^n)$ definimos

$$\langle \partial^\alpha u, \varphi \rangle \ := (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial^\alpha \varphi \rangle, \tag{1.2}$$

para qualquer $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dessa forma, a derivada de uma distribuição é também uma distribuição.

Exemplo 1.35. *Consideremos a função $H_0 : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ dada por*

$$H_0(x) = \begin{cases} 1, & se \quad x > 0 \\ 0, & se \quad x < 0. \end{cases}$$

Observemos que $H_0 \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, logo H_0 é uma distribuição, chamada de distribuição de Heaviside[4]*. A derivada de H_0 é a distribuição Delta de Dirac vista no Exemplo 1.33.*

Demonstração. De fato, para qualquer $\varphi \in C_c^\infty$ com $supp(\varphi) \subset [-M, M]$ com $M \in \mathbb{R}$,

[4]Recebeu esse nome devido ao engenheiro elétrico Oliver Heaviside (1850 - 1897), um inglês que desenvolveu um dispositivo matemático para manipular equações e analisar indução eletromagnética.

temos

$$\begin{aligned}
\langle \partial H_0, \varphi \rangle &= -\int_{\mathbb{R}} H_0(x)\partial\varphi(x)dx \\
&= -\int_0^{\infty} \partial\varphi(x)dx \\
&= -\int_0^{M} \partial\varphi(x)dx \\
&= -\varphi(M) + \varphi(0) \\
&= \varphi(0) \\
&= \langle \delta_0, \varphi \rangle.
\end{aligned}$$

Concluímos, $\partial H_0 = \delta_0$.

□

Definição 1.36. *Definimos o espaço de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ como sendo o conjunto das funções $f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ tal que para qualquer α, β multi-índice, vale*

$$\sup |x^{\alpha}\partial^{\beta} f(x)| < \infty.$$

Definimos a topologia em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ do seguinte modo:

Uma sequência $\{\varphi_k\}_k$ converge para zero se, e somente se, para quaisquer α, β multi-índices $x^{\alpha}\partial^{\beta}\varphi_k(x) \to 0$ uniformemente em $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 1.37. *Qualquer função infinitamente diferenciável com suporte compacto é uma função de Schwartz, ou seja, $C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Entretanto, a recíproca não é verdadeira. Considere a função $e^{-||x||^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, mas não pertence a $C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$.*

□

Os funcionais lineares contínuos em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ são chamados de distribuições temperadas, denotado por $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Proposição 1.38. *O espaço de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ está contido $L^1(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração. Considere $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ para $|\alpha| = n + 2$, $\beta = 0$, para $|x|$ grande, temos

$|f(x)| < \frac{c}{|x|^{n+2}}$. Então

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|dx &= \int_{|x|\geq 1} |f(x)|dx + \int_{|x|\leq 1} |f(x)|dx \\
&\leq ||f||_\infty |B(0,1)| + c\int_{|x|\geq 1} \frac{1}{|x|^{n+2}} \\
&\leq c_1 + c\int_{S^{n+1}} \int_1^\infty \frac{1}{r^{n+2}} r^{n-1} dr ds \\
&= c_1 + c\int_{S^{n+1}} \int_1^\infty \frac{1}{r^3} dr ds \\
&\leq c_1 + c_2|S^{n+1}| = C < \infty.
\end{aligned}$$

■

O espaço de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é denso em $L^p(\mathbb{R}^n)$. Além disso, $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso no espaço de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, como consequência disso, a restrição dos funcionais $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ no conjunto $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ define uma distribuição em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, com isso temos que $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

1.4 Convolução

Primeiro iniciemos com a definição de convolução para funções contínuas.

Definição 1.39. *Sejam $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ funções contínuas, no qual ao menos uma delas possua suporte compacto. Definimos a operação convolução por*

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy.$$

As hipóteses de continuidade e suporte compacto garantem que a integral esteja bem definida. A operação de convolução satisfaz algumas propriedades que serão listadas na proposição a seguir.

Proposição 1.40. *Suponha que a integral acima esteja bem definida. Então*

(i) $*$ é bilinear e simétrico;

(ii) $(f * g) * h = f * (g * h)$;

(iii) Se $w \in \mathbb{R}^n$ então $\tau_w(f * g) = (\tau_w f) * g$ onde $\tau_w f(x) = f(x-w)$;

(iv) $supp(f * g) \subset \overline{\{supp(f) + supp(g)\}}$.

A demonstração dos itens (i) e (ii) são simples, mostremos apenas os dois últimos.

Demonstração (iii) Seja $x \in \mathbb{R}^n$ então

$$\begin{aligned}\tau_w((f * g)(x)) &= (f * g)(x - w)\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x - w - y)g(y)dy\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \tau_w f(x - y)g(y)dy\\ &= (\tau_w f) * g(x).\end{aligned}$$

Demonstração (iv) Primeiro notemos que $supp(f) + supp(g)$ é um conjunto fechado. Seja $x \in \mathbb{R}^n$, basta mostrarmos que se $x \notin supp(f) + supp(g)$ então $x \notin supp(f * g)$, ou seja, $(f * g)(x) = 0$. De fato,

$$(f * g)(x) = \int f(x - y)g(y)dy = \int_{(x - supp(f)) \cap (supp(g))} f(x - y)g(y)dy.$$

Se $x \notin supp(f) + supp(g)$ então $(x - supp(f)) \cap (supp(g)) = \emptyset$, assim $(f * g)(x) = 0$. Portanto, $(f * g)(x) = 0$ q.t.p em $(supp(f) + supp(g))^c$. Em particular, $(f * g)(x) = 0$ q.t.p em $Int[(supp(f) + supp(g))^c]$. Donde concluímos,

$$supp(f * g) \subset \overline{\{supp(f) + supp(g)\}}.$$

■

Teorema 1.41. ***(Desigualdade de Young)*** *Sejam $1 \leq p, q, r \leq \infty$ tais que $1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ então $f * g$ existe q.t.p e vale*

$$||f * g||_r \leq ||f||_p ||g||_q.$$

Demonstração. Vide [3] p. 104.

Motivamos pela definição de convolução para funções contínuas vamos estender este conceito para para distribuições.

Definição 1.42. *Sejam* $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ *e* $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ *denotaremos por* $u * \varphi$ *a função definida por*

$$(u * \varphi)(x) = \langle u, \varphi(x - \cdot)\rangle$$

Exemplo 1.43. $\delta_a * \varphi(x) = \langle \delta_a, \varphi_x\rangle = \varphi_x(a) = \varphi(x - a)$.

□

Exemplo 1.44. *Seja* $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, *já vimos que podemos associar a esta uma distribuição* T_f, *então* $T_f * \phi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\phi(x - y)dy$.

□

O próximo resultado nos mostra como a operação de derivação se comporta com relação a convolução.

Teorema 1.45. *Seja* $f \in C_c^k(\mathbb{R}^n)$ *e* $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ *então* $f * g \in C^k(\mathbb{R}^n)$ *e satisfaz*

$$\partial^\alpha (f * g) = (\partial^\alpha f) * g$$

para qualquer multi-índice $|\alpha| \leq k$.

Demonstração. Vide [3] p. 107.

■

CAPÍTULO 2

TÓPICOS EM ANÁLISE HARMÔNICA

Neste capítulo versaremos sobre o operador maximal de Hardy-Littlewood e algumas consequências decorrentes da limitação destes operadores. Um dos principais resultados do capítulo é o Teorema de Marcinkiewicz, que é fundamental para o estudo da limitação do operador maximal de Hardy-Littlewood em norma L^p para $1 < p < \infty$. Além disso, veremos também o conceito de aproximação da identidade e o Teorema da Diferenciação de Lebesgue. Este capítulo foi baseado na referência [5].

2.1 Aproximação da Identidade

Seja $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tal que $||\phi||_1 = 1$. Para cada $\varepsilon > 0$ definimos

$$\phi_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n}\phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \tag{2.1}$$

denominada Aproximação da Identidade. Notemos que a seguinte propriedade é mantida

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \phi_\varepsilon(x)dx = 1.$$

Um exemplo de função como acima é dado por $\phi(x) = \dfrac{\varphi(x)}{||\varphi||_1}$ no qual

$$\varphi(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{||x||^2-1}\right), & \text{se} \quad ||x|| < 1, \\ 0, & \text{se} \quad ||x|| \geq 1. \end{cases}$$

Outro fato interessante sobre as funções $\{\phi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ é que, quando $\varepsilon \to 0$ o "volume"de ϕ_ε se concentra na origem, em outras palavras é um Delta de Dirac na origem.

Proposição 2.1. *Seja $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tal que $||\phi||_1 = 1$. Então ϕ_ε converge para a função δ_0 em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ quando $\varepsilon \to 0$.*

Demonstração. De fato, para qualquer $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, temos

$$\langle \phi_\varepsilon, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \phi_\varepsilon(x)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\varepsilon^n}\phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(z)\varphi(\varepsilon z)dz.$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada, quando $\varepsilon \to 0$ temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(z)\varphi(\varepsilon z)dz \to \int_{\mathbb{R}^n} \phi(z)\varphi(0)dz = \varphi(0).$$

Assim,

$$\langle \phi_\varepsilon, \varphi \rangle \to \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle.$$

Portanto, $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \phi_\varepsilon(\varphi) = \delta_0(\varphi)$ em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

■

Como $\delta * f = f$ para qualquer $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ temos $\phi_\varepsilon * f \to f$ quando $\varepsilon \to 0$. Por esta razão, dizemos que ϕ_ε é uma aproximação da identidade. O próximo resultado nos fornece informação adicional sobre a convergência de $\phi_\varepsilon * f \to f$ em L^p.

Teorema 2.2. *Seja $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ com $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)dx = 1$. Se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ com $1 \leq p < \infty$ então $\phi_\varepsilon * f \to f$ em norma $L^p(\mathbb{R}^n)$ quando $\varepsilon \to 0$.*

Demonstração. De fato,

$$\begin{aligned}
\phi_\varepsilon * f(x) - f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \phi_\varepsilon(x-y) f(y) dy - \int_{\mathbb{R}^n} \phi(y) f(x) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\varepsilon^n} \phi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) f(y) dy - \int_{\mathbb{R}^n} \phi(y) f(x) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \phi(z) f(x - \varepsilon z) dz - \int_{\mathbb{R}^n} \phi(z) f(x) dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \phi(z)[f(x-\varepsilon z) - f(x)] dz.
\end{aligned}$$

Pela Desigualdade de Minkowski, temos

$$\begin{aligned}
||\phi_\varepsilon * f - f||_p &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \phi(z)[f(x-\varepsilon z)dz - f(x)]dz \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\phi(z)|^p |f(x - \varepsilon z)dz - f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |\phi(z)| ||\tau_{\varepsilon z} f - f||_p dz
\end{aligned}$$

τ representa uma translação, ou seja, $\tau_a g(\cdot) := g(\cdot - a)$.

Para cada z fixo, defina f_z como sendo $||\tau_{\varepsilon z} f - f||_p$. Observe que f_z é integrável, limitada por $||\tau_{\varepsilon z} f - f||_p \leq 2||f||_p$. Além disso, converge para zero q.t.p. quando $\varepsilon \to 0$, pois a translação é contínua na norma $L^p(\mathbb{R}^n)$ para $1 \leq p < \infty$. Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada, concluímos que

$$||\phi_\varepsilon * f - f||_p \to 0.$$

■

Observação 2.3. *Se* $\lim_{\varepsilon \to 0} ||\phi_\varepsilon * f - f||_p = 0$ *então* $||\phi_\varepsilon * f||_p \to ||f||_p$. *Isto segue como consequência direta da desigualdade triangular, pois* $|||\phi_\varepsilon * f||_p - ||f||_p| \leq ||\phi_\varepsilon * f - f||_p$. *Além disso, se* $||\phi_\varepsilon * f - f||_p \to 0$ *então passando a uma subsequência temos que* $\phi_{\varepsilon_k} * f \to f$ *q.t.p quando* $\varepsilon_k \to 0$.

2.2 Operador Maximal de Hardy e Littlewood

Seja $B_r = B(x, r)$ a bola centrada em $x \in \mathbb{R}^n$ e raio $r > 0$.

Definição 2.4. *Seja $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ então definimos a função maximal de Hardy-Littlewood por*

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} |f(y)| dy,$$

no qual o supremo é tomado sobre todas as bolas centradas no ponto x e $|B_r|$ é a medida de Lebesgue de B_r.

Embora definimos a função maximal de Hardy-Littlewood com bolas centradas no ponto x, poderíamos ter definido para qualquer bola que contenha o ponto x, pois as bolas não centradas estão contidas na bola com raio duas vezes maior que o raio das bolas centradas, assim é possível mostrar que as definições são equivalentes, ou seja, que existem c_1 e c_2 tais que $c_1 M'f \leq Mf \leq c_2 M'f$, no qual M' é a função maximal definida para bolas centradas.

Chamamos de Operador Maximal de Hardy-Littlewood

$$M : f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \mapsto Mf \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n),$$

no qual $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ é o espaço de todas as funções mensuráveis em $\mathbb{R}^n$.

Proposição 2.5. *Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $f \neq 0$ então $Mf \notin L^1(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração. Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $f \neq 0$, existe $B_r \subset \mathbb{R}^n$ mensurável tal que

$$\int_{B_r} |f(x)| dx \geq \varepsilon > 0.$$

Caso contrário, se para toda B_r aberto tivéssemos $\int_{B_r} |f(x)| dx = 0$ então $f(x) = 0$ em quase todo ponto de B_r. Como B_r é arbitrário, implicaria que $f(x) = 0$ em quase todo ponto do $\mathbb{R}^n$.

Seja $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $|x| > r$, temos $B_r \subset B(x, 2|x|)$. Assim,

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} |f(y)| dy \geq \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} |f(y)| dy \geq \frac{\varepsilon}{|B_r|} \geq \frac{\varepsilon}{|B(x, 2|x|)|} = c \frac{\varepsilon}{|x|^n}.$$

Sabemos,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x|^n} dx = |S^{n-1}| \int_0^\infty \frac{1}{r^n} r^{n-1} dr = |S^{n-1}| \int_0^\infty \frac{1}{r} dr = \infty.$$

Portanto, $Mf \notin L^1(\mathbb{R}^n)$.

$\blacksquare$

O Teorema de Diferenciação de Lebesgue, também conhecido como Teorema Pontual de Lebesgue nos fornece uma aproximação de médias de uma função.

Teorema 2.6. ***(Teorema de Diferenciação de Lebesgue)*** *Seja $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ então*

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} f(x-y) dy = f(x) \quad q.t.p,$$

no qual $B_r = B(0, r)$.

Este teorema será provado mais adiante.

Corolário 2.7. *Seja $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Então*

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x)} |f(y)|^p dy = |f(x)|^p \quad q.t.p.$$

no qual $B_r(x) = B(x, r)$.

Demonstração. Como $L^p(\mathbb{R}^n) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, aplicando o teorema anterior para $|f(y)|^p$, o resultado segue diretamente.

$\blacksquare$

Definição 2.8. *Seja $x \in \mathbb{R}^n$, dizemos que x é um ponto de Lebesgue de f quando*

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} |f(x-y) - f(x)| dy = 0 \quad q.t.p$$

Observação 2.9. *Se x é um ponto de Lebesgue e $\{B_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ sequência de bolas tal que $B_1 \supset B_2 \supset \cdots \supset B_j \supset \cdots$ e $\bigcap_{j=1}^{\infty} B_j = \{x\}$ (bolas não necessariamente centradas em x) então*

$$\lim_{j \to \infty} \frac{1}{|B_j|} \int_{B_j} f(y) dy = f(x).$$

2.3 Desigualdades do Tipo Forte e Fraco

Estamos interessados em estudar a limitação do operador maximal de Hardy-Littlewood nos espaços L^p, isto é, nos questionarmos quando existe uma constante $C > 0$ tal que

$$||Mf||_p \leq C||f||_p,$$

para toda $f \in L^p$. Para $p = \infty$, o resultado é imediato. Seja $B = B(x,r)$, para qualquer $r > 0$, temos

$$\frac{1}{|B|}\int_B |f(y)|dy \leq ||f||_\infty \frac{1}{|B|}\int_B dy = ||f||_\infty.$$

Logo,

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B|}\int_B |f(y)|dy \leq ||f||_\infty.$$

Portanto,

$$||Mf||_\infty \leq ||f||_\infty.$$

Para $p = 1$, vimos na Proposição 2.5 que a desigualdade não é válida, pois se f não é identicamente nula temos $Mf(x) \sim |x|^{-1}$ para x grande. Diante disso, não é possível obter a estimativa desejada para o caso $p = 1$, mas podemos enfraquecer a estimativa.

Observemos que

$$\begin{aligned} ||f||_1 = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|dx &> \int_{\{x\in\mathbb{R}^n; f(x)>\lambda\}} |f(x)|dx \\ &\geq \lambda \int_{\{x\in\mathbb{R}^n; f(x)>\lambda\}} 1dx \\ &= \lambda |\{x \in \mathbb{R}^n; f(x) > \lambda\}| \end{aligned}$$

ou seja, $|\{x \in \mathbb{R}^n; f(x) > \lambda\}| \leq \frac{||f||_1}{\lambda}$.

Pergunta: Será possível encontrar uma constante $c > 0$ tal que

$$|\{x \in \mathbb{R}^n; Mf(x) > \lambda\}| \leq \frac{c||f||_1}{\lambda} \text{ ?}$$

Inspirados nessa observação definiremos um controle que chamaremos de desigualdade do tipo fraco.

Definição 2.10. *Um operador $T : V \to \{g : (X, \mu) \to \mathbb{C}$ mensuráveis$\}$, V espaço vetorial, é dito ser sublinear se satisfaz:*

(i) $|T(f_1 + f_2)(x)| \leq |Tf_1(x)| + |Tf_2(x)|$;

(ii) $|T\lambda f(x)| = |\lambda||Tf(x)|$.

para qualquer $f_1, f_2, f \in V$, $x \in X$ e $\lambda \in \mathbb{C}$.

Exemplo 2.11. *O operador Maximal de Hardy-Littlewood é sublinear.*

Demonstração. De fato, sejam $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ então para qualquer $x \in \mathbb{R}^n$, temos

$$\begin{aligned} M(f+g)(x) &= \sup_{r>0} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} |f+g|(y)dy \\ &\leq \sup_{r>0} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} (|f|+|g|)(y)dy \\ &= \sup_{r>0} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} |f(y)|dy + \sup_{r>0} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} f(y)dy \\ &= Mf(x) + Mg(x). \end{aligned}$$

Ainda,

$$\begin{aligned} M(\lambda f)(x) &= \sup_{r>0} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} |\lambda f|(y)dy \\ &= |\lambda| \sup_{r>0} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} |f|(y)dy \\ &= |\lambda| Mf(x). \end{aligned}$$

□

Sejam (X, μ) e (Y, ν) espaços com medida e $T : L^p(X, \mu) \to \{g \text{ mensuráveis}; g : Y \to \mathbb{C}\}$ sublinear.

Definição 2.12. *Dizemos que T é do tipo fraco (p, q) com $1 \leq p, q < \infty$ se existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\nu\left(\{y \in Y; |Tf(y)| > \lambda\}\right) \leq \left(\frac{c||f||_p}{\lambda}\right)^q$$

para $\lambda > 0$.

Definição 2.13. *Dizemos que* T *é* (p,q) *forte com* $1 \leq p,q \leq \infty$ *se* T *é limitado de* $L^p(X,\mu)$ *em* $L^q(Y,\nu)$, *ou seja, se existe uma constante* $C > 0$ *tal que* $||Tf||_q \leq C||f||_p$ *para qualquer* $f \in L^p$.

