UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Múltiplas soluções em certas classes de problemas elípticos não homogêneos e não locais

Amanda Angélica Feltrin Nunes

São Carlos
Março/2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Múltiplas soluções em certas classes de problemas elípticos não homogêneos e não locais

Amanda Angélica Feltrin Nunes

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFSCar como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutora em Matemática

Orientador: **Prof. Dr. Gustavo Ferron Madeira**

São Carlos
Março/2018

Com todo o carinho aos meus pais
José Carlos e Clotilde
e aos meus irmãos Cássio e César

Agradecimentos

A Deus por ter me sustentado e dado forças para superar os obstáculos desta trajetória. Por colocar em minha vida pessoas ímpares, demonstrando, por meio delas, todo o Seu cuidado e amor por mim e fazendo com que a caminhada fosse mais leve.

Aos meus pais, José Carlos e Clotilde por serem minha base sólida, conselheiros sábios, fontes de inspiração, constantes intercessores, modelos a imitar. Sou grata por toda a estrutura que me ofereceram, por confiarem e sempre acreditarem em mim.

Aos meus irmãos Cássio e César pelo companheirismo, pelos momentos de riso, por acreditarem em mim e pela torcida de sempre!

Às minhas avós Maria e Odila por todos os mimos e constantes orações.

Ao meu orientador Prof. Dr. Gustavo Ferron Madeira por aceitar compartilhar seus conhecimentos comigo e fazê-lo de forma competente, acolhedora e amiga. Sou profundamente grata pela oportunidade de trabalharmos juntos e por tê-lo tido como exemplo de profissional.

Aos meus companheiros de estudos, conversas, risadas, conselhos, angústia e desespero, que muito me ensinaram durante este período. Não podendo mencionar a todos, gostaria de destacar àqueles cuja presença foi mais constante: Mariane, Sandra, Alisson, Danilo, Chico e Igor.

A todos os professores que contribuíram cada um do seu modo para o meu desenvolvimento acadêmico e pessoal, em especial, a Prof. Dra. Alessandra.

Aos meus amigos e familiares que tornaram essa caminha mais amena, os de perto, pelo bom convívio e pelos momentos compartilhados. Aos de longe, pela torcida, preocupação e compreensão nos momentos de ausência, bem como, pelos descontraídos e proveitosos momentos compartilhados.

A todos que torceram para que mais essa etapa fosse concluída. Meu muito obrigada!!

À CAPES pelo apoio financeiro.

"As coisas que são impossíveis aos homens são possíveis a Deus"

Lucas 18:27

Resumo

É estudado neste trabalho multiplicidade de soluções para certas classes de problemas elípticos não homogêneos e não locais. O termo não local no operador é de tipo Kirchhoff, podendo ser degenerado ou não degenerado, contínuo ou descontínuo na origem. O operador considerado inclui vários exemplos que surgem em aplicações como p-laplace, $p\&q$-laplace, p-curvatura média, entre outros. As funções não lineares tratadas incluem termos côncavos-convexos, termos sublineares ou superlineares locais ou não locais, perturbações destes, e funções superlineares satisfazendo condição de não quadraticidade no infinito. Os resultados obtidos são existência de uma infinidade de soluções com energia negativa, uma infinidade de soluções com energia positiva divergindo para $+\infty$ e, em alguns casos, multiplicidade de soluções positivas.

Abstract

This work concerns multiplicity of solutions to some nonhomogeneous and nonlocal elliptic problems. The nonlocal ternm on the operator is of Kirchhoff type and it may be degenerated or not, continuous or discontinouos at the origin. The operator herin includes several exemples appearing in the applications like p-laplace , $p\&q$-Laplace, generalized p-mean curvature among others. The source terms include concave-convex terms, sublinear or superlinear term which can be local or nonlocal, pertubation of those, and functions satisfying a nonquadraticity condition at infinity. The results proved in this work assure the existence of infinitely many negative energy solutions, infinitely many positive energy solutions whose energy divergs to $+\infty$ and, in some cases, multiplicity of positive solutions.

Sumário

Introdução

Neste trabalho estudamos multiplicidade de soluções para certas classes de problemas não homogêneos e não locais. Mais precisamente, o enfoque principal reside na existência de infnitas soluções para tais problemas. No início da década de 1990, Garcia e Azorero-Peral [5] consideraram o problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda |u|^{q-2}u + |u|^{s^*-2}u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

Dentre os resultados provados foi estabelecido para $1 < q < p$ a existência de infinitas soluções quando $\lambda > 0$ é pequeno.

Mais tarde, no célebre trabalho, de Ambrosetti-Brézis-Cerami [2] foi tratado o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda |u|^{q-2}u + |u|^{s-2}u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

sendo $1 < q < 2 < s \leq 2^*$. Dentre seus resultados foi estabelecido o que se pode denominar estrutura côncava-convexa: existência de infinitas soluções de energia negativa, existência de infinitas soluções de energia positiva e existência de duas soluções positivas (em todos os casos para $\lambda > 0$ pequeno em [2].)

Desde então muitos trabalhos têm surgido nessa direção e podemos citar: Barth-Willem [8], Tang [51], Garcia-Peral [5, 6], De Figueiredo, Gossez e Ubilla [29], Komiya e Kajikiya [37] e as referências lá citadas.

Ao longo deste trabalho consideramos problemas envolvendo o operador não-homogêneo $L(u) = -\text{div}(a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$, sendo a função $a : [0, \infty) \to (0, \infty)$ de classe C^1 satisfazendo

(a_1) Existem $k_0, k_1, k_2 > 0$, $k_3 \geq 0$, $q > p$ tais que

$$k_0 + H(k_3)k_2 t^{\frac{q-p}{p}} \leq a(t) \leq k_1 + k_3 t^{\frac{q-p}{p}},$$

com $H(\xi) = 1$ se $\xi > 0$ e $H(\xi) = 0$, se $\xi = 0$.

(a_2) (i) A função $a(t^p)t^{p-2}$ é não decrescente para $p \geq 2$.

(ii) E a função $a(t)$ é não decrescente para $1 < p < 2$,

Deve-se enfatizar a ampla classe que tais operadores compreendem. Por exemplo,

(i) Se $a(t) = 1$ temos que as hipóteses (a_1) e (a_2) são satisfeitas com $k_0 = k_1 = 1$, $k_2 > 0$ e $k_3 = 0$ sendo o operador obtido o p-Laplace com $1 < p < +\infty$, isto é,

$$-\Delta_p u = -\text{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u).$$

(ii) Se $a(t) = 1 + t^{\frac{q-p}{p}}$ temos que são satisfeitas as hipóteses (a_1) e (a_2) com $k_0 = k_1 = k_2 = k_3 = 1$ e o operador que resulta é o $p\,\&\,q$-Laplace com $1 < p < q < +\infty$, isto é,

$$-(\Delta_p + \Delta_q)u = -\text{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u + |\nabla u|^{q-2}\nabla u).$$

(iii) Se $a(t) = 1 + \dfrac{t}{(1+t^2)^{\frac{1}{2}}}$, as hipóteses a cerca de a são satisfeitas e o operador obtido é o p-Laplace like com $1 < p < +\infty$, isto é,

$$-\text{div}\left(\left(1 + \frac{|\nabla u|^p}{(1+|\nabla u|^{2p})^{\frac{1}{2}}}\right)|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right).$$

(iv) Se $a(t) = \left(1 + \dfrac{1}{t^{\frac{2}{p}}}\right)^{\frac{p-2}{2}}$ temos que as hipóteses a cerca da função a são satisfeitas e o operador obtido é a generalização da p-curtatura média para $1 < p < 2$, isto é,

$$-\text{div}\left(\left(1 + \frac{1}{|\nabla u|^2}\right)^{\frac{p-2}{2}}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right).$$

(v) Se $a(t) = 1 + \dfrac{1}{(1+t)^{\frac{p-2}{p}}}$ temos que as hipóteses (a_1) e (a_2) são satisfeitas com $k_0 = 1$, $k_1 = 2$, $k_2 > 0$ e $k_3 = 0$ para $1 < p < +\infty$ o operador obtido é uma pertubação do operador p-Laplace, isto é,

$$-\text{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u + \frac{|\nabla u|^{p-2}\nabla u}{(1+|\nabla u|^p)^{\frac{p-2}{p}}}\right).$$

Operadores não-homogêneos da forma $L(u) = -\text{div}(a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ foram estudados nos trabalhos de Figueiredo e Barile [11], Corrêa, Corrêa e Figueiredo [14], Figueiredo [24, 27], Hurtado, Miyagaki e Rodrigues [34]. Também no contexto de operador não homogêneo podemos citar o trabalho de Filippakis, O'Regan e Papageorgiou [30] que inclui o caso (p,q)-Laplace para $2 \le q < p$.

Mais especificamente, consideraremos ao longo deste trabalho problemas da forma

$$\begin{cases} -M(\mathcal{A}(u))L(u) = g_\lambda(x,u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3}$$

sendo o operador $\mathcal{A}$ definido por $\mathcal{A}(u) = \dfrac{1}{p}\displaystyle\int_\Omega A(|\nabla u|^p)dx$, com $A(t) = \displaystyle\int_0^t a(\xi)d\xi$ e $g_\lambda(x,u)$ uma não linearidade apresentando termo local ou não local.

O problema (3) é chamado não local devido a presença do termo $M(\mathcal{A}(u))$, uma vez que o mesmo implica que a equação não é mais uma identidade pontual. Problemas não locais foram motivados pela versão estacionária da equação de Kirchhoff, a saber,

$$\begin{cases} u_{tt} - M\left(\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2\right)\Delta u = f(x,u) & \text{em } \Omega \times (0,T), \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u(x) & \end{cases} \tag{4}$$

em que $M(t) = a + bt$ com $a, b > 0$. Esta equação é uma versão mais geral do modelo proposto por Kirchhoff [35]

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{\rho_0}{h} + \frac{E}{2L}\int_0^L \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

sendo ρ, ρ_0, h, E e L constantes, o qual estende a clássica equação da onda de D'Alembert por considerar o efeito da mudança no comprimento de uma corda duração uma vibração.

Os primeiros estudos envolvendo a equação do tipo Kirchhoff dizem respeito à Bernstein [12] e Pohozaev [47]. No entanto, o problema (4) teve mais destaque após o trabalho de J.L. Lions [41], na qual uma estrutura abstrata para o problema foi proposta. Dentre os vários trabalhos envolvendo o termo de Kirchhoff podemos citar Alves, Corrêa e Ma [1], Corrêa e Costa [16, 17, 18], Figueiredo e Santos Júnior [25], Figueiredo, Bisce e Servadei [26] e Fiscella [31] (os dois últimos trabalhos são referentes ao problema de Kirchhoff fracionário), Arcoya [7], Figueiredo [28] e as referências lá citadas.

Os problemas não locais modelam vários sistemas físicos e biológicos sendo u descrito por processo que depende de sua média, por exemplo densidade populacional, como em [20] e [21].

Os resultados que estudamos neste trabalho foram obtidos via método variacional e como praxe alguma compacidade é necessária como, por exemplo, a condição de Palais-Smale ou a condição de Cerami. Com o objetivo de verificar tais condição foi necessário e fundamental a utilização do Lema 1.2 (Ver Capítulo 1) em que estimativas de monotonicidade para o campo vetorial envolvido em $L(u)$ foram estabelecidos. Estas, além de recuperarem casos já conhecidos na literatura com $p, q \geq 2$, trataram os casos $1 < p < q < 2$ e $1 < p < 2, q > 2$ até então não abordados na generalidade aqui considerada (para mais detalhes nessa direção consultar Observação 1.2).

Vale ressaltar que em nosso contexto o problema pode ser degenerado. Na literatura, um problema com termo tipo Kirchhoff é dito ser degenerado se $M(0) = 0$. Este caso apresenta dificuldades adicionais e não é muito abordado na literatura podemos citar [15] e [17] cujo o operador principal é o p-Laplace e, no contexto de operador fracionário, podemos citar [26] e as referências lá citadas. Outro caso bastante interessante e ao mesmo tempo pouco abordado é o caso em que M pode ser singular na origem, neste caso, M é descontínua na origem. Em relação a esse caso podemos citar [17]. Outro fato que vale ressaltar é que não impusemos a hipótese da função M ser monótona como é comum em alguns trabalhos, por exemplo, [13], [28] e [34].

Os resultados que trataremos neste trabalho são válidos para $1 < p < q < N$, em constraste com várias outras referências em que se consideram $q, p \geq 2$, como em, [14] e [27] cujo operador em questão é o mesmo que estamos tratando aqui, porém sem ação de termo não local.

No Capítulo 1 deste trabalho consideramos a não linearidade $g_\lambda(x,u) = \lambda f(x,u) + |u|^{s-2}u$, basicamente do tipo côncava convexa. Dessa forma o problema (3) se torna

$$\begin{cases} -M(\mathcal{A}(u))\mathrm{div}(a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = \lambda f(x,u) + |u|^{s-2}u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{5}$$

sendo $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ com $N \geq 3$ domínio limitado, $1 < p < N$, $\lambda > 0$ um parâmetro e a função $f : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sendo ímpar na segunda variável e estando entre potências $|u|^{r-1}$ com $r \in (1, \gamma)$. Assumiremos também que $1 < r < p < q < N$ e $1 < r < \gamma < s < \gamma^*$ sendo $\gamma^* = \dfrac{\gamma N}{N - \gamma}$. A função $M : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ do tipo Kirchhoff pode ser degenerada, isto é, quando $M(0) = 0$, ou não degenerada, sendo neste último caso podendo a função possuir descontinuidade na origem (para mais detalhes sobre tais hipóteses consultar o Capítulo 1).

Quando $M \equiv 1$ o problema (5) deixa de ser não local e recupera o Teorema 2.5 (caso subcrítico) do clássico e famoso trabalho de Ambrosetti, Brezis e Cerami [2]. O resultado que apresentaremos referente à sequência de soluções com energia negativa é mais geral do que o citado anteriormente, já que, é válido para todo $\lambda > 0$. Bartsch e Willem [8] removeram a restrição sobre $\lambda > 0$ pequeno e obtiveram infinitas soluções para o caso Laplace quando $f(x,u) = \mu|u|^{p-1}u$ com $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$ e $\mu \in \mathbb{R}$ e $\lambda > 0$. Dessa forma, os resultados que apresentaremos no presente trabalho sobre infinitas soluções generalizam o Teorema 1 item b de [8] para o operador $-\mathrm{div}(a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ considerando $\mu = 1$.

O resultado de infinitas soluções que apresentaremos aqui também generaliza o Teorema 1.2 de Figueiredo e Júnior [25] (no caso subcrítico)

$$\begin{cases} -\left[M\left(\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)\right]\Delta u = \lambda|u|^{q-2}u + |u|^{p-2}u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{6}$$

quando $1 < q < 2 < p \leq 2^*$, $4 < p < 6$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, bem como dá informações sobre a existência de uma segunda sequência de soluções. Além disso, nossos resultados valem para $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ com $N \geq 3$.

Em relação à problemas com não linearidades do tipo "côncava-convexa"envolvendo função peso, podemos citar os problemas abordados em [29], [33], [37]. Quando os pesos são iguais a um, em [33] resulta o seguinte problema

$$\begin{cases} -M\left(\|u\|^p\right)\Delta_p u = \lambda|u|^{q-2}u + |u|^{r-2}u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{7}$$

com $M(s) = a + bs^k$ tais que $a, b > 0$, $1 < q < p < r < p^*$ e $p(k+1) < r$ e os autores mostraram que o problema em questão possui uma sequência de soluções de energia positiva. Logo (7) é um caso particular do operador do problema (3.1), portanto o Teorema 1.2 aqui apresentado é válido.

Considerando a função peso constante igual a um o problema de Komiya e Kajikiya [37] torna-se

$$\begin{cases} -\Delta_p u - \Delta_q u = |u|^{r-2}u + |u|^{s-2}u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{8}$$

e quando $s < q < p < r < p^*$ foi provado a existência de duas sequências de soluções não triviais para o problema (8). Dessa forma, tem-se um caso particular dos Teoremas 1.1 e 1.2 aqui apresentados.

No Capítulo 2 estudamos a multiplicidade de soluções para o problema (3) subcrítico com a não linearidade sendo $g_\lambda(x,u) = f(x,u)\left[\displaystyle\int_\Omega F(x,u)\right]^r$, isto é, a não linearidade também possui termo não local. Dessa forma, (3) torna-se

$$\begin{cases} -M(\mathcal{A}(u))\operatorname{div}(a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f(x,u)\left[\displaystyle\int_\Omega F(x,u)\right]^r & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{9}$$

Para este problema consideramos a não linearidade dividida em dois casos: sublinear e superlinear. A função M pode ser degenerada, não degenerada e não degenerada possuindo descontinuidade na origem (para ver detalhes sobre as hipóteses consultar Capítulo 2).

No caso sublinear em (9) o resultado obtido neste trabalho estabelece a existência de uma infinidade de soluções de energia negativa e que convergem para zero na norma ambiente. Ele completa o resultado de Corrêa e Costa [15] quando $p(x) = p$, já que o operador tratado aqui é mais geral, bem como nos permite considerar funções que são singulares na origem, isto é, M possuindo descontinuidade na origem. Além disso, é possível tratar a classe de funções degeneradas para uma quantidade maior de funções, uma vez que, no artigo as potências tratadas são maiores que um, enquanto no presente trabalho as potências para o caso degenerado são maiores que zero. Já no caso superlinear em (9) o resultado aqui obtido prova a existência de uma infinidade de soluções com energia positiva divergindo para $+\infty$. Tal resultado, segundo nosso conhecimento, é novo mesmo no contexto do operador p-Laplace (Em [15] aborda-se apenas o caso sublinear.)

Quando $M, a \equiv 1$ e $p = 2$ o problema (9) torna-se

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u)\left[\displaystyle\int_\Omega F(x,u)\right]^r & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{10}$$

que ocorre em dinâmica populacional, transferência de calor em termistores, dentre outras aplicações. Ver Côrrea, Delgado e Suárez [22] e Gomes e Sanchez [32], bem como as referência lá citadas para detalhes sobre este tipo de problema.

O interesse em estudar problemas não locais surge não somente por propósitos matemáticos, mas também devido as suas significativas aplicações. Outra interessante aplicação é o chamado modelo de movimento de certos fluídos chamados "Electrorheological fluids" que são caracterizados por sua capacidade de mudar de forma drástica suas propriedades mecânicas quando influenciados por campo eletromagnético externo. Tais fluídos têm sido usados em robótica e tecnologia espacial. A pesquisa experimental tem sido realizada, principalmente, nos EUA com a participação da NASA. Para conhecer mais sobre o assunto ver [42].

No Capítulo 3 consideramos também uma não linearidade envolvendo termo não-local sob pertubação, a saber, $g_\lambda(x,u) = \lambda f(x,u)\left[\displaystyle\int_\Omega F(x,u)\right]^r + |u|^{s-2}u$. Dessa forma, o problema (3) torna-se

$$\begin{cases} -M(\mathcal{A}(u))\mathrm{div}(a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = \lambda f(x,u)\left[\displaystyle\int_\Omega F(x,u)\right]^r + |u|^{s-2}u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{11}$$

e obtivemos para esse problema três resultados: Existência de infinitas soluções com energia negativa para todo $\lambda > 0$ convergindo para zero, existência de infinitas soluções com energia positiva divergindo para $+\infty$ e existência de, pelo menos, duas soluções positivas para $\lambda > 0$ pequeno.

Este capítulo estende [16] para o caso subcrítico e com $p(x) = p$, uma vez que estamos com um operador mais geral. Os resultados para o caso sublinear são recuperados para todo $\lambda > 0$, enquanto no citado artigo, os resultados são válidos para $\lambda > 0$ pequeno. Além disso, damos resultados de existência de uma infinidade de soluções com energia positiva, bem como a existência de, pelo menos, duas soluções positivas para $\lambda > 0$ pequeno.

Já no Capítulo 4 nosso objetivo foi estudar o problema (9) considerando uma não linearidade com crescimento superlinear sem que a condição de Ambrosetti-Rabinowitz seja imposta. Estudamos não linearidades superlineares satisfazendo a condição de não quadraticidade no infinito introduzida por Costa-Magalhães em [19]. O principal resultado provado no Capítulo 4 garante a existência de infinitas soluções com energia positiva divergindo para $+\infty$ e inclui uma classe de funções Kirchhoff degeneradas ($M(0) = 0$) que podem ser contínuas ou descontínuas na origem. A principal ferramenta utilizada é o teorema do passo da montanha siétrico com a condição de Cerami.

O apêndice contêm resultados que foram úteis durante a elaboração deste trabalho.

Capítulo 1

Estrutura côncava-convexa para problemas não homogêneos e não locais

Neste capítulo consideramos o seguinte problema de Dirichlet não local

$$\begin{cases} -M(\mathcal{A}(u))\mathrm{div}(a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = \lambda f(x,u) + |u|^{s-2}u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

sendo $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ com $N \geq 3$ domínio limitado, $1 < p < N$, $\lambda > 0$ um parâmetro e a função $a : [0,\infty) \to (0,\infty)$ de classe C^1 satisfazendo:

(a_1) Existem $k_0, k_1, k_2 > 0$, $k_3 \geq 0$, $q > p$ tais que

$$k_0 + H(k_3)k_2 t^{\frac{q-p}{p}} \leq a(t) \leq k_1 + k_3 t^{\frac{q-p}{p}},$$

com $H(\xi) = 1$, se $\xi > 0$ e $H(\xi) = 0$, se $\xi = 0$.

(a_2) (i) $a(t^p)t^{p-2}$ é não decrescente para $p \geq 2$.

(ii) $a(t)$ é não decrescente para $1 < p < 2$.

O operador $\mathcal{A}$ é definido por

$$\mathcal{A}(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega A(|\nabla u|^p)dx,$$

sendo $A(t) = \displaystyle\int_0^t a(\xi)d\xi$. A função $f : \bar{\Omega}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é de tipo Carathéodory (isto é, para todo $t \in \mathbb{R}$ a função $x \mapsto f(x,t)$ é mensurável e para quase todo $x \in \Omega$ a função $t \mapsto f(x,t)$ é contínua) e satisfaz:

(f_1) $f(x,-t) = -f(x,t)$ para $(x,t) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}$.

(f_2) Existem $a_1, a_2 > 0$ e $r \in (1,\gamma)$ tais que

$$a_1 t^{r-1} \leq f(x,t) \leq a_2 t^{r-1} \quad \forall (x,t) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^+.$$

Assumiremos

$$1 < r < p < q < N \quad \text{e} \quad 1 < r < \gamma < s < \gamma^*,$$

sendo

$$\gamma = (1 - H(k_3))p + H(k_3)q \tag{1.2}$$

e γ^* o expoente crítico de Sobolev, dado por $\gamma^* = \dfrac{\gamma N}{N - \gamma}$.

A função $M : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ satisfaz, além de outras hipóteses a serem introduzidas adiante, a seguinte condição:

(M_1) $\quad M \in C(0, +\infty)$ e $M(t) > 0, \ \forall t \in (0, +\infty)$.

O primeiro resultado a ser provado, Teorema 1.1, estabelece existência de infinitas soluções de (1.1) de energia negativa convergindo para zero, qualquer que seja $\lambda > 0$. As funções $M(\cdot)$ a serem utilizadas no Teorema 1.1 satisfazem, além de (M_1), as seguintes hipóteses:

(M_2) $\quad$ Existem $m_1 > 0$ e $\nu > \dfrac{r}{\gamma}$ satisfazendo

$$M(t) \geq m_1 t^{\nu - 1}, \ \text{para } t \gg 1,$$

sendo γ dado por (1.2).

(M_3) $\quad$ Existem $n_0, n_1 \geq 0$, com $n_0 + n_1 > 0$, e $\beta > \dfrac{1}{p}$ verificando

$$M(t) \leq n_0 + n_1 t^{\beta - 1}, \ \text{para todo } 0 < t \ll 1.$$

Estamos em posição de enunciar o

Teorema 1.1 *Suponha* $1 < r < \gamma < s < \gamma^*, (a_1) - (a_2), (M_1) - (M_3), (f_1) - (f_2)$. *O problema* (1.1) *possui uma infinidade de soluções* (u_k) *para todo* $\lambda > 0$, *satisfazendo* $J(u_k) < 0$ *e* $\|u_k\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} \to 0$, *quando* $k \to +\infty$, *sendo* J *o funcional energia dado por* (1.4).

Como exemplos de funções $M(\cdot)$ contínuas em $(0, +\infty)$ satisfazendo as hipóteses do Teorema 1.1 podemos mencionar:

- funções limitadas cumprindo $0 < m_0 \leq M(t) \leq m_1$.
- $M(t) = a + bt^k$, com $a, b > 0$ e $k > 1$.
- funções descontínuas e degeneradas na origem como $M(t) = \begin{cases} t^{k-1}, & \text{para } t \neq 0 \\ 0, & \text{para } t = 0 \end{cases}$,

  sendo $\max\{\beta, \nu\} < k < 1$.

- funções degeneradas como $M(t) = t^{k-1}$, com $k > \max\{\nu, \beta, 1\}$.

Dizemos que $M(\cdot)$ em (1.1) é degenerada se $M(0) = 0$. Vale ressaltar que nenhuma hipótese de monotonicidade é requerida sobre $M(\cdot)$.

O próximo resultado é referente a existência de infinitas soluções de energia positiva para $\lambda > 0$ pequeno, obtido via Teorema do Passo da Montanha Simétrico [48]. Com esse propósito introduziremos as seguintes hipóteses:

(M_2') Existem $m_0, \tilde{m} \geq 0$ com $m_0 + \tilde{m} > 0$ e $\mu < \dfrac{s}{\gamma}$, satisfazendo:

$$M(t) \leq m_0 + \tilde{m} t^{\mu - 1}, \text{ para } t \gg 1.$$

(M_3') Existem $n_0, n_1, \tilde{n}_0, \tilde{n}_1 \geq 0$, com $n_0 + n_1 > 0$ e $\tilde{n}_0 + \tilde{n}_1 > 0$, verificando

$$\tilde{n}_0 + \tilde{n}_1 t^{\sigma - 1} \leq M(t) \leq n_0 + n_1 t^{\beta - 1}, \text{ para } 0 < t \ll 1,$$

sendo ou

(i) $\dfrac{1}{p} < \beta \leq \sigma < 1$,

ou

$$(ii) \quad \begin{cases} \sigma \geq 1 \\ \beta > \dfrac{1}{p} \end{cases} (\text{ se } \tilde{n}_0 > 0) \qquad \text{ou} \qquad \begin{cases} 1 < \sigma < \dfrac{s}{\gamma} \\ \beta > \dfrac{1}{p} \end{cases} (\text{ se } \tilde{n}_0 = 0).$$

(M_4) Existe $\gamma < \theta < s$ satisfazendo

$$\liminf_{t \to +\infty} \frac{\theta \mathcal{M}(t) - c(\gamma) M(t) t}{t^{\frac{1}{\gamma}}} > 0,$$

sendo

$$c(\gamma) = \begin{cases} \dfrac{pk_1}{k_0}, & \text{se } H(k_3) = 0, \\ \dfrac{\max\{k_1, k_3\}}{\min\left\{\frac{k_0}{p}, \frac{k_2}{q}\right\}}, & \text{se } H(k_3) = 1, \end{cases} \tag{1.3}$$

e γ conforme dado em (1.2). Dessa forma, podemos enunciar o

Teorema 1.2 *Suponha* $1 < r < \gamma < s < \gamma^*$, $(a_1) - (a_2)$, (M_1), $(M_2') - (M_3')$, (M_4) *e* $(f_1) - (f_2)$. *Então, para todo* $\lambda > 0$ *suficientemente pequeno, o problema (1.1) possui uma infinidade de soluções* (w_j) *satisfazendo* $J(w_j) \to +\infty$ *e* $\|w_j\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} \to +\infty$, *quando* $j \to +\infty$, *sendo* J *o funcional energia dado por* (1.4).