Observação 2.14. *Quando* $q = \infty$, *as definições de forte e fraco coincidem.*

Proposição 2.15. *Se* T *é do tipo* (p,q) *forte então* T *é do tipo fraco* (p,q).

Demonstração. Considere o conjunto $E_\lambda = \{y \in Y; |Tf(y)| > \lambda\}$, assim

$$\begin{aligned}\nu(E_\lambda) = \int_{E_\lambda} 1 d\nu \leq \int_{E_\lambda} \frac{|Tf(y)|}{\lambda} d\nu &\leq \frac{1}{\lambda^q} \int_{E_\lambda} |Tf(y)|^q d\nu \\ &\leq \frac{1}{\lambda^q} ||Tf||_p^q \\ &\leq \frac{1}{\lambda^q}\, c||f||_p^q.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\nu(E_\lambda) \leq \left(\frac{C||f||_p}{\lambda}\right)^q.$$

Exemplo 2.16. *Um exemplo de operador fraco* $(1,1)$ *e forte* (∞,∞) *é o operador de maximal de Hardy-Littewood.*

Já mostramos que o operador de maximal de Hardy-Littewood é forte (∞,∞), para mostrarmos que ele é fraco, precisaremos do lema que enunciaremos a seguir.

Lema 2.17. *(Lema de Recobrimento de Vitali) Seja* $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \cdots, B_N\}$ *uma coleção de bolas (abertas ou fechadas) em* $\mathbb{R}^n$. *Então existe uma subcoleção* $\{B_{i_1}, B_{i_2}, \cdots, B_{i_k}\}$ *de bolas disjuntas de* B *tal que*

$$\left|\bigcup_{l=1}^{N} B_j\right| \leq 3^n \sum_{j=1}^{k} |B_{i_j}|.$$

Demonstração. A demonstração deste lema é construtiva. Considere a bola $B = B(x,r)$ de maior raio do conjunto $\mathcal{B}$ e defina $B^* = (x, 3r)$. Todas as bolas que intersectam B estarão contidas em B^*. Chame B de B_{i_1}, delete todas as bolas que intersectam B_{i_1}. As bolas restantes formam uma coleção B', no qual repetimos este o processo, que acabará após k passos e assim teremos k bolas disjuntas. Como toda bola B_l está contida em uma $B^*_{i_j}$ e $|B^*_{i_j}| = 3^n|B_{i_j}|$ segue

$$\left|\bigcup_{\ell=1}^{N} B_l\right| \leq \sum_{j=1}^{k} |B^*_{i_j}| = 3^n \sum_{j=1}^{k} |B_{i_j}|.$$

■

Demonstração do Exemplo 2.16. Vamos utilizar o lema para mostrar que Mf é fraco $(1,1)$.

Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mensurável e $E_\lambda = \{y \in Y : |Mf(y)| > \lambda\}$. Notemos que o conjunto E_λ é um aberto, pois $E_\lambda = |Mf|^{-1}]\lambda, +\infty[$ e a aplicação

$$(x,r) \mapsto \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |f(y)|dy := g(x,r)$$

é contínua em $\mathbb{R}^n\times]0,+\infty[$. De fato, suponhamos que $(x_n, r_n) \to (x_0, r_0)$ quando $n \to \infty$ e mostremos que $g(x_n, r_n) \to g(x_0, r_0)$, uma vez que $\chi_{B(x_n,r_n)} \to \chi_{B(x_0,r_0)}$ e $\chi_{B(x_n,r_n)}$ é limitada, segue do Teorema da Convergência Dominada

$$\frac{1}{|B(x_n,r_n)|}\int_{B(x_n,r_n)} |f(y)|dy \to \frac{1}{|B(x_0,r_0)|}\int_{B(x_0,r_0)} |f(y)|dy.$$

Portanto, a aplicação g é contínua em $\mathbb{R}^n\times]0,+\infty[$

Consideremos $x \in E_\lambda$, assim existe uma bola B_r centrada em x tal que

$$\frac{1}{|B_r|}\int_{B_r} |f(y)|dy > \lambda.$$

Logo,

$$|B_r| < \frac{1}{\lambda}\int_{B_r} |f(y)|dy.$$

Seja $K \subset E_\lambda$ compacto. Observemos que $K \subset \bigcup_{x\in E_\lambda} B_r$, sendo este compacto podemos extrair uma subcobertura finita de bolas disjuntas

$$K \subset \bigcup_{l=1}^{n} B_l.$$

Pelo lema anterior, existem $B_{i_1}, B_{i_2}, \cdots, B_{i_n}$ disjuntas tal que

$$\begin{aligned}
|K| \leq \left|\bigcup_{l=1}^{n} B_\ell\right| &\leq 3^n \sum_{j=1}^{k} |B_{i_j}| \\
&\leq \frac{3^n}{\lambda} \sum_{j=1}^{k} \int_{B_{i_j}} |f(y)|dy \\
&= \frac{3^n}{\lambda} \int_{\cup_{j=1}^{n} B_{i_j}} |f(y)|dy \\
&\leq \frac{3^n}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|dy \\
&= \frac{3^n}{\lambda} ||f||_1.
\end{aligned}$$

Como $|E_\lambda| = \sup\{|K|; K \subset E_\lambda$ com K compacto$\}$ e $|E_\lambda| \leq \dfrac{3^n}{\lambda}||f||_1$, segue que Mf é fraco $(1,1)$.

□

Definição 2.18. *Seja $\{T_t\}_{t>0}$ uma família de operadores lineares definidos em $L^p(X,\mu)$. Definimos*

$$T^*f(x) = \sup_{t>0} |T_t f(x)|$$

chamado de operador maximal associado a família T_t.

Teorema 2.19. *Se T^* (definido como acima) é fraco (p,q) então o conjunto*

$$A = \{f \in L^p(X,\mu); \quad \lim_{t \to t_0} T_t f(x) = f(x) \ q.t.p\}$$

é fechado em $L^p(X,\mu)$.

Demonstração. Seja $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in A$ tal que $f_n \to f$ em L^p, ou equivalentemente, $||f_n - f||_p \to 0$. Mostremos que $f \in A$. Como $f_n \in A$ para todo $n \in \mathbb{N}$, vale que

$$\lim_{t \to t_0} T_t f_n(x) = f_n(x) \quad q.t.p$$

.

Analisemos a medida do seguinte conjunto

$$E_\lambda = \mu(\{x \in X; \limsup_{t\to t_0} |T_t f(x) - f(x)| > \lambda\}).$$

Somando e subtraindo f_n e usando a desigualdade triangular temos

$$|T_t f(x) - f(x)| \leq |T_t(f_n - f)(x) - (f_n - f)(x)| + |T_t f_n(x) - f_n(x)|.$$

Então,

$$\limsup_{t\to t_0} |T_t f(x) - f(x)| \leq \limsup_{t\to t_0} |T_f(f_n - f)(x) - (f_n - f)(x)| + \limsup_{t\to t_0} |T_t f_n(x) - f_n(x)|.$$

Com a observação acima podemos separar o conjunto na seguinte união

$$\{x \in X; \limsup_{t\to t_0} |T_t f(x) - f(x)| > \lambda\} \subseteq \{x \in X; \limsup_{t\to t_0} |T_t(f_n - f)(x) - (f_n - f)(x)| > \lambda/2\} \cup$$

$$\{x \in X; \limsup_{t\to t_0} |T_t(f_n - f_n)(x)| > \lambda/2\}$$

Entretanto,

$$\mu\left(\{x \in X; \limsup_{t\to t_0} |T_t(f_n - f_n)(x)| > \lambda/2\}\right) = 0,$$

pois, por hipótese, $f_n \in A$, ou seja, $\lim_{t\to t_0} T_t f_n(x) = f_n(x)$ q.t.p.

Assim, como $T^* f(x) = \sup |T_t f(x)|$ e T^* é fraco (p, q), segue

$$\begin{aligned}
\mu\left(\{x \in X; \limsup_{t\to t_0} |T_t f(x) - f(x)| > \lambda\}\right) &\leq \mu(\{x \in X; \\
&\quad \limsup_{t\to t_0} |T_t(f_n - f)(x) - (f_n - f)(x)| > \lambda/2\}) \\
&\leq \mu\left(\{x \in X; \limsup_{t\to t_0} |T_t(f_n - f)(x)| > \lambda/2\}\right) \\
&\leq \mu(\{x \in X; |T_t^*(f_n - f)(x)| > \lambda/2\}) \\
&\leq \left(\frac{2c||f_n - f||_p}{\lambda}\right)^q.
\end{aligned}$$

Por hipótese, $f_n \to f$ em L^p, segue que $E_\lambda \to 0$ com λ uniforme. Para concluir a demonstração, consideremos $\lambda = \frac{1}{n}$ com $n \in \mathbb{N}$ e notemos que

$$E_0 = \bigcup E_{\frac{1}{n}} \ \Rightarrow \ \mu(E_0) \leq \sum \mu(E_{\frac{1}{n}}) = 0 \quad q.t.p$$

Assim,

$$\mu(\{x \in X; \lim_{t \to t_0} \sup |T_t f(x) - f(x)| > \lambda\}) = 0 \quad q.t.p$$

O que implica, $\lim\limits_{t \to t_0} T_t f(x) = f(x)$.

Portanto, A é fechado.

$\blacksquare$

Vamos agora demonstrar o principal resultado deste seção.

Demonstração do Teorema 2.6. Vamos supor $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $f \geq 0$, caso contrário escrevamos $f = f^+ - f^-$ com $f^+, f^- \geq 0$ no qual $f^+(x) = f(x)\chi_{\{x \in \mathbb{R}^n; f(x) \geq 0\}}$ e $f^-(x) = f(x)\chi_{\{x \in \mathbb{R}^n; f(x) < 0\}}$. No caso em que f seja complexo escrevamos $f = Ref + iImf$.

1° **caso:** f é contínua.

Fixado B_r temos que f é uniformemente contínua em $\overline{B_r}$, ou seja, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|y| < \delta$ então $|f(x-y) - f(x)| < \varepsilon$. Considere $r_0 = min\{\delta, r\}$ assim, se $s < r_0$ para qualquer $y \in B_s$ temos que $|f(x-y) - f(x)| < \varepsilon$.

Portanto,

$$\left| \frac{1}{|B_s|} \int_{B_s} (f(x-y) - f(x))dy \right| \leq \frac{1}{|B_s|} \int_{B_s} |f(x-y) - f(x)|dy < \varepsilon.$$

2° **caso:** $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Para cada $r > 0$ defina

$$T_r f(x) = \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} f(x-y)dy.$$

Pelo Teorema 2.19 aplicado a $p = 1$ temos que o conjunto

$$A = \{f \in L^1(\mathbb{R}^n); \quad \lim_{t \to t_0} T_t f(x) = f(x) \quad q.t.p\}$$

é fechado em $L^1(\mathbb{R}^n)$. Como o conjunto das funções contínuas está contido em A que é denso e fechado em $L^1(\mathbb{R}^n)$, assim o resultado segue para $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Agora se $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, consideremos a família Q_0 constituída por cubos $\{Q_0^j\}_j$ de tamanho 1, então

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} f\chi_{Q_0^j} = \sum_{j=1}^{\infty} f_j,$$

no qual cada $f_j \in L^1(\mathbb{R}^n)$, pois $\int_{\mathbb{R}^n} |f_j| \leq \int_{\overline{Q}_j} |f| < \infty$.

Pelo 2° caso, temos

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} f_j(x-y)dy = f_j(x)$$

em que $\mathbb{R}^n \backslash E_j$ tal que $|E_j| = 0$.

Defina $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$, temos

$$\lim_{r \to 0} \int_{B_r} f(x-y)dy = f(x)$$

com $\mathbb{R}^n \backslash E$.

Mas, $|E| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |E_j| = 0$.

■

2.4 Teorema de Interpolação

Definição 2.20. *Se f é uma função mensurável de X em $\mathbb{C}$, definimos sua função distribuição $\omega_f(\lambda)$ em $[0, +\infty)$ como*

$$\omega_f(\lambda) = \mu(\{x \in X : |f(x)| > \lambda\}).$$

Exemplo 2.21. *A função distribuição da função $f(x) = \frac{1}{|x|^p}$ é $\omega_f(\lambda) = |S^{n-1}|\lambda^{-\frac{n}{p}}$.*

Demonstração. Pois, $\{x \in \mathbb{R}^n; \frac{1}{|x|^p} > \lambda\} = \{x \in \mathbb{R}^n; (\frac{1}{\lambda})^{\frac{1}{p}} > |x|\}$, e a medida deste último conjunto é igual a medida $B(0, \lambda^{-\frac{1}{p}})$.

□

Com a definição precedente as normas em $L^p(\mathbb{R}^n)$, para $1 \leq p < \infty$, ficam completamente determinadas pela função distribuição. De fato, pelo Teorema de Fubini, obtém-se:

$$\begin{aligned}||f||_p^p = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^{|f(x)|} p\lambda^{p-1} d\lambda dx \\ &= p\int_0^{\infty} \lambda^{p-1} \int_{|f(x)|>\lambda} dx d\lambda \\ &= p\int_0^{\infty} \lambda^{p-1}\omega_f(\lambda) d\lambda.\end{aligned}$$

Portanto,

$$||f||_p = \left(p\int_0^{\infty} \lambda^{p-1}\omega_f(\lambda) d\lambda\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.2}$$

Proposição 2.22. *Se f é uma função mensurável de X em $\mathbb{C}$. Suponhamos $\phi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ diferenciável, crescente e tal que $\phi(0) = 0$ então*

$$\int_X \phi\left(|f(x)|\right) dx = \int_0^{\infty} \phi'(\lambda)\omega_f(\lambda) d\lambda.$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}\int_X \phi\left(|f(x)|\right) dx &= \int_X \left(\int_0^{|f(x)|} \phi'(\lambda) d\lambda\right) dx \\ &= \int_X \left(\int_0^{\infty} \phi'(\lambda)\chi_{\{x\in X; |f(x)|>\lambda\}}(x) d\lambda\right) dx \\ &= \int_0^{\infty} \phi'(\lambda) \left(\int_X \chi_{\{x\in X; |f(x)|>\lambda\}}(x) dx\right) d\lambda \\ &= \int_0^{\infty} \phi'(\lambda)\mu(\{x \in X; |f(x)| > \lambda\}) d\lambda \\ &= \int_0^{\infty} \phi'(\lambda)\omega_f(\lambda) d\lambda.\end{aligned}$$

■

Teorema 2.23. ***(Teorema de Interpolação de Marcinkiewicz)*** *Dados (X, μ) e (Y, ν) espaços de medida com $1 \leq p_0 < p_1 \leq \infty$ e T um operador sublinear de $L^{p_0}(X, \mu) + L^{p_1}(X, \mu)$ no conjunto das funções mensuráveis definidas em Y. Se T é do tipo fraco (p_0, p_0) e fraco (p_1, p_1) então T é do tipo forte para todo $p_0 < p < p_1$.*

Antes de começarmos a demonstração, vamos esclarecer alguns conceitos.

Define-se $L^{p_0} + L^{p_1}$ como sendo o conjunto das funções f tais que $f = f_0 + f_1$ no qual f_0 pertence a L^{p_0} e f_1 pertence a L^{p_1}. Ainda, uma norma neste espaço é dado por

$$||f|| = \inf_{f=f_0+f_1} \{||f_0||_{p_0} + ||f_1||_{p_1}\}.$$

Demonstração. A ideia inicial consiste em escrever f como soma de duas funções f_0 e f_1 de modo que pertençam a L^{p_0}, L^{p_1} respectivamente.

Seja $p_0 < p < p_1$, fixe $f \in L^p(X)$ e $\lambda > 0$. Defina

$$f_0(x) = f(x)\chi_{\{x \in X : |f(x)| > c\lambda\}}$$

e

$$f_1(x) = f(x)\chi_{\{x \in X : |f(x)| \leq c\lambda\}},$$

no qual c é uma constante a ser determinada.

Claramente, $f = f_0 + f_1$.

Afirmação: $f_0 \in L^{p_0}$.

Note que $\{x \in X : |f(x)| > c\lambda\} = \{x \in X : \frac{|f(x)|}{c\lambda} > 1\}$ e que $p - p_0 > 0$, assim

$$\begin{aligned} \int_X |f_0(x)|^{p_0} dx &= \int_{\{x \in X : \frac{|f(x)|}{c\lambda} > 1\}} |f(x)|^{p_0} 1 dx \\ &\leq \int_X |f(x)|^{p_0} \left(\frac{|f(x)|}{c\lambda} \right)^{p-p_0} dx \\ &= (c\lambda)^{p_0 - p} \int_X |f(x)|^p dx < \infty, \end{aligned}$$

pois $f \in L^p$.

Afirmação: $f_1 \in L^{p_1}$.

Observe $\{x \in X : |f(x)| \leq c\lambda\} = \{x \in X : \frac{|f(x)|}{c\lambda} \leq 1\}$ e que $p - p_1 < 0$, logo

$$\begin{aligned}
\int_X |f_1(x)|^{p_1} dx &= \int_{\{x \in X:\ \frac{|f(x)|}{c\lambda} \leq 1\}} |f(x)|^{p_1} 1 dx \\
&\leq \int_X |f(x)|^{p_1} \left(\frac{|f(x)|}{c\lambda} \right)^{p-p_1} dx \\
&= (c\lambda)^{p_1 - p} \int_X |f(x)|^p dx < \infty.
\end{aligned}$$

pois $f \in L^p$.

Observemos que o conjunto $\{x \in X; |Tf(x)| > \lambda\}$ está contido na seguinte união

$$\{x \in X; |Tf_0(x)| \geq \lambda/2\} \cup \{x \in X; |Tf_1(x)| \geq \lambda/2\},$$

De fato, notemos que

$$|Tf_0(x)| \geq \lambda/2 \quad \text{e} \quad |Tf_0(x)| \geq \lambda/2,$$

então

$$\lambda < |Tf(x)| = |T(f_0 + f_1)(x)| \leq |Tf_0(x)| + |Tf_1(x)| < \lambda$$

Contradição.

Assim,

$$\begin{aligned}
\omega_{Tf}(\lambda) &= \mu(\{x \in X; |Tf(x)| > \lambda\}) \\
&\leq \mu(\{x \in X; |Tf_0(x)| \geq \lambda/2\}) + \mu(\{x \in X; |Tf_0(x)| \geq \lambda/2\}) \\
&= \omega_{Tf_0}(\lambda/2) + \omega_{Tf_1}(\lambda/2).
\end{aligned}$$

Dividamos a demonstração em dois casos.

1° caso: $p_1 = \infty$. Escolhamos $c = \dfrac{1}{2a}$, no qual a é tal que $||Tf||_\infty \leq a||f||_\infty$ para toda $f \in L^\infty$. Mostraremos que $\omega_{Tf_1}(\lambda/2) = 0$.

Segue da definição que

$$|f_1(x)| = |f(x)\chi_{\{x \in X: |f(x)| \leq c\lambda\}}| \leq c\lambda = \frac{\lambda}{2a},$$

Assim,

$$||Tf_1||_\infty \leq a||f_1||_\infty \leq \frac{a\lambda}{2a} = \frac{\lambda}{2}.$$

Deste modo,

$$|Tf_1(x)| \leq ||Tf_1||_\infty \leq \lambda/2.$$

para todo $x \in X$.