Como exemplos de funções M satisfazendo as hipóteses do Teorema 1.2 podemos mencionar: $0 < m_0 \leq M(t) \leq m_1$ contínua em $(0, \infty)$, $M(t) = a + bt^{k-1}$ com $a, b > 0$ e

$1 < k < \dfrac{s}{\gamma}$ e $M(t) = t^{k-1}$ com $1 < k < \dfrac{s}{\gamma}$. As duas primeiras classes são exemplos de funções não-degeneradas. A última classe são das funções degeneradas, ou seja, $M(0) = 0$. Em todos os exemplos acima consideramos $c(\gamma) = \gamma$, que é possível quando $k_i = 1$ para $i = 0, 1, 2, 3$.

No último teorema deste capítulo mostramos a existência de, pelo menos, duas soluções positivas para $\lambda > 0$ pequeno, uma via o clássico teorema do passo da montanha devido a Ambrosetti-Rabinowitz [52] e a outra via princípio variacional de Ekeland [23]. Para garantir a positividade das soluções utilizamos o princípio do máximo forte de Pucci e Serrin [46]. Para essa última etapa foi necessário acrescentar as hipóteses $(a_3) - (a_4)$ (consultar seção 1.4) e restringir a hipótese (M_3') à hipótese (M_3''), a saber:

(M_3'') Existem $n_0, n_1, \tilde{n}_0, \tilde{n}_1 \geq 0$ com $n_0 + n_1 > 0$ e $\tilde{n}_0 + \tilde{n}_1 > 0$ verificando

$$\tilde{n}_0 + \tilde{n}_1 t^{\sigma-1} \leq M(t) \leq n_0 + n_1 t^{\beta-1}, \text{ para } t \ll 1,$$

sendo ou

(i) $\dfrac{r}{p} < \beta \leq \sigma < 1$,

ou

$$(ii) \quad \begin{cases} \sigma \geq 1 \\ \beta > \dfrac{r}{p} \end{cases} (\text{se } \tilde{n}_0 > 0) \qquad \text{ou} \qquad \begin{cases} 1 < \sigma < \dfrac{s}{\gamma} \\ \beta > \dfrac{r}{p} \end{cases} (\text{se } \tilde{n}_0 = 0).$$

Tendo em vista as considerações acima temos o seguinte resultado:

Teorema 1.3 *Suponha* $1 < r < \gamma < s < \gamma^*$, $(a_1) - (a_4)$, (M_1), (M_2'), (M_3''), (M_4) *e* $(f_1) - (f_2)$. *Então, para* $\lambda > 0$ *suficientemente pequeno, o problema* (1.1) *possui, pelo menos, duas soluções positivas.*

Como exemplos de funções M satisfazendo as hipóteses do Teorema 1.3 podemos mencionar: $0 < m_0 \leq M(t) \leq m_1$ contínua em $(0, \infty)$, $M(t) = a + bt^{k-1}$ com $a, b > 0$ e $1 < k < \dfrac{s}{\gamma}$ e $M(t) = t^{k-1}$ com $1 < k < \dfrac{s}{\gamma}$. O último exemplo é de função degenerada, isto é, $M(0) = 0$, enquanto as duas primeiras classes são funções não degeneradas. Em todos os exemplos acima consideramos $c(\gamma) = \gamma$, que é possível quando $k_i = 0$ para todo $i = 0, 1, 2, 3$.

1.1 Formulação Variacional

O funcional de energia $J : W_0^{1,\gamma}(\Omega) \to \mathbb{R}$ (sendo γ dado por (1.2)) associado ao problema (1.1) é dado por

$$J(u) = \mathcal{M}(\mathcal{A}(u)) - \lambda \int_\Omega F(x, u)dx - \frac{1}{s}\int_\Omega |u|^s dx, \tag{1.4}$$

sendo $\mathcal{M}(t) = \displaystyle\int_0^t M(\tau)d\tau$ e $F(x,u) = \displaystyle\int_0^u f(x,\tau)d\tau$. Sobre as hipóteses acima tem-se $J \in C^1(W_0^{1,\gamma}(\Omega), \mathbb{R})$, com derivada de Fréchet dada por

$$\langle J'(u), v\rangle = M(\mathcal{A}(u))\int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v - \lambda\int_\Omega f(x,u)v - \int_\Omega |u|^{s-2}uv, \quad (1.5)$$

para todo $u, v \in W_0^{1,\gamma}(\Omega)$, sendo $\langle\cdot,\cdot\rangle$ o par de dualidade entre $\big(W_0^{1,\gamma}(\Omega)\big)^*$ e $W_0^{1,\gamma}(\Omega)$.

O espaço de Sobolev $W_0^{1,\gamma}(\Omega)$ será munido com a norma

$$\|u\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^\gamma dx\right)^{\frac{1}{\gamma}}, \quad (1.6)$$

a qual é equivalente a norma usual de $W_0^{1,\gamma}(\Omega)$.

Vimos na seção anterior que a função $M(\cdot)$ pode ser degenerada ($M(0) = 0$) ou não degenerada, sendo que neste último caso pode ocorrer que M seja descontínua na origem (o que ocorre, em particular, quando $M(t) \to +\infty$, quando $t \to 0^+$). Logo, é natural questionar a diferenciabilidade na origem do termo $\mathcal{M}(\mathcal{A}(u))$. O próximo resultado tem a finalidade de mostrar que mesmo M sendo descontínua na origem, com o crescimento adequado, o funcional $\mathcal{M}(\mathcal{A}(u))$ de classe C^1 no sentido de Fréchet.

Lema 1.1 *Seja M uma função satisfazendo $M \in C(0,+\infty)$, $M(t) > 0$ para todo $t > 0$ e*

$$M(t) \leq n_0 + n_1 t^{\beta-1}, \text{ para } 0 < t \ll 1 \text{ e } \beta > \frac{1}{p}. \quad (1.7)$$

Então o funcional $\mathcal{M}(\mathcal{A}(u))$ é de classe C^1 no sentido de Fréchet.

Prova: Usando a hipótese (1.7) temos que

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(t) &= \lim_{k\to 0^+}\int_k^t M(\xi)d\xi \leq \lim_{k\to 0^+}\int_k^t (n_0 + n_1\xi^{\beta-1})d\xi \\ &= \lim_{k\to 0^+}\left(n_0\xi + \frac{n_1}{\beta}\xi^\beta\right)\Big|_k^t = n_0 t + \frac{n_1 t^\beta}{\beta}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Como $0 \leq \mathcal{M}(t) \leq n_0 t + \dfrac{n_1 t^\beta}{\beta}$ para $0 < t \ll 1$ então $\lim\limits_{t\to 0^+}\mathcal{M}(t) = 0$. Observe que existe primitiva de M satisfazendo $\mathcal{M}(0) = 0$, para isto basta redefinir a função $\mathcal{M}(t)$ sendo

$$\begin{cases} \mathcal{M}(t), & \text{se } t > 0, \\ 0, & \text{se } t = 0, \end{cases} \quad (1.9)$$

e daí podemos supor $\mathcal{M}$ contínua na origem. O ponto central é provar que o funcional $\varphi(u) := \mathcal{M}(\mathcal{A}(u))$ é de classe C^1 em $u = 0$ pois, para $u \neq 0$, $\varphi(u)$ é composição de funcionais de classe C^1.

Para calcular a derivada de Gatêaux de φ em $u = 0$, fixe $v \in W_0^{1,\gamma}(\Omega)\backslash\{0\}$. Como $\mathcal{A}(tu) \to 0^+$, quando $|t| \to 0$, usando a estimativa (1.8) e (a_1) temos

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\varphi(0+tv)-\varphi(0)}{t}\right| &= \frac{1}{|t|}\mathcal{M}(\mathcal{A}(tv))\\
&\leq \frac{1}{|t|}\Big[n_0\mathcal{A}(tv) - \frac{n_1}{\beta}(\mathcal{A}(tv))^\beta\Big]\\
&\leq \frac{1}{|t|}n_0\left[\frac{k_1}{p}\int_\Omega |\nabla(tv)|^p + \frac{k_3}{q}\int_\Omega |\nabla(tv)|^q\right]\\
&\quad + \frac{1}{|t|}\frac{n_1}{\beta}\left[\frac{k_1}{p}\int_\Omega |\nabla(tv)|^p + \frac{k_3}{q}\int_\Omega |\nabla(tv)|^q\right]^\beta\\
&\leq \frac{n_0k_1}{p}|t|^{p-1}\left[\int_\Omega |\nabla v|^p\right] + \frac{n_0k_3}{q}|t|^{q-1}\left[\int_\Omega |\nabla v|^q\right]\\
&\quad + \frac{cn_1}{\beta}\left(\frac{k_1}{p}\right)^\beta |t|^{p\beta-1}\left[\int_\Omega |\nabla v|^p\right]^\beta + \frac{n_1c}{\beta}\left(\frac{k_3}{q}\right)^\beta |t|^{q\beta-1}\left[\int_\Omega |\nabla v|^q\right]^\beta\\
&\overset{t\to 0}{\longrightarrow} 0,
\end{aligned}$$

pois $\beta > \dfrac{1}{p}$. Se $v = 0$ então $\dfrac{\varphi(0+tv)-\varphi(0)}{t} = \dfrac{0}{t} = 0$. Portanto, $\varphi'(0) = 0$, i.e., a derivada de Gâteaux de φ em $u = 0$ é o funcional nulo.

Vamos mostrar agora que a derivada de Gâteaux de φ é contínua em $u = 0$. Seja $u_n \to 0$ em $W_0^{1,\gamma}(\Omega)$, quando $n \to +\infty$. Fixe $v \in W_0^{1,\gamma}(\Omega)$, com $\|v\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} \leq 1$. Como

$$\langle \varphi'(u), v\rangle = M(\mathcal{A}(u))\int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v$$

para $u \neq 0$, usando a desigualdade de Hölder, a imersão de Sobolev e (1.7) obtemos

$$\begin{aligned}
\langle \varphi'(u_n), v\rangle &= M(\mathcal{A}(u_n))\int_\Omega a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\nabla v\\
&\leq (n_0 + n_1\mathcal{A}(u_n)^{\beta-1})\int_\Omega a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-1}|\nabla v|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= n_0 \int_\Omega a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-1}|\nabla v| + n_1 \mathcal{A}(u_n)^{\beta-1} \int_\Omega a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-1}|\nabla v| \\
&\leq n_0 \int_\Omega (k_1 + k_3|\nabla u_n|^{q-p})|\nabla u_n|^{p-1}|\nabla v| \\
&\quad + n_1 \left[\frac{k_0}{p}\int_\Omega |\nabla u_n|^p + \frac{k_2 H(k_3)}{q}\int_\Omega |\nabla u_n|^q\right]^{\beta-1} \int_\Omega (k_1 + k_3|\nabla u_n|^{q-p})|\nabla u_n|^{p-1}|\nabla v| \\
&\leq n_0 k_1 \int_\Omega |\nabla u_n|^{p-1}|\nabla v| + n_0 k_3 \int_\Omega |\nabla u_n|^{q-1}|\nabla v| \\
&\quad + n_1 \left[\frac{k_0}{p}\int_\Omega |\nabla u_n|^p\right]^{\beta-1} \left[\int_\Omega k_1|\nabla u_n|^{p-1}|\nabla v| + k_3|\nabla u_n|^{q-1}|\nabla v|\right] \\
&\leq n_0 k_1 c \|u_n\|^{p-1}_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} \|v\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} + n_0 k_3 \|u_n\|^{q-1}_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} \|v\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} \\
&\quad + n_1 \left[\frac{k_0}{p}\int_\Omega |\nabla u_n|^p\right]^{\beta-1} \left[k_1 c\|u_n\|^{p-1}_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} \|v\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} + k_3\|u_n\|^{q-1}_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} \|v\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)}\right] \\
&\leq n_0 k_1 c \|u_n\|^{p-1}_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} + n_0 k_3 \|u_n\|^{q-1}_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} + \frac{k_1 n_1 k_0^{\beta-1}}{p^{\beta-1}} \|u_n\|^{p(\beta-1)+p-1}_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} \\
&\quad + \frac{k_3 n_1 k_0^{\beta-1}}{p^{\beta-1}} \|u_n\|^{p(\beta-1)+q-1}_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\|\varphi'(u_n)\|_{(W_0^{1,\gamma}(\Omega))^*} \leq n_0 k_1 c \|u_n\|^{p-1}_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} + n_0 k_3 \|u_n\|^{q-1}_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} &+ \frac{k_1 n_1 k_0^{\beta-1}}{p^{\beta-1}} \|u_n\|^{p(\beta-1)+p-1}_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} \\
&+ \frac{k_3 n_1 k_0^{\beta-1}}{p^{\beta-1}} \|u_n\|^{p(\beta-1)+q-1}_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Observe que a expressão acima converge para zero quando $n \to +\infty$, posto que $\beta > \frac{1}{p}$ e $q > p$. Portanto, a aplicação $u \mapsto \varphi'(u)$ é contínua em $u = 0$. Logo, $\varphi \in C^1(W_0^{1,\gamma}(\Omega), \mathbb{R})$ em virtude da Proposição 5.1. O lemma está provado. $\square$

Observação 1.1 *Para mostrar que o funcional J é de classe $C^1(W_0^{1,\gamma}(\Omega), \mathbb{R})$ basta mostrar que a aplicação derivada de Gateâux é contínua, em virtude da Proposição 5.1 (consultar Apêndice). De $(f_1) - (f_2)$ podemos concluir que os termos*

$$\psi(u) = \int_\Omega F(x,u)dx \qquad e \qquad \zeta(u) = \frac{1}{s}\int_\Omega |u|^s dx$$

são funcionais de classe $C^1(W_0^{1,\gamma}(\Omega), \mathbb{R})$, com derivadas no sentido de Fréchet dadas por

$$\langle \psi'(u), v\rangle = \int_\Omega f(x,u)v dx \qquad e \qquad \langle \zeta'(u), v\rangle = \int_\Omega |u|^{s-2}uv dx,$$

respectivamente. (O cálculo é padrão, sugerimos [10]).

Logo, Lema 1.1 *e Proposição* 5.2 *garantem que* $J \in C^1(W_0^{1,\gamma}(\Omega), \mathbb{R})$, *com derivada no sentido de Fréchet é dada por* (1.5).

No que segue apresentaremos a definição de um funcional satisfazer a condição de Palais-Smale. Tal condição é essencial para os resultados que utilizaremos na maior parte desse trabalho.

Definição 1.1 *Sejam X um espaço de Banach e $I : X \to \mathbb{R}$ funcional diferenciável. Dizemos que (u_n) é sequência de Palais-Smale no nível c, abreviamente $(PS)_c$, se $I(u_n) \to c$ e $I'(u_n) \to 0$ em X^* quando $n \to +\infty$. Dizemos, também, que I satisfaz a condição de Palais-Smale no nível c se toda sequência $(PS)_c$ possui uma subsequência que converge fortemente em X. Quando toda sequência de Palais-Smale para o funcional I no nível c possuir subsequência fortemente convergente, para todo c real, diremos que I satisfaz a condição de Palais-Smale (e denotaremos simplesmente por (PS)).*

O próximo resultado será útil sempre que for necessário demonstrar que o funcional de energia satisfaz a condição de Palais-Smale. Tal condição é essencial para os métodos variacionais que utilizaremos ao longo deste trabalho.

Lema 1.2 *Considere o campo vetorial $\mathbb{R}^N \ni y \longmapsto a(|y|^p)|y|^{p-2}y \in \mathbb{R}^N$, com $a(\cdot)$ satisfazendo $(a_1) - (a_2)$ e sendo γ dado por* (1.2), *e denote $< \cdot, \cdot >$ o produto escalar usual em $\mathbb{R}^N$. São válidas as seguintes estimativas:*

(i) Para todo $p \geq 2$, $q > p$ e todo $x, y \in \mathbb{R}^N$, tem-se

$$< a(|x|^p)|x|^{p-2}x - a(|y|^p)|y|^{p-2}y, x - y > \geq \frac{\min\{k_0, k_2\}}{4^{\gamma-1}}|x-y|^\gamma.$$

(ii) Para todo $1 < p < q < 2$ e todo $x, y \in \mathbb{R}^N \backslash \{0\}$, tem-se

$$< a(|x|^p)|x|^{p-2}x - a(|y|^p)|y|^{p-2}y, x - y > \geq \min\{k_0, k_2\}(p-1)\frac{|x-y|^2}{(|x|+|y|)^{2-\gamma}}.$$

(iii) Para todo $1 < p < 2$, $q \geq 2$ e todo $x, y \in \mathbb{R}^N \backslash \{0\}$, tem-se

$$< a(|x|^p)|x|^{p-2}x - a(|y|^p)|y|^{p-2}y, x - y > \geq \begin{cases} k_0(p-1)\dfrac{|x-y|^2}{(|x|+|y|)^{2-p}}, & se\ H(k_3) = 0, \\ \dfrac{k_2(p-1)}{4^{q-1}}|x-y|^q, & se\ H(k_3) = 1. \end{cases}$$

Prova: Caso (i) foi provado em [11, 27]. Para provar (ii) e (iii), sejam $x, y \in \mathbb{R}^N \backslash \{0\}$ e defina $z = y + t(x-y)$, $t \in [0,1]$, e $\xi = x - y$. Assumiremos $z \neq 0$ ao longo da prova, já que quando $z = 0$ as estimativas em (ii) e (iii) podem ser obtidas via cálculo direto.

(ii) Assuma $1 < p < q < 2$. Por um lado,

$$
\begin{aligned}
&< a(|x|^p)|x|^{p-2}x - a(|y|^p)|y|^{p-2}y,\, x-y > \\
&\qquad = \sum_{j=1}^{N}(a(|x|^p)|x|^{p-2}x_j - a(|y|^p)|y|^{p-2}y_j)(x_j - y_j) \\
&\qquad = \int_0^1 \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial z_i}(a(|z|^p)|z|^{p-2}z_j)\xi_i\xi_j dt \\
&\qquad = \int_0^1 \left(\sum_{j=1}^{N} z_j\xi_j\right)^2 |z|^{p-4}\left[(p-2)a(|z|^p) + pa'(|z|^p)|z|^p\right] \\
&\qquad + \ a(|z|^p)|z|^{p-2}|\xi|^2 dt.
\end{aligned}
$$

Por outro lado, usando $(a_2)(ii)$ e (a_1), tem-se

$$
\begin{aligned}
&< a(|x|^p)|x|^{p-2}x - a(|y|^p)|y|^{p-2}y, x-y> \\
&\qquad \geq \int_0^1 \left[\left(\sum_{j=1}^{N} z_j\xi_j\right)^2 |z|^{p-4}(p-2)a(|z|^p) + a(|z|^p)|z|^{p-2}|\xi|^2\right]dt. \\
&\qquad \geq \int_0^1 (|\xi|^2|z|^{p-2}(p-2)a(|z|^p) + a(|z|^p)|z|^{p-2}|\xi|^2)dt \\
&\qquad = \int_0^1 (p-1)a(|z|^p)|z|^{p-2}|\xi|^2 dt \\
&\qquad \geq \int_0^1 [(p-1)(k_0|z|^{p-2}|\xi|^2 + H(k_3)k_2|z|^{q-2}|\xi|^2)]dt. \qquad (1.10)
\end{aligned}
$$

Então se $H(k_3) = 0$ em (1.2) obtemos

$$
\begin{aligned}
< a(|x|^p)|x|^{p-2}x - a(|y|^p)|y|^{p-2}y, x-y> &\geq \frac{(p-1)k_0|x-y|^2}{(|x|+|y|)^{2-p}} \\
&\geq \min\{k_0, k_2\}(p-1)\frac{|x-y|^2}{(|x|+|y|)^{2-p}},
\end{aligned}
$$

enquanto $H(k_3) = 1$ em (1.2) implica

$$
\begin{aligned}
< a(|x|^p)|x|^{p-2}x - a(|y|^p)|y|^{p-2}y, x-y> &\geq \frac{(p-1)k_2|x-y|^2}{(|x|+|y|)^{2-q}} \\
&\geq \min\{k_0, k_2\}(p-1)\frac{|x-y|^2}{(|x|+|y|)^{2-q}}.
\end{aligned}
$$

Portanto (ii) está provado.

(iii) Assuma $1 < p < 2$ e $q \geq 2$. Se $H(k_3) = 0$ em (1.2), por (1.10) obtem

$$
\begin{aligned}
< a(|x|^p)|x|^{p-2}x - a(|y|^p)|y|^{p-2}y, x - y > & \\
&\geq \int_0^1 (p-1)k_0|y + t(x-y)|^{p-2}|x-y|^2 dt \\
&\geq \frac{(p-1)k_0|x-y|^2}{(|x|+|y|)^{2-p}}.
\end{aligned}
$$

Se $H(k_3) = 1$ em (1.2), (1.10) implica

$$
< a(|x|^p)|x|^{p-2}x - a(|y|^p)|y|^{p-2}y, x - y > \geq \int_0^1 (p-1)k_2|y + t(x-y)|^{q-2}|x-y|^2 dt. \quad (1.11)
$$

Sem perda de generalidade podemos supor $|y| \geq |x|$, de modo que $\frac{1}{2}|x - y| \leq |y|$ e

$$
|y + t(x-y)| \geq \frac{|x-y|}{4}, \text{ para todo } t \in \Big[0, \frac{1}{4}\Big]. \quad (1.12)
$$

Então (1.11) e (1.12) nos fornecem

$$
\begin{aligned}
< a(|x|^p)|x|^{p-2}x - a(|y|^p)|y|^{p-2}y, x - y > &\geq \int_0^{\frac{1}{4}} (p-1)k_2 \frac{|x-y|^{q-2}}{4^{q-2}} |x-y|^2 dt \\
&\geq \frac{(p-1)k_2|x-y|^q}{4^{q-1}},
\end{aligned}
$$

e a prova está concluída. □

Observação 1.2 *É bem conhecida na literatura a estimativa*

$$
\langle |x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y, x - y \rangle \geq \begin{cases} C|x-y|^p & \text{se } p \geq 2, \\ \dfrac{\tilde{C}|x-y|^2}{(|x|+|y|)^{2-p}} & \text{se } 1 < p < 2, \end{cases}
$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^N \backslash \{0\}$ e sendo $C, \tilde{C} > 0$ constantes. Estimativas da forma acima envolvendo o operador $div(a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ são encontradas na literatura nos trabalhos de [14] e [27] para o caso $p \geq 2$. Em [11] foi provada a estimativa

$$
< a(|x|^p)|x|^{p-2}x - a(|y|^p)|y|^{p-2}y, x - y > \geq D|x-y|^q,
$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^N$, sendo $D > 0$ constante, desde que $p, q \geq 2$. Podemos ainda citar [36] e [50] que consideraram um operador semelhante com algumas modificações nas hipóteses, mas em ambos não incluem o caso p&q-Laplace.

Dessa forma, o Lema 1.2 recupera casos conhecidos na literatura e também trata novos casos, a saber, $1 < p < q < 2$, bem como $1 < p < 2$ e $q \geq 2$.

1.2 Infinitas soluções de energia negativa

O objetivo desta seção é demonstrar o Teorema 1.1, isto é, provar que o problema (1.1) possui uma infinidade de soluções de energia negativa cuja norma converge para zero para todo $\lambda > 0$.

Como o funcional energia J não é limitado inferiormente, para obter nosso resultado não podemos aplicar diretamente um refinamento do teorema de Clark de [38], cf. Teorema 5.3 do Capítulo 6, devido a Liu e Wang. Com o objetivo de contornar tal situação, construiremos um funcional truncado $\bar{J}$, dado por (1.13), e mostraremos que esse novo funcional de energia é limitado inferiormente e que uma infinidade de pontos críticos de $\bar{J}$ coincidem com os de J. A técnica do truncamento foi inspirada no trabalho de Garcia Azorero e Peral Alonso [5].

Consideremos o seguinte funcional truncado $\bar{J} : W_0^{1,\gamma}(\Omega) \to \mathbb{R}$, dado por

$$\bar{J}(u) = \mathcal{M}(\mathcal{A}(u)) - \lambda \int_\Omega F(x,u)dx - \phi\Big(\|u\|^\gamma_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)}\Big)\frac{1}{s}\int_\Omega |u|^s dx, \tag{1.13}$$

sendo $\phi \in C_0^1([0,+\infty))$ uma função auxiliar satisfazendo

$$\begin{cases} 0 \leq \phi \leq 1, & \text{em} \quad [0,+\infty), \\ \phi(t) = 1, & \text{se} \quad t \in [0,\frac{1}{2}], \\ \phi(t) = 0, & \text{se} \quad t \in [1,+\infty), \\ \phi' \leq 0 & \text{em} \quad [0,+\infty). \end{cases} \tag{1.14}$$

Observe que como ϕ é função de classe C^1 então o funcional $\bar{J}$ permanece sendo de classe $C^1(W_0^{1,\gamma}(\Omega),\mathbb{R})$ e sua derivada no sentido de Fréchet é dada por

$$\begin{aligned} \langle \bar{J}'(u),\varphi\rangle &= M(\mathcal{A}(u))\int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\varphi dx - \lambda\int_\Omega f(x,u)\varphi dx \\ -\phi'\Big(\|u\|^\gamma_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)}\Big)\frac{\gamma}{s}\int_\Omega |u|^s dx &\int_\Omega |\nabla u|^{\gamma-2}\nabla u\nabla\varphi dx - \phi\Big(\|u\|^\gamma_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)}\Big)\int_\Omega |u|^{s-2}u\varphi dx. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Nos próximos resultados mostraremos que o funcional truncado $\bar{J}$ satisfaz as hipóteses do Teorema 1.1 de [38] (cf. Teorema 5.3 deste trabalho).