Logo,

$$\omega_{Tf_1}(\lambda/2) = \mu(\{x \in X : |Tf_1(x)| > \lambda/2\}) = 0. \tag{2.3}$$

Por hipótese, T é fraco (p_0, p_0), ou seja,

$$\omega_{Tf_0}(\lambda/2) \leq \left(\frac{2c}{\lambda}||f_0||_{p_0}\right)^{p_0}. \tag{2.4}$$

Finalmente, da igualdade 2.2 e das desigualdades (2.3), (2.3) e (2.4), temos

$$\begin{aligned}
||Tf||_p^p &= p\int_0^\infty \lambda^{p-1}\omega_{Tf_0}(\lambda/2)\,d\lambda \\
&\lesssim \int_0^\infty \lambda^{p-1-p_0}\left(\int_{\{x\in X:|f(x)|\leq c\lambda\}} |f(x)|^{p_0}dx\right)d\lambda \\
&\lesssim \int_X |f(x)|^{p_0}\left(\int_0^{\frac{|f(x)|}{c}} \lambda^{p-1-p_0}d\lambda\right)dx \\
&\lesssim \int_X |f(x)|^p dx \\
&\lesssim ||f||_p^p.
\end{aligned}$$

2° caso: $p_1 < \infty$

Como $\omega_{Tf}(\lambda) = \mu(\{x \in X : |Tf(x)| > \lambda\})$ sabemos que

$$\omega_{Tf}(\lambda) \leq \omega_{Tf_0}(\lambda/2) + \omega_{Tf_1}(\lambda/2).$$

Além disso, por hipótese, T é fraco (p_0, p_0) e fraco (p_1, p_1) sendo assim, vale:

$$\omega_{Tf_0}(\lambda/2) \leq \left(\frac{2c_0||f_0||_{p_0}}{\lambda}\right)^{p_0}, \omega_{Tf_1}(\lambda/2) \leq \left(\frac{2c_1||f_1||_{p_1}}{\lambda}\right)^{p_1}. \tag{2.5}$$

Seguem pelas estimativas (2.2),(2.5) e pelo Teorema de Fubini

$$
\begin{aligned}
||Tf||_p^p &= \int_X |Tf(x)|^p \\
&\leq p\int_0^\infty \lambda^{p-1}\omega_{Tf_0}(\lambda/2)d\lambda + p\int_0^\infty \lambda^{p-1}\omega_{Tf_1}(\lambda/2)d\lambda \\
&\leq pc_0{}^{p_0}\int_0^\infty \lambda^{p-p_0-1}\int_X |f_0(x)|^{p_0}dxd\lambda \\
&+ pc_1{}^{p_1}\int_0^\infty \lambda^{p-p_1-1}\int_X |f_1(x)|^{p_1}dxd\lambda \\
&\lesssim \int_0^\infty \lambda^{p-p_0-1}\int_{\{x\in X: f(x)>c\lambda\}} |f(x)|^{p_0}dxd\lambda \\
&+ \int_0^\infty \lambda^{p-p_1-1}\int_{\{x\in X: f(x)\leq c\lambda\}} |f(x)|^{p_1}dxd\lambda \\
&\lesssim \int_X |f(x)|^{p_0}\left(\int_0^{\frac{|f(x)|}{c}} \lambda^{p-p_0-1}d\lambda\right)dx \\
&+ \int_X |f(x)|^{p_1}\left(\int_{\frac{|f(x)|}{c}}^\infty \lambda^{p-p_1-1}d\lambda\right)dx \\
&\lesssim \int_X |f(x)|^{p_0}f(x)|^{p-p_0}dx + \int_X |f(x)|^{p_1}|f(x)|^{p-p_1}dx \\
&\lesssim ||f||_p^p.
\end{aligned}
$$

■

Exemplo 2.24. *Como o operador maximal de Hardy-Littlewood fraco* $(1,1)$ *e forte* (∞,∞), *segue como consequência do Teorema de Interpolação de Marcinkiewicz que o operador maximal é forte* (p,p) *para* $1<p<\infty$, *isto é, existe uma constante* $C>0$ *tal que*

$$||Mf||_p \leq C||f||_p \quad \forall f\in L^p.$$

□

CAPÍTULO 3

ESPAÇOS DE SOBOLEV $W^{1,P}(\mathbb{R}^N)$

Em 1930, Sobolev[1] introduziu o conjunto das funções no espaço de Lebesgue L^p com derivadas em L^p, espaço que recebe seu nome a saber Espaços de Sobolev, que tornou-se muito importante no desenvolvimento de diversas áreas da análise como Equações Diferenciais Parciais, principalmente no que tange problemas da Mecânica e da Física. Neste capítulo faremos uma breve introdução à Teoria dos espaços de Sobolev no intuito de estabelecer as principais propriedades que serão utilizadas no capítulo posterior. Veremos alguns resultados gerais, dentre eles a Desigualdade Clássica de Poincaré e a Desigualdade de Sobolev-Gagliardo-Nirenberg. Este capítulo foi baseado nas referências [1], [7], [20] e [21].

3.1 Introdução aos Espaços de Sobolev $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$

Vamos recapitular alguns resultados. Vimos no Capítulo 1 que se $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$ multi-índice então a derivada distribucional de u é definida por

$$\langle \partial^\alpha u, \varphi \rangle \ := (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial^\alpha \varphi \rangle,$$

[1]Sergei Lvovich Sobolev (1908 - 1989) matemático russo, introduziu os espaços de Sobolev, bem como funções generalizadas.

para qualquer $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e portanto defini uma distribuição. Vimos também que se $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ então a identificamos pela distribuição $T_u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ dada por

$$T_u(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\varphi(x)dx = \langle u, \varphi \rangle,$$

para $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Além disso, no Exemplo 1.35 calculamos a derivada distribucional da função Heaviside $H_0 \in L^1_{loc}$ e vimos que a derivada de H_0 é a distribuição Delta de Dirac $\delta_0 \notin L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Mostramos que não existe nenhuma função $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ que satisfaça

$$\langle \delta_0, \varphi \rangle = \int f(x)\varphi(x)dx,$$

para qualquer $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Com isso, dado $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, pode ou não existir uma função $v \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(x)\partial^\alpha\varphi(x)dx = (-1)^{|\alpha|}\int_{\mathbb{R}^n} v(x)\varphi(x)dx$$

para qualquer $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Justificados por tais observações formalizemos o conceito de derivada fraca.

Definição 3.1. *Seja $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$ multi-índice. Então uma função $v \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ é a α-ésima derivada fraca de u se*

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(x)\partial^\alpha\phi(x)dx = (-1)^{|\alpha|}\int_{\mathbb{R}^n} v(x)\phi(x)dx$$

para qualquer $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Comumente escrevemos $v = \partial^\alpha u$.

Proposição 3.2. *Se a derivada fraca existe então ela é única.*

Demonstração. De fato, suponha que existam v_1 e $v_2 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ satisfazendo

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(x)\partial^\alpha\phi(x)dx = (-1)^{|\alpha|}\int_{\mathbb{R}^n} v_1(x)\phi(x)dx = (-1)^{|\alpha|}\int_{\mathbb{R}^n} v_2\phi dx$$

para toda $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Então

$$\int_{\mathbb{R}^n} (v_1 - v_2)(x)\phi(x)dx = 0 = \int_{\mathbb{R}^n} 0\phi(x)dx$$

para toda $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Assim, pela Proposição 1.34 segue que $v_1 - v_2 = 0$ ou seja, $v_1 = v_2$ q.t.p.

■

Exemplo 3.3. *Sejam $n = 1$, $\Omega = (0,2)$ e $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ com suporte compacto em Ω. Considere*

$$u(x) = \begin{cases} x, & se \quad 0 < x \leq 1, \\ 1, & se \quad 1 < x < 2. \end{cases}$$

Essa função não possui derivada no sentido clássico, mas possui derivada no sentido fraco (ou distribucional).

Demonstração. Defina

$$v(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{se} \quad 1 < x < 2. \end{cases}$$

Afirmação: $u' = v$ no sentido fraco.

De fato,

$$\begin{aligned} \int_0^2 u(x)\phi'(x)dx &= \int_0^1 u(x)\phi'(x) + \int_1^2 u(x)\phi'(x)dx \\ &= \int_0^1 x\phi'(x) + \int_1^2 \phi'(x)dx \\ &= \left(\phi(1) - \int_0^1 \phi(x)dx\right) + \phi(2) - \phi(1) \\ &= -\int_0^1 \phi(x)dx = -\int_0^2 v(x)\phi(x)dx \end{aligned}$$

□

Exemplo 3.4. *Sejam $n = 1$, $\Omega = (0,2)$ e $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ com suporte compacto em Ω. Considere*

$$u(x) = \begin{cases} x, & se \quad 0 < x \leq 1, \\ 2, & se \quad 1 < x < 2. \end{cases}$$

Afirmação: Não possui derivada fraca.

Suponha (por absurdo) que exista $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que

$$\int_0^2 u(x)\phi'(x)dx = -\int_0^2 v(x)\phi(x)dx$$

para toda $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$. Então

$$\begin{aligned}\int_0^2 u(x)\phi'(x)dx &= \int_0^1 u(x)\phi'(x)dx + \int_1^2 u(x)\phi'(x)dx \\ &= \int_0^1 x\phi'(x)dx + \int_1^2 2\phi'(x)dx \\ &= \phi(1) - \int_0^1 \phi(x)dx + 2\phi(0) - 2\phi(1) \\ &= -\phi(1) - \int_0^1 \phi(x)dx.\end{aligned}$$

Deveríamos ter,

$$\int_0^2 v(x)\phi(x)dx = \phi(1) + \int_0^1 \phi(x)dx, \tag{3.1}$$

o que é impossível. De fato, existe uma função $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $0 \leq \phi \leq 1$ e $\phi \equiv 1$ numa vizinhança de $K \subset \Omega$ com K compacto (Veja [18] p. 7). Consideremos $K = \{1\}$ e $\Omega = (1 - 1/m, 1 + 1/m)$ com $m \in \mathbb{N}$. Assim, obtemos uma sequência $\{\phi_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ tal que $\phi_m(1) = 1$, $|\phi_m| \leq 1$ para qualquer $m \in \mathbb{N}$ e $\phi_m \to 0$ quando $m \to \infty$ para $x \neq 1$. Substituindo ϕ por ϕ_m na igualdade (3.1), temos

$$\int_0^2 v(x)\phi_m(x)dx = \phi_m(1) + \int_0^1 \phi_m(x)dx.$$

Como ϕ_m são funções integráveis, pois $\phi_m \in C_c^\infty(\Omega)$, $\phi_m \to 0$ q.t.p e $|\phi_m| \leq 1$, pelo Teorema de Convergência Dominada, segue que

$$\int_0^1 \phi_m(x)dx \to 0.$$

Assim,

$$0 = \lim_{m\to\infty} \int_0^2 v(x)\phi_m(x)dx = \lim_{m\to\infty} \left(\phi_m(1) + \int_0^1 \phi_m(x)dx\right) = 1.$$

Absurdo.

$\square$

Definição 3.5. *Seja $1 \leq p \leq \infty$. Os espaços de Sobolev $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ consistem de todas as funções $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ tais que existe a i-ésima derivada fraca $\partial_{x_i} f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ para qualquer $i = 1, 2, \cdots, n$.*

Além disso, definimos o espaço $W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ como sendo o espaço das funções $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ tais que existe a i-ésima derivada fraca $\partial_{x_i} f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ para qualquer $i = 1, 2, \cdots, n.$.

Note que podemos escrever os espaços de Sobolev $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, como

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^n) = \{f \in L^p(\mathbb{R}^n); \nabla f \in L^p(\mathbb{R}^n)\},$$

no qual $\nabla f = (\partial_{x_1} f, \partial_{x_2} f, \cdots, \partial_{x_n} f)$.

Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Uma norma para o espaço $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ é dada por

$$||f||_{1,p} = ||f||_p + \sum_{i=1}^{n} ||\partial_{x_i} f||_p,$$

ou equivalentemente,

$$||f||_{1,p} = ||f||_p + ||\nabla f||_p,$$

no qual $||g||_\infty = ess\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |g(x)|$.

3.2 Propriedades dos Espaços $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$

Vejamos algumas propriedades dos espaços $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

Proposição 3.6. *$W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ é um espaço de Banach para $1 \leq p \leq \infty$.*

Demonstração. Seja $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ então existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para qualquer $m, n \geq n_0$ temos

$$||f_n - f_m||_{1,p} < \varepsilon.$$

Pela definição do espaço $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ segue

$$||\partial_{x_i} f_n - \partial_{x_i} f_m||_p < \varepsilon, \text{ para todo } i = 1, 2, \cdots, n,$$

ou seja, $\partial_{x_i} f_m$ é uma sequência de Cauchy em $L^p(\mathbb{R}^n)$, sendo $L^p(\mathbb{R}^n)$ completo existem f e g_i, ambas pertencentes a $L^p(\mathbb{R}^n)$, tais que $f_n \to f$ e $\partial_{x_i} f_n \to g_i$ na norma $L^p(\mathbb{R}^n)$, para todo $i = 1, 2, \cdots, n$. Resta mostrar que g_i é a i-ésima derivada fraca de f.

Como $f_n \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ vale

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_n(x)\partial_{x_i}\phi(x)dx = (-1)\int_{\mathbb{R}^n} (\partial_{x_i} f_n)(x)\phi(x)dx,$$

para qualquer $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Afirmação 1: $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f_n(x)\partial_{x_i}\phi(x)dx \to \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\partial_{x_i}\phi(x)dx.$

De fato, usando a Desigualdade de Hölder 1.24 e a hipótese de que $f_n \to f$, temos

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^n} f_n(x)\partial_{x_i}\phi(x)dx - \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\partial_{x_i}\phi(x)dx\right| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f_n - f|(x)|\partial_{x_i}\phi(x)dx| \\ &\leq ||f_n - f||_p||\partial_{x_i}\phi||_q \to 0,\end{aligned}$$

no qual $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Afirmação 2: $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} (\partial_{x_i} f_n)(x)\phi(x)dx \to \int_{\mathbb{R}^n} g_i(x)\phi(x)dx.$

De fato, novamente pela Desigualdade de Hölder 1.24 e a hipótese de que $f_n \to g_i$, temos

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^n} (\partial_{x_i} f_n)(x)\phi(x)dx - \int_{\mathbb{R}^n} g_i(x)\phi(x)dx\right| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |(\partial_{x_i} f_n)(x)\phi(x) - g_i(x)||\phi(x)|dx \\ &\leq ||\partial_{x_i} f_n(x) - g_i(x)||_p||\phi||_q \to 0,\end{aligned}$$

no qual $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Assim, para qualquer $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $i = 1, 2, \cdots, n$, temos

$$(-1)\int_{\mathbb{R}^n} g_i\phi = \lim_{n\to\infty}(-1)\int_{\mathbb{R}^n} (\partial_{x_i} f_n)\phi = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} f_n(\partial_{x_i}\phi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\partial^\alpha\phi).$$

Portanto, g_i é a derivada fraca de f, donde concluímos que $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ é um espaço de Banach.

$\blacksquare$

Teorema 3.7. *Seja $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ então $supp(\partial_{x_i} f) \subset supp(f)$ para qualquer $i = 1, 2, \cdots, n$.*

Demonstração. Seja $\{\mathcal{O}_j\}_{j\in J}$ a família de todos os subconjuntos abertos de $\mathcal{O}_j$ do $\mathbb{R}^n$ tais que $f = 0$ em quase todo ponto de $\mathcal{O}_j$. Podemos ver o suporte da função f como sendo o conjunto $\mathbb{R}^n\backslash\mathcal{O}$ no qual $\mathcal{O} = \cup_{j\in J}\mathcal{O}_j$ (notemos que esta definição é equivalente a definição de suporte que apresentamos no Capítulo 1, pois se $x_0 \notin suppf \Leftrightarrow f(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 \in \mathcal{O}_j \Leftrightarrow x_0 \in \cup\mathcal{O}_j \Leftrightarrow x_0 \notin \mathbb{R}^n\backslash\mathcal{O}$). O teorema segue se mostrarmos que $\partial_{x_i} f = 0$ q.t.p em $\mathcal{O}_j$, para qualquer $j \in J$, com $i = 1, 2, \cdots, n$. Para qualquer $\phi \in C_c^\infty(\mathcal{O}_j)$, temos

$$\int_{\mathcal{O}_j} (\partial_{x_i} f)(x)\phi(x)dx = \int_{\mathcal{O}_j} f(x)\partial_{x_i}\phi(x)dx = 0 \quad q.t.p \text{ em } \mathcal{O}_j.$$

Pela Proposição 1.34, segue $\partial_{x_i} f = 0$ q.t.p em $\mathcal{O}_j$.

$\blacksquare$

Teorema 3.8. *Seja $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ para $1 \leq p < \infty$ então existe uma sequência $\{\varphi_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset W^{1,p} \cap C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\varphi_m \to f$ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ quando $m \to \infty$. Em outras palavras, $W^{1,p} \cap C^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração. Sejam $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ com $1 \leq p < \infty$ e $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ uma função integrável com $\int \varphi(x)dx = 1$. Tal como fizemos em (2.1), para cada $\varepsilon > 0$ definamos aproximação da identidade dada por

$$\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Consideremos a seguinte convolução

$$f_\varepsilon := \varphi_\varepsilon * f.$$

Afirmação. $f_\varepsilon \in C^\infty \cap W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

Uma vez que $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ temos $f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Resta provarmos que $f_\varepsilon \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. De fato, pela Desigualdade de Young, temos

$$||f_\varepsilon||_p = ||\varphi_\varepsilon * f||_p \leq ||\varphi_\varepsilon||_1||f||_p < \infty.$$

Pelo Teorema 1.45, para todo $i = 1, 2, \cdots, n$ segue

$$\partial_{x_i} f_\varepsilon = \partial_{x_i}\varphi_\varepsilon * f = \varphi_\varepsilon * \partial_{x_i} f.$$

Assim, novamente aplicando a Desigualdade de Young, temos

$$||\partial_{x_i} f_\varepsilon||_p = ||\varphi_\varepsilon * \partial_{x_i} f||_p \leq ||\varphi_\varepsilon||_1||\partial_{x_i} f||_p < \infty.$$

Logo, f_ε e $\partial_{x_i} f_\varepsilon \in L^p(\mathbb{R}^n)$, o que concluí a afirmação.

Mostremos agora que $C^\infty \cap W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ é denso em $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Pelo Teorema 2.2, dado que f e $\partial_{x_i} f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ temos

$$f_\varepsilon = \varphi_\varepsilon * f \to f \text{ em norma } L^p(\mathbb{R}^n),$$

analogamente,

$$\partial_{x_i} f_\varepsilon = \varphi_\varepsilon * \partial_{x_i} f \to \partial_{x_i} f \text{ em norma } L^p(\mathbb{R}^n).$$

Portanto, $C^\infty \cap W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ é denso em $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

■

Teorema 3.9. $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ *é denso em* $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Pelo Teorema anterior basta provarmos que $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $C^\infty \cap W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Dado $u \in C^\infty \cap W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ queremos encontrar $u_m \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$||u_m - u||_p \to 0.$$

Fixemos $\psi \in C_c^\infty(B(0,2))$ tal que $0 \leq \psi \leq 1$ e $\psi = 1$ se $|x| \leq 1$. Para cada $m > 0$

definamos

$$u_m(x) = \psi\left(\frac{x}{m}\right) u(x).$$

Notemos que u_m é suave, pois ψ e u o são. Além disso, como ψ possui suporte compacto na bola $B(0,2)$ segue que u_m possui suporte compacto na bola $B(0,2m)$.

Vamos aplicar o Teorema da Convergência Dominada para mostrarmos que u_m converge para u em norma $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Primeiramente u_m converge para u q.t.p. De fato, fixado x

$$|(u_m - u)(x)| = |\psi(x/m)u(x) - u(x)| \to 0,$$

por, sendo $\psi \in C^\infty$ quando $\lim\limits_{m\to\infty} \psi(x/m) = \psi(0) = 1$.