Lema 1.3 *Suponha* $1 < r < \gamma < s < \gamma^*, (a_1)$, (M_2), $(f_1) - (f_2)$. *Então o funcional de energia truncado* $\bar{J}$ *dado por* (1.13) *é coercivo.*

Prova: Usando $(a_1),(M_2),(f_1)-(f_2)$ e o teorema de imersão de Sobolev, temos

$$\begin{aligned} \bar{J}(u) &= \mathcal{M}(\mathcal{A}(u)) - \lambda\int_\Omega F(x,u)dx - \phi\Big(\|u\|^\gamma_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)}\Big)\frac{1}{s}\int_\Omega |u|^s dx \\ &\geq \frac{m_1}{\nu}\mathcal{A}(u)^\nu - \frac{\lambda a_2}{r}\int_\Omega |u|^r dx - \phi\Big(\|u\|^\gamma_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)}\Big)\frac{1}{s}\int_\Omega |u|^s dx \\ &\geq c\|u\|^{\gamma\nu}_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} - \frac{\lambda a_2 c_1}{r}\|u\|^r_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} - \phi\Big(\|u\|^\gamma_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)}\Big)\frac{c_2}{s}\|u\|^s_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)}, \end{aligned} \tag{1.16}$$

sendo $c = \dfrac{m_1 k_0^\nu}{\nu p^\nu}$ se $H(k_3)=0$ ou $c = \dfrac{m_1 k_2^\nu}{\nu q^\nu}$ se $H(k_3)=1$, com $c, c_1, c_2 > 0$ constantes. Fazendo $\|u\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} \to +\infty$, usando (1.14) e (1.16) obtem-se

$$\bar{J}(u) \geq c\|u\|^{\gamma\nu}_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} - \frac{\lambda a_2 c_1}{r}\|u\|^r_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} \longrightarrow +\infty,$$

pois $\gamma\nu > r$, de modo que $\bar{J}$ é coercivo. □

Lema 1.4 *Suponha* $(a_1)-(a_2)$, (M_1) *e* $(f_1)-(f_2)$. *Então* $\bar{J}$ *satisfaz a condição de Palais-Smale.*

Prova: Seja $(u_n) \subset W_0^{1,\gamma}(\Omega)$ uma sequência (PS), isto é, $\bar{J}(u_n) \to c$ e $\bar{J}'(u_n) \to 0$ em $(W_0^{1,\gamma}(\Omega))^*$, quando $n \to +\infty$. Como $\bar{J}$ é coercivo então (u_n) é limitada, pois caso contrário, teríamos ao menos de uma subsequência com $\|u_n\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} \to +\infty$ e da coercividade do funcional teríamos $\bar{J}(u_n) \to +\infty$ o que contradiz $\bar{J}(u_n) \to c$. Como $W_0^{1,\gamma}(\Omega)$ é reflexivo e (u_n) é limitada, existe subsequência (u_{n_k}) de (u_n) satisfazendo, quando $k \to +\infty$,

$$u_{n_k} \rightharpoonup u \quad \text{em} \quad W_0^{1,\gamma}(\Omega),$$

$$u_{n_k} \to u \quad \text{em} \quad L^l(\Omega), \ \text{ para todo } l \in [1,\gamma^*),$$

$$\int_\Omega |\nabla u_{n_k}|^\gamma \to t_0 \geq 0 \quad \text{em } \mathbb{R}.$$

Também $\bar{J}'(u_{n_k}) \to 0$ em $(W_0^{1,\gamma}(\Omega))^*$, quando $k \to +\infty$, e como (u_{n_k}) é limitada então

$$\begin{aligned} M(\mathcal{A}(u_{n_k}))\int_\Omega a(|\nabla u_{n_k}|^p)|\nabla u_{n_k}|^{p-2}\nabla u_{n_k}\nabla(u_{n_k}-u)dx - \lambda\int_\Omega f(x,u_{n_k})(u_{n_k}-u)dx \\ -\phi'\Big(\|u_{n_k}\|^\gamma_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)}\Big)\frac{\gamma}{s}\int_\Omega |u_{n_k}|^s dx \int_\Omega |\nabla u_{n_k}|^{\gamma-2}\nabla u_{n_k}\nabla(u_{n_k}-u)dx \\ -\phi\Big(\|u_{n_k}\|^\gamma_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)}\Big)\int_\Omega |u_{n_k}|^{s-2}u_{n_k}(u_{n_k}-u)dx = o_k(1). \end{aligned} \tag{1.17}$$

Por $(f_1)-(f_2)$, $\gamma < s < \gamma^*$ e de desigualdade de Hölder tem-se

$$\int_\Omega f(x,u_{n_k})(u_{n_k}-u)dx \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{e} \qquad \int_\Omega |u_{n_k}|^{s-2}u_{n_k}(u_{n_k}-u)dx \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{1.18}$$

Se $t_0 = 0$ então $u_{n_k} \rightharpoonup 0$ e daí $u = 0$. Teríamos assim $u_{n_k} \to 0$ fortemente em $W_0^{1,\gamma}(\Omega)$, quando $k \to +\infty$ e a condição (PS) estaria verificada. Assumiremos que $t_0 > 0$, segue de (1.14) e (1.17) − (1.18) que, quando $k \to +\infty$,

$$M(\mathcal{A}(u_{n_k})) \int_\Omega a(|\nabla u_{n_k}|^p)|\nabla u_{n_k}|^{p-2}\nabla u_{n_k}\nabla(u_{n_k} - u)dx$$
$$-\phi'\Big(\|u_{n_k}\|^\gamma_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)}\Big)\frac{\gamma}{s}\int_\Omega |u_{n_k}|^s dx \int_\Omega |\nabla u_{n_k}|^{\gamma-2}\nabla u_{n_k}\nabla(u_{n_k} - u)dx = o_k(1).$$

Equivalentemente,

$$\int_\Omega \alpha_k a(|\nabla u_{n_k}|^p)|\nabla u_{n_k}|^{p-2}\nabla u_{n_k}\nabla(u_{n_k} - u)dx + \int_\Omega \beta_k |\nabla u_{n_k}|^{\gamma-2}\nabla u_{n_k}\nabla(u_{n_k} - u)dx = o_k(1),$$

sendo

$$\alpha_k \doteq M(\mathcal{A}(u_{n_k})) \qquad \text{e} \qquad \beta_k \doteq -\phi'\Big(\|u_{n_k}\|^\gamma_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)}\Big)\frac{\gamma}{s}\int_\Omega |u_{n_k}|^s dx, \tag{1.19}$$

com $\alpha_k > 0$ e $\beta_k \geq 0$. Como

$$\varphi \mapsto \int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\varphi dx \qquad \text{e} \qquad \varphi \mapsto \int_\Omega |\nabla u|^{\gamma-2}\nabla u\nabla\varphi dx$$

são funcionais lineares e contínuos em $W_0^{1,\gamma}(\Omega)$ e $u_{n_k} \rightharpoonup u$ então

$$\int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla(u_{n_k} - u)dx = o_k(1) \quad \text{e} \quad \int_\Omega |\nabla u|^{\gamma-2}\nabla u\nabla(u_{n_k} - u)dx = o_k(1).$$

Logo,

$$\int_\Omega \alpha_k \Big[\big(a(|\nabla u_{n_k}|^p)\,|\nabla u_{n_k}|^{p-2}\nabla u_{n_k} - a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u\big)\big(\nabla u_{n_k} - \nabla u\big)\Big]dx$$
$$+ \int_\Omega \beta_k \Big[|\nabla u_{n_k}|^{\gamma-2}\nabla u_{n_k} - |\nabla u|^{\gamma-2}\nabla u\big)\big(\nabla u_{n_k} - \nabla u\big)\Big]dx = o_k(1). \tag{1.20}$$

De (1.20) e do Lema 1.2 resulta que

$$\int_\Omega \Big[\big(a(|\nabla u_{n_k}|^p)|\nabla u_{n_k}|^{p-2}\nabla u_{n_k} - a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u\big)\big(\nabla u_{n_k} - \nabla u\big)\Big]dx = o_k(1). \tag{1.21}$$

Note que se $p \geq 2$ ou $1 < p < 2$ e $q \geq 2$, por (1.21) e Lema 1.2$(i), (iii)$ resulta que $\||\nabla u_{n_k} - \nabla u|\|_{L^\gamma(\Omega)} \to 0$, quando $k \to +\infty$, então $u_{n_k} \to u$ em $W_0^{1,\gamma}(\Omega)$. Finalmente, suponha $1 < p < q < 2$. Por (1.21) e Lema 1.2(ii) tem-se

$$\lim_{k\to+\infty} \int_\Omega \sigma(x)|\nabla u_{n_k} - \nabla u|^2 dx = 0, \tag{1.22}$$

sendo $\sigma(x) = \min\{k_0, k_2\}(p-1)(|\nabla u_{n_k}| + |\nabla u|)^{\gamma-2}$. Usando desigualdade de Hölder com os expoentes conjugados $\frac{2}{\gamma}$ e $\frac{2}{2-\gamma}$ em (1.22) segue que

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla u_{n_k} - \nabla u|^\gamma dx &\leq \left[\int_\Omega \left(\sigma(x)^{-\frac{\gamma}{2}}\right)^{\frac{2}{2-\gamma}} dx\right]^{\frac{2-\gamma}{2}} \left[\int_\Omega \left(\sigma(x)^{\frac{\gamma}{2}} |\nabla u_{n_k} - \nabla u|^\gamma\right)^{\frac{2}{\gamma}} dx\right]^{\frac{\gamma}{2}} \\ &= \|\sigma^{\frac{1}{\gamma-2}}\|_{L^\gamma(\Omega)}^{\frac{\gamma(2-\gamma)}{2}} \left[\int_\Omega \sigma(x)|\nabla u_{n_k} - \nabla u|^2 dx\right]^{\frac{\gamma}{2}} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

Portanto $u_{n_k} \to u$ em $W_0^{1,\gamma}(\Omega)$, quando $k \to +\infty$, e o lema está provado. $\square$

Lema 1.5 *Assuma* $1 < r < \gamma < s < \gamma^*$, (a_1) *e* $(f_1) - (f_2)$. *Para cada* $k \in \mathbb{N}$ *existe subespaço linear* k*-dimensional* X_k *de* $W_0^{1,\gamma}(\Omega)$ *e* $\rho_k > 0$ *verificando* $\sup\limits_{X_k \cap S_{\rho_k}} \bar{J} < 0$, *sendo* $S_\rho = \{u \in W_0^{1,\gamma}(\Omega) \,:\, \|u\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} = \rho\}$.

Prova: Dado $k \in \mathbb{N}$ escolha subespaço linear k-dimensional X_k de $W_0^{1,\gamma}(\Omega)$. Pela equivalência das normas em espaços de dimensão finita existe constante $\tilde{c}(k) > 0$ verificando

$$\tilde{c}(k)\|u\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)}^r \leq \frac{a_1}{r}\int_\Omega |u|^r dx, \qquad \forall u \in X_k. \tag{1.23}$$

Por (1.23) e $(f_1) - (f_2)$ tem-se

$$\int_\Omega F(x,u)dx \geq \frac{a_1}{r}\int_\Omega |u|^r dx \geq \tilde{c}(k)\|u\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)}^r, \qquad \forall u \in X_k.$$

Usando (a_1) podemos encontrar constantes $c_1(k), c_2(k) > 0$ satisfazendo, para todo $u \in X_k$ com $\|u\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} \leq 1$,

$$\mathcal{A}(u) \leq \frac{k_1 c_1(k)}{p} + \frac{k_3 c_2(k)}{q} \doteq \theta(k)$$

e

$$\mathcal{M}(\mathcal{A}(u)) \leq \frac{ck_1c_1(k)}{p}\|u\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)}^p + \frac{ck_3c_2(k)}{q}\|u\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)}^q,$$

sendo $c = \sup\limits_{t\in[0,\theta(k)]} \mathcal{M}(t)$. Das informações precedentes e considerando

$$\rho_k = \min\left\{1, \left(\frac{\lambda\tilde{c}(k)}{\frac{2ck_1c_1(k)}{p} + \frac{2ck_3c_2(k)}{q}}\right)^{\frac{1}{p-r}}\right\},$$

temos para todo $u \in S_{\rho_k} \cap X_k$:

$$
\begin{aligned}
\bar{J}(u) &= \mathcal{M}(\mathcal{A}(u)) - \lambda \int_\Omega F(x,u)dx - \phi\Big(\|u\|^\gamma_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)}\Big)\frac{1}{s}\int_\Omega |u|^s dx \\
&\leq \mathcal{M}(\mathcal{A}(u)) - \lambda \tilde{c}(k)\|u\|^r_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} \\
&\leq \frac{ck_1c_1(k)}{p}\|u\|^p_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} + \frac{ck_3c_2(k)}{q}\|u\|^q_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} - \lambda\tilde{c}(k)\|u\|^r_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} \\
&\leq \rho_k^r\left(\left(\frac{ck_1c_1(k)}{p} + \frac{ck_3c_2(k)}{q}\right)\rho_k^{p-r} - \lambda\tilde{c}(k)\right) \\
&\leq -\frac{\rho_k^r\lambda\tilde{c}(k)}{2}.
\end{aligned}
$$

Portanto $\sup\limits_{S_{\rho_k}\cap X_k} \bar{J}(u) \leq -\dfrac{\rho_k^r\lambda\tilde{c}(k)}{2} < 0$ e o lema está provado. □

Demonstração do Teorema 1.1: Pelos Lemas 1.3 e 1.4 o funcional $\bar{J}$ em (1.13) satisfaz: $\bar{J}$ é limitado inferiormente (posto que $\bar{J}$ é coercivo) e $\bar{J}$ satisfaz a condição (PS). Além disso, $\bar{J}(0) = 0$ e $\bar{J}(0)$ é par (isto segue do fato que f é ímpar na segunda variável então F é par e consequentemente $\bar{J}$ é par). Assim, juntamente com o Lema 1.5 estamos em condições de aplicarmos o Teorema 1.1 de [38]. Dessa forma, obtemos uma sequência (u_k) de pontos críticos de $\bar{J}$ (portanto de soluções fracas de (1.1)) satisfazendo $\|u_k\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} \to 0$, quando $k \to +\infty$.

Resta-nos provar que uma infinidade de pontos críticos de $\bar{J}$ com norma pequena também são pontos críticos de J. Como u_{n_k} é ponto crítico de $\bar{J}$ para cada $k \in \mathbb{N}$, então

$$
\langle \bar{J}'(u_{n_k}), v\rangle = 0 \text{ para todo } v \in W_0^{1,\gamma}(\Omega). \tag{1.24}
$$

De (1.24) temos

$$
\begin{aligned}
0 = M(\mathcal{A}(u_{n_k}))\int_\Omega a(|\nabla u_{n_k}|^p)|\nabla u_{n_k}|^{p-2}\nabla u_{n_k}\nabla v dx - \lambda\int_\Omega f(x,u_{n_k})v dx \\
-\phi'\Big(\|u_{n_k}\|^\gamma_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)}\Big)\frac{\gamma}{s}\int_\Omega |u_{n_k}|^s dx \int_\Omega |\nabla u_{n_k}|^{\gamma-2}\nabla u_{n_k}\nabla v dx \\
-\phi\big(\|u_{n_k}\|^\gamma_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)}\big)\int_\Omega |u_{n_k}|^{s-2}u_{n_k} v dx.
\end{aligned}
$$

Como $\|u_{n_k}\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} \to 0$ quando $k \to +\infty$ então existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq k_0$ tem-se $\|u_{n_k}\|^\gamma_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} < \frac{1}{2}$ e por (1.14) resulta que $\phi(\|u_{n_k}\|^\gamma_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)}) = 1$ e $\phi'(\|u_{n_k}\|^\gamma_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)}) = 0$. Logo, obtemos

$$
\begin{aligned}
0 = M(\mathcal{A}(u_{n_k}))\int_\Omega a(|\nabla u_{n_k}|^p)|\nabla u_{n_k}|^{p-2}\nabla u_{n_k}\nabla v dx - \lambda\int_\Omega f(x,u_{n_k})v dx \\
-\int_\Omega |u_{n_k}|^{s-2}u_{n_k} v dx = \langle J'(u_{n_k}), v\rangle,
\end{aligned}
$$

para todo $v \in W_0^{1,\gamma}(\Omega)$. Portanto, u_{n_k} é ponto crítico de J para cada $k \geq k_0$. E $J(u_{n_k}) = J(\bar{u}_{n_k}) \leq 0$, o que finaliza a prova. □

1.3 Infinitas soluções de energia positiva

O objetivo dessa seção é demonstrar o Teorema 1.2. Para tal utilizaremos a versão do teorema do passo da montanha simétrico de [4, 48] (cf. Teorema 5.1 do Capítulo 5 deste trabalho).

Lema 1.6 *Suponha* $(a_1) - (a_2), (f_1) - (f_2)$, (M_1) *e* (M_4). *Seja* J *o funcional de energia dado por* (1.4). *Então* J *satisfaz a condição de Palais-Smale.*

Prova: Seja $(u_n) \subset W_0^{1,\gamma}(\Omega)$ sequência de Palais-Smale, isto é, $J(u_n) \to c$, $c \in \mathbb{R}$, e $J'(u_n) \to 0$ em $(W_0^{1,\gamma}(\Omega))^*$, quando $n \to +\infty$. Suponha, por contradição, (u_n) não seja limitada, isto é, existe subsequência (u_{n_k}) satisfazendo $||u_{n_k}||_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} \to +\infty$, quando $k \to +\infty$.
Observe que por (a_1) existem constantes $c_1, c_2 > 0$ verificando

$$c_1 \mathcal{A}(u_{n_k})^{\frac{1}{\gamma}} \leq \|u_{n_k}\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} \leq c_2 \mathcal{A}(u_{n_k})^{\frac{1}{\gamma}}. \tag{1.25}$$

Para $\gamma < \theta < s$ dado em (M_4) tem-se

$$\begin{aligned}\theta J(u_{n_k}) - \langle J'(u_{n_k}), u_{n_k}\rangle &= \theta \mathcal{M}(\mathcal{A}(u_{n_k})) - M(\mathcal{A}(u_{n_k})) \int_\Omega a(|\nabla u_{n_k}|^p)|\nabla u_{n_k}|^p dx \\ &+ \lambda \int_\Omega \Big[f(x, u_{n_k})u_{n_k} - \theta F(x, u_{n_k})\Big] dx + \left[1 - \frac{\theta}{s}\right] \int_\Omega |u_{n_k}|^s dx. \end{aligned} \tag{1.26}$$

De (a_1) obtemos

$$-M(\mathcal{A}(u_{n_k})) \int_\Omega a(|\nabla u_{n_k}|^p)|\nabla u_{n_k}|^p dx \geq -c(\gamma) M(\mathcal{A}(u_{n_k}))\mathcal{A}(u_{n_k}),$$

sendo $c(\gamma)$ dado por (1.3). Além disso, por $(f_1) - (f_2)$ existe constante $c > 0$ verificando

$$\lambda\big[f(x,t)t - \theta F(x,t)\big] + \left[1 - \frac{\theta}{s}\right] |t|^s \geq -c, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Combinando as informações anteriores e (1.26) obtemos

$$\theta J(u_{n_k}) - \langle J'(u_{n_k}), u_{n_k}\rangle \;\geq\; \theta \mathcal{M}(\mathcal{A}(u_{n_k})) - c(\gamma) M(\mathcal{A}(u_{n_k}))\mathcal{A}(u_{n_k}) - c|\Omega|,$$

e então

$$c|\Omega| + \theta J(u_{n_k}) + \epsilon_k \|u_{n_k}\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} \geq \theta \mathcal{M}(\mathcal{A}(u_{n_k})) - c(\gamma) M(\mathcal{A}(u_{n_k}))\mathcal{A}(u_{n_k}), \tag{1.27}$$

sendo $\epsilon_k \to 0$, quando $k \to +\infty$. Portanto de (1.25) e (1.27) tem-se

$$\begin{aligned} o_k(1) &\geq \frac{1}{\|u_{n_k}\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)}}\Big(\theta\mathcal{M}(\mathcal{A}(u_{n_k})) - c(\gamma)M(\mathcal{A}(u_{n_k}))\mathcal{A}(u_{n_k})\Big) \\ &\geq \frac{\theta\mathcal{M}(\mathcal{A}(u_{n_k})) - c(\gamma)M(\mathcal{A}(u_{n_k}))\mathcal{A}(u_{n_k})}{c_2\,\mathcal{A}(u_{n_k})^{\frac{1}{\gamma}}}. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{\theta\mathcal{M}(\mathcal{A}(u_{n_k})) - c(\gamma)M(\mathcal{A}(u_{n_k}))\mathcal{A}(u_{n_k})}{\mathcal{A}(u_{n_k})^{\frac{1}{\gamma}}} \leq 0,$$

o que é impossível por (M_4). Portanto (u_n) é limitada. Como $W_0^{1,\gamma}(\Omega)$ é reflexivo e (u_n) é limitada então existe subsequência (u_{n_k}) de (u_n) satisfazendo, quando $k \to +\infty$,

$u_{n_k} \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,\gamma}(\Omega)$,

$u_{n_k} \to u$ em $L^l(\Omega)$, para todo $l \in [1, \gamma^*)$,

$\int_\Omega |\nabla u_{n_k}|^\gamma \to t_0 \geq 0$ em $\mathbb{R}$.

Também $J'(u_{n_k}) \to 0$ em $(W_0^{1,\gamma}(\Omega))^*$, quando $k \to +\infty$, e como (u_{n_k}) é limitada então

$$\begin{aligned} M(\mathcal{A}(u_{n_k}))\int_\Omega a(|\nabla u_{n_k}|^p)|\nabla u_{n_k}|^{p-2}\nabla u_{n_k}\nabla(u_{n_k}-u)dx - \lambda\int_\Omega f(x,u_{n_k})(u_{n_k}-u)dx& \\ - \int_\Omega |u_{n_k}|^{s-2}u_{n_k}(u_{n_k}-u)dx = o_k(1).& \quad (1.28) \end{aligned}$$

Por $(f_1) - (f_2)$ e como $\gamma < s < \gamma^*$, da desigualdade de Hölder tem-se

$$\int_\Omega f(x,u_{n_k})(u_{n_k}-u)dx \stackrel{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{e} \qquad \int_\Omega |u_{n_k}|^{s-2}u_{n_k}(u_{n_k}-u)dx \stackrel{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \quad (1.29)$$

Se $t_0 = 0$ então $u_{n_k} \to 0$ em $W_0^{1,\gamma}(\Omega)$, quando $k \to +\infty$ para tal basta argumentar como no Lema 1.4. Assumiremos que $t_0 > 0$. Segue de (1.28) e (1.29) que, quando $k \to +\infty$,

$$M(\mathcal{A}(u_{n_k}))\int_\Omega a(|\nabla u_{n_k}|^p)|\nabla u_{n_k}|^{p-2}\nabla u_{n_k}\nabla(u_{n_k}-u)dx = o_k(1),$$

o que implica que

$$\int_\Omega a(|\nabla u_{n_k}|^p)|\nabla u_{n_k}|^{p-2}\nabla u_{n_k}\nabla(u_{n_k}-u)dx = o_k(1),$$

já que $M(t_0) > 0$. Como

$$\varphi \mapsto \int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\varphi dx$$

é um funcional linear e contínuo em $W_0^{1,\gamma}(\Omega)$ então

$$\int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla(u_{n_k}-u)dx = o_k(1).$$

Logo,

$$\int_\Omega \Big[a(|\nabla u_{n_k}|^p)\nabla u_{n_k}|^{p-2}\nabla u_{n_k} - a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u\big)\big(\nabla u_{n_k}-\nabla u\big)\Big]dx = o_k(1). \quad (1.30)$$

Agora aplicando o Lema 1.2 em (1.30) e argumentando como o Lema 1.4 conclui-se que $u_{n_k} \to u$ em $W_0^{1,\gamma}(\Omega)$, quando $k \to +\infty$, e o lema está provado. $\square$

Os próximos dois lemas têm a finalidade de mostrar que a geometria do passo da montanha na versão simétrica é satisfeita.

Lema 1.7 *Suponha* $1 < r < \gamma < s < \gamma^*$, (a_1), $(f_1)-(f_2)$ *e* (M_3'). *Então para* $\lambda > 0$ *suficientemente pequeno existem* $\alpha, \rho > 0$ *verificando* $J(u) \geq \alpha$ *se* $\|u\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} = \rho$.

Prova: Usando a estimativa (1.25) para u, $(f_1)-(f_2), (M_3')$ e o teorema de imersão de Sobolev tem-se

$$\begin{aligned} J(u) &= \mathcal{M}(\mathcal{A}(u)) - \lambda\int_\Omega F(x,u)dx - \frac{1}{s}\int_\Omega |u|^s dx \\ &\geq \tilde{n}_0\mathcal{A}(u) + \frac{\tilde{n}_1}{\sigma}\mathcal{A}(u)^\sigma - \frac{\lambda\tilde{c}_3}{r}\|u\|^r_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} - \frac{\tilde{c}_4}{s}\|u\|^s_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} \\ &\geq \tilde{n}_0\tilde{c}_1\|u\|^\gamma_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} + \tilde{n}_1\tilde{c}_2\|u\|^{\sigma\gamma}_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} - \frac{\lambda\tilde{c}_3}{r}\|u\|^r_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} - \frac{\tilde{c}_4}{s}\|u\|^s_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)}, \end{aligned}$$

sendo $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{c}_3, \tilde{c}_4 > 0$ e $\tilde{n}_0, \tilde{n}_1 \geq 0$ com $\tilde{n}_0 + \tilde{n}_1 > 0$ são constantes. Isto é, para todo $u \in W_0^{1,\gamma}(\Omega)$ obtemos

$$J(u) \geq \|u\|^r_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)}\left[\tilde{n}_0\tilde{c}_1\|u\|^{\gamma-r}_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} + \tilde{n}_1\tilde{c}_2\|u\|^{\sigma\gamma-r}_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} - \frac{\lambda\tilde{c}_3}{r} - \frac{\tilde{c}_4}{s}\|u\|^{s-r}_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)}\right]. \quad (1.31)$$

Se $\tilde{n}_0 > 0$ escolhendo $0 < \rho < \left(\dfrac{\tilde{n}_0\tilde{c}_1 s}{\tilde{c}_4}\right)^{\frac{1}{s-\gamma}}$ tem-se $\eta(\rho) \doteq \tilde{n}_0\tilde{c}_1\rho^{\gamma-r} - \dfrac{\tilde{c}_4}{s}\rho^{s-r} > 0$. Então para todo $0 < \lambda < \dfrac{\eta(\rho)r}{\tilde{c}_3}$, conclui por (1.31) que

$$J(u) \geq \rho^r\left[\eta(\rho) - \frac{\lambda\tilde{c}_3}{r}\right] > 0,$$

quando $\|u\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} = \rho$.