Além disso, $|u_m|$ é dominada, em quase todo ponto, por uma função em $L^p(\mathbb{R}^n)$, pois

$$|u_m(x)| = |\psi(x/m)u(x)| \leq |u(x)|,$$

e $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada $||u_m - u||_p \to 0$.

■

Proposição 3.10. *$W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ é um espaço separável para $1 \leq p < \infty$.*

Demonstração. Considere a aplicação $T : W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \to \underbrace{L^p(\mathbb{R}^n) \times L^p(\mathbb{R}^n) \times \cdots \times L^p(\mathbb{R}^n)}_{n+1 \text{ vezes}}$ tal que

$$f \longmapsto (f, \partial_{x_1} f, \cdots, \partial_{x_n} f).$$

Sabemos que a norma no espaço cartesiano de L^p é dada por

$$||Tf||_{L^p\times\cdots\times L^p} = ||f||_p + ||\partial_{x_1} f||_p + \cdots + ||\partial_{x_n} f||_p.$$

Logo, $||Tf||_{L^p\times\cdots\times L^p} = ||f||_{1,p}$, ou seja, T é uma isometria.

Como $L^p(\mathbb{R}^n)$ é separável para $1 \leq p < \infty$, o espaço $L^p(\mathbb{R}^n) \times L^p(\mathbb{R}^n) \times \cdots \times L^p(\mathbb{R}^n)$ também é separável. Além disso, $T(W^{1,p}(\mathbb{R}^n))$ é um subespaço fechado de $L^p(\mathbb{R}^n) \times L^p(\mathbb{R}^n) \times \cdots \times L^p(\mathbb{R}^n)$, temos $T(W^{1,p}(\mathbb{R}^n))$ é separável, logo possui um subconjunto denso e enumerável X, considerando a pré-imagem de X, uma vez que T é um isometria, temos um subconjunto denso e enumerável em $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, donde concluímos que $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ é separável para $1 \leq p < \infty$.

$\blacksquare$

Proposição 3.11. *$W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ é um espaço reflexivo para $1 < p < \infty$.*

Demonstração. Considere a aplicação $T : W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \to \underbrace{L^p(\mathbb{R}^n) \times L^p(\mathbb{R}^n) \times \cdots \times L^p(\mathbb{R}^n)}_{n+1 \text{ vezes}}$ tal que

$$f \longmapsto (f, \partial_{x_1} f, \cdots, \partial_{x_n} f).$$

Sabemos que a norma no espaço cartesiano de L^p é dada por

$$||Tf||_{L^p \times \cdots \times L^p} = ||f||_p + ||\partial_{x_1} f||_p + \cdots + ||\partial_{x_n} f||_p.$$

Logo, $||Tf||_{L^p \times \cdots \times L^p} = ||f||_{1,p}$, ou seja, T é uma isometria.

Como $L^p(\mathbb{R}^n)$ é reflexivo para $1 < p < \infty$, o espaço $L^p(\mathbb{R}^n) \times L^p(\mathbb{R}^n) \times \cdots \times L^p(\mathbb{R}^n)$ também é reflexivo. Além disso, como T é uma isometria e $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ é Banach, segue que $T(W^{1,p}(\mathbb{R}^n))$ é um subespaço fechado de $L^p(\mathbb{R}^n) \times L^p(\mathbb{R}^n) \times \cdots \times L^p(\mathbb{R}^n)$, temos $T(W^{1,p}(\mathbb{R}^n))$ é reflexivo. Considerando a aplicação $\overline{T} : W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \to T(W^{1,p}(\mathbb{R}^n))$ que é uma aplicação bijetora e fechada, portanto, dado que $T(W^{1,p}(\mathbb{R}^n))$ é reflexivo, concluímos que $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ é reflexivo.

$\blacksquare$

3.3 Desigualdades de Sobolev

As desigualdades de Sobolev desempenham um papel extremamente importante na teoria de Equações Diferenciais Parciais. Existe um grande número de desigualdades relacionadas a este espaço, apresentaremos aqui apenas aquelas que serão usadas adiante.

Definição 3.12. *Para $1 \leq p < n$ defina*

$$p^* = \frac{np}{n-p} \Leftrightarrow \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n},$$

no qual p^* é chamado de expoente conjugado de Sobolev.

Teorema 3.13. ***(Desigualdade de Sobolev-Gagliardo-Nirenberg)*** *Seja $1 \leq p < n$. Então existe uma constante $C > 0$, que depende de n e p tal que*

$$||f||_{p^*} \leq C||\nabla f||_p,$$

para toda $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Primeiro consideraremos $p = 1$. Neste caso $p* = \frac{n}{n-1}$. Como f tem suporte compacto, para cada $i = 1, 2, \cdots, n$ e $x \in \mathbb{R}^n$, temos

$$f(x) = \int_{-\infty}^{x_i} \partial_{y_i} f(x_1, \cdots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \cdots, x_n) dy_i.$$

Assim,

$$|f(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\partial_{y_i} f(x_1, \cdots, y_i, \cdots, x_n)| dy_i.$$

Consequentemente,

$$|f(x)|^{\frac{n}{n-1}} \leq \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\partial_{y_i} f(x_1, \cdots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \cdots, x_n)| dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Para simplificar a notação, daqui em diante nesta demonstração, a menos que deixemos explícito outro intervalo de integração, a integral varia de $-\infty$ a ∞.

Agora, integrando em relação a x_1, segue que

$$\begin{aligned}
\int |f(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx_1 &\leq \int \prod_{i=1}^{n} \left(\int |\partial_{y_i} f(x_1, \cdots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \cdots, x_n)| dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1 \\
&= \int \left(\int |\partial_{y_1} f(y_1, \cdots, x_n)| dy_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \left[\prod_{i=2}^{n} \left(\int |\partial_{y_i} f(x_1, \cdots, x_n)| dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}} \right] dx_1 \\
&= \left(\int |\partial_{y_1} f| dy_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \int \prod_{i=2}^{n} \left(\int |\partial_{y_i} f| dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1.
\end{aligned}$$

Definamos $g_i = \left(\int |\partial_{y_i} f| dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1$. Temos que $g_i \in L^{n-1}(\mathbb{R}^n)$, pois

$$\begin{aligned}
\int g_i^{n-1} dx_i &= \int \left(\int |\partial_{y_i} f| dy_i \right)^{\frac{n-1}{n-1}} dx_1 \\
&= \int \int |\partial_{y_i} f| dy_i dx_1 < \infty.
\end{aligned}$$

a última passagem segue do fato de $\partial_{y_i} f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então pelo Teorema de Fubini temos que a integral iterada é finita.

Assim, aplicando a Desigualdade de Hölder generalizada para $p_i = n-1$, temos

$$\int |f(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx_1 \leq \left(\int |\partial_{y_1} f| dy_1\right)^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=2}^{n} \left(\int\int |\partial_{y_i} f| dx_1 dy_i\right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Agora, integrando em relação a x_2, vemos que

$$\begin{aligned} \int\int |f(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx_1 dx_2 &\leq \int \left(\int |\partial_{y_1} f| dy_1\right)^{\frac{1}{n-1}} \left(\prod_{i=2}^{n} \int\int |\partial_{y_i} f| dx_1 dy_i\right)^{\frac{1}{n-1}} dx_2 \\ &= \left(\int\int |\partial_{y_2} f| dx_1 dy_2\right)^{\frac{1}{n-1}} \int \prod_{i=1, i\neq 2}^{n} \left(\int\int |\partial_{y_i} f| dx_1 dy_i\right)^{\frac{1}{n-1}} dx_2. \end{aligned}$$

Novamente aplicando a Desigualdade de Hölder generalizada para $p_i = n-1$, obtemos

$$\int |f(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx_1 dx_2 \leq \left(\int\int |\partial_{y_2} f| dx_1 dy_2\right)^{\frac{1}{n-1}} \left(\int\int |\partial_{y_1} f| dy_1 dx_2\right)^{\frac{1}{n-1}} \times$$

$$\prod_{i=3}^{n} \left(\int\int\int |\partial_{y_i} f| dy_1 dx_2 dy_i\right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Repetindo esse processo para $x_3, x_4, \cdots, x_n$, teremos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx &\leq \prod_{i=1}^{n} \left(\int\int \cdots \int |\partial_{x_i} f| dx_1 \cdots dx_n\right)^{\frac{1}{n-1}} \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)| dx\right)^{\frac{n}{n-1}} \end{aligned} \tag{3.2}$$

ou seja,

$$||f||_{\frac{n}{n-1}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx\right)^{\frac{n-1}{n}} \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)| dx.$$

Portanto,

$$||f||_{\frac{n}{n-1}} \leq ||\nabla f||_1.$$

Se $1 < p < n$ então $p* = \frac{np}{n-p}$. Aplicando em (3.2) $g := |f|^\gamma$ com $\gamma > 1$ a ser escolhido. Pela Desigualdade de Hölder para $\frac{p-1}{p}$ e $\frac{1}{p}$, temos

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}^n} g^{\frac{n}{n-1}}dx\right)^{\frac{n-1}{n}} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^{\frac{\gamma n}{n-1}}dx\right)^{\frac{n-1}{n}} \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla |f|^{\gamma}|dx \\ &= \gamma \int_{\mathbb{R}^n} |f|^{\gamma-1}|\nabla f|dx \\ &\leq \gamma \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^{(\gamma-1)\frac{p}{p-1}}dx\right)^{\frac{p}{p-1}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Escolhendo $\dfrac{\gamma n}{n-1} = (\gamma-1)\dfrac{p}{p-1}$ implica $\gamma = p\dfrac{(n-1)}{(n-p)} > 1$. Como $\frac{n-1}{n} - \frac{p-1}{p} = \frac{n-p}{np} = p*$, concluímos

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{\frac{np}{n-p}}dx\right)^{\frac{n-p}{np}} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Portanto,

$$||f||_{p*} \leq C||\nabla f||_p.$$

■

Observação: Usando argumento de densidade é possível estender a Desigualdade de Sobolev-Gagliardo-Nirenberg para qualquer função $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Seja $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Como $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ basta considerar $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que f_n converge para f em norma $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Pela Teorema 3.13 vale que

$$||f_n||_{p^*} \leq C||\nabla f_n||_p.$$

Como f_n converge para f em norma $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ temos $||\nabla f_n||_p$ converge para $||\nabla f||_p$ quando $n \to \infty$. Por outro lado, $\{f_n\}$ é uma sequência de Cauchy em $L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$, sendo este completo então f_n converge para g em $L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$, uma vez que f_n converge para f, pela unicidade do limite $f = g$, segue que $||f_n||_{p^*}$ converge para $||f||_{p^*}$ quando $n \to \infty$.

Corolário 3.14. *Seja $1 \leq p < n$. Então existe uma constante $C > 0$ que depende de n e p tal que*

$$||f||_{p^*} \leq C||f||_{1,p},$$

para qualquer $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. O resultado segue da Desigualdade de Sobolev-Gagliardo-Nirenberg e do Teorema 3.9.

■

Teorema 3.15. ***(Desigualdade Clássica de Poincaré)*** *Seja* $1 \leq p < \infty$. *Então existe uma constante* $C > 0$, *que depende de* n *e* p, *tal que*

$$⨍_B |u - u_B| \leq Cr ⨍_B |\nabla u|,$$

para qualquer $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, *no qual* B *é uma bola qualquer do* $\mathbb{R}^n$ *com raio* $r > 0$ *e*

$$u_B = \frac{1}{|B|} \int_B u(y)dy = ⨍_B u(y)dy.$$

A demonstração será realizada no próximo capítulo.

■

CAPÍTULO 4

UMA NOVA CARACTERIZAÇÃO DOS ESPAÇOS DE SOBOLEV

O objetivo deste capítulo é fornecer uma nova caracterização do espaço de Sobolev $W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$ que não envolva derivadas e também dar um nova demonstração para a caracterização dos espaços de Sobolev $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ em termos da desigualdade de Poincaré. Mais especificamente, é dedicado a provar o teorema que segue logo adiante. Este capítulo foi baseado nas referências [10], [11], [12], [13], [14], [15], [16] e [17].

Usaremos u_B para indicar a média da função em uma bola B qualquer do $\mathbb{R}^n$ de raio $r > 0$, em outras palavras,

$$u_B = \frac{1}{|B|}\int_B u(y)dy = \fint_B u(y)dy.$$

Denotamos por $M_R f$ a função maximal de Hardy-Littlewood restrita para $R > 0$, ou seja,

$$M_R f(x) = \sup_{r<R} \frac{1}{|B_r|}\int_{B_r} |f(y)|dy,$$

no qual $B_r = B(x, r)$ para qualquer $x \in \mathbb{R}^n$ e $r < R$.

A notação $A \lesssim B$ significa que existe uma constante $c > 0$, que independe de

A e B, tal que $A \leq cB$. Dizemos que é $A \approx B$, se $A \lesssim B$ e $B \lesssim A$, ou seja, existem constantes $c_1, c_2 > 0$ tais que $c_1 B \leq A \leq c_2 B$. E vale relembrar que a abreviatura q.t.p neste contexto significa que tal propriedade é válida salvo em um conjunto de medida de Lebesgue nula.

4.1 Caracterização dos Espaços $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$

O primeiro resultado apresenta uma desigualdade envolvendo a função maximal de Hardy-Littlewood restrita, que será usada com frequência durante o texto.

Teorema 4.1. *Seja $\sigma > 1$. Se $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ para $1 \leq p < \infty$ então existe uma constante C, que depende de n e σ, tal que*

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|(M_{\sigma|x-y|}|\nabla u|(x) + M_{\sigma|x-y|}|\nabla u|(y)). \tag{4.1}$$

Para demonstrarmos esse teorema precisaremos de dois lemas que serão enunciados e provados logo a seguir. O próximo Lema pode ser encontrado em [9] p. 154.

Lema 4.2. *Sejam Ω um conjunto aberto, limitado e convexo do $\mathbb{R}^n$ e d o diâmetro de Ω. Suponha que $u \in W^{1,1}(\Omega)$, então*

$$|u(x) - u_S| \leq \frac{d^n}{n|S|} \int_\Omega |x - y|^{1-n} |\nabla u(y)| dy \quad q.t.p \text{ em } \Omega,$$

no qual S é um subconjunto mensurável de Ω.

Demonstração. Mostraremos, primeiramente, o Lema para $u \in W^{1,1} \cap C^1(\Omega)$. Sejam $x \in \Omega$ e $y \in S$ para qualquer $S \subset \Omega$ mensurável, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$u(x) - u(y) = -\int_0^{|x-y|} \partial_r u(x + r\omega) dr,$$

no qual $\omega = \frac{y-x}{|y-x|}$. Integrando com respeito a y, obtemos

$$\begin{aligned}
u(x) - u_S &= u(x) - \frac{1}{|S|}\int_S u(y)dy \\
&= \frac{1}{|S|}\int_S [u(x) - u(y)]dy \\
&= -\frac{1}{|S|}\int_S \left(\int_0^{|x-y|} \partial_r u(x + r\omega)dr\right) dy.
\end{aligned}$$

Defina

$$V(x) = \begin{cases} |\partial_r u(x)|, & \text{se} \quad x \in \Omega, \\ 0, & \text{se} \quad x \notin \Omega. \end{cases}$$

Logo,

$$|u(x) - u_S| \leq \frac{1}{|S|}\int_S \left(\int_0^{\infty} V(x + r\omega)dr\right) dy.$$

Seja $d = \text{diam}\ \Omega$. Notemos que se $v := x + r\omega$ então $|v - x| = r$. Fixado $x \in \Omega$ estamos interessados apenas nos pontos v tais que $|v - x| = r \leq d$, pois caso contrário, se $v \notin \Omega$ temos $V(x + r\omega) = 0$. Dessa forma,

$$\begin{aligned}
|u(x) - u_S| &\leq \frac{1}{|S|}\int_S \left(\int_0^{\infty} V(x + r\omega)dr\right) dy \\
&\leq \frac{1}{|S|}\int_{|x-y|<d} \left(\int_0^{\infty} V(x + r\omega)dr\right) dy
\end{aligned}$$

Chamando $z = x - y$ e passando para coordenadas polares, temos

$$\begin{aligned}
|u(x) - u_S| &\leq \frac{1}{|S|}\int_{|z|<d} \left(\int_0^{\infty} V\left(x + r\frac{z}{|z|}\right) dr\right) dz \\
&= \frac{1}{|S|}\int_{|\tilde{\omega}|=1} \left[\int_0^{d} \left(\int_0^{\infty} V(x + r\tilde{\omega})dr\right) \rho^{n-1}d\rho\right] d\tilde{\omega}.
\end{aligned}$$

no qual $z = \rho\tilde{\omega}$.

Notemos que $|\tilde{\omega}| = 1$, ou seja, não depende do raio. Pelo Teorema de Fubini, temos

$$\begin{aligned}|u(x)-u_S| &\leq \frac{1}{|S|}\int_0^\infty \left(\int_{|\tilde{\omega}|=1} V(x+r\tilde{\omega})d\tilde{\omega}\right)dr\left(\int_0^d \rho^{n-1}d\rho\right)\\ &= \frac{d^n}{n|S|}\int_0^\infty \left(\int_{|\tilde{\omega}|=1} V(x+r\tilde{\omega})d\tilde{\omega}\right)dr.\end{aligned}$$

Afirmação: $\displaystyle\int_0^\infty \left(\int_{|\tilde{\omega}|=1} V(x+r\tilde{\omega})d\tilde{\omega}\right)dr \leq \int_\Omega |x-y|^{1-n}|\nabla u(y)|dy.$

De fato,

$$\int_\Omega |x-y|^{1-n}|\partial_r u(y)|dy = \int_\Omega |x-y|^{1-n}V(y)dy = \int_\Omega |z|^{1-n}V(x+z)dz$$

Fazendo a mudança para coordenadas polares, temos

$$\int_\Omega |z|^{1-n}V(x+z)dz = \int_0^\infty \int_{|\tilde{\omega}|=1} r^{1-n}V(x+r\tilde{\omega})r^{n-1}drd\tilde{\omega} = \int_0^\infty \left(\int_{|\tilde{\omega}|=1} V(x+r\tilde{\omega})d\tilde{\omega}\right)dr.$$

Afirmação: $|\partial_r u(y)| \leq |\nabla u(y)|$.

De fato, fazendo mudança para coordenadas polares, seja $y = r\omega$ com $|\omega| = 1$, temos

$$u(y) = \tilde{u}(r,\omega).$$

Assim,

$$|\partial_r \tilde{u}(r,\omega)| = |\partial_r u(y)| = |\nabla u \cdot \partial_r(y)| = |\nabla u \cdot \partial_r(r\omega)| = |\nabla u \cdot \omega| \leq |\nabla u||\omega| = |\nabla u|.$$

Pela desigualdade provada na afirmação acima, concluímos que vale a desigualdade

$$\int_0^\infty \left(\int_{|\tilde{\omega}|=1} V(x+r\tilde{\omega})d\tilde{\omega}\right)dr \leq \int_\Omega |x-y|^{1-n}|\nabla u(y)|dy.$$

Por conseguinte, o lema é válido para $u \in W^{1,1} \cap C^1(\Omega)$, ou seja,

$$|u(x)-u_S| \leq C\int_\Omega |x-y|^{1-n}|\nabla u(y)|dy \quad q.t.p \text{ em } \Omega,$$

Agora mostraremos para $u \in W^{1,1}(\Omega)$. Pelo Teorema 3.8 existem $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in W^{1,1} \cap C^\infty(\Omega)$ tal que $u_k - u$ converge para zero quando $k \to \infty$ na norma $W^{1,1}(\Omega)$, ou seja,

$$||u_k - u||_1 \to 0 \quad \text{e} \quad ||\nabla(u_k - u)||_1 \to 0.$$

Como $u_k \in W^{1,1} \cap C^1(\Omega)$ para qualquer $k \in \mathbb{N}$, sabemos que

$$|u_k(x) - (u_k)_S| \leq C \int_\Omega |x-y|^{1-n} |\nabla u_k(y)| dy \quad q.t.p. \text{ em } \Omega.$$

Mostremos que o lado esquerdo da desigualdade converge q.t.p. para $|u - u_S|$ quando $k \to \infty$. De fato,

$$\begin{aligned} ||u_k - (u_k)_S| - |u - u_S|| &\leq |u_k - (u_k)_S - (u - u_S)| \\ &\leq |u_k - u| + |(u_k)_S - (u)_S| \\ &= |u_k - u| + \frac{1}{|S|}|u_k - u| \end{aligned}$$

passando a uma subsequência, quando $k \to \infty$ temos $|u_k - u|$ converge para zero q.t.p, como $||u_k - u||_1$ tende a zero.

Por outro lado, quando $k \to \infty$, temos

$$\int_\Omega |x-y|^{1-n} |\nabla u_k(y)| dy \quad \to \quad \int_\Omega |x-y|^{1-n} |\nabla u(y)| dy.$$

De fato,

$$\left| \int_\Omega |x-y|^{1-n} |\nabla u(y)| dy - \int_\Omega |x-y|^{1-n} |\nabla u_k(y)| dy \right| \leq \int_\Omega |x-y|^{1-n} |\nabla (u - u_k)(y)| dy.$$

Nosso objetivo é mostrar que $\displaystyle\int_\Omega |x-y|^{1-n} |\nabla(u-u_k)(y)| dy$ converge a zero quando $k \to \infty$. Como $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, podemos calcular a integral em todo $\mathbb{R}^n$. Dividamos a integral em duas regiões disjuntas, na bola de centro em $x \in \mathbb{R}^n$ e raio $r > 0$ e no seu complementar. Notemos que $\mathbb{R}^n = B(x,r) \cup B^c(x,r)$ e $B(x,r) \cap B^c(x,r) = \emptyset$.

Seja $h(y) = |x-y|^{1-n}|\nabla(u-u_k)(y)|$ então

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(y)dy = \int_{B(x,r)} h(y)dy + \int_{B^c(x,r)} h(y)dy.$$

Seja $y \in B^c(x,r)$, temos $|x-y| \geq r$ e logo $|x-y|^{1-n} \leq r^{1-n}$. Consequentemente,

$$\int_{B^c(x,r)} |x-y|^{1-n}|\nabla(u-u_k)(y)|dy \leq r^{1-n}||\nabla(u-u_k)||_1,$$

mas, por hipótese $||\nabla(u-u_k)||_1 \to 0$, assim

$$\int_{B^c(x,r)} |x-y|^{1-n}|\nabla(u-u_k)(y)|dy \quad \to \quad 0 \quad q.t.p$$

quando $k \to \infty$.

Para a outra parte usando convolução reescrevemos-la da seguinte forma

$$\int_{B(x,r)} |x-y|^{1-n}|\nabla(u-u_k)(y)|dy = |\nabla(u-u_k)(y)| * |y|^{1-n}\chi_{B(x,r)}(x).$$

Pelo Teorema de Young, temos

$$\left|\left||\nabla(u-u_k)(y)| * |y|^{1-n}\chi_{B(x,r)}\right|\right|_1 \leq ||\nabla(u-u_k)||_1 \; |||y|^{1-n}\chi_{B(x,r)}||_1 = C(r)||\nabla(u-u_k)||_1$$

Pela hipótese, $||\nabla(u-u_k)||_1 \to 0$, portanto passando a uma subsequência

$$|\nabla(u-u_k)(y)| * |y|^{1-n}\chi_{B(x,r)} \quad \to \quad 0 \quad q.t.p$$

quando $k \to \infty$.

Donde concluímos, passando a uma subsequência, temos

$$\int_{B(x,r)} |x-y|^{1-n}|\nabla(u-u_k)(y)|dy \quad \to \quad 0 \quad q.t.p$$

quando $k \to \infty$.

Portanto, mostramos o lema para qualquer $u \in W^{1,1}(\Omega)$.

■

Observação 4.3. *O lema anterior vale em especial para qualquer função* $W^{1,p}(B)$, *no qual* B *é uma bola do* $\mathbb{R}^n$ *(que é um aberto, convexo e limitado), pois se* $f \in W^{1,p}(B)$ *então* $f \in W^{1,1}(B)$. *Pela Desigualdade de Hölder, considerando* $g = \nabla f$, *assim*

$$\int_B |g| \leq \left(\int_B |g|^p \right)^{\frac{1}{p}} |B|^{1-\frac{1}{p}} < \infty,$$

para $1 < p < \infty$.

Lema 4.4. *Seja* $0 < \alpha < n$, $\delta > 0$ *e* $x \in \mathbb{R}^n$. *Se* $f \in L^1_{loc}(B(x,\delta))$ *então existe uma constante* $C > 0$ *que depende apenas de* n *tal que*

$$\int_{B(x,\delta)} |x-y|^{\alpha-n} |f(y)| dy \leq C \delta^\alpha M_\delta(f)(x).$$

Demonstração. Para $x \in \mathbb{R}^n$ e $\delta > 0$, considere o anel

$$\mathcal{A}_k = \mathcal{A}\left(x, \frac{\delta}{2^{k+1}}, \frac{\delta}{2^k}\right) = B\left(x, \frac{\delta}{2^k}\right) \backslash B\left(x, \frac{\delta}{2^{k+1}}\right),$$

para qualquer $k \in \mathbb{N}$. Notemos que $\mathcal{A}_k \cap \mathcal{A}_{k+1} = \emptyset$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Logo,

$$\begin{aligned}
\int_{B(x,\delta)} |x-y|^{\alpha-n}|f(y)|dy &= \int_{\cup \mathcal{A}_k} |x-y|^{\alpha-n}|f(y)|dy \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mathcal{A}_k} |x-y|^{\alpha-n}|f(y)|dy \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\delta}{2^k}\right)^{\alpha-n} \int_{\mathcal{A}_k} |f(y)|dy \\
&= \delta^{\alpha-n} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^k}\right)^{\alpha-n} \left|B\left(x, \delta/2^k\right)\right| \left(\frac{1}{\left|B\left(x,\delta/2^k\right)\right|} \int_{B\left(x,\frac{\delta}{2^k}\right)} |f(y)|dy \right) \\
&\leq \delta^{\alpha-n} 2^n \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^k}\right)^{\alpha} \left[|S^{n-1}| \left(\frac{\delta}{2^k}\right)^n \right] M_{\frac{\delta}{2^k}}(f)(x) \\
&\leq C(n)\delta^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^k}\right)^{\alpha} M_\delta(f)(x) \\
&\leq C(n)\delta^\alpha M_\delta(f)(x)
\end{aligned}$$

pois, $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^k}\right)^{\alpha}$ é convergente.

■

Agora temos todas as ferramentas necessárias para demonstrarmos o teorema.

Demonstração Teorema 4.1. Suponhamos que $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ com $1 \leq p < \infty$. Para qualquer x, y podemos encontrar uma bola $B \subset \mathbb{R}^n$ cujo raio de $B \approx \sigma|x-y|$ com $x, y \in B$ e $\sigma \geq 1$. Assim, pelo Lema 4.2 juntamente com a Observação 4.3 e pelo Lema 4.4, temos

$$\begin{aligned}
|u(x)-u(y)| &\leq |u(x)-u_B| + |u(y)-u_B| \\
&\leq C\int_B |x-y|^{1-n}|\nabla u(x)|dx + C\int_B |x-y|^{1-n}|\nabla u(y)|dy \\
&\lesssim |x-y|M_{\sigma|x-y|}|\nabla u|(x) + |x-y|M_{\sigma|x-y|}|\nabla u|(y) \\
&\lesssim |x-y|\left(M_{\sigma|x-y|}|\nabla u|(x) + M_{\sigma|x-y|}|\nabla u|(y)\right) \quad q.t.p.
\end{aligned}$$

O que conclui a demonstração do teorema.

■

O próximo teorema apresenta uma caracterização dos espaços $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ que não envolve derivadas. Essa caracterização foi introduzida por Hajlasz.

Teorema 4.5. ***(Teorema de Caracterização para** $1 < p < \infty$**)*** *$u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ para $1 < p < \infty$ se, e somente se, $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e existe $0 \leq g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ tal que*

$$|u(x)-u(y)| \leq |x-y|(g(x)+g(y)) \quad q.t.p. \tag{4.2}$$

Além disso,

$$||\nabla u||_p \approx \inf_g ||g||_p,$$

no qual o ínfimo é tomado sobre a classe de funções que satisfaz (4.2).

Antes de provarmos o teorema observemos que $1 < p < \infty$, ou seja, o resultado não engloba o espaço $W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$. Vejamos um exemplo em que o teorema não é satisfeito para $p = 1$.

Exemplo 4.6. *Seja $\Omega =]-1/2, 1/2[$ e $u(x) = -x/(|x|\ln|x|)^{-1}$ então $u \in W^{1,1}(\Omega)$.*

Demonstração. De fato,

$$\int_\Omega |u(x)|dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{|\ln|x||}dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{|\ln(x)|}dx.$$

Comparemos a função $\dfrac{1}{\ln(x)}$ com uma função $\dfrac{1}{x^\alpha}$ que é integrável próximo a origem para $0 \leq \alpha < 1$. De fato, como $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^\alpha}{\ln(x)} = 0$, por definição, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $|x| < \delta$ então $\left|\frac{x^\alpha}{\ln(x)}\right| < \varepsilon$, ou seja, $\frac{1}{|\ln(x)|} \leq \frac{\varepsilon}{x^\alpha}$ para $|x| < \delta$. Sendo assim,

$$2\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{|\ln(x)|}dx \leq 2\left(\int_0^\delta \frac{1}{x^\alpha}dx + \int_\delta^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^\alpha}dx\right) < \infty.$$

Além disso, $u'(x) = \frac{x^2}{|x|^3 \ln^2|x|}$. De fato,

$$\begin{aligned} u'(x) = \left(\frac{-x}{|x|\ln|x|}\right)' &= \frac{(-x)'(|x|\ln|x|) - (|x|\ln|x|)'(-x)}{|x|^2\ln^2|x|} \\ &= \frac{-|x|\ln|x| + [(|x|)'\ln|x| + |x|(\ln|x|)']x}{|x|^2\ln^2|x|} \\ &= \frac{-|x|\ln|x| + \left(\frac{x}{|x|}\ln|x| + \frac{|x|}{x}\right)x}{|x|^2\ln^2|x|} \\ &= \frac{-|x|^2\ln|x| + x^2\ln|x| + |x|^2}{|x|^3\ln^2|x|} \\ &= \frac{x^2}{|x|^3\ln^2|x|}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{|x|\ln^2|x|}dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x\ln^2 x}dx = \int_{-\infty}^{\ln(1/2)} \frac{1}{t^2}dt = \frac{2}{\ln(1/2)}.$$

Suponha que exista $g \in L^1(\Omega)$ com $g \geq 0$ satisfazendo (4.2). Então para $0 < x < 1/2$, temos

$$|u(x) - u(-x)| \leq |x - (-x)|(g(x) - g(-x)) = 2x[g(x) - g(-x)].$$

Todavia,

$$|u(x) - u(-x)| = \left|\frac{-x}{|x|\ln|x|} - \frac{x}{|x|\ln|x|}\right| = \frac{2}{|\ln x|}.$$

Assim,

$$\frac{1}{x|\ln x|} \leq (g(x) + g(-x)).$$

Integrando,

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(x)dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} g(x)dx + \int_{0}^{\frac{1}{2}} g(x)dx.$$

Fazendo mudança de variável,

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{0} g(x)dx = -\int_{\frac{1}{2}}^{0} g(-x)dx.$$

Obtemos,

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(x)dx = \int_{0}^{\frac{1}{2}} g(-x)dx + \int_{0}^{\frac{1}{2}} g(x)dx \geq \int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x|\ln x|} = \int_{-\infty}^{1/2} \frac{1}{t}dt = \infty.$$

Deste modo, $g \notin L^1(\Omega)$.

$\square$

O lema subsequente nos auxiliará a provar o Teorema 4.5.

Lema 4.7. *Seja $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e $0 \leq g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Se*

$$|u(x) - u(y)| \leq |x - y|(g(x) + g(y)) \quad q.t.p. \tag{4.3}$$

então $|\nabla u| \leq C(n)g$ em quase todo ponto, ou seja, $\nabla u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Para demonstrarmos que $|\nabla u| \leq C(n)g$ em quase todo ponto, mostraremos que cada componente do gradiente é limitada por g.

Dado uma função $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ temos

$$\nabla u = (\partial_{x_1} u, \partial_{x_2} u, \cdots, \partial_{x_n} u).$$

Fixemos uma coordenada x_i com $i = 1, 2, \cdots, n$. Consideremos a função u restrita a esta coordenada, dada por

$$u(x_i, \overline{x_i}) \doteq u(x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots, x_n),$$

no qual $\overline{x_i} \cong (x_1, \cdots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \cdots, x_n)$. Para facilitar a notação denotaremos $u(x_i, \overline{x_i}) :=$

$u(x_i)$. Assim, a função $u(x_i)$ é uma função de uma variável real. O mesmo vale para a função g, veremos a como uma função real.

Sejam a, $b \in \mathbb{R}$, sem perda de generalidade suponhamos $a < b$, com a condição adicional $g(a), g(b) < \infty$, pois $g \in L^1_{loc}$. Dividamos o intervalo $[a, b]$ em n segmentos de comprimento $\frac{(b-a)}{n}$, dessa forma, teremos n intervalos em $\mathbb{R}$ de comprimento $\frac{(b-a)}{n}$, os quais denotaremos por I_i, com $i = 1, \cdots, n$ no qual $I_1 = [a = z_0, z_1]$, $I_2 = [z_1, z_2], \cdots, I_n = [z_n, b = z_{n+1}]$.

Afirmação. Para cada i, com $i = 1, 2, \cdots, n$, existe $x \in I_i$ tal que

$$g(x) \leq \frac{1}{|I_i|} \int_{I_i} g(y)dy.$$

Fixemos i. Suponhamos por absurdo que

$$g(x) > \frac{1}{|I_i|} \int_{I_i} g(y)dy,$$

para todo $x \in I_i$. Isto implica que

$$\frac{1}{|I_i|} \int_{I_i} g(y)dy < \frac{1}{|J|} \int_J g(x)dy = g(x)$$

para todo $J \subseteq I_i$ tal que $|J| \neq 0$. A contradição ocorre quando $J = I_i$.

Consideremos $x_0 = a$ e $x_{n+1} = b$ e $x_i \in (a, b)$ para $i = 1, 2, \cdots, n$ tais que

$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1} = b$, temos

$$\begin{aligned}
|u(a) - u(b)| &\leq \sum_{i=0}^{n} |u(x_i) - u(x_{i+1})| \\
&\leq \sum_{i=0}^{n} |x_i - x_{i+1}|[g(x_i) + g(x_{i+1})] \\
&\leq \frac{2(b-a)}{n} \sum_{i=0}^{n} [g(x_i) + g(x_{i+1})] \\
&= \frac{2(b-a)}{n} \left(g(a) + g(b) + 2\sum_{i=1}^{n} g(x_i) \right) \\
&\leq \frac{2(b-a)}{n}(g(a) + g(b)) + \frac{4(b-a)}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|I_i|} \int_{I_i} g(y)dy \\
&= \frac{2(b-a)}{n}(g(a) + g(b)) + 4\sum_{i=1}^{n} \int_{I_i} g(y)dy.
\end{aligned}$$

Quando n tende ao infinito, concluímos

$$|u(a) - u(b)| \leq 4\int_a^b g(y)dy.$$

Seja $I = [a, b]$, pela desigualdade acima, temos

$$|\partial_{x_i} u(a)| = \lim_{b \to a} \frac{|u(a) - u(b)|}{|b-a|} \leq \lim_{b \to a} \frac{1}{|b-a|} \left(4\int_a^b g(y)dy \right) = 4 \lim_{|I| \to 0} \frac{1}{|I|} \int_I g(y)dy.$$

Pelo Teorema da Diferenciação de Lebesgue, concluímos

$$|\partial_{x_i} u(a)| \leq 4g(a) \quad q.t.p$$

Como cada componente do gradiente é limitado por g e $|\nabla u| \leq \sqrt{n}\, \max_i |\partial_{x_i} u|$, segue que

$$|\nabla u| \leq C(n)g.$$

■

Demonstração Teorema 4.5. Se $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ então pelo Teorema 4.1, temos

$$|u(x) - u(y)| \leq C(\sigma)|x-y| \left(M_{\sigma|x-y|}|\nabla u|(x) + M_{\sigma|x-y|}|\nabla u|(y) \right) \; q.t.p.$$

Notemos que pontualmente o operador maximal restrito é menor que o operador Maximal de Hardy-Littlewood, ou seja,

$$M_{\sigma|x-y|}|\nabla u|(x) \leq M|\nabla u|(x).$$

Assim,

$$|u(x) - u(y)| \leq C(n,\sigma)|x-y|\left(M|\nabla u|(x) + M|\nabla u|(y)\right) \;\; q.t.p.$$

Tomando $g = C(n,\sigma)M\left(|\nabla u|\right)$, como $|\nabla u| \in L^p(\mathbb{R}^n)$ para $1 < p < \infty$ e sabendo que o operador maximal de Hardy-littlewood é limitado em $L^p(\mathbb{R}^n)$ para qualquer $p > 1$, segue que $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ para $p > 1$. Dessa forma (4.2) é satisfeita.

Vejamos a outra implicação. Sejam $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $0 \leq g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ tais que

$$|u(x) - u(y)| \leq |x-y|(g(x) + g(y)) \;\; q.t.p.$$

mostremos que $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ para $1 < p < \infty$. Por hipótese $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$, resta mostrar que $\nabla u \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Como $L^p(\mathbb{R}^n) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, pelo Lema 4.7, segue que $|\nabla u| \leq C(n)g$ em quase todo ponto, logo

$$\int |\nabla u|^p \leq C(n) \int g^p < \infty.$$

Assim, $|\nabla u| \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

Para concluir o teorema mostremos que $||\nabla u||_p \approx \inf_g ||g||_p$, ou seja, existem constantes c_1 e $c_2 \leq 1$ tais que

$$c_1 \inf_g ||g||_p \leq ||\nabla u||_p \leq c_2 \inf_g ||g||_p.$$

Sabemos que $|\nabla u| \leq C(n)g$ em quase todo ponto, assim segue

$$||\nabla u||_p^p = \int |\nabla u|^p \leq c(n) \int |g|^p = c(n)||g||_p^p,$$

como a desigualdade é uniforme para $g \in L^p$, em particular,

$$||\nabla u||_p \leq c_2 \inf_g ||g||_p.$$

Dado que $g = C(n)M(|\nabla u|)$ satisfaz (4.2) e o operador maximal é do tipo forte para $1 < p \leq \infty$, temos

$$||g||_p = ||M(\nabla u)||_p \leq C||\nabla u||_p,$$

em particular,

$$c_1 \inf_g ||g||_p \leq ||\nabla u||_p.$$

Portanto, segue $||\nabla u||_p \approx \inf_g ||g||_p$.

■

O próximo teorema nos fornece uma caracterização análoga ao apresentado no Teorema anterior para o espaço $W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$. Cabe ressaltar que na demonstração do Teorema 4.5 usamos fortemente que o operador maximal de Hardy-Littlewood é limitado para $p > 1$, mas já vimos na Proposição 2.5 que isto não acontece caso $p = 1$, por isso, faz-se necessário uma caracterização alternativa para este caso.