Agora se $\tilde{n}_0 = 0$ escolhendo $0 < \rho < \left(\frac{\tilde{n}_1\tilde{c}_2 s}{\tilde{c}_4}\right)^{\frac{1}{s-\sigma\gamma}}$ temos $\eta(\rho) \doteq \tilde{n}_1\tilde{c}_2\rho^{\sigma\gamma - r} - \frac{\tilde{c}_4}{s}\rho^{s-r} > 0$. Então para todo $0 < \lambda < \frac{\eta(\rho)r}{\tilde{c}_3}$, obtemos (1.31)

$$J(u) \geq \rho^r \left[\eta(\rho) - \frac{\lambda\tilde{c}_3}{r}\right] > 0,$$

quando $\|u\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} = \rho$. Portanto, o lema está provado. □

Lema 1.8 *Assuma* $1 < r < \gamma < s < \gamma^*$, (a_1), $(f_1) - (f_2)$ *e* (M_2'). *Para todo subespaço linear de dimensão finita* $Z \subset W_0^{1,\gamma}(\Omega)$ *existe* $\zeta = \zeta(Z) > 0$ *de modo que* $J(u) \leq 0$ *quando* $\|u\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} \geq \zeta$.

Prova: Usando a estimativa (1.25) para u, $(f_1) - (f_2)$, (M_2') e equivalência de normas em espaço linear de dimensão finita, temos

$$\begin{aligned} J(u) &= \mathcal{M}(\mathcal{A}(u)) - \lambda\int_\Omega F(x,u)dx - \frac{1}{s}\int_\Omega |u|^s dx \\ &\leq m_0\mathcal{A}(u) + \frac{\tilde{m}}{\mu}\mathcal{A}(u)^\mu - \frac{\lambda a_1 c_1}{r}\|u\|^r_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} - \frac{c_2}{s}\|u\|^s_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} \\ &\leq \frac{m_0}{\tilde{c}_1}\|u\|^\gamma_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} + \frac{\tilde{m}}{\tilde{c}_2}\|u\|^{\mu\gamma}_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} - \frac{\lambda a_1 c_1}{r}\|u\|^r_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} - \frac{c_2}{s}\|u\|^s_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)}, \end{aligned}$$

sendo $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, c_1, c_2 > 0$ são constantes que independem de u. Portanto,

$$\frac{J(u)}{\|u\|^s_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)}} \leq o(1) - \frac{c_2}{s},$$

quando $\|u\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} \to +\infty$, uma vez que, $\mu\gamma < s$ e $r < \gamma < s$. Logo,

$$\limsup_{\|u\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} \to +\infty} \frac{J(u)}{\|u\|^s_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)}} < 0,$$

o que implica que $J(u) < 0$ para $\|u\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)}$ suficientemente grande e a prova está completa. □

Demonstração do Teorema 1.2: Como f é ímpar na segunda variável então F é par e podemos concluir que J é par. Pelos Lemas 1.6 , 1.7 e 1.8 temos que todas as hipóteses do teorema do passo da montanha simétrico (ver [4] Teorema 2.8 e Corolário 2.9 e [48] Teorema 1.9 ou Teorema 5.1 do Capítulo 5 deste trabalho), são satisfeitas. Portanto, existe uma sequência $(w_j) \subset W_0^{1,\gamma}(\Omega)$ de pontos críticos de J dado por (1.4), nas quais são soluções fracas de (1.1), satisfazendo $J(w_j) \to +\infty$, quando $j \to +\infty$. Como J é limitado sobre conjuntos limitados em $W_0^{1,\gamma}(\Omega)$ temos que $\|w_j\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} \to +\infty$, quando $j \to +\infty$, e o teorema está provado. □

1.4 Múltiplas soluções positivas

Nesta seção o objetivo é provar o Teorema 1.3, para isto introduziremos o seguinte funcional de energia

$$J_+(u) = \mathcal{M}(\mathcal{A}(u)) - \lambda \int_\Omega F(x, u^+)dx - \frac{1}{s}\int_\Omega |u^+|^s dx, \tag{1.32}$$

sendo $u^+ = \max\{u, 0\}$ a parte positiva de u. As hipóteses sobre a, f, M no início do capítulo nos garante $J_+ \in C^1(W_0^{1,\gamma}(\Omega), \mathbb{R})$, com derivada de Fréchet em $u \in W_0^{1,\gamma}(\Omega)$ dada por

$$\begin{aligned}\langle J'_+(u), \varphi\rangle = M(\mathcal{A}(u)) \int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla \varphi dx - \lambda \int_\Omega f(x, u^+)\varphi dx \\ - \int_\Omega (u^+)^{s-1}\varphi dx,\end{aligned} \tag{1.33}$$

para todo $\varphi \in W_0^{1,\gamma}(\Omega)$. Então os pontos críticos u de (1.32) são soluções fracas não negativas de (1.1). De fato, se $u \neq 0$ é ponto crítico de (1.32) então testando $\varphi = u^-$ em (1.33) temos

$$M(\mathcal{A}(u)) \int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla u^- dx - \lambda \int_\Omega f(x, u^+)u^- dx - \int_\Omega (u^+)^{s-1}u^- dx = 0$$

Mas,

$$\int_\Omega f(x, u^+)u^- dx = 0 \qquad \text{e} \qquad \int_\Omega (u^+)^{s-1}u^- dx = 0$$

então obtemos

$$M(\mathcal{A}(u)) \int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u^-|^p dx = 0,$$

donde segue que $\int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u^-|^p dx = 0$, já que $M(\mathcal{A}(u)) > 0$ para $u \neq 0$. Agora usando (a_1), obtemos que $\|u^-\|^\gamma_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} = 0$, isto é, $u = u^+$. Portanto, $u \geq 0$.

Introduziremos duas hipóteses adicionais sobre a função $a(\cdot)$ no campo vetorial $\mathbb{R}^N \ni y \longmapsto a(|y|^p)|y|^{p-2}y \in \mathbb{R}^N$ com o objetivo de obter mais regularidade para as soluções de (1.1). Seja $g \in C^1(0, +\infty)$, com $g(t) > 0$ para $t > 0$, satisfazendo

$$0 < c_0 \leq \frac{tg'(t)}{g(t)} \leq c_1 \quad \text{e} \quad c_2 t^{\gamma-1} \leq g(t) \leq c_3(1 + t^{\gamma-1}), \qquad \forall t > 0,$$

sendo $c_0, c_1, c_2, c_3 > 0$ constantes. Além de (a_1) e (a_2) assumiremos nesta seção que $a(\cdot)$ satisfaz:

(a_3) Existe $c_4 > 0$ verificando

$$\|D(a(|y|^p)|y|^{p-2}y)\|_{\mathbb{R}^{N^2}} \leq c_4 \frac{g(|y|)}{|y|}, \qquad \forall y \in \mathbb{R}^N \backslash \{0\}.$$

(a_4) $$< D(a(|y|^p)|y|^{p-2}y)\xi, \xi > \geq \frac{g(|y|)}{|y|}|\xi|^2, \qquad \forall y \in \mathbb{R}^N \backslash \{0\}, \ \forall \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Observação 1.3 *As hipóteses* (a_3) *e* (a_4) *são motivadas para que a teoria de regularidade do Lieberman* [39] *possa ser aplicada e garantir que as soluções fracas e limitadas do problema* (1.1) *sejam de classe* $C^{1,\beta}(\Omega)$, *para algum* $\beta > 0$.

Os próximos dois resultados são ingredientes essenciais para aplicarmos o teorema do passo da montanha na versão clássica devido à Ambrosetti Rabinowitz [52], a saber, geometria do passo da montanha e condição (PS).

Lema 1.9 *Suponha* $1 < r < \gamma < s < \gamma^*$, $(a_1), (f_1) - (f_2)$, $(M_2^{'}) - (M_3^{''})$. *Então:*

(i) Existem $\rho, \alpha > 0$ *satisfazendo* $J_+(u) \geq \alpha > 0$ *se* $\|u\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} = \rho$.

(ii) Existe $e \in W_0^{1,\gamma}(\Omega)$ *com* $\|e\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} > \rho$ *e* $J_+(e) < 0$.

Prova: (i) A prova é análoga a prova do Lema 1.7 e será omitida.

(ii) Seja $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ e $t > 0$. De $(M_2^{'})$, (1.25), $(f_1) - (f_2)$ têm-se

$$\begin{aligned} J_+(\varphi t) &= \mathcal{M}(\mathcal{A}(\varphi t)) - \lambda \int_\Omega F(x, (\varphi t)^+)dx - \frac{1}{s}\int_\Omega |(\varphi t)^+|^s dx \\ &\leq m_0 \mathcal{A}\varphi t) + \frac{\tilde{m}}{\mu}\mathcal{A}(\varphi t)^\mu - \frac{\lambda a_1}{r}\int_\Omega |(\varphi t)^+|^r dx - \frac{1}{s}\int_\Omega |(\varphi t)^+|^s dx \\ &\leq \tilde{c}_1 t^\gamma \|\varphi\|^\gamma_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} + \tilde{c}_2 t^{\mu\gamma}\|\varphi\|^{\mu\gamma}_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} - \frac{\lambda a_1 t^r}{r}\int_\Omega |\varphi^+|^r dx - \frac{t^s}{s}\int_\Omega |\varphi^+|^s dx, \end{aligned}$$

sendo $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2 > 0$ constantes que independem de u. Então obtemos $\lim\limits_{t \to +\infty} J_+(\varphi t) = -\infty$, pois $\mu\gamma < s$ e $r < s$, provando (ii). $\square$

Lema 1.10 *Suponha* $(a_1) - (a_2), (M_1), (M_4)$ *e* $(f_1) - (f_2)$. *Então* J_+ *dado por* (1.32) *satisfaz a condição (PS).*

Prova: É análoga a prova do Lema 1.6, observando que se $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,\gamma}(\Omega)$, quando $n \to +\infty$ então $u_n^+ \rightharpoonup u^+$ e $u_n^- \rightharpoonup u^-$ em $W_0^{1,\gamma}(\Omega)$ quando $n \to +\infty$. $\square$

Demonstração do Teorema 1.3: A demonstração será dividida em três passos.

<u>Passo 1</u>: Solução de energia positiva.

Pelos Lemas 1.9 e 1.10 podemos aplicar o teorema do passo da montanha (ver [4, 52]) para obter $u \in W_0^{1,\gamma}(\Omega)$ satisfazendo $J'_+(u) = 0$ (de forma que u é solução fraca de (1.1)) e $J_+(u) \geq \alpha > 0$.

Passo 2: Solução de energia negativa.

Seja $\rho > 0$ como no Lema 1.9 item (i) e considere os conjuntos $\bar{B}_\rho = \{u \in W_0^{1,\gamma}(\Omega) : \|u\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} \leq \rho\}$ e $S_\rho = \partial \bar{B}_\rho$. Temos que $J_+ \in C^1(\bar{B}_\rho, \mathbb{R})$, J_+ é semicontínuo inferiormente e limitado inferiormente $\bar{B}_\rho$.

Afirmação 1: $C_1 \doteq \inf \{J_+(u) : u \in \bar{B}_\rho\} < 0$.

De fato, seja $v \in W_0^{1,\gamma}(\Omega)$ fixado e $t > 0$ então, por (1.25) (com a estimativa para tv), (M_3''), $(f_1) - (f_2)$ e usando o fato que $(tv)^+ = tv^+$, têm-se

$$
\begin{aligned}
J_+(tv) &= \mathcal{M}(\mathcal{A}(tv)) - \lambda \int_\Omega F(x, (tv)^+)dx - \frac{1}{s}\int_\Omega |(tv)^+|^s dx \\
&\leq n_0 \mathcal{A}(tv) + \frac{n_1}{\beta}\mathcal{A}(tv)^\beta - \frac{\lambda a_1}{r}\int_\Omega |(tv)^+|^r dx \\
&\leq \frac{n_0}{\tilde{c}_1} t^\gamma \|v\|^\gamma_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} + \frac{n_1}{\tilde{c}_2} t^{\beta\gamma}\|v\|^{\beta\gamma}_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} - \frac{\lambda a_1 t^r}{r}\int_\Omega |v^+|^r dx \\
&< 0,
\end{aligned}
$$

para t suficientemente pequeno pois $r < \gamma, r < \beta\gamma$ e sendo $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2 > 0$ são constantes que independem de v. Escolhendo t_0 suficientemente pequeno de tal forma que satisfaça $J_+(t_0 v) < 0$ e $\|t_0 v\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} \leq \rho$, segue que existe $e = t_0 v$ com $e \in \bar{B}_\rho$ tal que $J_+(e) < 0$, o que prova a afirmação.

Aplicando o princípio variacional de Ekeland [23] (Teorema 5.4 deste trabalho) obtemos $u_n \in \bar{B}_\rho$ satisfazendo

$$
C_1 \leq J_+(u_n) \leq C_1 + \frac{1}{n}, \tag{1.34}
$$

e

$$
J_+(w) \geq J_+(u_n) - \frac{1}{n}\|u_n - w\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)}, \qquad \forall w \in \bar{B}_\rho. \tag{1.35}
$$

Note que $\|u_n\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} < \rho$ para $n \geq 1$ suficientemente grande. De fato, caso contrário, se $\|u_n\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} = \rho$ para uma quantidade infinita de índices n, sem perda de generalidade, podemos supor que $\|u_n\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} = \rho$ para todo $n \geq 1$ e pelo Lema 1.9 item (i) segue que $J_+(u_n) \geq \alpha > 0$. Tomando $n \to +\infty$, por (1.34) tem-se $0 > C_1 \geq \alpha > 0$, o que é uma contradição

Afirmação 2: $J'_+(u_n) \to 0$ em $(W_0^{1,\gamma}(\Omega))^*$, quando $n \to \infty$.

De fato, seja $u \in W_0^{1,\gamma}(\Omega)$ com $\|u\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} = 1$ fixado. Para cada $n \geq 1$ existe $\delta_n > 0$ tal que $w_n \doteq u_n + \delta_n u$ satisfaz $\|w_n\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} \leq \|u_n\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} + \delta_n < \rho$. Para $0 < t < \delta_n$ obtemos que $u_n + tu \in \bar{B}_\rho$ e de (1.35)

$$\frac{J_+(u_n + tu) - J_+(u_n)}{t} \geq -\frac{1}{n}.$$

Fazendo $t \to 0^+$, tem-se

$$\langle J'_+(u_n), u \rangle \geq -\frac{1}{n} \tag{1.36}$$

Observe que trocando u por $-u$ obtemos

$$\langle J'_+(u_n), u \rangle \leq \frac{1}{n}. \tag{1.37}$$

Então de (1.36) e (1.37), a afirmação 2 segue uma vez que

$$\|J'_+(u_n)\|_{(W_0^{1,\gamma}(\Omega))^*} = \sup_{\|u\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)}=1} |\langle J'_+(u_n), u \rangle| \leq \frac{1}{n} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{1.38}$$

Agora como (u_n) é uma sequência de Palais-Smale no nível C_1 por (1.34) e (1.38) o Lema 1.10 garante a existência de $u \in W_0^{1,\gamma}(\Omega)$ e uma subsequência (u_{n_k}) satisfazendo $u_{n_k} \to u$ em $W_0^{1,\gamma}(\Omega)$, quando $k \to \infty$. Portanto, $J'_+(u) = 0$ (u é solução fraca para (1.1)) e $J_+(u) = C_1 < 0$.

<u>Passo 3</u>: As soluções dos passos anteriores são positivas sobre Ω.

Usando o Teorema 7.1 de [40] podemos concluir que toda solução fraca $u \in W_0^{1,\gamma}(\Omega)$ de (1.1) satisfaz $u \in L^\infty(\Omega)$. Então a teoria de regularidade de [39] garante $u \in C^{1,\beta}(\Omega)$, para algum $\beta > 0$ (ver também Observação 1.3).

Observe que $t \mapsto a(t^p)t^{p-1}$ é estritamente crescente sobre $(0, \infty)$ e $a(t^p)t^{p-1} \to 0$, quando $t \to 0^+$. Além disso,

$$B(x, u) \doteq \frac{\lambda f(x, u) + |u|^{s-1}}{M(\mathcal{A}(u))} \in L^\infty_{loc}(\Omega \times \mathbb{R}^+)$$

e $B(x, u) \geq 0$. Logo, estamos nas condições para aplicar o princípio do máximo de Pucci-Serrin [46] (ver Teorema 5.5 do Apêndice deste trabalho), donde conlui-se que $u(x) > 0$ para todo $x \in \Omega$. $\square$

Capítulo

2

Infinitas soluções para uma classe de problemas não homogêneos e não locais

Neste capítulo vamos estudar a classe de problemas elípticos não locais de seguinte forma

$$\begin{cases} -M(\mathcal{A}(u))\text{div}(a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f(x,u)\left[\displaystyle\int_\Omega F(x,u)\right]^r & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

sendo $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$ um domínio limitado, $1 < p < N$, $r > 0$ é um parâmetro e $F(x,u) = \int_0^u f(x,\tau)d\tau$. A função $a : [0,+\infty) \to (0,+\infty)$ é de classe C^1 e satisfaz (a_1) e (a_2) dados no Capítulo 1.

O espaço na qual trataremos o problema também permanece o mesmo do capítulo anterior, isto é, consideramos o espaço de Sobolev $W_0^{1,\gamma}(\Omega)$ e o muniremos com a seguinte norma:

$$\|u\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^\gamma dx\right)^{\frac{1}{\gamma}},$$

a qual é equivalente a norma usual de $W_0^{1,\gamma}(\Omega)$, sendo $\gamma = (1 - H(k_3))p + H(k_3)q$ dado por (1.2) e $H(k_3)$ como na condição (a_1). (Ver Capítulo 1.)

A seguir daremos o conjunto de hipóteses referente ao primeiro teorema deste capítulo, na qual foi estabelecido existência de infinitas soluçõesde energia negativa convergindo para zero. A principal ferramenta utilizada foi o Teorema 1.1 de [38].

A função $f : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua satisfazendo

(f_1) Existem constantes $a_1, a_2 > 0$ e $s \in (1,\gamma)$ verificando

$$a_1 t^{s-1} \leq f(x,t) \leq a_2 t^{s-1} \text{ para todo } (x,t) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^+.$$

(f_2) $f(x,-t) = -f(x,t)$ para todo $(x,t) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}$.

A função $M : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ satisfaz

(M_1) M é contínua em $(0,+\infty)$ e $M(t) > 0$ para todo $t > 0$.

(M_2) Existem $m_1 > 0$ e $\nu > \dfrac{s(r+1)}{\gamma}$ verificando

$$M(t) \geq m_1 t^{\nu-1} \quad \text{para } t \gg 1.$$

(M_3) Existem $n_0, n_1 \geq 0$ com $n_0 + n_1 > 0$ e $\beta > \dfrac{1}{p}$ satisfazendo

$$M(t) \leq n_0 + n_1 t^{\beta-1} \quad \text{para } 0 < t \ll 1.$$

Observação 2.1 *Vale ressaltar que em virtude das hipóteses $(f_1) - (f_2)$ temos que $F(x,u) \geq 0$, para todo $(x,t) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}$ o que faz o lado direito do problema (2.1) estar bem definido. De fato, como $F(x,u) = \int_0^u f(x,\tau)d\tau$, por (f_2) obtemos via mudança de variável que*

$$F(x,u) = \int_0^u -f(x,-\tau)d\tau = \int_0^{-u} f(x,\xi)d\xi = F(x,-u),$$

que prova que F é par. Logo, por (f_1), $F(x,u) \geq 0$, $\forall (x,u) \in \Omega \times \mathbb{R}$.

Tendo em vista as hipóteses acima podemos enunciar o

Teorema 2.1 *Assuma $s(r+1) < p$, $(a_1) - (a_2)$, $(f_1) - (f_2)$ e $(M_1) - (M_3)$. O problema* (2.1) *possui uma sequência de soluções (u_k), com $u_{n_k} \neq 0$, satisfazendo $J(u_k) \leq 0$, $\|u_k\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} \to 0$, quando $k \to +\infty$, sendo J dado por* (2.3).

Neste teorema também é possível ocorrer casos de funções $M(\cdot)$ não degeneradas (inclusive com singularidade na origem, portanto, descontínua na origem) bem como degeneradas assim como ocorreu nos teoremas do capítulo anterior. Como exemplos de funções $M(\cdot)$ contínuas em $(0,+\infty)$ satisfazendo as hipóteses do Teorema 2.1 podemos mencionar:

- funções limitadas cumprindo $0 < m_0 \leq M(t) \leq m_1$.
- $M(t) = a + bt^k$, com $a, b > 0$ e $k > \max\{1, \nu\}$.
- funções descontínuas e degeneradas na origem como $M(t) = \begin{cases} t^{k-1}, & \text{for } t \neq 0 \\ 0, & \text{for } t = 0 \end{cases}$, sendo $\max\{\beta, \nu\} < k < 1$.
- funções degeneradas como $M(t) = t^{k-1}$, com $k > \max\{\nu, \beta, 1\}$.

O segundo resultado estabelece a existência de uma infinidade de soluções de energia positiva. Neste caso, sobre não linearidade impomos a condição de Ambrosetti-Rabinowtiz, abreviadamente, (AR), na qual é uma condição de superlinearidade no infinito. As hipóteses a cerca do próximo resultado são:

A função $f : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua verificando

(f_1') Existem constantes $a_1, a_2 > 0$ e $s \in (\gamma, \gamma^*)$ satisfazendo

$$a_1 t^{s-1} \leq f(x,t) \leq a_2 t^{s-1} \text{ para todo } (x,t) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^+.$$

(f_2) $f(x,-t) = -f(x,t)$ para todo $(x,t) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}$.

(AR) Existe $\theta > \gamma$ e $M > 0$ satisfazendo

$$0 < \theta F(x,t) \leq t f(x,t), \quad \forall x \in \bar{\Omega}, \quad |t| \geq M.$$

A função $M : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ verifica

(M_1) M é contínua em $(0,+\infty)$ e $M(t) > 0$ para todo $t > 0$.

(M_2') Existem $m_0, \tilde{m} \geq 0$ com $m_0 + \tilde{m} > 0$ e $\mu < \dfrac{s(r+1)}{\gamma}$ verificando

$$M(t) \leq m_0 + \tilde{m} t^{\mu-1} \qquad \text{para } t \gg 1.$$

(M_3') Existem $\tilde{n}_0, \tilde{n}_1, n_0, n_1 \geq 0$ com $\tilde{n}_0 + \tilde{n}_1 > 0$ e $n_0 + n_1 > 0$ satisfazendo

$$\tilde{n}_0 + \tilde{n}_1 t^{\sigma-1} \leq M(t) \leq n_0 + n_1 t^{\beta-1}, \qquad \text{para } 0 < t \ll 1,$$

sendo ou

(i) $\dfrac{1}{p} < \beta \leq \sigma < 1,$

ou

(ii) $\begin{cases} \sigma \geq 1 \\ \beta > \dfrac{1}{p} \end{cases}$ (se $\tilde{n}_0 > 0$) ou $\begin{cases} 1 < \sigma < \dfrac{s(r+1)}{\gamma} \\ \beta > \dfrac{1}{p} \end{cases}$ (se $\tilde{n}_0 = 0$).

(M_4) Existe $\theta(r+1) > \gamma$ satisfazendo

$$\liminf_{t \to +\infty} \frac{\theta(r+1)\mathcal{M}(t) - c(\gamma)M(t)t}{t^{\frac{1}{\gamma}}} > 0,$$

sendo

$$c(\gamma) = \begin{cases} \dfrac{pk_1}{k_0}, & \text{se } H(k_3) = 0, \\ \dfrac{\max\{k_1, k_3\}}{\min\left\{\frac{k_0}{p}, \frac{k_2}{q}\right\}}, & \text{se } H(k_3) = 1. \end{cases} \tag{2.2}$$

O segundo resultado deste capítulo é o

Teorema 2.2 *Suponha* $\gamma < s(r+1)$, $(a_1)-(a_2)$, (M_1), $(M_2')-(M_3')$, (M_4) *e* $(f_1)-(f_2)$. *Então, para* $0 < r < \dfrac{1}{s}$ *o problema* (2.1) *possui uma infinidade de soluções* (w_j) *satisfazendo* $J(w_j) \to +\infty$, *quando* $j \to +\infty$ *(com* J *dado por (2.3)).*

Como exemplos de funções $M(\cdot)$ contínuas em $(0,+\infty)$ satisfazendo as hipóteses do Teorema 2.2 podemos mencionar:

- funções limitadas cumprindo $0 < m_0 \leq M(t) \leq m_1$.
- $M(t) = a + bt^k$, com $a, b > 0$ e $1 < k < \dfrac{s(r+1)}{\gamma}$.
- funções singulares na origem como

$$M(t) = \begin{cases} t^{k-1}, & \text{para } t \neq 0 \text{ com } \dfrac{1}{p} < k < 1 \\ \\ 0, & \text{para } t = 0 \end{cases}.$$

- funções degeneradas como $M(t) = t^{k-1}$, com $1 < k < \dfrac{s(r+1)}{\gamma}$.

Em todos os casos acima consideramos, em particular, $c(\gamma)$ dado em (2.2) como sendo γ. Isto é possível, por exemplo, quando $k_i = 1$ para todo $i = 0, 1$ se $\gamma = p$ e $i = 0, 1, 2, 3$ se $\gamma = q$.

2.1 Formulação Variacional

Associamos ao problema (2.1) o funcional energia $J : W_0^{1,\gamma}(\Omega) \to \mathbb{R}$, dado por:

$$J(u) = \mathcal{M}(\mathcal{A}(u)) - \frac{1}{r+1}\left[\int_\Omega F(x,u)dx\right]^{r+1}, \tag{2.3}$$

sendo $\mathcal{M}(t) = \displaystyle\int_0^t M(\tau)d\tau$ e $F(x,u) = \displaystyle\int_0^u f(x,\tau)d\tau$.

Das hipóteses em relação a a, f e M segue que $J \in C^1(W_0^{1,\gamma}(\Omega), \mathbb{R})$ e sua derivada de Fréchet é:

$$\langle J'(u), v\rangle = M(\mathcal{A}(u))\int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v dx - \left[\int_\Omega F(x,u)dx\right]^r \int_\Omega f(x,u)v dx,$$

para todo $u, v \in W_0^{1,\gamma}(\Omega)$, sendo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota a dualidade entre $(W_0^{1,\gamma}(\Omega))^*$ e $W_0^{1,\gamma}(\Omega)$.

Observação 2.2 *Vale ressaltar que o Lema 1.1 a respeito da diferenciabilidade na origem do funcional $\mathcal{M}(\mathcal{A}(u))$ permanece válido neste capítulo. Além disso, o funcional*

$$J_2(u) = \frac{1}{r+1}\left[\int_\Omega F(x,u)dx\right]^{r+1}$$

que aparece em (2.3), é obtido como a composição da função $h(s) = \dfrac{1}{r+1}s^{r+1}$ com $\tilde{J}_2(u) = \displaystyle\int_\Omega F(x,u)dx$. Logo, pela Regra da Cadeia (vide Proposição 5.2) temos

$$\langle J_2'(u), v\rangle = \left[\int_\Omega F(x,u)dx\right]^{r}\int_\Omega f(x,u)vdx,\ \forall v \in W_0^{1,\gamma}(\Omega).$$

2.2 Demonstração do Teorema 2.1

O objetivo desta seção é demonstrar o Teorema 2.1 que garante a existência de uma infinidade de soluções de energia negativa convergindo para zero.

Lema 2.1 *Suponha* $(a_1), (M_2), (f_1)$ *e* (f_2). *Então J dado por* (2.3) *é coercivo.*

Prova: De (a_1), (M_2), $(f_1) - (f_2)$ e da imersão de Sobolev, tem-se

$$\begin{aligned}
J(u) &= \mathcal{M}(\mathcal{A}(u)) - \frac{1}{r+1}\left[\int_\Omega F(x,u)dx\right]^{r+1}\\
&\geq \frac{m_1}{\nu}(\mathcal{A}(u))^\nu - \frac{1}{r+1}\left[\frac{a_2}{s}\int_\Omega |u|^s dx\right]^{r+1}\\
&\geq \frac{m_1}{\nu}\left(\frac{k_0}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx + \frac{k_2 H(k_3)}{q}\int_\Omega |\nabla u|^q dx\right)^\nu - \frac{1}{r+1}\left(\frac{a_2}{s}\right)^{r+1} c_1\|u\|^{s(r+1)}_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)}\\
&\geq c\|u\|^{\nu\gamma}_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} - \frac{1}{r+1}\left(\frac{a_2}{s}\right)^{r+1} c_1\|u\|^{s(r+1)}_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)}\\
&= \|u\|^{s(r+1)}_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)}\left(c\|u\|^{\nu\gamma - s(r+1)}_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} - \frac{c_1}{r+1}\left(\frac{a_2}{r+1}\right)^{r+1}\right)
\end{aligned}$$

sendo $c = \dfrac{m_1 k_0^\nu}{\nu p^\nu}$ se $H(k_3) = 0$ ou $c = \dfrac{m_1 k_2^\nu}{q^\nu \nu}$ se $H(k_3) = 1$ e $c, c_1 > 0$ constantes que não dependem de u.

Como $s(r+1) < \nu\gamma$ então $\displaystyle\lim_{\|u\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} \to +\infty} J(u) = +\infty$, o que prova que J é coercivo. $\square$

Lema 2.2 *Suponha* $(a_1) - (a_2), (M_1)$ *e* $(f_1) - (f_2)$. *Então o funcional energia J, dado por* (2.3), *satisfaz a condição de Palais-Smale.*

Prova: Seja $(u_n) \subset W_0^{1,\gamma}(\Omega)$ uma sequência de Palais-Smale no nível c, isto é, $J(u_n) \to c$ em $\mathbb{R}$ para todo $c \in \mathbb{R}$ e $J'(u_n) \to 0$ em $(W_0^{1,\gamma}(\Omega))^*$ quando $n \to +\infty$. Como J é coercivo temos que $(u_n) \subset W_0^{1,\gamma}(\Omega)$ é limitada.

Como $W_0^{1,\gamma}(\Omega)$ é reflexivo e (u_n) é limitada então existe subsequência (u_{n_k}) de (u_n) tal que, quando $k \to +\infty$, tem-se:

$u_{n_k} \rightharpoonup u \quad \text{em} \quad W_0^{1,\gamma}(\Omega),$

$u_{n_k} \to u \quad \text{em} \quad L^l(\Omega), \quad \text{para todo } l \in [1, \gamma^*),$

$\int_\Omega |\nabla u_{n_k}|^\gamma \to t_0 \geq 0 \quad \text{em } \mathbb{R}.$

Como $J'(u_{n_k}) \to 0$ em $(W_0^{1,\gamma}(\Omega))^*$ quando $k \to +\infty$ e (u_{n_k}) é limitada em $W_0^{1,\gamma}(\Omega)$ então

$$M(\mathcal{A}(u_{n_k})) \int_\Omega a(|\nabla u_{n_k}|^p)|\nabla u_{n_k}|^{p-2}\nabla u_{n_k}\nabla(u_{n_k} - u)dx$$
$$- \left[\int_\Omega F(x, u_{n_k})dx\right]^r \int_\Omega f(x, u_{n_k})(u_{n_k} - u)dx = o_k(1). \quad (2.4)$$

Da limitação de (u_{n_k}) e continuidade da função f em $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}$, juntamente com $(f_1) - (f_2)$, existe $c_1 > 0$ constante satisfazendo

$$\left|\left[\int_\Omega F(x, u_{n_k})dx\right]^r\right| \leq c_1, \quad (2.5)$$

e da desigualdade de Hölder tem-se:

$$\int_\Omega f(x, u_{n_k})(u_{n_k} - u)dx \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0. \quad (2.6)$$

Assim (2.4)-(2.6) implicam

$$M(\mathcal{A}(u_{n_k})) \int_\Omega a(|\nabla u_{n_k}|^p)|\nabla u_{n_k}|^{p-2}\nabla u_{n_k}\nabla(u_{n_k} - u)dx = o_k(1) \quad (2.7)$$

Se $t_0 = 0$ então conclui-se que $u_{n_k} \to 0$ em $W_0^{1,\gamma}(\Omega)$, quando $k \to +\infty$ e a prova da (PS) está finalizada. Suponha então $t_0 > 0$, de modo que $M(\mathcal{A}(t_0)) > 0$. Logo, (2.7) garante

$$\lim_{k\to+\infty} \int_\Omega a(|\nabla u_{n_k}|^p)|\nabla u_{n_k}|^{p-2}\nabla u_{n_k}\nabla(u_{n_k} - u)dx = 0. \quad (2.8)$$

Como

$$\phi \mapsto \int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\phi$$

é um funcional linear e contínuo em $W_0^{1,\gamma}(\Omega)$, então

$$\int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla(u_{n_k} - u)dx = o_k(1).$$

Logo,

$$\int_\Omega (a(|\nabla u_{n_k}|^p)|\nabla u_{n_k}|^{p-2}\nabla u_{n_k} - a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u)(\nabla u_{n_k} - \nabla u)dx = o_k(1). \quad (2.9)$$

Aplicando o Lema 1.2 e argumentando conforme o Lema 1.6 obtemos que $u_{n_k} \to u$ em $W_0^{1,\gamma}(\Omega)$, concluindo a prova da (PS). $\square$

Lema 2.3 *Suponha $s(r+1) < p$, (a_1), (f_1) e (f_2). Para cada $k \in \mathbb{N}$, existe um subespaço k-dimensional X_k de $W_0^{1,\gamma}(\Omega)$ e $\rho_k > 0$ tal que $\sup\limits_{X_k \cap S_{\rho_k}} J < 0$.*

Prova: Para cada $k \in \mathbb{N}$, existe um subespaço linear de $W_0^{1,\gamma}(\Omega)$, k-dimensional, X_k. Logo, todas as normas são equivalentes em X_k. Então existe constante positiva $c(k)$, que depende de k, tal que

$$c(k)\|u\|^s_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} \leq \frac{a_1}{s}\int_\Omega |u|^s dx, \quad \forall u \in X_k. \tag{2.10}$$

Por (2.10) e $(f_1) - (f_2)$ tem-se

$$\int_\Omega F(x,u)dx \geq \frac{a_1}{s}\int_\Omega |u|^s dx \geq c(k)\|u\|^s_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)}, \qquad \forall u \in X_k.$$

Usando (a_1) podemos encontrar constantes $c_1(k), c_2(k) > 0$ satisfazendo para todo $u \in X_k$ com $\|u\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} \leq 1$,

$$\mathcal{A}(u) \leq \frac{k_1 c_1(k)}{p} + \frac{k_3 c_2(k)}{q} \doteq \theta(k)$$

e

$$\mathcal{M}(\mathcal{A}(u)) \leq \frac{ck_1c_1(k)}{p}\|u\|^p_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} + \frac{ck_3c_2(k)}{q}\|u\|^q_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)},$$

sendo $c = \sup\limits_{t\in[0,\theta(k)]} \mathcal{M}(t)$. Das informações precedentes e considerando

$$\rho_k = \min\left\{1, \left(\frac{c(k)^{r+1}(r+1)^{-1}}{\frac{2ck_1c_1(k)}{p} + \frac{2ck_3c_2(k)}{q}}\right)^{\frac{1}{p-s(r+1)}}\right\},$$

temos para todo $u \in S_{\rho_k} \cap X_k$:

$$\begin{aligned}
J(u) &\leq \mathcal{M}(\mathcal{A}(u)) - \frac{1}{r+1}\left[\int_\Omega \frac{a_1}{s}|u|^s dx\right]^{r+1} \\
&\leq \mathcal{M}(\mathcal{A}(u)) - \frac{c(k)^{r+1}}{r+1}\|u\|^{s(r+1)}_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} \\
&\leq \frac{ck_1c_1(k)}{p}\|u\|^p_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} + \frac{ck_3c_2(k)}{q}\|u\|^q_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} - \frac{c(k)^{r+1}}{r+1}\|u\|^{s(r+1)}_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} \\
&\leq \|u\|^{s(r+1)}_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)}\left[\frac{ck_1c_1(k)}{p}\|u\|^{p-s(r+1)}_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} + \frac{ck_3c_2(k)}{q}\|u\|^{q-s(r+1)}_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} - \frac{c(k)^{r+1}}{r+1}\right] \\
&\leq \rho_k^{s(r+1)}\left[\left(\frac{ck_1c_1(k)}{p} + \frac{ck_3c_2(k)}{q}\right)\rho_k^{p-s(r+1)} - \frac{c(k)^{r+1}}{r+1}\right] \\
&\leq -\frac{c(k)^{r+1}\rho_k^{s(r+1)}}{2(r+1)}
\end{aligned}$$

o que implica que $\sup_{S_{\rho_k}\cap X_k} J(u) < 0$. Portanto, o lema está provado. □

Demonstração do Teorema 2.1: O funcional energia J dado por (2.3) é par e $J(0) = 0$. Pelos Lemas 2.1 e 2.2 temos, respectivamente, que J é limitado inferiormente (em virtude da coercividade de J) e J satisfaz a condição (PS). Além disso, pelo Lema 2.3 estamos nas hipóteses do Teorema 1.1 de [38] (Teorema 5.3 do Apêndice) e daí obtemos uma sequência de pontos críticos (u_k) satisfazendo $J(u_k) \leq 0$ e $\|u_k\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} \to 0$ quando $k \to +\infty$. □

2.3 Demonstração do Teorema 2.2

O objetivo desta seção é demonstrar o Teorema 2.2 que estabelece a existência de uma infinidade de soluções com energia positiva para o problema (2.1).

Lema 2.4 *Suponha $\gamma < s(r+1)$, (a_1), $(f_1)-(f_2)$ e (M_3'). Então existem $\alpha, \rho > 0$ verificando $J(u) \geq \alpha$, se $\|u\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} = \rho$.*

Prova: De (a_1), $(f_1)-(f_2)$, (M_3') e imersão de Sobolev temos

$$\begin{aligned} J(u) &= \mathcal{M}(\mathcal{A}(u)) - \frac{1}{r+1}\left[\int_\Omega F(x,u)dx\right]^{r+1} \\ &\geq \tilde{n}_0\mathcal{A}(u) + \frac{\tilde{n}_1}{\sigma}\mathcal{A}(u)^\sigma - \frac{1}{r+1}\left[\frac{a_2}{s}\int_\Omega |u|^s dx\right]^{r+1} \\ &\geq \tilde{n}_0 c_1\|u\|^\gamma_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} + \tilde{n}_1 c_2\|u\|^{\sigma\gamma}_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} - \frac{c^{r+1}}{r+1}\|u\|^{s(r+1)}_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} \end{aligned} \tag{2.11}$$

sendo $c, c_1, c_2 > 0$ e $\tilde{n}_0, \tilde{n}_1 \geq 0$ com $\tilde{n}_1 + \tilde{n}_2 > 0$ constantes.

Se $\tilde{n}_0 = 0$ então de (2.11) tem-se

$$J(u) \geq \|u\|^{\sigma\gamma}_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)}\left[\tilde{n}_1 c_2 - \frac{c^{r+1}}{r+1}\|u\|^{s(r+1)-\sigma\gamma}_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)}\right].$$

Escolhendo $0 < \rho < \left(\frac{(r+1)\tilde{n}_1 c_2}{c^{r+1}}\right)^{\frac{1}{s(r+1)-\sigma\gamma}}$ então $\eta(\rho) = \tilde{n}_1 c_2 - \frac{c^{r+1}}{r+1}\rho^{s(r+1)-\sigma\gamma} > 0$. Logo,

$$J(u) \geq \rho^{\sigma\gamma}\eta(\rho) > 0,$$

quando $\|u\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} = \rho$.

Se $\tilde{n}_0 > 0$ então de (2.11) tem-se

$$J(u) \geq \|u\|^{\gamma}_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)}\left[\tilde{n}_0 c_1 - \frac{c^{r+1}}{r+1}\|u\|^{s(r+1)-\gamma}_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)}\right].$$

Escolhendo $0 < \rho < \left(\dfrac{(r+1)\tilde{n}_0 c_1}{c^{r+1}}\right)^{\frac{1}{s(r+1)-\gamma}}$ então $\eta(\rho) = \tilde{n}_0 c_1 - \dfrac{c^{r+1}}{r+1}\rho^{s(r+1)-\gamma} > 0$. Logo,

$$J(u) \geq \rho^{\gamma}\eta(\rho) > 0,$$

quando $\|u\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} = \rho$. $\square$

Lema 2.5 *Assuma $\gamma < s(r+1)$, (a_1), $(f_1)-(f_2)$ e $(M_2^{'})$. Para todo subespaço linear de dimensão finita $Z \subset W_0^{1,\gamma}(\Omega)$ existe $\zeta = \zeta(Z) > 0$ para o qual $J(u) \leq 0$, se $\|u\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} \geq \zeta$.*

Prova: Usando $\gamma < s(r+1)$, $(a_1), (f_1)-(f_2)$, $(M_2^{'})$ e equivalência de normas em espaço de dimensão finita, tem-se

$$\begin{aligned} J(u) &= \mathcal{M}(\mathcal{A}(u)) - \frac{1}{r+1}\left[\int_{\Omega} F(x,u)dx\right]^{r+1} \\ &\leq m_0\mathcal{A}(u) + \frac{\tilde{m}}{\mu}\mathcal{A}(u)^{\mu} - \frac{1}{r+1}\left[\frac{a_1}{s}\int_{\Omega}|u|^s dx\right]^{r+1} \\ &\leq c_1\|u\|^{\gamma}_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} + c_2\|u\|^{\gamma\mu}_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} - \frac{c}{r+1}\|u\|^{s(r+1)}_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)}, \end{aligned}$$

sendo $c_1, c_2, c > 0$ constantes.

Como $\gamma < s(r+1)$ e $(M_2^{'})$ então

$$\frac{J(u)}{\|u\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)}} \leq o(1) - \frac{c}{r+1},$$

quando $\|u\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} \to +\infty$, então

$$\limsup_{\|u\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} \to +\infty} \frac{J(u)}{\|u\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)}} \leq -\frac{c}{r+1},$$

o que conclui que $J(u) < 0$ quando $\|u\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)}$ é suficientemente grande. $\square$

Lema 2.6 *Suponha $(a_1)-(a_2), (f_1)-(f_2)$, (AR), (M_1), (M_4) e $r < \dfrac{1}{s}$. Seja J o funcional energia dado por (2.3). Então J satisfaz a condição de Palais-Smale.*

Prova: Seja $(u_n) \subset W_0^{1,\gamma}(\Omega)$ sequência de Palais-Smale, isto é, $J(u_n) \to c$, $c \in \mathbb{R}$, e $J^{'}(u_n) \to 0$ em $(W_0^{1,\gamma}(\Omega))^*$, quando $n \to +\infty$. Suponha, por contradição, que (u_n) não seja limitada, ou seja, existe subsequência (u_{n_k}) satisfazendo $||u_{n_k}||_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} \to +\infty$, quando $k \to +\infty$.

Observe que por (a_1) existem constantes $c_1, c_2 > 0$ verificando

$$c_1\mathcal{A}(u_{n_k})^{\frac{1}{\gamma}} \leq \|u_{n_k}\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} \leq c_2\mathcal{A}(u_{n_k})^{\frac{1}{\gamma}}. \tag{2.12}$$

Para $\theta > \gamma$ dado em (AR) tem-se

$$\theta(r+1)J(u_{n_k}) - \langle J'(u_{n_k}), u_{n_k}\rangle = \theta(r+1)\mathcal{M}(\mathcal{A}(u_{n_k})) - M(\mathcal{A}(u_{n_k}))\int_\Omega a(|\nabla u_{n_k}|^p)|\nabla u_{n_k}|^p$$
$$+\left[\int_\Omega F(x,u_{n_k})\right]^r \int_\Omega \Big[f(x,u_{n_k})u_{n_k} - \theta F(x,u_{n_k})\Big]. \quad (2.13)$$

De (a_1) obtemos

$$-M(\mathcal{A}(u_{n_k}))\int_\Omega a(|\nabla u_{n_k}|^p)|\nabla u_{n_k}|^p dx \geq -c(\gamma)M(\mathcal{A}(u_{n_k}))\mathcal{A}(u_{n_k}),$$

sendo $c(\gamma)$ dado por (2.2). Além disso, pela condição (AR) temos

$$f(x,t)t - \theta F(x,t) \geq -c \quad \forall (x,t) \in \bar{\Omega}\times\mathbb{R}.$$

Logo,

$$\left[\int_\Omega F(x,u_{n_k})\right]^r \int_\Omega \Big[f(x,u_{n_k})u_{n_k} - \theta F(x,u_{n_k})\Big] \geq -c|\Omega|\left[\int_\Omega F(x,u_{n_k})\right]^r.$$

Combinando as informações anteriores e (2.13) obtemos

$$\theta(r+1)J(u_{n_k}) - \langle J'(u_{n_k}), u_{n_k}\rangle \geq \theta(r+1)\mathcal{M}(\mathcal{A}(u_{n_k})) - c(\gamma)M(\mathcal{A}(u_{n_k}))\mathcal{A}(u_{n_k})$$
$$-c|\Omega|\left[\int_\Omega F(x,u)\right]^r,$$

e então

$$c|\Omega|\left[\int_\Omega F(x,u_{n_k})\right]^r + \theta(r+1)J(u_{n_k}) + \epsilon_k\|u_{n_k}\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)}$$
$$\geq \theta(r+1)\mathcal{M}(\mathcal{A}(u_{n_k})) - c(\gamma)M(\mathcal{A}(u_{n_k}))\mathcal{A}(u_{n_k}), \quad (2.14)$$

sendo $\epsilon_k \to 0$, quando $k \to +\infty$. Se $\displaystyle\int_\Omega F(x,u_{n_k})$ é limitada então multiplicando (2.14) por $\dfrac{1}{\|u_{n_k}\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)}}$ obtemos, quando $k \to +\infty$,

$$\begin{aligned} o_k(1) &\geq \frac{1}{\|u_{n_k}\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)}}\Big(\theta(r+1)\mathcal{M}(\mathcal{A}(u_{n_k})) - c(\gamma)M(\mathcal{A}(u_{n_k}))\mathcal{A}(u_{n_k})\Big) \\ &\geq \frac{1}{c_2\mathcal{A}(u_{n_k})^{\frac{1}{\gamma}}}\Big(\theta(r+1)\mathcal{M}(\mathcal{A}(u_{n_k})) - c(\gamma)M(\mathcal{A}(u_{n_k}))\mathcal{A}(u_{n_k})\Big) \\ &= \frac{\theta(r+1)\mathcal{M}(\mathcal{A}(u_{n_k})) - c(\gamma)M(\mathcal{A}(u_{n_k}))\mathcal{A}(u_{n_k})}{c_2\,\mathcal{A}(u_{n_k})^{\frac{1}{\gamma}}}. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{\theta(r+1)\mathcal{M}(\mathcal{A}(u_{n_k})) - c(\gamma)M(\mathcal{A}(u_{n_k}))\mathcal{A}(u_{n_k})}{\mathcal{A}(u_{n_k})^{\frac{1}{\gamma}}} \leq 0,$$

o que é impossível por (M_4).

Agora suponha $\displaystyle\int_\Omega F(x,u_{n_k}) \to +\infty$. Por $(f_1)-(f_2)$ e imersão de Sobolev temos

$$\Big|\int_\Omega F(x,u_{n_k})\Big|^r \leq \left[\frac{a_2}{s}\int_\Omega |u_{n_k}|^s\right]^r \leq \tilde{c}\|u_{n_k}\|^{sr}_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)}, \tag{2.15}$$

sendo $\tilde{c}>0$ constante. De (2.14) e (2.15) obtemos

$$\begin{aligned} c\,|\Omega|\,\tilde{c}\,\|u_{n_k}\|^{sr}_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} + \theta(r+1)J(u_{n_k}) + \epsilon_k\|u_{n_k}\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} \\ \geq \theta(r+1)\mathcal{M}(\mathcal{A}(u_{n_k})) - c(\gamma)M(\mathcal{A}(u_{n_k}))\mathcal{A}(u_{n_k}), \end{aligned} \tag{2.16}$$

Como $r<\dfrac{1}{s}$ e multiplicando (2.16) por $\dfrac{1}{\|u_{n_k}\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)}}$ obtemos

$$o_k(1) \geq \frac{1}{\|u_{n_k}\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)}}\Big(\theta(r+1)\mathcal{M}(\mathcal{A}(u_{n_k})) - c(\gamma)M(\mathcal{A}(u_{n_k}))\mathcal{A}(u_{n_k})\Big).$$

Mas, $\dfrac{1}{\|u_{n_k}\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)}} \geq \dfrac{1}{c_2\mathcal{A}(u_{n_k})^{\frac{1}{\gamma}}}$ por (2.12). Logo,

$$o_k(1) \geq \frac{1}{c_2\mathcal{A}(u_{n_k})^{\frac{1}{\gamma}}}\Big(\theta(r+1)\mathcal{M}(\mathcal{A}(u_{n_k})) - c(\gamma)M(\mathcal{A}(u_{n_k}))\mathcal{A}(u_{n_k})\Big),$$

e consequentemente,

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{\theta(r+1)\mathcal{M}(\mathcal{A}(u_{n_k})) - c(\gamma)M(\mathcal{A}(u_{n_k}))\mathcal{A}(u_{n_k})}{\mathcal{A}(u_{n_k})^{\frac{1}{\gamma}}} \leq 0,$$

o que é impossível por (M_4).

Portanto (u_n) é limitada em $W_0^{1,\gamma}(\Omega)$ e, argumentando como no Lema 1.6, é possível mostrar que (u_n) possui uma subsequência convergente. Dessa forma, a prova está completa. $\square$

Demonstração do Teorema 2.2: O funcional energia J dado por (2.3) é par, J satisfaz a geometria do passo da montanha e a condição de Palais-Smale, em virtude dos Lemas 2.4, 2.5 e 2.6. Portanto, aplicando o Teorema do passo da montanha de [52] (Teorema 5.2 do Apêndice deste trabalho) obtemos uma sequência (w_j) de pontos críticos de J (de soluções de 2.1) com $J(w_j)\to+\infty$, quando $j\to+\infty$. O teorema esta provado. $\square$

Observação 2.3 *Vale ressaltar que no problema* (2.1) *podemos considerar o caso* $r=0$.

Neste caso, o mesmo deixa de ser não-local do lado direito da equação, mas os resultados obtidos permanecem válidos.

Capítulo

3

Múltiplas soluções para uma classe de problemas não homogêneos e não locais sob pertubação

Neste capítulo estudaremos multiplicidade de soluções para o problema não local com pertubação dado por:

$$\begin{cases} -M(\mathcal{A}(u))\operatorname{div}(a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = \lambda f(x,u)\left[\int_\Omega F(x,u)\right]^r + |u|^{s-2}u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

sendo $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ com $N \geq 3$, $1 < p < N$, $\lambda > 0$ parâmetro e $r > 0$ fixado.

Vale ressaltar que no problema acima estamos excluindo o caso $r = 0$, uma vez que, esse caso já foi tratado no Capítulo 1 do presente trabalho com função f mais geral. Nosso objetivo neste capítulo é tratar a classe de problemas com termo não local na não linearidade.

As hipóteses em relação ao operador que estamos abordando continua as mesmas dos capítulos anteriores. Já as hipóteses gerais em relação às funções f e M são:

A função $f : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua satisfazendo

(f_1) Existem $a_1, a_2 > 0$ e $\alpha \in (1, \gamma)$ tais que

$$a_1 t^{\alpha-1} \leq f(x,t) \leq a_2 t^{\alpha-1} \quad \forall (x,t) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^+.$$

(f_2) $f(x,-t) = -f(x,t)$ para todo $(x,t) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}$.

A função $M : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ satisfaz:

(M_1) $M \in C(0,+\infty)$ e $M(t) > 0$, $\forall t \in (0,+\infty)$;

Assumiremos que

$$1 < \alpha < p < q < N \qquad \text{e} \qquad 1 < \alpha < \alpha(r+1) < \gamma < s < \gamma^*,$$

sendo
$$\gamma = (1 - H(k_3))p + H(k_3)q \tag{3.2}$$
e γ^* o expoente crítico de Sobolev dado por $\gamma^* = \dfrac{\gamma N}{N-\gamma}$.

O primeiro resultado deste capítulo estabelece a existência de infinitas soluções convergindo para zero e de energia negativa para todo $\lambda > 0$. Com essa finalidade usamos o Teorema 1.1 de Liu e Wang [38]. Para tal foi necessário adicionar as seguintes hipóteses:

(M_2) Existem $m_1 > 0$ e $\nu > \dfrac{\alpha(r+1)}{\gamma}$ satisfazendo
$$M(t) \geq m_1 t^{\nu-1} \text{ para } t \gg 1,$$
sendo γ dado por (3.2).