Teorema 4.8. *$u \in W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$ se, e somente se, $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e existe $0 \leq g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $\sigma \geq 1$ tal que*

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x-y|(M_{\sigma|x-y|}g(x) + M_{\sigma|x-y|}g(y)) \quad q.t.p. \tag{4.4}$$

Além disso, se u satisfaz (4.4) então

$$|\nabla u| \leq C(n,\sigma)g \quad q.t.p.$$

Para demonstrar esse teorema precisaremos de alguns resultados preliminares.

Existem vários tipos de desigualdades chamadas de Desigualdade de Poincaré, a versão clássica é

$$⨍_B |u - u_B| \leq Cr\left(⨍_B |\nabla u|\right),$$

no qual C é uma constante positiva que só depende de n e B é uma bola do $\mathbb{R}^n$. Contudo, estamos interessados na versão que será dada a seguir.

Definição 4.9. *Sejam $\sigma \geq 1$ e $1 \leq p < \infty$. Se $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e g uma função mensurável $0 \leq g \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$, dizemos que o par (u, g) satisfaz a desigualdade p-Poincaré quando*

$$\fint_B |u - u_B| \leq r \left(\fint_{\sigma B} g^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

para toda bola B de raio r, no qual σB é a bola concêntrica com B e raio σr.

O lema que vem a seguir implica em uma desigualdade do tipo p-Poincaré.

Lema 4.10. *Sejam $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq g \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ com $1 \leq p < \infty$ e $\sigma \geq 1$. Se vale a desigualdade*

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y| \left((M_{\sigma|x-y|} g^p(x))^{\frac{1}{p}} + (M_{\sigma|x-y|} g^p(y))^{\frac{1}{p}} \right) \quad q.t.p. \tag{4.5}$$

Se vale a desigualdade

$$\fint_B |u - u_B| \leq rC(n, p, \sigma) \left(\fint_{3\sigma B} g^p \right)^{1/p},$$

para toda bola B de raio r.

Demonstração. Primeiramente, demonstraremos o caso em que $p > 1$.

Sejam $a \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$ quaisquer. Consideremos $B = B(a, r)$ uma bola de centro $a \in \mathbb{R}^n$ e raio $r > 0$. Denotaremos por $B_{3\sigma} = B(a, 3\sigma r)$ a bola concêntrica com B e raio 3σ vezes o raio de B.

Sejam $x, y \in B$ quaisquer, observemos que

$$\begin{aligned} M_{\sigma|x-y|} g^p(x) &= \sup_{s < \sigma|x-y|} \frac{1}{|B(x,s)|} \int_{B(x,s)} |g(z)|^p dz \\ &\leq \sup_{s < 3\sigma r} \frac{1}{|B(x,s)|} \int_{B(x,s)} |g(z)|^p dz \\ &\leq \sup_{s > 0} \frac{1}{|B(x,s)|} \int_{B(x,s)} |g(z) \chi_{B_{3\sigma}}(z)|^p dz = M(g^p \chi_{B_{3\sigma}})(x). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Segue da hipótese (4.5) juntamente com a observação acima que

$$|u(x) - u(y)| \leq |x - y| \left((M(g^p \chi_{B_{3\sigma}})(x))^{\frac{1}{p}} + (M(g^p \chi_{B_{3\sigma}})(y))^{\frac{1}{p}} \right). \tag{4.7}$$

Assim,

$$\begin{aligned} ⨍_B |u(x) - u_B| &= ⨍_B \left| u(x) - ⨍_B u(y)dy \right| dx \\ &= ⨍_B \left| ⨍_B (u(x) - u(y))dy \right| dx \\ &\leq ⨍_B ⨍_B |u(x) - u(y)|dydx. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Substituindo (4.7) em (4.8), obtemos

$$⨍_B |u(x) - u_B|dx \leq ⨍_B ⨍_B |x - y| \left(M(g^p \chi_{B_{3\sigma}})(x)^{\frac{1}{p}} + M(g^p \chi_{B_{3\sigma}})(y)^{\frac{1}{p}} \right) dxdy.$$

Como $|x - y| < 2r$ e

$$⨍_B ⨍_B (M(g^p \chi_{B_{3\sigma}})(x))^{\frac{1}{p}} dxdy = ⨍_B (M(g^p \chi_{B_{3\sigma}})(x))^{\frac{1}{p}} dx.$$

Temos,

$$⨍_B |u(x) - u_B|dx \leq 2 \left(2r ⨍_B (M(g^p \chi_{B_{3\sigma}})(x))^{\frac{1}{p}} dx \right).$$

Chamando $f = M(g^p \chi_{B_{3\sigma}})$, já que f é uma função mensurável positiva, podemos definir a função distribuição,

$$\omega_f(t) = |\{x \in B; f(x) > t\}|.$$

Pela Proposição 2.22, tomemos $\phi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ como sendo a função identidade, isto é, $\phi(t) = t$. Notemos que ϕ é diferenciável, crescente, $\phi(0) = 0$ e $\phi'(t) = 1$, temos

$$\int_B \phi(|f(x)|)dx = \int_0^\infty \omega_f(t)dt,$$

ou seja,

$$\int_B |f(x)|dx = \int_0^\infty |\{x \in B; f(x) > t\}|dt.$$

com isso obtemos,

$$\begin{aligned}
⨍_B |u(x) - u_B|dx &\leq 4r ⨍_B (f(x))^{\frac{1}{p}} dx \\
&= 4r\frac{1}{|B|}\int_0^\infty |\{x \in B; f(x) > t^p\}|dt \\
&= 4r\frac{1}{|B|}\left(\int_0^{t_0} |\{x \in B; f(x) > t^p\}|dt\right. \\
&\qquad \left. + \int_{t_0}^\infty |\{x \in B; f(x) > t^p\}|dt\right), \qquad (4.9)
\end{aligned}$$

com t_0 uma constante a ser escolhida.

Agora vamos estimar separadamente os valores das integrais,

$$\int_0^{t_0} |\{x \in B; f(x) > t^p\}|dt \leq \int_0^{t_0} |B|dt = |B|t_0. \qquad (4.10)$$

Para a outra parte da soma usaremos o fato do operador maximal de Hardy-Littlewood ser limitado fracamente $(1,1)$, assim

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^\infty |\{x \in B; f(x) > t^p\}|dt &= \int_{t_0}^\infty |\{x \in B; M(g^p\chi_{B_{3\sigma}})(x) > t^p\}|dt \\
&\leq \int_{t_0}^\infty \left(\frac{C\int g^p\chi_{B_{3\sigma}}}{t^p}\right)dt \\
&= C\left(\int_{B_{3\sigma}} g^p\right)\left(\int_{t_0}^\infty \frac{1}{t^p}dt\right) \\
&= C\left(\int_{B_{3\sigma}} g^p\right)\left(\frac{t_0^{1-p}}{p-1}\right) \\
&= Ct_0^{1-p}\int_{B_{3\sigma}} g^p. \qquad (4.11)
\end{aligned}$$

Substituindo as estimativas (4.10) e (4.11) em (4.9), obtemos

$$⨍_B |u(x) - u_B|dx \leq 4r\frac{1}{|B|}\left(|B|t_0 + Ct_0^{1-p}\int_{B_{3\sigma}} g^p\right).$$

Tomando $t_0 = \left(\frac{1}{|B|}\int_{B_{3\sigma}} g^p\right)^{\frac{1}{p}}$, vemos que

$$\begin{aligned}
⨍_B |u(x) - u_B|dx &\leq 4r\frac{1}{|B|}\left[|B|\left(\frac{1}{|B|}\int_{B_{3\sigma}} g^p\right)^{\frac{1}{p}} + C\left(\frac{1}{|B|}\int_{B_{3\sigma}} g^p\right)^{\frac{1-p}{p}}\int_{B_{3\sigma}} g^p\right]\\
&\leq 4r\frac{1}{|B|}\left[|B|^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_{B_{3\sigma}} g^p\right)^{\frac{1}{p}} + C|B|^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_{B_{3\sigma}} g^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]\\
&\lesssim r|B|^{-\frac{1}{p}}\left(\int_{B_{3\sigma}} g^p\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\lesssim r\left(⨍_{B_{3\sigma}} g^p\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Nesta parte da demonstração foi essencial assumirmos $p > 1$ a fim de que a função t^{-p} fosse integrável em $[t_0, +\infty)$, sendo assim, precisamos de uma demonstração alternativa para o caso $p = 1$.

Demonstração do Lema 4.10 para $p = 1$. Fixemos uma bola B e novamente seja $B_{3\sigma}$ a bola concêntrica a B com raio 3σ vezes o raio de B. Para cada $x, y \in B$, pela estimativa (4.7) temos

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|(Mh(x) + Mh(y)), \tag{4.12}$$

no qual $h = g\chi_{B_{3\sigma}}$. Devemos mostrar que

$$⨍_B |u - u_B| \leq C(n, p, \sigma)r ⨍_{B_{3\sigma}} h. \tag{4.13}$$

Se $h = 0$ em quase todo ponto de B então $|u(x) - u(y)| = 0$ em B, isto implica que u é constante, assim a desigualdade (4.13) é satisfeita. Suponhamos então $h > 0$ em algum conjunto de medida positiva e, portanto $\int_{B_{3\sigma}} h > 0$. Além disso, podemos assumir que

$$0 < ⨍_{B_{3\sigma}} h \leq 2h \text{ em } B_{3\sigma} \text{ e } h = 0 \text{ em } \mathbb{R}^n \backslash B_{3\sigma}. \tag{4.14}$$

Caso contrário, se $⨍_{B_{3\sigma}} h > 2h$ em $B_{3\sigma}$, então (4.14) é satisfeito para

$$f = h + \left(⨍_{B_{3\sigma}} h\right)\chi_{B_{3\sigma}}.$$

De fato,

$$\fint_{B_{3\sigma}} f = \fint_{B_{3\sigma}} h + \fint_{B_{3\sigma}} h \fint_{B_{3\sigma}} \chi_{B_{3\sigma}} = 2 \fint_{B_{3\sigma}} h,$$

e consequentemente,

$$\fint_{B_{3\sigma}} f = 2 \fint_{B_{3\sigma}} h \leq 2 \fint_{B_{3\sigma}} h + 2h = 2f \text{ em } B_{3\sigma}.$$

Por definição $f = 0$ em $\mathbb{R}^n \backslash B_{3\sigma}$.

Vamos decompor a bola B em conjuntos de níveis. Para qualquer $k \in \mathbb{Z}$ seja

$$E_k = \{x \in B; Mh(x) \leq 2^k\} \quad \text{e} \quad a_k = \sup_{x \in E_k} |u(x)|. \tag{4.15}$$

Notemos que $E_k \subseteq E_{k+1}$, consequentemente $a_k \leq a_{k+1}$. Observemos também, $B = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} (E_k \backslash E_{k-1})$ e essa união é disjunta.

Segue da desigualdade triangular, para $x \in B$ temos

$$\int_B |u - u_B| \leq \int_B |u_B| + \int_B |u| \leq \int_B |u| + |B||u_B| \leq \int_B |u| + \int_B |u| = 2|u|.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\int_B |u-u_B|(x)dx &\leq 2\int_B |u(x)|dx \qquad (4.16)\\
&= 2\int_{\bigcup_{-\infty}^{\infty}(E_k\backslash E_{k-1})} |u|(x)dx\\
&\leq 2\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{(E_k\backslash E_{k-1})}|u(x)|dx\\
&\leq 2\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\sup_{x\in E_k\backslash E_{k-1}}|u(x)|\right)\int_{(E_k\backslash E_{k-1})}1dx\\
&\leq 2\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k|E_k\backslash E_{k+1}|\\
&\leq 2\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0}a_k|E_k\backslash E_{k+1}|+\sum_{k=k_0+1}^{\infty}a_k|E_k\backslash E_{k+1}|\right)\\
&\leq 2\left(\underbrace{\sum_{k=-\infty}^{k_0}a_{k_0}|E_k\backslash E_{k+1}|}_{\text{Parte I}}+\underbrace{\sum_{k=k_0+1}^{\infty}a_k|E_k\backslash E_{k+1}|}_{\text{Parte II}}\right). \qquad (4.17)
\end{aligned}$$

no qual k_0 é um número a ser escolhido.

Nosso objetivo será encontrar estimativas para a_k e a_{k_0}. Pela hipótese (4.12) e pela Definição 4.15, a função $u\chi_{E_k}$ é Lipschitz de constante 2^{k+1}. De fato, para quaisquer $x,y\in E_k$, temos

$$\begin{aligned}
|u(x)-u(y)| &\leq |x-y|(Mh(x)+Mh(y))\\
&\leq |x-y|(2^k+2^k)\\
&= 2^{k+1}|x-y|.
\end{aligned}$$

Agora, para qualquer $x\in E_k$ e $y\in E_{k-1}\subseteq E_k$,

$$|u(x)|\leq|u(x)-u(y)|+|u(y)|\leq 2^{k+1}|x-y|+a_{k-1}.$$

Por um momento, mostremos uma propriedade sobre bolas em $\mathbb{R}^n$ que será útil mais adiante.

Afirmação 1: *Para qualquer $r \leq diam\ B$ vale $|B(x,r) \cap B| \geq |B(x,r/2)|$.*

De fato, seja B a bola de centro em $a \in \mathbb{R}^n$ e raio $\ell > 0$. Seja $x \in B$. Temos 3 casos a considerar:

(i) $r \leq \ell - d(x,a)$. Neste caso, $B(x,r) \subset B$, o que implica

$$|B(x,r) \cap B| = |B(x,r)| \geq |B(x,r/2)|.$$

(ii) $\ell + d(x,a) \leq r$. Vemos que $B \subset B(x,r)$, assim

$$|B(x,r) \cap B| = |B| \geq |B(x,r/2)|,$$

pois $r \leq diam B = 2\ell$.

(iii) $\ell - d(x,a) < r < \ell + d(x,a)$.

Lembrando que $x \in B$ então $d(x,a) < \ell$, assim $\ell - d(x,a) > 0$.

Tomemos x' na reta que une x a a tal que $d(x,x') = r/2$. Pela invariância $|B(x,r/2)| = |B(x',r/2)|$. Agora,

$$B(x',r/2) \subset B(x,r) \cap B(a,\ell).$$

De fato, seja $y \in B(x',r/2)$ então $d(x',y) < r/2$. Primeiramente mostremos que $d(x,y) < r$. Como $d(x,x') = r/2$ e $d(x',y) < r/2$ implica $d(x,y) < 2(r/2) = r$.

Resta-nos mostrar que $d(y,a) < \ell$, ou seja, $d(a,y) < \ell$. De fato,

$$d(a,y) \leq d(a,x') + d(x',y) \leq d(a,x') + r/2.$$

Temos dois casos a considerar

$$d(a,x') = \begin{cases} d(a,x) - d(x,x') & (1) \\ d(x,x') - d(a,x) & (2) \end{cases}$$

Se (1) acontece então

$$d(a,y) \leq d(a,x') + r/2 = d(a,x) - d(x,x') + r/2 = d(a,x) < \ell.$$

Se vale (2) então

$$\begin{aligned} d(a,y) \leq d(a,x') + r/2 &= [d(x,x') - d(a,x)] + r/2 \\ &= r/2 - d(a,x) + r/2 \\ &= r - d(a,x) \\ &< [\ell + d(a,x)] - d(a,x) = \ell. \end{aligned}$$

Portanto, em qualquer caso a desigualdade (4.1) é verdadeira.

Qualquer bola em $\mathbb{R}^n$, com a medida de Lebesgue, satisfaz a propriedade de n-regularidade, isto é,

$$|B(x,r)| > \omega_n (r/2)^n,$$

no qual ω_n é o volume da bola unitária.

Escolhamos r, com $r <$ diam B, tal que $|B(x,r)| \geq |B/E_{k-1}|$. Basta tomar $r > 2\omega_n^{-\frac{1}{n}} |B \backslash E_{k-1}|^{\frac{1}{n}}$. De fato,

$$|B(x,r)| > \omega_n (r/2)^n = \omega_n \left(\omega_n^{-\frac{1}{n}} |B/E_{k-1}|^{\frac{1}{n}} \right)^n = |B/E_{k-1}|.$$

Afirmação 2: *Dado $x \in E_k$ existe $y \in E_{k-1}$ tal que $|x-y| < r$ para $r > 2\omega_n^{-\frac{1}{n}} |B/E_{k-1}|^{\frac{1}{n}}$.*

De fato, suponhamos (por absurdo) que dado $x \in E_k$ e r como acima, mostremos que $B(x,r) \cap E_{k-1} \neq \emptyset$, para isso vamos mostrar que $|B(x,r) \cap E_{k-1}| = 0$.

Lembremos que $E_{k-1} = \{x \in B; Mh(x) \leq 2^{k-1}\}$. Assim, podemos escrever B como união disjunta $B = (B \backslash E_{k-1}) \cup E_{k-1}$. Intersectando a bola B com a bola $B(x,r)$, e usando a propriedade distribuiva da interseção, temos

$$B \cap B(x,r) = ((B \backslash E_{k-1}) \cap B(x,r)) \cup (E_{k-1} \cap B(x,r)).$$

Pela definição de medida de conjunto,

$$|B \cap B(x,r)| = |(B \backslash E_{k-1}) \cap B(x,r)| + |E_{k-1} \cap B(x,r)|,$$

mas por hipótese $|B(x,r) \cap E_{k-1}| = 0$. Logo

$$|B \cap B(x,r)| = |(B \backslash E_{k-1}) \cap B(x,r)|.$$

Pela Afirmação 1 segue

$$|B \cap B(x,r)| \geq |B(x,r/2)| > |B \backslash E_{k-1}|.$$

Portanto,

$$|(B \backslash E_{k-1}) \cap B(x,r)| > |B \backslash E_{k-1}|$$

o que é uma contradição.

Pela Afirmação 2 dado $x \in E_k$ temos que

$$|u(x)| \leq 2^{k+1} C |B \backslash E_{k-1}|^{\frac{1}{n}} + a_{k-1}.$$

Como a desigualdade acima é uniforme, tomando o supremo no conjunto E_k, segue

$$a_k \leq 2^{k+1} |B \backslash E_{k-1}|^{\frac{1}{n}} + a_{k-1}. \tag{4.18}$$

Analisemos $|B \backslash E_{k-1}|$. Usando o fato do operador maximal ser fraco $(1,1)$, temos

$$|B \backslash E_{k-1}| = |\{x \in B; Mh(x) > 2^{k-1}\}| \leq \frac{c}{2^{k-1}} \int |h| = \frac{2c}{2^k} \int_{B_{3\sigma}} h = \frac{C}{2^k} \int_{B_{3\sigma}} h. \tag{4.19}$$

Substituindo (4.19) em (4.18), obtemos uma estimativa para a_k,

$$\begin{aligned} a_k &\leq a_{k-1} + C 2^{k+1} \left(\frac{1}{2^k} \int_{B_{3\sigma}} h \right)^{\frac{1}{n}} \\ &= a_{k-1} + C 2^{k(1-\frac{1}{n})} \left(\int_{B_{3\sigma}} h \right)^{\frac{1}{n}}. \end{aligned}$$

Se $k > k_0$, podemos iterar a desigualdade anterior até chegarmos em k_0. Consideremos dois casos $n = 1$ e $n > 1$.