(M_3) Existem $n_0, n_1 \geq 0$, com $n_0 + n_1 > 0$, e $\beta > \dfrac{1}{p}$ satisfazendo
$$M(t) \leq n_0 + n_1 t^{\beta-1} \text{ para todo } 0 < t \ll 1.$$

Tendo em vista as hipóteses acima temos o seguinte resultado:

Teorema 3.1 *Suponha $\alpha(r+1) < p$, $(a_1)-(a_2)$, $(M_1)-(M_3)$, $(f_1)-(f_2)$. Então o problema* (3.1) *possui uma infinidade de soluções (u_{n_k}) para todo $\lambda > 0$ satisfazendo $J(u_{n_k}) < 0$ e $\|u_{n_k}\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} \to 0$ quando $k \to +\infty$, sendo J dado por* (3.4).

Como exemplos de funções M satisfazendo as hipóteses do Teorema 3.1 podemos mencionar: $0 < m_0 \leq M(t) \leq m_1$ contínua em $(0, +\infty)$, $M(t) = a + bt^k$ com $a, b > 0$ e $k > 1$, $M(t) = t^{k-1}$ sendo $\max\{\beta, \nu\} < k < 1$ e $M(t) = t^{k-1}$ com $k > \max\{\beta, \nu, 1\}$. As três primeiras classes de funções são casos não degenerados, sendo que a função puramente potência com $\max\{\nu, \beta\} < k < 1$ é um caso singular na origem, o que implica que a função é descontínua em $t = 0$. E a última classe de funções são exemplos de funções degeneradas, ou seja, $M(0) = 0$.

O próximo resultado é referente a existência de infinitas soluções de energia positiva que foi obtido via Teorema do Passo da Montanha Simétrico [48]. Com esse propósito foi necessário introduzir as seguintes hipóteses:

(M_2') Existem $m_0, \tilde{m} \geq 0$ com $m_0 + \tilde{m} > 0$ e $\mu < \dfrac{s}{\gamma}$, satisfazendo:
$$M(t) \leq m_0 + \tilde{m} t^{\mu-1}, \text{ para } t \gg 1.$$

(M_3') Existem $n_0, n_1, \tilde{n}_0, \tilde{n}_1 \geq 0$ com $n_0 + n_1 > 0$ e $\tilde{n}_0 + \tilde{n}_1 > 0$ verificando

$$\tilde{n}_0 + \tilde{n}_1 t^{\sigma-1} \leq M(t) \leq n_0 + n_1 t^{\beta-1}, \text{ para } 0 < t \ll 1,$$

sendo ou

(i) $\quad \dfrac{1}{p} < \beta \leq \sigma < 1,$

ou

$$(ii) \quad \begin{cases} \sigma \geq 1 \\ \beta > \dfrac{1}{p} \end{cases} (\text{ se } \tilde{n}_0 > 0) \qquad \text{ou} \qquad \begin{cases} 1 < \sigma < \dfrac{s}{\gamma} \\ \beta > \dfrac{1}{p} \end{cases} (\text{ se } \tilde{n}_0 = 0).$$

Vale ressaltar que em (i) tem-se o caso em que $M(t)$ é singular na origem. Já o caso (ii) com $\tilde{n}_0 > 0$ trata o caso das funções não degeneradas podendo a mesma ter descontinuidade na origem, enquanto o (ii) com $\tilde{n}_0 = 0$ aborda o caso degenerado ou não degenerado (podendo a função M ser descontínua na origem.)

(M_4) Existe $\gamma < \theta(r+1) < s$ satisfazendo

$$\liminf_{t \to +\infty} \frac{\theta(r+1)\mathcal{M}(t) - c(\gamma)M(t)t}{t^{\frac{1}{\gamma}}} > 0,$$

sendo

$$c(\gamma) = \begin{cases} \dfrac{pk_1}{k_0}, & \text{se } H(k_3) = 0, \\ \dfrac{\max\{k_1, k_3\}}{\min\left\{\frac{k_0}{p}, \frac{k_2}{q}\right\}}, & \text{se } H(k_3) = 1. \end{cases} \tag{3.3}$$

e γ conforme dado em (3.2).

Dessa forma, podemos enunciar o

Teorema 3.2 *Suponha $\alpha(r+1) < \gamma$, $(a_1) - (a_2)$, (M_1), $(M_2') - (M_3')$, (M_4) e $(f_1) - (f_2)$. Então, para todo $\lambda > 0$ suficientemente pequeno o problema (1.1) possui uma infinidade de soluções (w_j) satisfazendo $J(w_j) \to +\infty$ e $\|w_j\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} \to +\infty$ quando $j \to +\infty$, sendo J dado por* (3.4).

Como exemplos de funções M satisfazendo as hipóteses do Teorema 3.2 podemos mencionar: $0 < m_0 \leq M(t) \leq m_1$ contínua em $(0, \infty)$, $M(t) = a + bt^{k-1}$ com $a, b > 0$ e $1 < k < \dfrac{s}{\gamma}$, $M(t) = t^{k-1}$ sendo $\dfrac{1}{p} < k < 1$ e $M(t) = t^{k-1}$ com $1 < k < \dfrac{s}{\gamma}$ para o caso degenerada. Nos exemplos acima consideramos $c(\gamma)$ dado por (3.2) satisfazendo $c(\gamma) = \gamma$ que é possível quando $k_i = 1$ para todo $i = 0, 1, 2, 3$. A última classe de exemplos é de funções degeneradas na origem, ou seja, quando $M(0) = 0$. Enquanto as três primeiras classes são de funções que não degeneram, incluindo o caso em que M é singular na origem (portanto M é descontínua).

No último teorema deste capítulo mostramos a existência de, pelo menos, duas soluções positivas, uma via o clássico teorema do passo da montanha devido à Ambrosetti-Rabinowitz [4, 52] e a outra via princípio de Ekeland [23] e para garantir a positividade das soluções utilizamos o teorema do máximo forte de Pucci e Serrin [46]. Para essa última etapa foi necessário acrescentar as hipóteses $(a_3)-(a_4)$ com a finalidade de valer o princípio do máximo (consultar seção 3.4) bem como restringir a hipótese (M_3'). Dessa forma, passamos a utilizar

(M_3'') Existem $n_0, n_1, \tilde{n}_0, \tilde{n}_1 \geq 0$ com $n_0+n_1>0$ e $\tilde{n}_0+\tilde{n}_1>0$ verificando

$$\tilde{n}_0+\tilde{n}_1 t^{\sigma-1} \leq M(t) \leq n_0+n_1 t^{\beta-1}, \text{ para } t \ll 1,$$

sendo ou

(i) $\dfrac{\alpha(r+1)}{p}<\beta \leq \sigma<1,$

ou

$$(ii) \quad \begin{cases} \sigma \geq 1 \\ \beta > \dfrac{\alpha(r+1)}{p} \end{cases} (\text{se } \tilde{n}_0>0) \qquad \text{ou} \qquad \begin{cases} 1<\sigma<\dfrac{s}{\gamma} \\ \beta > \dfrac{\alpha(r+1)}{p} \end{cases} (\text{se } \tilde{n}_0=0).$$

Tendo em vista as considerações acima temos o seguinte resultado:

Teorema 3.3 *Suponha $\alpha(r+1)<\gamma$, $(a_1)-(a_4)$, (M_1), (M_2'), (M_3''), (M_4) e $(f_1)-(f_2)$. Então para $\lambda>0$ suficientemente pequeno o problema* (3.1) *possui, pelo menos, duas soluções positivas.*

Como exemplos de funções M satisfazendo as hipóteses do Teorema 3.3 podemos mencionar, as seguintes classes de funções: $0<m_0 \leq M(t) \leq m_1$ contínua em $(0,\infty)$ e $M(t)=a+bt^{k-1}$ com $a,b>0$ e $1<k<\dfrac{s}{\gamma}$ que são não degeneradas, $M(t)=t^{k-1}$ sendo $\dfrac{\alpha(r+1)}{\gamma}<k<1$ como exemplos de funções singulares na origem (que também é um caso não degenerado) e $M(t)=t^{k-1}$ com $1<k<\dfrac{s}{\gamma}$ para o caso degenerada. Nos exemplos acima consideramos $c(\gamma)$ dado por (3.2) satisfazendo $c(\gamma)=\gamma$ que é possível quando $k_i=1$ para todo $i=0,1,2,3$.

3.1 Formulação Variacional

Problemas da forma (3.1) estão associados com o seguinte funcional de energia $J: W_0^{1,\gamma}(\Omega) \to \mathbb{R}$ (sendo γ conforme (3.2)) dado por:

$$J(u)=\mathcal{M}(\mathcal{A}(u))-\frac{\lambda}{r+1}\left[\int_\Omega F(x,u)dx\right]^{r+1}-\frac{1}{s}\int_\Omega |u|^s dx, \tag{3.4}$$

com $\mathcal{M}(t)=\int_0^t M(\tau)d\tau$ e $F(x,u)=\int_0^u f(x,\tau)d\tau$.

Em virtude das hipóteses sobre a, f e M, obtemos que $J \in C^1(W_0^{1,\gamma}(\Omega), \mathbb{R})$ com a derivada de Fréchet:

$$\langle J'(u), v\rangle = M(\mathcal{A}(u)) \int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v dx - \lambda \left[\int_\Omega F(x,u)dx\right]^r \int_\Omega f(x,u)v dx$$
$$- \int_\Omega |u|^{s-2}uv dx, \ \forall u, v \in W_0^{1,\gamma}(\Omega),$$

sendo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a dualidade entre os espaços $(W_0^{1,\gamma}(\Omega))^*$ e $W_0^{1,\gamma}(\Omega)$.

O espaço de Sobolev $W_0^{1,\gamma}(\Omega)$ será munido com a seguinte norma

$$\|u\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^\gamma dx\right)^{\frac{1}{\gamma}}, \tag{3.5}$$

na qual é equivalente a norma usual de $W_0^{1,\gamma}(\Omega)$.

Observação 3.1 *Vale ressaltar que em virtude das hipóteses $(f_1) - (f_2)$ temos que $F(x,u) \geq 0$ para todo $(x,t) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}$. Logo o termo*

$$\frac{\lambda}{r+1}\left[\int_\Omega F(x,u)dx\right]^{r+1}$$

está bem definido e portanto o lado direito do problema (3.1) está bem posto. De fato, como $F(x,u) = \int_0^u f(x,\tau)d\tau$ e por (f_2) obtemos via mudança de variável que

$$F(x,u) = \int_0^u -f(x,-\tau)d\tau = \int_0^{-u} f(x,\xi)d\xi = F(x,-u),$$

provando que F é par. Logo, por (f_1), $F(x,u) \geq 0$, $\forall (x,u) \in \Omega \times \mathbb{R}$.

Observação 3.2 *O Lema 1.1 permanece válido neste capítulo.*

3.2 Demonstração do Teorema 3.1

O objetivo desta seção é demonstrar o Teorema 3.1, isto é, mostrar que o problema (3.1) possui uma infinidade de soluções de energia negativa cuja norma converge para zero para todo $\lambda > 0$.

Como o funcional de energia J não é limitado inferiormente então não podemos aplicar diretamente o Teorema 1.1 de Clark refinado [38] devido à Liu e Wang. Com o objetivo de contornar tal situação, construiremos um funcional truncado $\bar{J}$ dado por (3.6) e mostraremos que esse novo funcional de energia é limitado inferiormente e que uma infinidade de pontos críticos de $\bar{J}$ coincidam com os de J. A técnica do truncamento foi baseada no artigo [5].

Com essa finalidade definamos o seguinte funcional de energia truncado $\bar{J} : W_0^{1,\gamma}(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por:

$$\bar{J}(u) = \mathcal{M}(\mathcal{A}(u)) - \frac{\lambda}{r+1}\left[\int_\Omega F(x,u)dx\right]^{r+1} - \phi\Big(\|u\|^\gamma_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)}\Big)\frac{1}{s}\int_\Omega |u|^s dx, \tag{3.6}$$

sendo $\phi \in C_0^1([0,+\infty))$ função auxiliar satisfazendo

$$\begin{cases} 0 \le \phi \le 1, \\ \phi(t) = 1 \quad \text{se } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \phi(t) = 0 \quad \text{se } t \in [1, +\infty), \\ \phi'(t) \le 0 \quad \text{se } t \in [0, +\infty). \end{cases} \tag{3.7}$$

Observe que como ϕ é função de classe C^1 então o funcional $\bar{J}$ permanece sendo de classe $C^1(W_0^{1,\gamma}(\Omega), \mathbb{R})$ e sua derivada no sentido de Fréchet é dada por

$$\begin{aligned} \langle \bar{J}(u), \varphi\rangle &= M(\mathcal{A}(u))\int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\varphi dx - \lambda\left[\int_\Omega F(x,u)\right]^r \int_\Omega f(x,u)\varphi dx \\ &- \phi'(\|u\|^\gamma_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)})\frac{\gamma}{s}\int_\Omega |u|^s dx \int_\Omega |\nabla u|^{\gamma-2}\nabla u\nabla\varphi dx - \phi(\|u\|^\gamma_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)})\int_\Omega |u|^{s-2}u\varphi dx. \end{aligned}$$

Os próximos resultados serão no intuito desse novo funcional truncado $\bar{J}$ satisfazer as hipóteses do Teorema 1.1 de [38].

Lema 3.1 *Suponha $(a_1)-(a_2)$, (M_1), $(f_1)-(f_2)$. Então o funcional de energia $\bar{J}$ satisfaz a condição de Palais-Smale.*

Prova: Seja $(u_n) \subset W_0^{1,\gamma}(\Omega)$ uma sequência de Palais-Smale no nível c, isto é, $\bar{J}(u_n) \to c$ em $\mathbb{R}$ para todo $c \in \mathbb{R}$ e $\bar{J}'(u_n) \to 0$ em $(W_0^{1,\gamma}(\Omega))^*$ quando $n \to +\infty$. Da coercividade de $\bar{J}$ segue que (u_n) é limitada. Como $W_0^{1,\gamma}(\Omega)$ é reflexivo e (u_n) é limitada então existe $(u_{n_k}) \subset (u_n)$ tal que quando $k \to +\infty$ tem-se:
$u_{n_k} \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,\gamma}(\Omega)$,
$u_{n_k} \to u$ em $L^l(\Omega)$ para todo $l \in [1, \gamma^*)$,
$\displaystyle\int_\Omega |\nabla u_{n_k}|^\gamma \to t_0 \ge 0$ em $\mathbb{R}$.
Como $\bar{J}'(u_{n_k}) \to 0$ em $(W_0^{1,\gamma}(\Omega))^*$ quando $k \to +\infty$ e (u_{n_k}) é limitada então

$$\begin{aligned} M(\mathcal{A}(u_{n_k}))&\int_\Omega a(|\nabla u_{n_k}|^p)|\nabla u_{n_k}|^{p-2}\nabla u_{n_k}\nabla(u_{n_k}-u)dx \\ &- \lambda\left[\int_\Omega F(x,u_{n_k})\right]^r\int_\Omega f(x,u_{n_k})(u_{n_k}-u)dx \\ &- \phi'(\|u_{n_k}\|^\gamma_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)})\frac{\gamma}{s}\int_\Omega |u_{n_k}|^s dx\int_\Omega |\nabla u_{n_k}|^{\gamma-2}\nabla u_{n_k}\nabla(u_{n_k}-u)dx \\ &- \phi(\|u_{n_k}\|^\gamma_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)})\int_\Omega |u_{n_k}|^{s-2}u_{n_k}(u_{n_k}-u)dx = o_k(1). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Em virtude da limitação da (u_{n_k}) e por $(f_1) - (f_2)$ existe constante $c_1 > 0$ satisfazendo

$$\left| \left[\int_\Omega F(x, u_{n_k}) dx \right]^r \right| \leq c_1. \tag{3.9}$$

Por $(f_1) - (f_2)$ e a desigualdade de Hölder tem-se:

$$\int_\Omega f(x, u_{n_k})(u_{n_k} - u) dx \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{e} \qquad \int_\Omega |u_{n_k}|^{s-2} u_{n_k}(u_{n_k} - u) dx \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{3.10}$$

Se $t_0 = 0$ resulta que $u_{n_k} \to 0$ em $W_0^{1,\gamma}(\Omega)$ quando $k \to +\infty$ e a prova está acabada (Ver Capítulo 1). Assumamos $t_0 > 0$, de (3.7) - (3.10) segue que, quando $k \to +\infty$,

$$M(\mathcal{A}(u_{n_k})) \int_\Omega a(|\nabla u_{n_k}|^p) |\nabla u_{n_k}|^{p-2} \nabla u_{n_k} \nabla (u_{n_k} - u) dx$$
$$- \phi'\Big(\|u_{n_k}\|^\gamma_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} \Big) \frac{\gamma}{s} \int_\Omega |u_{n_k}|^s dx \int_\Omega |\nabla u_{n_k}|^{\gamma-2} \nabla u_{n_k} \nabla (u_{n_k} - u) dx = o_k(1).$$

Equivalentemente,

$$\int_\Omega \alpha_k a(|\nabla u_{n_k}|^p) |\nabla u_{n_k}|^{p-2} \nabla u_{n_k} \nabla (u_{n_k} - u) dx + \int_\Omega \beta_k |\nabla u_{n_k}|^{\gamma-2} \nabla u_{n_k} \nabla (u_{n_k} - u) dx = o_k(1),$$

sendo

$$\alpha_k \doteq M(\mathcal{A}(u_{n_k})) \qquad \text{e} \qquad \beta_k \doteq -\phi'\Big(\|u_{n_k}\|^\gamma_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} \Big) \frac{\gamma}{s} \int_\Omega |u_{n_k}|^s dx, \tag{3.11}$$

com $\alpha_k > 0$ e $\beta_k \geq 0$. Como

$$\varphi \mapsto \int_\Omega a(|\nabla u|^p) |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v dx \qquad \text{e} \qquad \varphi \mapsto \int_\Omega |\nabla u|^{\gamma-2} \nabla u \nabla v dx$$

são funcionais lineares e contínuos então

$$\int_\Omega a(|\nabla u|^p) |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla (u_{n_k} - u) dx = o_k(1) \quad \text{e} \quad \int_\Omega |\nabla u|^{\gamma-2} \nabla u \nabla (u_{n_k} - u) dx = o_k(1).$$

Logo,

$$\int_\Omega \alpha_k \Big[\big(a(|\nabla u_{n_k}|^p) \, |\nabla u_{n_k}|^{p-2} \nabla u_{n_k} - a(|\nabla u|^p) |\nabla u|^{p-2} \nabla u \big) \big(\nabla u_{n_k} - \nabla u \big) \Big] dx$$
$$+ \int_\Omega \beta_k \Big[|\nabla u_{n_k}|^{\gamma-2} \nabla u_{n_k} - |\nabla u|^{\gamma-2} \nabla u \big) \big(\nabla u_{n_k} - \nabla u \big) \Big] dx = o_k(1). \tag{3.12}$$

De (3.12) e do Lema 1.2 resulta que

$$\int_\Omega \Big[\big(a(|\nabla u_{n_k}|^p) |\nabla u_{n_k}|^{p-2} \nabla u_{n_k} - a(|\nabla u|^p) |\nabla u|^{p-2} \nabla u \big) \big(\nabla u_{n_k} - \nabla u \big) \Big] dx = o_k(1). \tag{3.13}$$

Note que se $p \geq 2$ ou $1 < p < 2$ e $q \geq 2$, por (3.13) e Lema 1.2$(i), (iii)$ resulta que $\||\nabla u_{n_k} - \nabla u|\|_{L^\gamma(\Omega)} \to 0$, quando $k \to +\infty$, então $u_{n_k} \to u$ em $W_0^{1,\gamma}(\Omega)$. Finalmente, suponha $1 < p < q < 2$. Por (3.13) e Lema 1.2(ii) tem-se

$$\lim_{k \to +\infty} \int_\Omega \sigma(x) |\nabla u_{n_k} - \nabla u|^2 dx = 0, \tag{3.14}$$

sendo $\sigma(x) = \min\{k_0, k_2\}(p-1)(|\nabla u_{n_k}| + |\nabla u|)^{\gamma - 2}$. Usando desigualdade de Hölder com os expoentes conjugados $\frac{2}{\gamma}$ e $\frac{2}{2-\gamma}$ em (3.14) segue que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla u_{n_k} - \nabla u|^\gamma dx &\leq \left[\int_\Omega \left(\sigma(x)^{-\frac{\gamma}{2}}\right)^{\frac{2}{2-\gamma}} dx\right]^{\frac{2-\gamma}{2}} \left[\int_\Omega \left(\sigma(x)^{\frac{\gamma}{2}} |\nabla u_{n_k} - \nabla u|^\gamma\right)^{\frac{2}{\gamma}} dx\right]^{\frac{\gamma}{2}} \\
&= \|\sigma^{\frac{1}{\gamma-2}}\|_{L^\gamma(\Omega)}^{\frac{\gamma(2-\gamma)}{2}} \left[\int_\Omega \sigma(x) |\nabla u_{n_k} - \nabla u|^2 dx\right]^{\frac{\gamma}{2}} \stackrel{k \to \infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Portanto $u_{n_k} \to u$ em $W_0^{1,\gamma}(\Omega)$, quando $k \to +\infty$, e o lema está provado. $\square$

Demonstração do Teorema 3.1: A prova do teorema em questão será dividida em três passos.

Passo 1: O funcional $\bar{J}$ é coercivo.

De fato, por (a_1), $(M_2), (f_1) - (f_2)$ e imersão de Sobolev, temos

$$\begin{aligned}
\bar{J}(u) &= \mathcal{M}(\mathcal{A}(u)) - \frac{\lambda}{r+1} \left[\int_\Omega F(x, u) dx\right]^{r+1} - \phi\Big(\|u\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)}^\gamma\Big) \frac{1}{s} \int_\Omega |u|^s dx \\
&\geq \frac{m_1}{\nu} \mathcal{A}(u)^\nu - \frac{\lambda}{r+1} \left(\frac{a_2}{\alpha} \int_\Omega |u|^\alpha dx\right)^{r+1} - \phi\Big(\|u\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)}^\gamma\Big) \frac{1}{s} \int_\Omega |u|^s dx \\
&\geq c_1 \|u\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)}^{\gamma\nu} - \frac{\lambda}{r+1} \left(\frac{a_2}{\alpha}\right)^{r+1} c_2 \|u\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)}^{\alpha(r+1)} - \phi\Big(\|u\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)}^\gamma\Big) \frac{c_3}{s} \|u\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)}^s,
\end{aligned}$$

sendo $c_1, c_2, c_3 > 0$ constantes. Fazendo $\|u\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} \to +\infty$, usando a desigualdade anterior, (3.7) e (M_2) obtêm-se

$$\bar{J}(u) \geq c_1 \|u\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)}^{\gamma\nu} - \frac{\lambda}{r+1} \left(\frac{a_2}{\alpha}\right)^{r+1} c_2 \|u\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)}^{\alpha(r+1)} \to +\infty,$$

donde conclui-se que $\bar{J}$ é coercivo.

Passo 2: Para cada $k \in \mathbb{N}$, existe um subespaço k-dimensional, X_k, de $W_0^{1,\gamma}(\Omega)$ e $\rho_k > 0$ na qual $\sup\limits_{X_k \cap S_{\rho_k}} \bar{J} < 0$, sendo $S_\rho = \{u \in W_0^{1,\gamma}(\Omega); \|u\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} = \rho\}$.

Com efeito, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe um subespaço linear de $W_0^{1,\gamma}(\Omega)$, k-dimensional, X_k. Logo, todas as normas são equivalentes, então existe constante $c(k) > 0$, que depende de k, tal que

$$c(k) \|u\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)}^{\alpha(r+1)} \leq \frac{1}{r+1} \left(\frac{a_1}{\alpha}\right)^{r+1} \left(\int_\Omega |u|^\alpha dx\right)^{r+1}, \forall u \in X_k. \tag{3.15}$$

De (3.15), $(f_1)-(f_2)$ temos

$$\frac{1}{r+1}\left[\int_\Omega F(x,u)dx\right]^{r+1} \geq c(k)\|u\|^{\alpha(r+1)}_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)}.$$

Observe que para todo $u \in X_k$ com $\|u\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} \leq 1$ existem constantes $c_1(k), c_2(k) > 0$ satisfazendo

$$\mathcal{A}(u) \leq \frac{k_1c_1(k)}{p} + \frac{k_3c_2(k)}{q} := \theta(k)$$

$$\mathcal{M}(\mathcal{A}(u)) \leq \frac{ck_1c_1(k)}{p}\|u\|^p_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} + \frac{ck_3c_2(k)}{q}\|u\|^q_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)},$$

sendo $c = \sup\limits_{t\in[0,\theta(k)]} \mathcal{M}(t)$. Das informações anteriores e considerando

$$\rho_k = \min\left\{1, \left(\frac{\lambda c(k)}{\frac{2ck_1c_1(k)}{p} + \frac{2ck_3c_2(k)}{q}}\right)^{\frac{1}{p-\alpha(r+1)}}\right\},$$

juntamente com (3.6) e lembrando que $\alpha(r+1) < p$ tem-se para todo $u \in S_{\rho_k} \cap X_k$:

$$\begin{aligned}
\bar{J}(u) &\leq \mathcal{M}(\mathcal{A}(u)) - \lambda c(k)\|u\|^{\alpha(r+1)}_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)}\\
&\leq \frac{ck_1c_1(k)}{p}\|u\|^p_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} + \frac{ck_3c_2(k)}{q}\|u\|^q_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} - \lambda c(k)\|u\|^{\alpha(r+1)}_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)}\\
&\leq \rho_k^{\alpha(r+1)}\left(\left(\frac{ck_1c_1(k)}{p} + \frac{ck_3c_2(k)}{q}\right)\rho_k^{p-\alpha(r+1)} - \lambda c(k)\right)\\
&\leq -\frac{\lambda c(k)\rho_k^{\alpha(r+1)}}{2},
\end{aligned}$$

o que implica que $\sup\limits_{S_{\rho_k}\cap X_k} \bar{J}(u) < 0$.

Passo 3: Para uma infinidade de pontos críticos o funcional de energia truncado $\bar{J}$ coincide com o original J.

Temos que $\bar{J}$ é par, posto que f é ímpar na segunda variável. Além disso, $\bar{J}(0) = 0$ e pelo Lema 3.1, $\bar{J}$ satisfaz (PS). Como as demais hipóteses do Teorema 1.1 de [38] foram verificadas nos passos anteriores então obtemos uma sequência (u_{n_k}) de pontos críticos de $\bar{J}$ satisfazendo $\|u_{n_k}\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} \to 0$ quando $k \to +\infty$ e $\bar{J}(u_{n_k}) < 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Agora seja u_{n_k} ponto crítico de $\bar{J}$ para cada $k \in \mathbb{N}$, então

$$\langle \bar{J}'(u_{n_k}), v\rangle = 0 \text{ para todo } v \in W_0^{1,\gamma}(\Omega). \tag{3.16}$$

De (3.16) temos

$$
\begin{aligned}
M(\mathcal{A}(u_{n_k}))\int_\Omega a(|\nabla u_{n_k}|^p)\mid \nabla u_{n_k}|^{p-2}\nabla u_{n_k}\nabla v dx-\lambda\left[\int_\Omega F(x,u_{n_k})\right]^r\int_\Omega f(x,u_{n_k})vdx\\
-\ \phi'(\|u_{n_k}\|^\gamma_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)})\frac{\gamma}{s}\int_\Omega |u_{n_k}|^s dx\int_\Omega |\nabla u_{n_k}|^{\gamma-2}\nabla u_{n_k}\nabla v dx\\
-\ \phi(\|u_{n_k}\|^\gamma_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)})\int_\Omega |u_{n_k}|^{s-2}u_{n_k}vdx=0.
\end{aligned}
$$

Mas $\|u_{n_k}\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)}\to 0$ quando $k\to+\infty$ então existe $k_0\in\mathbb{N}$ tal que $k\geq k_0$ tem-se $\|u_{n_k}\|^\gamma_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)}<\frac{1}{2}$ e por (3.7) resulta que $\phi(\|u_{n_k}\|^\gamma_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)})=1$ e $\phi'(\|u_{n_k}\|^\gamma_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)})=0$. Logo, obtemos

$$
\begin{aligned}
0=M(\mathcal{A}(u_{n_k}))\int_\Omega a(|\nabla u_{n_k}|^p)|\nabla u_{n_k}|^{p-2}\nabla u_{n_k}\nabla v dx-\lambda\left[\int_\Omega F(x,u_{n_k})\right]^r\int_\Omega f(x,u_{n_k})vdx\\
-\int_\Omega |u_{n_k}|^{s-2}u_{n_k}vdx=\langle J'(u_{n_k}),v\rangle.
\end{aligned}
$$

Portanto, u_{n_k} é ponto crítico de J para cada $k\geq k_0$. E daí, existe sequência (u_{n_k}) de pontos críticos de J com $J(u_{n_k})\leq 0$, o que finaliza a prova. □

3.3 Demonstração do Teorema 3.2

O objetivo desta seção é provar o resultado que estabelece a existência de uma infinidade de soluções com energia positiva para todo $\lambda>0$ pequeno. Para tal faremos uso do teorema do passo da montanha simétrico de [4]. O resultado a seguir tem a finalidade de mostrar que o funcional de energia satisfaz a condição de Palais-Smale.

Lema 3.2 *Suponha $(a_1)-(a_2),(M_1),(M_4),(f_1)-(f_2)$. Então o funcional de energia J satisfaz a condição de Palais-Smale.*

Prova: Seja $(u_n)\subset W_0^{1,\gamma}(\Omega)$ sequência de Palais-Smale, isto é, $J(u_n)\to c$ em $\mathbb{R}$ para qualquer $c\in\mathbb{R}$ e $J'(u_n)\to 0$ em $(W_0^{1,\gamma}(\Omega))^*$, quando $n\to+\infty$. Suponha, por contradição, (u_n) não é limitada então existe subsequência (u_{n_k}) satisfazendo $||u_{n_k}||_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)}\to+\infty$, quando $k\to+\infty$. Note que por (a_1) existem constantes $c_1,c_2>0$ verificando

$$
c_1\mathcal{A}(u_{n_k})^{\frac{1}{\gamma}}\leq \|u_{n_k}\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)}\leq c_2\mathcal{A}(u_{n_k})^{\frac{1}{\gamma}}. \tag{3.17}
$$

Para $\gamma<\theta(r+1)<s$ dado em (M_4) tem-se

$$
\begin{aligned}
\theta(r+1)J(u_{n_k})-\langle J'(u_{n_k}),u_{n_k}\rangle=\theta(r+1)\mathcal{M}(\mathcal{A}(u_{n_k}))-M(\mathcal{A}(u_{n_k}))\int_\Omega a(|\nabla u_{n_k}|^p)|\nabla u_{n_k}|^p\\
+\lambda\left[\int_\Omega F(x,u_{n_k})\right]^r\int_\Omega\Big[f(x,u_{n_k})u_{n_k}-\theta F(x,u_{n_k})\Big]+\left[1-\frac{\theta(r+1)}{s}\right]\int_\Omega |u_{n_k}|^s. \quad (3.18)
\end{aligned}
$$

Em virtude de (a_1) obtemos

$$-M(\mathcal{A}(u_{n_k}))\int_\Omega a(|\nabla u_{n_k}|^p)|\nabla u_{n_k}|^p dx \geq -c(\gamma)M(\mathcal{A}(u_{n_k}))\mathcal{A}(u_{n_k}),$$

sendo $c(\gamma)$ dado por (3.3). Além disso, por $(f_1)-(f_2)$ existe constante $c>0$ verificando

$$\lambda\left[\int_\Omega F(x,t)\right]^r\big(f(x,t)t-\theta F(x,t)\big)+\left[1-\frac{\theta(r+1)}{s}\right]|t|^s \geq -c, \quad t\in\mathbb{R}.$$

Combinando as informações prévias e (3.18) tem-se

$$\theta(r+1)J(u_{n_k})-\langle J'(u_{n_k}),u_{n_k}\rangle \;\geq\; \theta(r+1)\mathcal{M}(\mathcal{A}(u_{n_k}))-c(\gamma)M(\mathcal{A}(u_{n_k}))\mathcal{A}(u_{n_k})-c|\Omega|,$$

e então

$$c|\Omega|+\theta(r+1)J(u_{n_k})+\epsilon_k\|u_{n_k}\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} \geq \theta(r+1)\mathcal{M}(\mathcal{A}(u_{n_k}))-c(\gamma)M(\mathcal{A}(u_{n_k}))\mathcal{A}(u_{n_k}), \tag{3.19}$$

com $\epsilon_k\to 0$, quando $k\to+\infty$. Portanto pela (3.17) e (3.19) obtemos

$$\begin{aligned} o_k(1) &\geq \frac{1}{\|u_{n_k}\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)}}\Big(\theta(r+1)\mathcal{M}(\mathcal{A}(u_{n_k}))-c(\gamma)M(\mathcal{A}(u_{n_k}))\mathcal{A}(u_{n_k})\Big)\\ &\geq \frac{\theta(r+1)\mathcal{M}(\mathcal{A}(u_{n_k}))-c(\gamma)M(\mathcal{A}(u_{n_k}))\mathcal{A}(u_{n_k})}{c_2\,\mathcal{A}(u_{n_k})^{\frac{1}{\gamma}}}. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\liminf_{k\to\infty}\frac{\theta(r+1)\mathcal{M}(\mathcal{A}(u_{n_k}))-c(\gamma)M(\mathcal{A}(u_{n_k}))\mathcal{A}(u_{n_k})}{\mathcal{A}(u_{n_k})^{\frac{1}{\gamma}}}\leq 0,$$

o que é impossível por (M_4). Portanto (u_n) é limitada e, argumentando como o Lema 3.1 é possível mostrar que (u_n) tem subsequência convergente, o que finaliza a prova. □

Demonstração do Teorema 3.2: A seguir dividiremos a prova do Teorema 3.2 em dois passos. Tais passos juntamente com o lema anterior e aplicação do Teorema do Passo da Montanha Simétrico de [4] conclui-se o desejado.

Passo 1: Suponha $\alpha(r+1)<\gamma$, $(a_1),(f_1)-(f_2)$ e (M_3'). Para $\lambda>0$ suficientemente pequeno existem $\tilde{\alpha},\rho>0$ satisfazendo $J(u)\geq\tilde{\alpha}$ se $\|u\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)}=\rho$.

De fato, por (a_1) (M_3'), $(f_1)-(f_2)$ e imersão de Sobolev temos que

$$\begin{aligned}
J(u) &= \mathcal{M}(\mathcal{A}(u)) - \frac{\lambda}{r+1}\left[\int_\Omega F(x,u)dx\right]^{r+1} - \frac{1}{s}\int_\Omega |u|^s dx \\
&\geq \tilde{n}_0\mathcal{A}(u) + \frac{\tilde{n}_1}{\sigma}\mathcal{A}(u)^\sigma - \frac{\lambda}{r+1}\left[\int_\Omega \frac{a_2}{\alpha}|u|^\alpha\right]^{r+1} - \frac{c}{s}\|u\|^s_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} \\
&\geq c_1\tilde{n}_0\|u\|^\gamma_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} + \tilde{n}_1 c_2\|u\|^{\sigma\gamma}_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} - \frac{\lambda}{r+1}\left(\frac{a_2c_3}{\alpha}\right)^{r+1}\|u\|^{\alpha(r+1)}_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} - \frac{c}{s}\|u\|^s_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)}
\end{aligned}$$

sendo $c_1, c_2, c_3, c > 0$ constantes que não dependem de u. Assim, para todo $u \in W_0^{1,\gamma}(\Omega)$ tem-se

$$J(u) \geq \|u\|^{\alpha(r+1)}_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)}\left[c_1\tilde{n}_0\|u\|^{\gamma-\alpha(r+1)}_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} + \tilde{n}_1c_2\|u\|^{\sigma\gamma-\alpha(r+1)}_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} - \frac{\lambda}{r+1}\left(\frac{a_2c_3}{\alpha}\right)^{r+1} - \frac{c}{s}\|u\|^{s-\alpha(r+1)}_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)}\right]. \tag{3.20}$$

Se $\tilde{n}_0 > 0$ escolha $0 < \rho < \left(\frac{c_1\tilde{n}_0 s}{c}\right)^{\frac{1}{s-\gamma}}$ logo $\eta(\rho) := c_1\tilde{n}_0\rho^{\gamma-\alpha(r+1)} - \frac{c}{s}\rho^{s-\alpha(r+1)} > 0$. Então para todo $0 < \lambda < \frac{\eta(\rho)(r+1)\alpha^{r+1}}{(a_2c_3)^{r+1}}$ temos de (3.20)

$$J(u) \geq \rho^{\alpha(r+1)}\left[\eta(\rho) - \frac{\lambda}{r+1}\left(\frac{a_2c_3}{\alpha}\right)^{r+1}\right] > 0,$$

quando $\|u\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} = \rho$.

Se $\tilde{n}_0 = 0$ escolha $0 < \rho < \left(\frac{c_2\tilde{n}_1 s}{c}\right)^{\frac{1}{s-\sigma\gamma}}$ logo $\eta(\rho) := c_2\tilde{n}_1\rho^{\sigma\gamma-\alpha(r+1)} - \frac{c}{s}\rho^{s-\alpha(r+1)} > 0$. Então para todo $0 < \lambda < \frac{\eta(\rho)(r+1)\alpha^{r+1}}{(a_2c_3)^{r+1}}$ temos de (3.20)

$$J(u) \geq \rho^{\alpha(r+1)}\left[\eta(\rho) - \frac{\lambda}{r+1}\left(\frac{a_2c_3}{\alpha}\right)^{r+1}\right] > 0,$$

quando $\|u\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} = \rho$.

Passo 2: Suponha $\alpha(r+1) < \gamma$, $(a_1), (f_1)-(f_2)$ e (M_2'). Para todo subespaço de dimensão finita $Z \subset W_0^{1,\gamma}(\Omega)$, existe $\zeta = \zeta(Z)$ na qual $J(u) \leq 0$ se $\|u\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} \geq \zeta$.

Com efeito, utilizando (a_1), $(f_1)-(f_2)$, (M_2'), imersão de Sobolev e equivalência de normas em espaços de dimensão finita, então para todo $u \in Z$ temos que

$$\begin{aligned}
J(u) &= \mathcal{M}(\mathcal{A}(u)) - \frac{\lambda}{r+1}\left[\int_\Omega F(x,u)dx\right]^{r+1} - \frac{1}{s}\int_\Omega |u|^s dx \\
&\leq m_0\mathcal{A}(u) + \frac{\tilde{m}}{\mu}\mathcal{A}(u)^\mu - \frac{\lambda}{r+1}\left[\frac{a_1}{\alpha}\int_\Omega |u|^\alpha dx\right]^{r+1} - \frac{c_4}{s}\|u\|^s_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} \\
&\leq c_1\|u\|^\gamma_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} + c_2\|u\|^{\gamma\mu}_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} - \frac{\lambda}{r+1}\left(\frac{a_1c_3}{\alpha}\right)^{r+1}\|u\|^{\alpha(r+1)}_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} - \frac{c_4}{s}\|u\|^s_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)},
\end{aligned}$$

sendo $c_1, c_2, c_3, c_4 > 0$ constantes que independem de u. Pela desigualdade anterior, o fato de $\alpha(r+1) < \gamma$ e (M_2') obtemos

$$\frac{J(u)}{\|u\|^s_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)}} < o(1) - \frac{c_4}{s}$$

e então

$$\limsup_{\|u\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} \to +\infty} \frac{J(u)}{\|u\|^s_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)}} < -\frac{c_4}{s},$$

o que implica que $J(u) < 0$.

3.4 Demonstração do Teorema 3.3

Com o objetivo de provar o Teorema 3.3 introduziremos o seguinte funcional de energia

$$J_+(u) = \mathcal{M}(\mathcal{A}(u)) - \frac{\lambda}{r+1}\left[\int_\Omega F(x,u^+)dx\right]^{r+1} - \frac{1}{s}\int_\Omega |u^+|^s dx, \tag{3.21}$$

sendo $u^+ = \max\{u, \mathcal{O}\}$ a parte positiva da função u. As hipóteses sobre a, f, M no início do capítulo nos garante que $J_+ \in C^1(W_0^{1,\gamma}(\Omega), \mathbb{R})$ e sua derivada de Fréchet é

$$\langle J_+'(u), \varphi\rangle = M(\mathcal{A}(u))\int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\varphi dx - \lambda\left[\int_\Omega F(x,u^+)dx\right]^r \int_\Omega f(x,u^+)\varphi dx - \int_\Omega (u^+)^{s-1}\varphi dx, \tag{3.22}$$

para todo $u, \varphi \in W_0^{1,\gamma}(\Omega)$.

Observação 3.3 *Os pontos críticos u de (3.21) são soluções não negativas (fracas) de (3.1). De fato, suponha que u seja ponto crítico não trivial de* (3.21) *então testando $\varphi = u^-$ em* (3.22) *temos*

$$M(\mathcal{A}(u))\int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla u^- dx - \lambda\left[\int_\Omega F(x,u^+)dx\right]^r \int_\Omega f(x,u^+)u^- dx - \int_\Omega (u^+)^{s-1}u^- dx = 0.$$

Mas,

$$\left[\int_\Omega F(x,u^+)dx\right]^r \int_\Omega f(x,u^+)u^- dx = 0 \qquad e \qquad \int_\Omega (u^+)^{s-1}u^- dx = 0$$

então obtemos

$$M(\mathcal{A}(u))\int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u^-|^p dx = 0,$$

donde segue que $\int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u^-|^p dx = 0$*, já que* $M(\mathcal{A}(u)) > 0$ *para* $u \neq 0$*. Agora usando* (a_1)*, obtemos que* $\|u^-\|^\gamma_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} = 0$*, isto é,* $u = u^+$*. Portanto,* $u \geq 0$*.*

Introduziremos duas hipóteses adicionais sobre a função a que compõe o campo vetorial $\mathbb{R}^N \ni y \longmapsto a(|y|^p)|y|^{p-2}y \in \mathbb{R}^N$ com o objetivo de obter mais regularidade para as soluções de (3.1). Seja $g \in C^1(0, +\infty)$, com $g(t) > 0$ para $t > 0$, satisfazendo

$$0 < c_0 \leq \frac{tg'(t)}{g(t)} \leq c_1, \quad \text{e} \quad c_2 t^{\gamma-1} \leq g(t) \leq c_3(1 + t^{\gamma-1}), \quad \forall t > 0$$

para algum $c_0, c_1, c_2, c_3 > 0$ e γ definido em (3.2). Além de (a_1) e (a_2) assumiremos nesta seção

(a_3) Existe $c_4 > 0$ verificando

$$\|D(a(|y|^p)|y|^{p-2}y)\|_{\mathbb{R}^{N^2}} \leq c_4 \frac{g(|y|)}{|y|} \quad \forall y \in \mathbb{R}^N \backslash \{0\}.$$

(a_4) $$< D(a(|y|^p)|y|^{p-2}y)\xi, \xi > \geq \frac{g(|y|)}{|y|}|\xi|^2, \qquad \forall y \in \mathbb{R}^N \backslash \{0\},\ \forall \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Observação 3.4 *As hipóteses* (a_3) *e* (a_4) *são motivadas para que a teoria de regularidade do Lieberman [39] posa ser aplicado e consequentemente o princípio do máximo de Pucci e Serrin [46].*

Lema 3.3 *Assuma* $(a_1) - (a_2)$*,* $(f_1) - (f_2)$*,* (M_1) *e* (M_4)*. Então, o funcional de energia* J_+ *satisfaz a condição de Palais-Smale.*

Prova: É análoga a prova do Lema 3.2, observando que se $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,\gamma}(\Omega)$, quando $n \to +\infty$ então $u_n^+ \rightharpoonup u^+$ e $u_n^- \rightharpoonup u^-$ em $W_0^{1,\gamma}(\Omega)$ quando $n \to +\infty$. □

Demonstração do Teorema 3.3: Será dividida em três passos:

Passo 1: Obtenção da solução com energia positiva. Esse passo será dividido em duas etapas:

Etapa 1: Suponha $\alpha(r+1) < \gamma$, $(a_1), (f_1) - (f_2)$ e (M_3''). Então para todo $\lambda > 0$ suficientemente pequeno existem $\rho, \tilde{\alpha} > 0$ tais que $J_+(u) \geq \tilde{\alpha} > 0$ para todo $u \in W_0^{1,\gamma}(\Omega)$ com $\|u\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} = \rho$.
A prova é análoga a prova do Passo 1 da seção anterior, usando $\|u^+\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} \leq \|u\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)}$ e portanto será omitida.

Etapa 2: Assuma $\alpha(r+1) < \gamma$, $(a_1), (f_1) - (f_2)$ e (M_2'). Existe $e \in W_0^{1,\gamma}(\Omega)$ com $\|e\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} > \rho$ tal que $J_+(e) < 0$.

De fato, fixe $\varphi \in W_0^{1,\gamma}(\Omega)$ e seja $t > 1$ então $\varphi t \in W_0^{1,\gamma}(\Omega)$. Como $(\varphi t)^+ = t\varphi^+$ têm-se

$$\begin{aligned} J_+(\varphi t) &= \mathcal{M}(\mathcal{A}(\varphi t)) - \frac{\lambda}{r+1}\left[\int_\Omega F(x,(\varphi t)^+)dx\right]^{r+1} - \frac{1}{s}\int_\Omega |(\varphi t)^+|^s dx \\ &\leq m_0\mathcal{A}(\varphi t) + \frac{\tilde{m}}{\mu}\mathcal{A}(\varphi t)^\mu - \frac{\lambda}{r+1}\left[\frac{a_1}{\alpha}\int_\Omega |(\varphi t)^+|^\alpha dx\right]^{r+1} - \frac{1}{s}\int_\Omega |(\varphi t)^+|^s dx \\ &\leq m_0\mathcal{A}(\varphi t) + \frac{\tilde{m}}{\mu}\mathcal{A}(\varphi t)^\mu - \frac{\lambda a_1^{r+1}c_3}{(r+1)\alpha^{r+1}} t^{\alpha(r+1)}\|\varphi^+\|_{L^s(\Omega)}^{\alpha(r+1)} - \frac{c_4 t^s}{s}\|\varphi^+\|_{L^s(\Omega)}^s \\ &\leq c_1 t^\gamma \|\varphi\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)}^\gamma + c_2 t^{\gamma\mu}\|\varphi\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)}^{\gamma\mu} - \frac{\lambda a_1^{r+1}c_3}{(r+1)\alpha^{r+1}} t^{\alpha(r+1)}\|\varphi^+\|_{L^s(\Omega)}^{\alpha(r+1)} \\ &\quad - \frac{c_4 t^s}{s}\|\varphi^+\|_{L^s(\Omega)}^s, \end{aligned}$$

sendo $c_1, c_2, c_3, c_4 > 0$ constantes que independem de φ. Por (M_2') segue que $J_+(\varphi t) < 0$ quando $t \to +\infty$. Logo, existe $e = \varphi t$ com $\|e\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} > \rho$ e $J_+(e) < 0$, o que prova a Etapa 2.

Em virtude das etapas acima juntamente com o Lema 3.3 podemos aplicar o Teorema do Passo da Montanha versão de [52] e concluir que existe $u \in W_0^{1,\gamma}(\Omega)$ tal que $J'_+(u) = 0$ e $J_+(u) = \beta$ com $\beta \geq \tilde{\alpha} > 0$ donde segue que $J_+(u) > 0$.

Passo 2: Obtenção da solução com energia negativa.

Seja $\rho > 0$ dado pela Etapa 1 do passo anterior, defina

$$\bar{B}_\rho = \{u \in W_0^{1,\gamma}(\Omega); \|u\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} \leq \rho\} \qquad \text{e} \qquad \partial B_\rho = \{u \in W_0^{1,\gamma}(\Omega); \|u\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} = \rho\}.$$

Temos que $J_+ \in C^1(\bar{B}_\rho, \mathbb{R})$. Portanto, J_+ é semicontínua inferiormente e limitado inferiormente sobre $\bar{B}_\rho$.

Afirmação 1: $C_1 = \inf\{J_+(u); u \in \bar{B}_\rho\} < 0$.

De fato, seja $v \in W_0^{1,\gamma}(\Omega)$ fixado e $t > 0$, então por $(a_1), (M_3'')$, $(f_1) - (f_2)$ e do fato $(tv)^+ = tv^+$, têm-se

$$\begin{aligned} J_+(tv) &= \mathcal{M}(\mathcal{A}(tv)) - \frac{\lambda}{r+1}\left[\int_\Omega F(x,(tv)^+)dx\right]^{r+1} - \frac{1}{s}\int_\Omega |(tv)^+|^s dx \\ &\leq n_0\mathcal{A}(tv) + \frac{n_1}{\beta}\mathcal{A}(tv)^\beta - \frac{\lambda}{r+1}\left[\frac{a_1}{\alpha}\int_\Omega |(tv)^+|^\alpha dx\right]^{r+1} \\ &\leq c_1 t^\gamma \|v\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)}^\gamma + c_2 t^{\gamma\beta}\|v\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)}^{\gamma\beta} - \frac{\lambda}{r+1}\left(\frac{a_1}{\alpha}\right)^{r+1} t^{\alpha(r+1)}\left[\int_\Omega |v^+|^\alpha dx\right]^{r+1} < 0, \end{aligned}$$

para t suficientemente pequeno, já que $\alpha(r+1) < \gamma$ e $\beta p > \alpha(r+1)$ e sendo $c_1, c_2 > 0$ constantes que independem de v. Escolhendo t_0 suficientemente pequeno de tal forma que satisfaça $J_+(t_0 v) < 0$ e $\|t_0 v\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} \leq \rho$, segue que existe $e = t_0 v$ com $e \in \bar{B}_\rho$ tal que $J_+(e) < 0$, donde prova a afirmação.

Aplicando o princípio de Ekeland [23] temos que existe $u_n \in W_0^{1,\gamma}(\Omega)$ tal que

$$C_1 \leq J_+(u_n) \leq C_1 + \frac{1}{n}, \tag{3.23}$$

e

$$J_+(w) \geq J_+(u_n) - \frac{1}{n}\|u_n - w\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} \text{ para todo } w \in \bar{B}_\rho. \tag{3.24}$$

Observe que $\|u_n\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} < \rho$ para $n \geq 1$ suficientemente grande. Com efeito, caso contrário, se $\|u_n\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} = \rho$ para uma quantidade infinita de índices n, sem perda de generalidade, podemos supor que $\|u_n\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} = \rho$ para todo $n \geq 1$ e pela Etapa 1 segue que $J_+(u_n) \geq \tilde{\alpha} > 0$. Tomando $n \to +\infty$ e combinando (3.23) tem-se $0 > C_1 \geq \tilde{\alpha} > 0$, o que é uma contradição.

Afirmação 2: $J'_+(u_n) \to 0$ em $(W_0^{1,\gamma}(\Omega))^*$ quando $n \to +\infty$.

De fato, seja $u \in W_0^{1,\gamma}(\Omega)$ com $\|u\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} = 1$ fixado. Para cada $n \geq 1$ existe $\delta_n > 0$ tal que $w_n \doteq u_n + \delta_n u$ satisfaz $\|w_n\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} \leq \|u_n\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} + \delta_n < \rho$. Para $0 < t < \delta_n$ temos que $u_n + tu \in \bar{B}_\rho$. Logo de (3.24) temos

$$\frac{J_+(u_n + tu) - J_+(u_n)}{t} \geq -\frac{1}{n}.$$

Fazendo $t \to 0^+$, tem-se

$$\langle J'_+(u_n), u\rangle \geq -\frac{1}{n} \tag{3.25}$$

e trocando u por $-u$ obtemos

$$\langle J'_+(u_n), u\rangle \leq \frac{1}{n}. \tag{3.26}$$

Então de (3.25) e (3.26),

$$\|J'_+(u_n)\|_{(W_0^{1,\gamma}(\Omega))^*} = \sup_{\|u\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)}=1} |\langle J'_+(u_n), u\rangle| \leq \frac{1}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{3.27}$$

Agora como (u_n) é uma sequência de Palais-Smale no nível C_1 por (3.24), (3.27) e Lema 3.3 temos a existência de $u \in W_0^{1,\gamma}(\Omega)$ e uma subsequência (u_{n_k}) satisfazendo $u_{n_k} \to u$ em $W_0^{1,\gamma}(\Omega)$, quando $k \to \infty$. Portanto $J'_+(u) = 0$ (u é uma solução fraca para (3.1)) e $J_+(u) = C_1 < 0$.

Passo 3: Positividade das soluções dos passos anteriores.

Pelo Teorema 7.1 de [40] tem-se que $u \in L^\infty(\Omega)$. Então, aplicando o resultado de regularidade de [39] obtemos que $u \in C^{1,\beta}(\Omega)$ para algum $\beta > 0$.