Se $n = 1$, para qualquer $k > k_0$, temos

$$\begin{aligned} a_k &\leq a_{k-1} + C\int_{B_{3\sigma}} h \\ &\leq \left(a_{k-2} + C\int_{B_{3\sigma}} h\right) + C\int_{B_{3\sigma}} h \\ &\vdots \\ &\leq a_{k_0} + (k-k_0)C\int_{B_{3\sigma}} h. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Assumindo $n > 1$, para qualquer $k > k_0$, segue

$$\begin{aligned} a_k &\leq a_{k-1} + C2^{k(1-\frac{1}{n})}\left(\int_{B_{3\sigma}} h\right)^{\frac{1}{n}} \\ &\leq \left(a_{k-2} + C2^{(k-1)(1-\frac{1}{n})}\left(\int_{B_{3\sigma}} h\right)^{\frac{1}{n}}\right) + C2^{k(1-\frac{1}{n})}\left(\int_{B_{3\sigma}} h\right)^{\frac{1}{n}} \\ &\vdots \\ &\leq a_{k_0} + C\left(\sum_{i=k_0+1}^{k} 2^{i(1-\frac{1}{n})}\right)\left(\int_{B_{3\sigma}} h\right)^{\frac{1}{n}} \\ &\leq a_{k_0} + C2^{k(1-\frac{1}{n})}\left(\int_{B_{3\sigma}} h\right)^{\frac{1}{n}}. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Se $k \leq k_0$ então $E_k \subset E_{k_0}$, assim $a_k \leq a_{k_0}$. Escolhamos k_0 tal que

$$|E_{k_0-1}| < |B|/2 \leq |E_{k_0}|. \tag{4.22}$$

De fato tal k_0 existe pois devido a limitação de h, visto em (4.14), temos $h \geq \frac{1}{2}⨍_{3\sigma B} h$ assim,

$$Mh(x) \geq \frac{1}{2} ⨍_{B_{3\sigma}} h.$$

Além disso, 2^k tende a zero quando $k \to -\infty$ então

$$|E_k| \to 0 \ \text{ quando } k \to -\infty.$$

Pela definição de limite, existe um $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|E_{j_0}| < \varepsilon_1$ para $j \leq -j_0$. Escolha $\varepsilon_1 = \frac{|B|}{2}$. Assim, temos um lado da desigualdade

$$|E_{j_0}| < \frac{|B|}{2}.$$

Por outro lado, como $|E_k| \to |B|$ quando $k \to \infty$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|B|\backslash|E_k| < |B|/2$ para $k \geq k_0$, isto implica, $\frac{|B|}{2} < |E_k|$ para $k \geq k_0$. Tome $\tilde{k_0}$ menor que k_0 tal que k_0 satistafaz $\frac{|B|}{2} < |E_k|$. Este $\tilde{k_0}$ verifica

$$|E_{\tilde{k_0}-1}| < |B|/2 \leq |E_{\tilde{k_0}}|.$$

Como $E_{k_0} \neq \emptyset$, existe $x \in B$ tal que

$$\frac{1}{2} \quad ⨍_{B_{3\sigma}} h \leq Mh(x) \leq 2^{k_0}. \tag{4.23}$$

De (4.22) segue

$$|B| = |B\backslash E_{k_0-1} \cup E_{k_0-1}| = |B\backslash E_{k_0-1}| + |E_{k_0-1}| < |B\backslash E_{k_0-1}| + \frac{|B|}{2},$$

o que implica

$$\frac{|B|}{2} < |B/E_{k_0-1}|.$$

E da estimativa fraca $(1,1)$ do operador maximal, temos

$$\frac{|B|}{2} < |B/E_{k_0-1}| = |\{x \in B; Mh(x) > 2^{k_0-1}\}| \leq \frac{2C}{2^{k_0}} \int_{B_{3\sigma}} h, \tag{4.24}$$

o que implica

$$2^{k_0} \leq \frac{C}{|B|} \int_{B_{3\sigma}} h = C(\sigma) \quad ⨍_{B_{3\sigma}} h. \tag{4.25}$$

Das estimativas (4.23) e (4.25), segue que

$$2^{k_0} \approx \quad ⨍_{B_{3\sigma}} h = \frac{1}{|B_{3\sigma}|} \int_{B_{3\sigma}} h. \tag{4.26}$$

De acordo com a aproximação dada acima podemos inferir que para qualquer $n \in \mathbb{N}$,

$$2^{\frac{-k_0}{n}} \left(\int_{B_{3\sigma}} h \right)^{\frac{1}{n}} \approx |B_{3\sigma}|^{\frac{1}{n}} = C(\sigma)\text{diam B}. \tag{4.27}$$

Sem perda de generalidade podemos assumir que $a_{k_0-1} \leq 2^{k_0-1}\ diamB$, caso contrário existe b constante tal que $\sup_{x\in E_{k_0-1}} |u(x) - b| \leq 2^{k_0-1}\ diamB$ e substituindo u por $u - b$, não afeta em nada as desigualdades da hipótese e tese, pois são invariantes por translação de uma constante.

Para qualquer $x \in E_{k_0}$, $|u(x)| \leq a_{k_0}$, mais ainda, u é Lipschitz em E_{k_0} de constante 2^{k_0+1}, assim

$$\begin{aligned}
a_{k_0} \leq 2^{k_0+1}|x-y| + a_{k_0-1} \ &\leq\ 2^{k_0+1}|B\backslash E_{k_0-1}|^{\frac{1}{n}} + a_{k_0-1} \\
&\leq\ 2^{k_0+1}\left(\frac{C}{2^{k_0}} \int_{B_{3\sigma}} h \right)^{\frac{1}{n}} + a_{k_0-1} \\
&\leq\ 2^{k_0+1}C(\sigma)\text{diam}B + 2^{k_0-1}\ diamB \\
&\leq\ C\text{diam}B\left(\fint_{B_{3\sigma}} h \right).
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Portanto, concluímos nosso objetivo de estimar a_k e a_{k_0}.

Voltando a desigualdade (4.16), e substituindo a estimativa a_{k_0} na Parte I, temos

$$\sum_{k=-\infty}^{k_0} a_{k_0}|E_k\backslash E_{k+1}| \leq 2\text{diam B} \ \fint_{B_{3\sigma}} h \sum_{k=-\infty}^{k_0} |E_k\backslash E_{k+1}| \tag{4.29}$$

Já no caso da Parte II da desigualdade (4.16), será necessário analisar separadamente os casos $n = 1$ e $n > 1$. Para $n = 1$, pelas estimativas (4.19), (4.20), (4.27) e

(4.28), obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{k=k_0+1}^{\infty} a_k|E_k\backslash E_{k+1}| &\leq \sum_{k=k_0+1}^{\infty}\left(a_{k_0}+C(k-k_0)\int_{B_{3\sigma}} h\right)|E_k\backslash E_{k+1}| \\
&\leq \sum_{k=k_0+1}^{\infty}\left(2 \fint_{B_{3\sigma}} h \text{ diam}B+C(k-k_0)\int_{B_{3\sigma}} h\right)|E_k\backslash E_{k+1}| \\
&\leq 2\text{diam}B \fint_{B_{3\sigma}} h \sum_{k=k_0+1}^{\infty}|E_k\backslash E_{k+1}|+\int_{B_{3\sigma}} h \sum_{k=k_0+1}^{\infty} C(k-k_0)|B\backslash E_{k+1}| \\
&\leq 2\text{diam}B \fint_{B_{3\sigma}} h \sum_{k=k_0+1}^{\infty}|E_k\backslash E_{k+1}|+\int_{B_{3\sigma}} h \sum_{k=k_0+1}^{\infty} C(k-k_0)\left(\frac{C}{2^k}\int_{B_{3\sigma}} h\right) \\
&\leq 2\text{diam}B \fint_{B_{3\sigma}} h \sum_{k=k_0+1}^{\infty}|E_k\backslash E_{k+1}|+C\left(\int_{B_{3\sigma}} h\right)^2 \sum_{k=k_0+1}^{\infty}\frac{(k-k_0)}{2^k} \\
&\leq 2\text{diam}B \fint_{B_{3\sigma}} h \sum_{k=k_0+1}^{\infty}|E_k\backslash E_{k+1}|+C\left(\int_{B_{3\sigma}} h\right)^2 \left(\frac{1}{2^{k_0}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{2^k}\right) \\
&\leq 2\text{diam}B \fint_{B_{3\sigma}} h \sum_{k=k_0+1}^{\infty}|E_k\backslash E_{k+1}|+C\left(\int_{B_{3\sigma}} h\right)^2 2^{-k_0}\tilde{C} \\
&\leq 2\text{diam}B \fint_{B_{3\sigma}} h \sum_{k=k_0+1}^{\infty}|E_k\backslash E_{k+1}|+C\int_{B_{3\sigma}} h \text{ diam B},
\end{aligned}$$

pois $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{2^k}$ converge.

Se $n > 1$. Pelas estimativas (4.19), (4.21), (4.27) e (4.28), temos

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=k_0+1}^{\infty} a_k|E_k\backslash E_{k+1}| &\leq \sum_{k=k_0+1}^{\infty}\left(a_{k_0} + C2^{k(1-\frac{1}{n})}\left(\int_{B_{3\sigma}} h\right)^{\frac{1}{n}}\right)|E_k\backslash E_{k+1}| \\
&\leq \sum_{k=k_0+1}^{\infty}\left(2\text{diamB} \ \fint_{B_{3\sigma}} h + C2^{k(1-\frac{1}{n})}\left(\int_{B_{3\sigma}} h\right)^{\frac{1}{n}}\right)|E_k\backslash E_{k+1}| \\
&\leq 2\text{diamB} \ \fint_{B_{3\sigma}} h \sum_{k=k_0+1}^{\infty}|E_k\backslash E_{k+1}| + \left(\int_{B_{3\sigma}} h\right)^{\frac{1}{n}} \sum_{k=k_0+1}^{\infty} C2^{k(1-\frac{1}{n})}|B\backslash E_{k+1}| \\
&\leq 2\text{diamB} \ \fint_{B_{3\sigma}} h \sum_{k=k_0+1}^{\infty}|E_k\backslash E_{k+1}| + \left(\int_{B_{3\sigma}} h\right)^{\frac{1}{n}} \sum_{k=k_0+1}^{\infty} C2^{k(1-\frac{1}{n})}\left(\frac{C}{2^k}\int_{B_{3\sigma}} h\right) \\
&\leq 2\text{diamB} \ \fint_{B_{3\sigma}} h \sum_{k=k_0+1}^{\infty}|E_k\backslash E_{k+1}| + C\left(\int_{B_{3\sigma}} h\right)^{\frac{1}{n}} \sum_{k=k_0+1}^{\infty} 2^{-\frac{k}{n}}\left(\int_{B_{3\sigma}} h\right) \\
&\leq 2\text{diamB} \ \fint_{B_{3\sigma}} h \sum_{k=k_0+1}^{\infty}|E_k\backslash E_{k+1}| + C\left(\int_{B_{3\sigma}} h\right)^{\frac{1}{n}} 2^{-\frac{k_0}{n}}\left(\int_{B_{3\sigma}} h\right) \\
&\leq 2\text{diamB} \ \fint_{B_{3\sigma}} h \sum_{k=k_0+1}^{\infty}|E_k\backslash E_{k+1}| + C\text{diamB}\int_{B_{3\sigma}} h.
\end{aligned}
$$

Notemos que as estimativas obtidas para os casos $n = 1$ e $n > 1$ são similiares. Então finalmente concluímos que

$$
\begin{aligned}
\int_B |u-u_B| &\leq 2\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} a_{k_0}|E_k\backslash E_{k+1}| + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} a_k|E_k\backslash E_{k+1}|\right) \\
&\leq 4 \text{ diam B}\left(\ \fint_{B_{3\sigma}} h\right)\sum_{k=-\infty}^{k_0}|E_k\backslash E_{k+1}| \\
&\quad + 4\text{diam}B\left(\ \fint_{B_{3\sigma}} h\right)\sum_{k=k_0+1}^{\infty}|E_k\backslash E_{k+1}| + C\text{diam B}\int_{B_{3\sigma}} h \\
&\leq 4 \text{ diam B}\left(\ \fint_{B_{3\sigma}} h\right)\left(\sum_{-\infty}^{\infty}|E_k\backslash E_{k+1}|\right) + C\text{diam B}\int_{B_{3\sigma}} h \\
&\leq 4 \text{ diam B} \ \fint_{B_{3\sigma}} h|B| + C\text{diam B}\int_{B_{3\sigma}} h \\
&\leq C \text{ diam B}\int_{B_{3\sigma}} h \\
&\leq C(n,p,\sigma)r \ \fint_{B_{3\sigma}} h
\end{aligned}
$$

■

O próximo lema tem como hipótese a desigualdade de Poincaré.

Lema 4.11. *Sejam $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq g \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ com $1 \leq p < \infty$ e $\sigma \geq 1$ são tais que*

$$\fint_B |u - u_B| \leq Cr \left(\fint_{\sigma B} g^p \right)^{1/p}, \tag{4.30}$$

para toda bola B de raio r. Então $u \in W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e

$$|\nabla u| \leq C(n) g \text{ em quase todo ponto.}$$

Demonstração. Todas as constantes do decorrer da demonstração dependerão apenas de n.

Seja $B = B(0,1)$ a bola de centro em $0 \in \mathbb{R}^n$ e raio 1. Considere $\psi \in C_c^\infty(B)$ com $\psi \geq 0$ e $\int \psi = 1$ (como vimos na seção 2.1 existem funções com esta propriedade). Além disso, considere $\psi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\psi(x/\varepsilon)$ e a aproximação suave em distribuição u dada por $u * \psi_\varepsilon$, provada na Proposição 2.2.

Pela Definição 1.2 de derivada distribucional, a derivada de u em relação a coordenada x_i é

$$\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \varphi \rangle = -\langle u, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \rangle, \text{ para qualquer } \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Como $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, podemos identificar o lado direito da igualdade por meio da integral, sendo assim

$$\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \varphi \rangle = -\int u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx, \text{ para qualquer } \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Pelo Teorema 1.45 de derivada da convolução, temos

$$\begin{aligned} \langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \varphi \rangle &= -\int u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx \\ &= -\lim_{\varepsilon \to 0} \int (u * \psi_\varepsilon) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \int \frac{\partial}{\partial x_i}(u * \psi_\varepsilon) \varphi \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \int \left(u * \frac{\partial \psi_\varepsilon}{\partial x_i} \right) \varphi. \end{aligned} \tag{4.31}$$

Observemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \psi_\varepsilon}{\partial x_i} = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial \psi_\varepsilon}{\partial x_i} dx_i \right) d\overline{x} = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left[\lim_{L \to \infty} \left(\psi_\varepsilon(L, \overline{x}) - \psi_\varepsilon(-L, \overline{x}) \right) \right] d\overline{x} = 0,$$

no qual $\overline{x} = (x_1, \cdots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \cdots, x_n)$.

Disso, segue que

$$\left(u * \frac{\partial \psi_\varepsilon}{\partial x_i} \right)(x) = (u - u_{B(x,\varepsilon)}) * \frac{\partial \psi_\varepsilon}{\partial x_i}(x).$$

Agora, pela definição de convolução e regra da cadeia

$$\begin{aligned}
\left| u * \frac{\partial \psi_\varepsilon}{\partial x_i} \right|(x) &= \left| (u - u_{B(x,\varepsilon)}) * \frac{\partial \psi_\varepsilon}{\partial x_i} \right|(x) \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^n} (u - u_{B(x,\varepsilon)})(y) \frac{\partial \psi_\varepsilon}{\partial y_i}(x - y) dy \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^n} (u - u_{B(x,\varepsilon)})(y) \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{1}{\varepsilon^n} \psi((x - y)/\varepsilon) \right) dy \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |u - u_{B(x,\varepsilon)}|(y) \frac{1}{\varepsilon^n} \left| \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \psi}{\partial y_i}((x - y)/\varepsilon) \right| dy.
\end{aligned}$$

Como ψ tem suporte compacto na bola unitária, e vimos em (3.7) que o suporte da derivada está contido no suporte da função, temos

$$supp \left(\frac{\partial \psi}{\partial y_i}((x - y)/\varepsilon) dy \right) \subset B(x, \varepsilon).$$

Logo, pela observação acima e pela hipótese (4.30), temos

$$\begin{aligned}
\left| u * \frac{\partial \psi_\varepsilon}{\partial x_i} \right|(x) &\leq \left\| \frac{\partial \psi}{\partial y_i} \right\|_\infty \frac{1}{\varepsilon^{n+1}} \int_{B(x,\varepsilon)} |u - u_{B(x,\varepsilon)}|(y) dy \\
&\leq C \left(⨍_{B(x,\sigma\varepsilon)} g^p \right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Para qualquer conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ temos,

$$\begin{aligned}
\int_K \left| u * \frac{\partial \psi_\varepsilon}{\partial x_i} \right|^p (x)dx &\leq C^p \int_K \left(\fint_{B(x,\sigma\varepsilon)} g^p(y)dy \right) dx \\
&= C^p \frac{1}{|B_{\sigma\varepsilon}|} \int_K \left(\int_{B(x,\sigma\varepsilon)} g^p(y)dy \right) dx \\
&= C^p \frac{1}{|B_{\sigma\varepsilon}|} \int_{K_{\sigma\varepsilon}} g^p(y) \left(\int_K \chi_{B(y,\sigma\varepsilon)}(x)dx \right) dy \\
&\leq C^p \frac{1}{|B_{\sigma\varepsilon}|} \int_{K_{\sigma\varepsilon}} g^p(y)|K \cap B(y,\sigma\varepsilon)|dy \\
&\leq C^p \int_{K_{\sigma\varepsilon}} g^p(y)dy, \qquad (4.32)
\end{aligned}$$

no qual, $K_{\sigma\varepsilon}$ é o conjuntos dos pontos em $\mathbb{R}^n$ cuja distância a K é menor que $\sigma\varepsilon$.

Agora pela Identidade (4.31) e pela Desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned}
\left| \langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \varphi \rangle \right| &\leq \liminf_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \left(u * \frac{\partial \psi_\varepsilon}{\partial x_i} \right) \varphi \right| \\
&\leq \liminf_{\varepsilon \to 0} \left(\int_B \left| u * \frac{\partial \psi_\varepsilon}{\partial x_i} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi|^q \right)^{\frac{1}{q}},
\end{aligned}$$

no qual $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, com $q = \infty$ se $p = 1$.

Como $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, usando a Desigualdade 4.32, obtemos

$$\left| \langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \varphi \rangle \right| \leq C \left(\int_{\sigma B} g^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi|^q \right)^{\frac{1}{q}}, \qquad (4.33)$$

também válida para $p = 1$ e $q = \infty$.

Tal como fizemos na demonstração anterior, dividamos a demonstração em dois casos.

Assumamos inicialmente $1 < p < \infty$. Fixe uma bola B do $\mathbb{R}^n$ qualquer. Considere o funcional linear $T := \frac{\partial u}{\partial x_i} : (C_c^\infty(B), || \ ||_q) \to \mathbb{C}$ tal que

$$T(\varphi) \mapsto \langle T, \varphi \rangle, \qquad (4.34)$$

para qualquer $\varphi \in C_c^\infty(B)$.

Pela Desigualdade 4.33, como $|T(\varphi)| \leq C||\varphi||_q$, ou seja, T é um funcional linear limitado no subespaço $C_c^\infty(B)$ do espaço normado $L^q(B)$. Em vista disso, pelo Teorema de Hahn Banach, este funcional pode ser estendido a um funcional linear limitado em $L^q(B)$.

Lembremos que $(L^q(B))^* = L^p(B)$ e $T := \frac{\partial u}{\partial x_i}$. Então $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(B)$ e

$$\left(\int_B \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C\left(\int_{\sigma B} g^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Aplicando o Corolário da Diferenciação de Lebesgue na desigualdade acima, vemos

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| = \lim_{r\to 0}\left(\frac{1}{|B_r|}\int_{B_r}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C\lim_{r\to 0}\left(\frac{1}{B_r}\int_{\sigma B_r} g^p\right)^{\frac{1}{p}} = C(\sigma)g \quad q.t.p. \tag{4.35}$$

Como $g \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e cada componente do gradiente é limitada por g, concluímos que $\nabla u \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ para $1 < p < \infty$.

Falta mostrarmos que $u \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Sejam $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto e $\alpha, \alpha' \geq 1$, pela Desigualdade de Hölder, temos

$$\int_K |u|^p dx \leq \left(\int_K |u|^{p\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\left(\int_K dx\right)^{\frac{1}{\alpha'}}, \tag{4.36}$$

no qual $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha'} = 1$. Defina $p\alpha = p^*$, no qual $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$, isto implica $\alpha = \frac{p^*}{p} > 1$ e $\frac{1}{\alpha'} = 1 - \frac{p}{p^*} > 0$. Pelo Corolário 3.14, temos

$$\begin{aligned}
\int_K |u|^p dx &\leq \left(\int_K |u|^{p^*}\right)^{\frac{p}{p^*}}\left(\int_K dx\right)^{1-\frac{p}{p^*}} \\
&= \left(\int_K |u|^{p^*}\right)^{\frac{p}{p^*}} |K|^{1-\frac{p}{p^*}} \\
&\leq C(K)||u||_{p^*}^p \\
&\leq C(K)||\nabla u||_p^p.
\end{aligned}$$

Portanto, para qualquer $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto vale

$$||u||_p \leq C||\nabla u||_p.$$

Com isso, concluímos que $u \in W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ para $1 < p < \infty$.

Agora o caso $p = 1$. Já temos, por hipótese, que $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, resta mostrarmos que $|\nabla u| \leq C(n)g$.

Se $p = 1$ então $q = \infty$. Considere o funcional linear $T := \frac{\partial u}{\partial x_i} : (C_c^\infty(B), || \, ||_\infty) \to \mathbb{C}$ tal que

$$T(\varphi) \mapsto \langle T, \varphi \rangle, \tag{4.37}$$

para qualquer $\varphi \in C_c^\infty(B)$.

Pela Desigualdade 4.33, como $|T(\varphi)| \leq C||\varphi||_\infty$, ou seja, T é um funcional linear limitado no subespaço $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ do espaço normado $C_0(\mathbb{R}^n)$. Pelo Teorema de Hahn Banach, este funcional pode ser estendido a um funcional linear limitado $\tilde{T}$ em $C_0(\mathbb{R}^n)$.

Pelo Teorema de Representação de Riez, $\tilde{T}$ pode ser representado por uma única medida de Radon compexa μ, ou seja,

$$\tilde{T}(\varphi) = \int \varphi d\mu, \ \forall \ \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Mostremos que μ é absolutamente contínua com respeito a medida de Lebesgue. Suponhamos (por absurdo) que existe um compacto K cuja medida de Lebesgue $|K| = 0$, entretanto $\mu(K) \neq 0$. Seja $\varphi_i \in C_c^\infty(K_{1/i})$ uma sequência decrescente de funções, no qual $K_{1/i}$ significa a vizinhança $\frac{1}{i}-$vizinhança de K, com $0 \leq \varphi_i \leq 1$ e $\varphi_i|_K \equiv 1$, tal função existe pelo Teorema **??**. Pelo Teorema de Convergência Monótona, temos

$$\int_{K_{1/i}} \varphi_i d\mu \quad \to \quad \int_K \varphi_i d\mu = |\mu(K)| > 0.$$

Por outro lado, pelas propriedade de funcionais lineares e pela Desigualdade 4.33

$$\begin{aligned} \left| \int_{K_{\frac{1}{i}}} \varphi_i d\mu \right| = |T(\varphi \chi_{K_{\frac{1}{i}}})| = |T(\varphi_i)| \ &\leq \ ||T|| ||\varphi_i||_\infty \\ &\leq \ ||\varphi_i||_\infty \left(\int_{\sigma B} g \chi_{K_{\frac{1}{i}}} \right) \\ &\leq \ \int_{\chi_{K_{\frac{1}{i}}}} g. \end{aligned} \tag{4.38}$$

Mas,

$$\int_{\chi_{K_{\frac{1}{i}}}} g \to \int_K g d\mathcal{L} = 0,$$

pois, supomos que $|K| = 0$, no qual $d\mathcal{L}$ denota a medida de Lebesgue. Donde obtemos uma contradição.

De acordo com Teorema de Radon-Nikodym, temos

$$d\mu = \frac{\partial u}{\partial x_i} dx, \qquad \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^1_{loc}.$$

Agora, pela definição de derivada distribucional e da unicidade da medida provinda do Teorema de Radon-Nikodym segue

$$\left| \langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \varphi \rangle \right| = \left| \int \varphi d\mu \right| \quad = \quad \left| \int \varphi \frac{\partial u}{\partial x_i} dx \right|.$$

Pela desigualdade 4.33 para $p = 1$ e $q = \infty$, temos

$$\left| \int \varphi \frac{\partial u}{\partial x_i} dx \right| \leq C ||\varphi||_\infty \int_{\sigma B} g, \tag{4.39}$$

para qualquer $\varphi \in C_c^\infty(B)$.

Como a função $sgn\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \in L^1(B)$ e já vimos que $C_c^\infty(B)$ é denso em $L^1(B)$, segue que $sgn\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)$ pode ser aproximada por funções $\varphi_j \in C_c^\infty(B)$ com com $||\varphi_j||_\infty \leq 1$. Assim,

$$\int_B \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| = \int_B sgn\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \frac{\partial u}{\partial x_i} = \lim_{j \to +\infty} \int_B \varphi_j \frac{\partial u}{\partial x_i} \leq C ||\varphi_j||_\infty \int_{\sigma B} g \leq C \int_{\sigma B} g,$$

para qualquer B.

Pelo raciocínio análogo ao feito 4.35, segue do Teorema de Diferenciação de Lebesgue aplicado a $p = 1$ que

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| \leq C g \qquad q.t.p.$$

Como $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, concluímos $|\nabla u| \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, por conseguinte, $u \in W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$.

Isto completa a demonstração do Lema 4.11.

■

Demonstração do Teorema 4.8. Se $u \in W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$ pelo Teorema 4.1, temos

$$|u(x) - u(y)| \leq C(n)|x - y|(M_{\sigma|x-y|}|\nabla u|(x) + M_{\sigma|x-y|}|\nabla u|(y)),$$

sendo assim, basta tomar $g = C(n)|\nabla u| \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Por outro lado, como u e $g \in L^1(\mathbb{R}^n) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, pelo Lema 4.10 concluímos que vale a desigualdade de Poincaré, por sua vez, pelo Lema 4.11 implica que $|\nabla u| \leq C(n)g$, assim

$$\int |\nabla u| \leq C(n) \in g < \infty.$$

Portanto, $u \in W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$.

■

4.2 Teorema de Equivalências em $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$

Segue abaixo o teorema principal do capítulo.

Teorema 4.12. *Seja $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ com $1 \leq p < \infty$. As seguintes condições são equivalentes:*

(i) $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

(ii) Existe $0 \leq g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\fint_B |u - u_B| \leq Cr \fint_B g$$

para qualquer bola B do $\mathbb{R}^n$ e para qualquer raio $r > 0$.

(iii) Existem $0 \leq g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ com $1 \leq q \leq p$ e $\sigma \geq 1$ tais que

$$\fint_B |u - u_B| \leq Cr \left(\fint_{3\sigma B} g^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

para qualquer bola B do $\mathbb{R}^n$ e para qualquer raio $r > 0$.

(iv) Existem $0 \leq g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ com $1 \leq q \leq p$ e $\sigma \geq 1$ tais que

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y| \left((M_{\sigma|x-y|} g^q(x))^{\frac{1}{q}} + (M_{\sigma|x-y|} g^q(y))^{\frac{1}{q}} \right) \quad q.t.p.$$

Além disso, as desigualdades (ii), (iii) e (iv) implicam que

$$|\nabla u| \leq Cg \quad q.t.p.$$

Demonstração. Mostraremos que $(i) \Leftrightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (i) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (iii)$.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Segue da Desigualdade Clássica de Poincaré 3.15 que

$$⨍_B |u - u_B| dx \ \leq \ Cr ⨍_B |\nabla u| dx$$

para qualquer bola B de raio r. Como $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, temos que $|\nabla u| \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Basta considerarmos $g = |\nabla u|$ e o resultado segue.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Basta mostrar que $\nabla u \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Por hipótese existe $0 < g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$⨍_B |u - u_B| \leq Cr ⨍_B g. \tag{4.40}$$

Queremos aplicar o Lema 4.11, entretanto

$$\begin{aligned} ⨍_B \frac{1}{|B|} \int_B g \ &\leq \ \frac{1}{|B|} \left(\int_B g^p \right)^{\frac{1}{p}} |B|^{1-\frac{1}{p}} \\ &= \ \frac{|B|^{1-\frac{1}{p}}}{|B|} \left(\int_B g^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \ \left(⨍_B g^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \ C(n,\sigma) \left(⨍_{\sigma B} g^p \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

De (4.40) e da desigualdade acima segue (4.30), e portanto

$$|\nabla u| \leq C(n) g \quad \text{implica} \quad |\nabla u| \in L^p(\mathbb{R}^n).$$

(ii) ⇒ (iii) Como $L^p(\mathbb{R}^n) \subset L^p_{loc}(\mathbb{R}^n) \subset L^q_{loc}(\mathbb{R}^n)$ para qualquer $1 \leq q \leq p < \infty$ e, por hipótese, $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, logo $g \in L^q_{loc}(\mathbb{R}^n)$ para qualquer $1 \leq q \leq p < \infty$.

Considere B uma bola fixada, pela hipótese e pela Desigualdade de Hölder aplicada para q e q' tais que $1 = \frac{1}{q} + \frac{1}{q'}$, temos

$$
\begin{aligned}
\fint_B |u - u_B| \leq r \fint_B g &= r\frac{1}{|B|}\int_B g \\
&\leq r\frac{1}{|B|}\left(\int_B |g|^q\right)^{\frac{1}{q}} |B|^{\frac{1}{q'}} \\
&\leq r\frac{1}{|B|}|3\sigma B|^{\frac{1}{q}}\left(\fint_{3\sigma B} |g|^q\right)^{\frac{1}{q}} |B|^{\frac{1}{q'}} \\
&= Cr\sigma^{\frac{n}{q}}|B|^{\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}-1}\left(\fint_{3\sigma B} |g|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= C(n,\sigma)r\left(\fint_{3\sigma B} g^q\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}
$$

(iii) ⇒ (i) Basta observar que o Lema 4.11 permanece válido substituindo σB no lado direito de (4.30) por $3\sigma B$.

Com isso mostramos que (i), (ii) e (iii) são equivalentes.

(i) ⇒ (iv) Uma vez que $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ para $1 \leq p < \infty$, pelo Teorema 4.1 aplicado a $1 < p < \infty$ e pelo Teorema 4.8 para $p = 1$, segue a desigualdade

$$|u(x) - u(y)| \leq C(n)|x - y|(M_{\sigma|x-y|}g(x) + M_{\sigma|x-y|}g(y)),$$

para alguma $0 < g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ com $1 \leq p < \infty$.

Agora pela Desigualdade de Hölder aplicada a q e q' tais que $\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1$, temos

$$\begin{aligned}
M_{\sigma|x-y|}g &= \sup_{r<\sigma|x-y|}\frac{1}{|B_r|}\int_{B_r} g \\
&\leq \sup_{r<\sigma|x-y|}\frac{1}{|B_r|}\left(\int_{B_r}|g|^q\right)^{\frac{1}{q}}|B_r|^{\frac{1}{q'}} \\
&= \sup_{r<\sigma|x-y|}\frac{1}{|B_r|^{1-\frac{1}{q'}}}\left(\int_{B_r}|g|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \sup_{r<\sigma|x-y|}\left(\frac{1}{|B_r|}\int_{B_r}|g|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\sup_{r<\sigma|x-y|}\frac{1}{|B_r|}\int_{B_r}g^q\right)^{\frac{1}{q}} = \left(M_{\sigma|x-y|}g^q\right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

(iv) $\Rightarrow$ **(iii)** Dado que $u\in L^p(\mathbb{R}^n)\subset L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e $g\in L^p(\mathbb{R}^n)\subset L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$, a desigualdade desejada segue diretamente do Lema 4.10.

■

A demonstração do teorema de equivalências está concluída. Faremos uma demonstração adicional que (iii) implica a seguinte desigualdade:

$$|u(x)-u(y)|\leq C|x-y|\left((M_{6\sigma|x-y|}g^q(x))^{\frac{1}{q}}+(M_{6\sigma|x-y|}g^q(y))^{\frac{1}{q}}\right).$$

(iii) $\Rightarrow$**(iv)** Sejam $x,y\in\mathbb{R}^n$ pontos de Lebesgue da função $u\in L^p(\mathbb{R}^n)\subset L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, pelo Teorema da Diferenciação de Lebesgue isto é verdadeiro em quase todo ponto.

Escrevamos

$$B_i(x)=B(x,r_i)=B(x,2^{-i}|x-y|),\ \text{com } i\in\mathbb{N}.$$

Notemos que $B_0(x)=B(x,|x-y|)$ e $B_i(x)\subset B_0(x)$ para qualquer $i\in\mathbb{N}$. Além disso, $B_{i+1}\subset B_i$ para qualquer $i\in\mathbb{N}$, pela Observação 2.9, uma vez que x é ponto de Lebesgue, segue

$$u_{B_i}(x)\to u(x)$$

quando $i\to\infty$.

Pela desigualdade triangular e pela desigualdade da hipótese

$$
\begin{aligned}
|u(x) - u_{B_0(x)}| \leq \sum_{i=0}^{\infty} |u_{B_i(x)} - u_{B_{i+1}(x)}| &= \sum_{i=0}^{\infty} |u_{B_i(x)} - \fint_{B_{i+1}(x)} u(z)dz| \\
&\leq \sum_{i=0}^{\infty} \fint_{B_{i+1}} |u_{B_i(x)} - u| \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{|B_{i+1}|} \int_{B_{i+1}} |u_{B_i(x)} - u| \\
&\leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|B_i|}{|B_{i+1}|} \frac{1}{|B_i|} \int_{B_i} |u_{B_i(x)} - u| \\
&\leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|B_i|}{|B_{i+1}|} \fint_{B_i} |u_{B_i(x)} - u| \\
&\leq C \sum_{i=0}^{\infty} r_i \left(\fint_{3\sigma B_i(x)} g^q(x) \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq C \sum_{i=0}^{\infty} r_i \left(\fint_{3\sigma B_0(x)} g^q(x) \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq C|x-y| \left(M_{3\sigma|x-y|} g^q(x) \right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}
$$

Analogamente,

$$
|u(y) - u_{B_0(y)}| \leq C|x-y| \left(M_{3\sigma|x-y|} g^q(y) \right)^{\frac{1}{q}}.
$$

E ainda, seja $2B_0(x) = B(x, 2|x-y|)$, segue que $B_0(y) = B(y, |x-y|) \subset 2B_0(x) = B(x, 2|x-y|)$. De fato, tomemos $z \in B_0(y)$ então $|z-y| \leq |x-y|$. Queremos mostrar que $z \in 2B_0(x)$, ou seja, $|z-x| \leq 2|x-y|$, mas

$$
|z-x| = |z-y+y-x| \leq |x-y| + |x-y| = 2|x-y|.
$$

Assim,

$$\begin{aligned}
|u_{B_0(x)} - u_{B_0(y)}| &\leq |u_{B_0(x)} - u_{2B_0(x)}| + |u_{B_0(y)} - u_{2B_0(x)}| \\
&\leq \fint_{B_0(x)} |u - u_{2B_0(x)}| + \fint_{B_0(y)} |u - u_{2B_0(x)}| \\
&\leq C \fint_{2B_0(x)} |u - u_{2B_0(x)}| + C \fint_{2B_0(x)} |u - u_{2B_0(x)}| \\
&\leq 2C \fint_{2B_0(x)} |u - u_{2B_0(x)}| \\
&\leq C|x-y| \left(\fint_{6\sigma B_0(x)} g^q(x) \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq C|x-y| \left(M_{6\sigma|x-y|} g^q(x) \right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Juntando as 3 desigualdades, concluímos

$$\begin{aligned}
|u(x) - u(y)| &\leq |u(x) - u_{B_0(x)}| + |u_{B_0(x)} - u_{B_0(y)}| + |u_{B_0(y)} - u(y)| \\
&\leq C|x-y| \left((M_{3\sigma|x-y|} g^q(x))^{\frac{1}{q}} + (M_{6\sigma|x-y|} g^q(x))^{\frac{1}{q}} + (M_{3\sigma|x-y|} g^q(y))^{\frac{1}{q}} \right) \\
&\leq C|x-y| \left((M_{6\sigma|x-y|} g^q(x))^{\frac{1}{q}} + (M_{6\sigma|x-y|} g^q(y))^{\frac{1}{q}} \right).
\end{aligned}$$

■

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Adams, Robert A. e Fourier, John J. F. *Sobolev Spaces*. Segunda edição. Academic Press, 2003.

[2] Bartle, Robert.*Elements of Integration and Lebesgue Measure*, Willey Classics Library, New York , 1966.

[3] Brezis, Haim. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Equations Differential*. Editora Springer, 2010.

[4] Cordaro, Paulo. *Delta de Dirac - Uma introdução à Teoria das Distribuições para engenharia*, Editora Livraria da Física, 2002.

[5] Duoandikoetxea, Javier. *Fourier Analysis*, Graduate Studies in Mathematics, Volume 29, Editora American Mathematical Society, 2000.

[6] Evans, Lawrence e Gariepy, Ronald. *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, CR Press, 1992.

[7] Evans, Lawrence. *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, 1998.

[8] Folland, Gerald. *Real Analysis, Modern Techniques and their Applications*, United American States. New York, 1984.

[9] Gilbarg, D., Trudinger, N. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order.* New York, 1957.

[10] Hajlasz, Piotr. *A new characterization of the Sobolev Spaces*, Studia Mathematica, 2003.

[11] Hajlasz, Piotr. *Geometric approach to Sobolev Spaces and badly degenerated elliptic equations*, 1994.

[12] Hajlasz, Piotr. e Koskela, Pekka. *Sobolev met Poincaré.* Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series I - Mathematics, 1995.

[13] Hajlasz, Piotr. *Sobolev Spaces on an arbitrary Metric Space*, Potencial Anal. 5, 1996.

[14] Hajlasz, Piotr. *Sobolev Spaces on Metric Mesure Space*, Contemporary Math, 2003.

[15] Heinonen, Juha e Koskela, Pekka. *Quasiconformal maps on metric spaces with controlled geometry*, Acta Mathematics, 1998.

[16] Heinonen, Juha. *Lectures on Analysis on Metric Spaces*, Universitext, Springer, New York, 2001.

[17] Heinonen, Juha e Koskela, Pekka e Shanmugalingam, Nageswari e Tyson, Jeremy. *Sobolev Spaces on Metric Measure Spaces - An Approach Based on Upper Gradients*, Cambridge University Press, 2015.

[18] Hounie, Jorge. *Teoria Elementar da Distribuições.* Instituto de Matemática Pura e Aplicada - Rio de Janeiro, 1979.

[19] Oliveira, César Rogério. *Introdução à análise funcional.* Coleção: Coleção Projeto Euclides. Rio de Janeiro, 2010.

[20] Rudin, Walter. *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, Inc. terceira edição, 1987.

[21] Rudin, Walter. *Functional Analysis*, McGraw-Hill, Inc. segunda edição, 1991.