Temos que $t \mapsto a(t^p)t^{p-1}$ é estritamente crescente sobre $(0,\infty)$ e $a(t^p)t^{p-1} \to 0^+$ quando $t \to 0$. Além disso,

$$B(x,u) = \frac{\lambda f(x,u)\left[\int_\Omega F(x,u)\right]^r + |u|^{s-1}}{M(\mathcal{A}(u))} \in L^\infty_{loc}(\Omega \times \mathbb{R}^+),$$

e $B(x,u) \geq 0$. Então todas as condições do princípio do máximo da Pucci e Serrin (Ver Apêndice) são verificadas donde resulta que $u(x) > 0$ para todo $x \in \Omega$.

Capítulo

4

Infinitas soluções para problemas não locais e não quadráticos no inifinito.

Neste capítulo o objetivo é tratar a existência de infinitas soluções de energia positiva para o problema

$$\begin{cases} -M(\mathcal{A}(u))\mathrm{div}(a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f(x,u)\left[\int_\Omega F(x,u)\right]^r & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.1}$$

em que f é superlinear sem que satisfaça a condição (AR) de Ambrosetti-Rabinowitz. De fato, assumiremos f superlinear satisfazendo a condição de não quadraticidade introduzida por Costa-Magalhães em [19]. Aqui assim como no Capítulo 2, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$ um domínio limitado, $1 < p < N$, $r \geq 0$ fixado e $F(x,u) = \int_0^u f(x,\tau)d\tau$. A função $a : [0,\infty) \to (0,\infty)$ de classe C^1 satisfazendo

(a_1) Existem $k_0, k_1, k_2 > 0$, $k_3 \geq 0$, $q > p$ tais que

$$k_0 + H(k_3)k_2 t^{\frac{q-p}{p}} \leq a(t) \leq k_1 + k_3 t^{\frac{q-p}{p}},$$

com $H(\xi) = 1$ se $\xi > 0$ e $H(\xi) = 0$, se $\xi = 0$.

(a_2) (i) A função $a(t^p)t^{p-2}$ é não decrescente para $p \geq 2$.

(ii) E a função $a(t)$ é não decrescente para $1 < p < 2$,

e o operador $\mathcal{A}$ é definido por

$$\mathcal{A}(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega A(|\nabla u|^p)dx, \text{ sendo } A(t) = \int_0^t a(\xi)d\xi.$$

A função $f : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua satisfazendo:

(f_1') Existem constantes $a_1, a_2 > 0$ e $s \in (\gamma, \gamma^*)$ verificando

$$a_1 t^{s-1} \leq f(x,t) \leq a_2 t^{s-1} \text{ para todo } (x,t) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^+.$$

sendo,

$$\gamma = (1 - H(k_3))p + H(k_3)q, \tag{4.2}$$

com $H(k_3)$ como na hipótese (a_1).

(f_2) $f(x, -t) = -f(x, t)$ para todo $(x, t) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}$.

$(CM1)$ Existem $\bar{\mu} > 0$ e $a > 0$ tais que

$$\liminf_{|t| \to +\infty} \frac{tf(x, t) - \gamma F(x, t)}{|t|^{\bar{\mu}}} \geq a > 0 \text{ para todo } x \in \Omega.$$

$(CM2)$ Existe $\bar{q} \in \mathbb{R}$ tal que

$$\limsup_{|t| \to +\infty} \frac{F(x, t)}{|t|^{\bar{q}}} \leq b < \infty \text{ para todo } x \in \Omega.$$

A condição $(CM1)$ foi introduzida em [19] e é conhecida como condição de não quadraticidade de Costa-Magalhães. Vale ressaltar que a condição $(CM1)$ é uma condição de não quadraticidade no infinito, enquanto a $(CM2)$ de superlinearidade no infinito. As condições $(CM1)$ e $(CM2)$ com uma restrição adicional e técnica no valor $\bar{\mu}$ são importantes para mostrar que o funcional energia associado a (4.1) satisfaz a condição de Cerami (Ver [54]).

Vale ressaltar que $(CM1)$ é uma condição de não quadraticidade e não implica necessariamente superlinearidade. Por exemplo, para $\gamma = 2$ e considerando $\alpha \in (0, 1)$,

$$f(x, t) = \begin{cases} \dfrac{t^{\alpha+1}}{1 + t^{\alpha}}, & \text{para } \ t \geq 0 \\ 0, & \text{para } \ t \leq 0 \end{cases},$$

temos que $(CM1)$ é verificada.

De fato, temos que

$$f_t'(x, t) = \frac{(\alpha + 1 + t^{\alpha})t^{\alpha}}{(1 + t^{\alpha})^2},$$

para todo $t \geq 0$ e $x \in \Omega$. Além disso,

$$f_t'(x, t)t - f(x, t) = \frac{\alpha t^{\alpha+1}}{(1 + t^{\alpha})^2} \geq 0,$$

para todo $t \geq 0$ e $x \in \Omega$. Logo, $\lim\limits_{t \to +\infty} \big(f_t'(x, t)t - f(x, t)\big) = +\infty$ uniformemente em $x \in \Omega$ se $\alpha \in (0, 1)$, isto é, existe $K > 0$ e $T = T(K) > 0$ verificando

$$f_t'(x, t)t - f(x, t) \geq K \quad \forall t \geq T \ \text{ e } x \in \Omega.$$

Então, para todo $t \geq T$, integrando por partes, temos

$$
\begin{aligned}
f(x,t)t - 2F(x,t) &= f(x,t)t - 2\int_0^t f(x,s)ds \\
&= f(x,t)t - \left[f(x,s)s|_0^t - \int_0^t f_s'(x,s)sds \right] - \int_0^t f(x,s)ds \\
&= \int_0^t \left[f_s'(x,s)s - f(x,s) \right] ds \\
&\geq \int_T^t \left[f_s'(x,s)s - f(x,s) \right] ds \\
&\geq K(t-T).
\end{aligned}
$$

Logo, para $0 < \bar{\mu} < 1$ temos

$$
\frac{f(x,t)t - 2F(x,t)}{|t|^{\mu}} \geq \frac{K(t-T)}{|t|^{\bar{\mu}}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty.
$$

Portanto, $(CM1)$ é satisfeita, porém f é sublinear.

Outras condições implicam superlinearidade sem que a condição (AR) seja satisfeita. Neste contexto, podemos mencionar [43], [53], dentre outros.

O resultado deste capítulo foi obtido via teorema do passo da montanha simétrico [49] usando a condição de compacidade de Cerami, isso é possível pois a prova do lema da deformação usado em [49] também se verifica com a condição de Cerami (ver Teorema 1.3 de [9]).

Tendo em vista as considerações acima, temos o seguinte resultado:

Teorema 4.1 *Assuma* $(a_1)-(a_2), (f_1)-(f_2), (CM1)-(CM2)$*, com* $\bar{\mu} > \dfrac{N(\bar{q}-\gamma)}{\gamma}$ *então o problema* (4.1) *com* $M(t) = t^{\alpha}$*, sendo*

$$
\max\left\{ \frac{\gamma^*(\bar{q}-\bar{\mu})(r+1)}{\gamma(\gamma^*-\bar{\mu})}, \frac{1}{p} \right\} - 1 < \alpha < \min\left\{ \frac{s(r+1)}{\gamma}, \frac{\gamma(r+1)}{c(\gamma)} \right\} - 1,
$$

possui uma sequência (w_j) *de soluções satisfazendo* $J(w_j) \to +\infty$*, quando* $j \to +\infty$*, desde que* $\gamma \leq c(\gamma)$ *sendo* $c(\gamma)$ *dado por* (2.2).

Observação 4.1 *Mostraremos que o problema* (4.1) *possui infintas soluções quando* $M(t) = t^{\alpha}$*, com*

$$
\max\left\{ \frac{\gamma^*(\bar{q}-\bar{\mu})(r+1)}{\gamma(\gamma^*-\bar{\mu})}, \frac{1}{p} \right\} - 1 < \alpha < \min\left\{ \frac{s(r+1)}{\gamma}, \frac{\gamma(r+1)}{c(\gamma)} \right\} - 1,
$$

Da afirmação na prova do Teorema 4.1 podemos caracterizar este intervalo como

$$
\max\left\{ \frac{t\bar{q}(r+1)}{\gamma}, \frac{1}{p} \right\} - 1 < \alpha < \min\left\{ \frac{s(r+1)}{\gamma}, \frac{\gamma(r+1)}{c(\gamma)} \right\} - 1,
$$

sendo $\dfrac{t\bar{q}}{\gamma} < 1$. *Logo, para* $r \geq 0$ *suficientemente pequeno, temos* $\alpha < 0$ *e a função*

$$M(t) = \begin{cases} t^{k-1}, & para\ t \neq 0 \\ \\ 0, & para\ t = 0 \end{cases},$$

é uma função tipo Kirchhoff descontínua, singular e degenerada para o qual o teorema se aplica. Também para certos $r > 0$ *temos que* $\alpha > 0$ *e a função* $M(t) = t^{\alpha}$ *é uma função tipo Kirchhoff degenerada mas não singular para o qual vale o teorema.*

4.1 Formulação Variacional

Associamos a (4.1) o funcional energia $J : W_0^{1,\gamma}(\Omega) \to \mathbb{R}$, dado por:

$$J(u) = \mathcal{M}(\mathcal{A}(u)) - \frac{1}{r+1}\left[\int_\Omega F(x,u)dx\right]^{r+1}, \tag{4.3}$$

sendo $\mathcal{M}(t) = \displaystyle\int_0^t M(\tau)d\tau$ e $F(x,u) = \displaystyle\int_0^u f(x,\tau)d\tau$.

Das hipóteses sobre a, f e M no Teorema 4.1 (cf. também Lema 1.1 e Observação 1.1) segue que $J \in C^1(W_0^{1,\gamma}(\Omega), \mathbb{R})$ e sua derivada de Fréchet é:

$$\langle J'(u), v\rangle = M(\mathcal{A}(u))\int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v dx - \left[\int_\Omega F(x,u)dx\right]^r \int_\Omega f(x,u)v dx,$$

para todo $u, v \in W_0^{1,\gamma}(\Omega)$, sendo $\langle\cdot,\cdot\rangle$ a dualidade entre $(W_0^{1,\gamma}(\Omega))^*$ e $W_0^{1,\gamma}(\Omega)$. O espaço de Sobolev $W_0^{1,\gamma}(\Omega)$ será denotado por:

$$\|u\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^\gamma dx\right)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

A condição de compacidade introduzida por Cerami é mais fraca que a usual condição de compacidade de Palais-Smale. A definição é a seguinte

Definição 4.1 *Seja* X *um espaço de Banach. Dizemos que um funcional* I *satifaz a condição de Cerami no nível* $c \in \mathbb{R}$ *(abreviadamente* $(Ce)_c$*) se toda sequência* $(u_n) \subset X$ *com* $I(u_n) \to c$ *e* $\|I'(u_n)\|_{X^*}(1 + \|u_n\|_X) \to 0$ *tem uma subsequência convergente. Se* I *satisfaz a condição de Cerami em todo nível* $c \in \mathbb{R}$*, dizemos que* I *satisfaz a condição de Cerami.*

4.2 Demonstração do Teorema 4.1

Esta seção tem como objetivo provar o Teorema 4.1 que estabelece a existência de uma infinidade de soluções de energia positiva para o problema (4.1).

Lema 4.1 *Assuma* $(a_1)-(a_2)$, $(f_1)-(f_2)$, $(CM1)-(CM2)$ *com* $\bar{\mu} > \dfrac{N}{\gamma}(\bar{q}-\gamma)$. *Seja* $M(t)=t^{\alpha}$, *com*

$$\max\left\{\frac{\gamma^*(\bar{q}-\bar{\mu})(r+1)}{\gamma(\gamma^*-\bar{\mu})}, \frac{1}{p}\right\} - 1 < \alpha < \min\left\{\frac{s(r+1)}{\gamma}, \frac{\gamma(r+1)}{c(\gamma)}\right\} - 1,$$

então o funcional energia J *satisfaz a condição de Cerami, sendo* $c(\gamma)$ *dado por (2.2).*

Prova: De $(CM1)$ existe $a_2>0$ verificando

$$a_1|t|^{\bar{\mu}} - a_2 \leq tf(x,t) - \gamma F(x,t), \text{ para todo } (x,t)\in\bar{\Omega}\times\mathbb{R}. \tag{4.4}$$

Seja $(u_n)\subset W_0^{1,\gamma}(\Omega)$ sequência de Cerami no nível c, isto é,

$$\lim_{n\to+\infty} J(u_n) = c \quad \text{e} \quad \lim_{n\to+\infty} \|J^{'}(u_n)\|_{(W_0^{1,\gamma}(\Omega))^*}(1+\|u_n\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)}) = 0,$$

mostraremos que (u_n) é limitada. Supondo o contrário, passando a uma subsequência, se necessário, temos que $\|u_n\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} \to +\infty$. Logo,

$$\begin{aligned}\gamma(r+1)J(u_n) - \langle J^{'}(u_n),u_n\rangle &= \gamma(r+1)\frac{(\mathcal{A}(u_n))^{\alpha+1}}{\alpha+1} - (\mathcal{A}(u_n))^{\alpha}\int_\Omega a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^p dx \\ &+ \left[\int_\Omega F(x,u_n)dx\right]^r\left(\int_\Omega f(x,u_n)u_n dx - \gamma\int_\Omega F(x,u_n)dx\right)\end{aligned} \tag{4.5}$$

Mas,

$$-(\mathcal{A}(u_n))^{\alpha}\int_\Omega a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^p dx \geq -c(\gamma)(\mathcal{A}(u_n))^{\alpha+1}, \tag{4.6}$$

sendo $c(\gamma)=\dfrac{pk_0}{k_1}$ se $H(k_3)=0$ e $c(\gamma)=\dfrac{\max\{k_1,k_3\}}{\min\left\{\frac{k_0}{p},\frac{k_2}{q}\right\}}$, se $H(k_3)=1$.

De $(4.4)-(4.6)$ temos

$$\begin{aligned}\gamma(r+1)J(u_n) - \langle J^{'}(u_n),u_n\rangle &\geq (\mathcal{A}(u_n))^{\alpha+1}\left(\frac{\gamma(r+1)}{\alpha+1} - c(\gamma)\right) \\ &+ \left[\int_\Omega F(x,u_n)dx\right]^r\left(a_1\int_\Omega |u_n|^{\bar{\mu}}dx - a_2|\Omega|\right).\end{aligned} \tag{4.7}$$

Afirmamos que $\int_\Omega F(x,u_n)dx$ não converge para zero. De fato, assumindo que $\int_\Omega F(x,u_n) \to 0$, quando $n \to +\infty$, teríamos por (2.12) e (4.3):

$$o_n(1) + J(u_n) = \mathcal{M}(\mathcal{A}(u_n)) \geq \mathcal{M}\left(\frac{1}{C^\gamma}\|u\|^\gamma_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)}\right) \to +\infty$$

Logo, tem-se, passando a uma subsequência se necessário, $\int_\Omega F(x,u_n)dx \to +\infty$ ou $\int_\Omega F(x,u_n)dx \to c$ para algum $c > 0$.

Multiplicando por $\left[\int_\Omega F(x,u_n)dx\right]^{-r}$ a equação (4.7), obtemos

$$o_n(1) = \frac{(\mathcal{A}(u_n))^{\alpha+1}}{\left[\int_\Omega F(x,u_n)dx\right]^r}\left[\frac{\gamma(r+1)}{\alpha+1} - c(\gamma)\right] + \left[a_1\int_\Omega |u_n|^{\bar{\mu}}dx - a_2|\Omega|\right]. \tag{4.8}$$

Como $\frac{\gamma(r+1)}{\alpha+1} - c(\gamma) > 0$, segue de (4.8)

$$o_n(1) \geq a_1\int_\Omega |u_n|^{\bar{\mu}}dx - a_2|\Omega|.$$

Portanto, (u_n) é limitada em $L^{\bar{\mu}}(\Omega)$.

A hipótese $(CM2)$ e a continuidade da F nos fornecem constantes $d_1, d_2 > 0$ satisfazendo

$$F(x,t) \leq d_1|t|^{\bar{q}} + d_2 \text{ para todo } (x,t) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}. \tag{4.9}$$

Assim, de (4.3) e (4.9) temos que

$$\begin{aligned}\frac{(\mathcal{A}(u_n))^{\alpha+1}}{\alpha+1} - J(u_n) &= \frac{1}{r+1}\left[\int_\Omega F(x,u_n)dx\right]^{r+1} \\ &\leq \frac{1}{r+1}\left[d_1\int_\Omega |u_n|^{\bar{q}}dx + d_2|\Omega|\right]^{r+1} \\ &\leq \frac{d_1 c}{r+1}\|u_n\|^{\bar{q}(r+1)}_{L^{\bar{q}}(\Omega)} + \frac{(d_2|\Omega|)^{r+1}c}{r+1},\end{aligned} \tag{4.10}$$

sendo $c > 0$ constante.

Como $u_n \in L^{\bar{\mu}}(\Omega) \cap L^{\gamma^*}(\Omega)$ então para algum $t \in (0,1)$ segue da desigualdade de interpolação ([3]) que

$$\|u_n\|^{\bar{q}(r+1)}_{L^{\bar{q}}(\Omega)} \leq \|u_n\|^{t\bar{q}(r+1)}_{L^{\gamma^*}(\Omega)}\|u_n\|^{(1-t)\bar{q}(r+1)}_{L^{\bar{\mu}}(\Omega)}. \tag{4.11}$$

Temos também da imersão $W_0^{1,\gamma}(\Omega) \hookrightarrow L^{\gamma^*}(\Omega)$ que

$$\|u_n\|_{L^{\gamma^*}(\Omega)}^{t\bar{q}(r+1)} \leq m_1 \|u_n\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)}^{t\bar{q}(r+1)}. \tag{4.12}$$

Note que existem constantes $m_2, m_3 > 0$ satisfazendo

$$\|u_n\|_{L^{\bar{\mu}}(\Omega)}^{(1-t)\bar{q}(r+1)} \leq m_2 \qquad \text{e} \qquad J(u_n) \leq m_3. \tag{4.13}$$

Portanto, de (4.10)-(4.13), conclui-se

$$\begin{aligned}
\frac{\mathcal{A}(u_n)^{\alpha+1}}{\alpha+1} &\leq \frac{d_1 c}{r+1}\|u_n\|_{L^{\bar{q}}(\Omega)}^{\bar{q}(r+1)} + \frac{(d_2|\Omega|)^{r+1}c}{r+1} + J(u_n) \\
&\leq \frac{d_1 c}{r+1}\|u_n\|_{L^{\gamma^*}(\Omega)}^{t\bar{q}(r+1)} \|u_n\|_{L^{\bar{\mu}}(\Omega)}^{(1-t)\bar{q}(r+1)} + \frac{(d_2|\Omega|)^{r+1}c}{r+1} + m_3 \\
&\leq \frac{d_1 c\, m_1 m_2}{r+1}\|u_n\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)}^{t\bar{q}(r+1)} + c_1, \quad \text{com } c_1 = \frac{(d_2|\Omega|)^{r+1}c}{r+1} + m_3.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Além disso,

$$c_2\|u_n\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)}^{t\bar{q}(r+1)} \leq \mathcal{A}(u_n)^{\frac{t\bar{q}(r+1)}{\gamma}} \leq c_3\|u_n\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)}^{t\bar{q}(r+1)}. \tag{4.15}$$

Logo, de (4.14) e (4.15), temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\alpha+1}(\mathcal{A}(u_n))^{\alpha+1-\frac{t\bar{q}(r+1)}{\gamma}} &\leq \frac{1}{c_2\|u_n\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)}^{t\bar{q}(r+1)}}\left[\frac{d_1 c\, m_1 m_2}{r+1}\|u_n\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)}^{t\bar{q}(r+1)} + c_1\right] \\
&= \frac{d_1 c\, m_1 m_2}{c_2(r+1)} + o_n(1).
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Afirmação: $t\bar{q} < \gamma$.
De fato, pela desigualdade de interpolação ([3]) temos:

$$\frac{\bar{q}(r+1)}{\bar{q}} = \frac{t\bar{q}(r+1)}{\gamma^*} + \frac{(1-t)\bar{q}(r+1)}{\bar{\mu}}$$

e portanto,

$$t\bar{q} = \frac{\gamma^*(\bar{q}-\bar{\mu})}{\gamma^*-\bar{\mu}}.$$

Por outro lado, $\bar{\mu} > \frac{N}{\gamma}(\bar{q}-\gamma)$. Então,

$$\begin{aligned}
\gamma^2\bar{\mu} > \gamma N(\bar{q}-\gamma) &\iff \frac{\gamma^2\bar{\mu}}{N-\gamma} > \gamma^*(\bar{q}-\gamma) \\
&\iff \bar{\mu}(\gamma^*-\gamma) > \gamma^*(\bar{q}-\gamma) \\
&\iff \bar{\mu}(\gamma-\gamma^*) < \gamma^*(\gamma-\bar{q}) \\
&\iff \frac{\gamma^*(\bar{q}-\bar{\mu})}{\gamma^*-\bar{\mu}} < \gamma,
\end{aligned}$$

o que implica $t\bar{q} < \gamma$, provando a afirmação.

Como $\dfrac{t\bar{q}}{\gamma} < 1$ então $\dfrac{t\bar{q}(r+1)}{\gamma} < r+1$. Por hipótese,

$$\frac{\gamma^*(\bar{q}-\bar{\mu})}{\gamma(\gamma^*-\bar{\mu})}(r+1)-1 < \alpha.$$

Logo,

$$\alpha + 1 - \frac{t\bar{q}(r+1)}{\gamma} > 0. \tag{4.17}$$

De (2.12) e (4.16) $-$ (4.17) segue que $\mathcal{A}(u_n)^{\alpha+1-\frac{t\bar{q}(r+1)}{\gamma}} \to +\infty$, quando $n \to +\infty$, e de (4.16) obtém-se um absurdo. Portanto, (u_n) é limitada. Como $W_0^{1,\gamma}(\Omega)$ é reflexivo e (u_n) é limitada, existe subsequência (u_{n_k}) de (u_n) satisfazendo, quando $k \to +\infty$,

$u_{n_k} \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,\gamma}(\Omega)$,

$u_{n_k} \to u$ em $L^l(\Omega)$, para todo $l \in [1, \gamma^*)$,

$\displaystyle\int_\Omega |\nabla u_{n_k}|^\gamma \to t_0 \geq 0$ em $\mathbb{R}$.

Agora, como $\|J'(u_n)\|_{(W_0^{1,\gamma}(\Omega))^*}(1 + \|u_n\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)}) \to 0$, quando $n \to +\infty$ então $\|J'(u_n)\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} \to 0$, quando $n \to +\infty$. Dessa forma, procedendo conforme Lema 2.2 concluí-se que existe $u \in W_0^{1,\gamma}(\Omega)$ tal que $u_{n_k} \to u$ em $W_0^{1,\gamma}(\Omega)$, o que finaliza o lema. $\square$

Lema 4.2 *Assuma* $(a_1), (f_1) - (f_2)$ *e seja* $M(t) = t^\alpha$, *com*

$$\max\left\{\frac{\gamma^*(\bar{q}-\bar{\mu})(r+1)}{\gamma(\gamma^*-\bar{\mu})}, \frac{1}{p}\right\} - 1 < \alpha < \min\left\{\frac{s(r+1)}{\gamma}, \frac{\gamma(r+1)}{c(\gamma)}\right\} - 1.$$

Então;

(i) Existem $\tilde{\alpha}, \rho > 0$ *verificando* $J(u) \geq \tilde{\alpha}$ *se* $\|u\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} = \rho$.

(ii) Para todo subespaço de dimensão finita $Z \subset W_0^{1,\gamma}(\Omega)$, *existe* $R = R(Z)$ *cumprindo* $J(u) \leq 0$ *para todo* $u \in Z$ *tal que* $\|u\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} \geq R$.

Prova: *(i)* Por $(a_1), (f_1) - (f_2)$ e imersão de Sobolev, temos

$$\begin{aligned}
J(u) &= \mathcal{M}(\mathcal{A}(u)) - \frac{1}{r+1}\left[\int_\Omega F(x,u)dx\right]^{r+1} \\
&\geq \frac{(\mathcal{A}(u))^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{1}{r+1}\left[\frac{a_2}{s}\int_\Omega |u|^s dx\right]^{r+1} \\
&\geq \frac{1}{\alpha+1}\left(\frac{k_0}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx + \frac{H(k_3)k_2}{q}\int_\Omega |\nabla u|^q dx\right)^{\alpha+1} - \frac{1}{r+1}\left(\frac{a_2}{s}\right)^{r+1} c\|u\|^{s(r+1)}_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} \\
&\geq c_1\|u\|^{\gamma(\alpha+1)}_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} - \frac{1}{r+1}\left(\frac{a_2}{s}\right)^{r+1} c\|u\|^{s(r+1)}_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)},
\end{aligned}$$

sendo $c_1 = \dfrac{k_0}{p^{\alpha+1}(\alpha+1)}$ se $H(k_3) = 0$ ou $c_1 = \dfrac{k_2}{q^{\alpha+1}(\alpha+1)}$ se $H(k_3) = 1$ e $c_1, c > 0$ constantes que independem de u. Logo,

$$J(u) \geq \|u\|^{\gamma(\alpha+1)}_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} \left[c_1 - \frac{1}{r+1}\left(\frac{a_2}{s}\right)^{r+1} c\|u\|^{s(r+1)-\gamma(\alpha+1)}_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} \right]. \tag{4.18}$$

Como $\gamma(\alpha+1) < s(r+1)$ escolhendo $0 < \rho < \left(\dfrac{c_1(r+1)s^{r+1}}{a_2^{r+1}c}\right)^{\frac{1}{s(r+1)-\gamma(\alpha+1)}}$ obtemos que

$$\nu(\rho) = c_1 - \frac{1}{r+1}\left(\frac{a_2}{s}\right)^{r+1} c\rho^{s(r+1)-\gamma(\alpha+1)} > 0.$$

Assim, disto e de (4.18) resulta,

$$J(u) \geq \rho^{\gamma}\nu(\rho) := \tilde{\alpha} > 0,$$

quando $\|u\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} = \rho$.

(ii) Usando $(a_1), (f_1) - (f_2)$, imersão de Sobolev e equivalência de normas em espaços de dimensão finita tem-se para $u \in Z$,

$$\begin{aligned}
J(u) &= \frac{(\mathcal{A}(u))^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{1}{r+1}\left[\int_\Omega F(x,u)dx\right]^{r+1} \\
&\leq \frac{\mathcal{A}(u)^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{1}{r+1}\left[\frac{a_1}{s}\int_\Omega |u|^s dx\right]^{r+1} \\
&\leq \frac{1}{\alpha+1}\left(\frac{k_1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx + \frac{k_3}{q}\int_\Omega |\nabla u|^q dx\right)^{\alpha+1} - \frac{c_2}{r+1}\left(\frac{a_1}{s}\right)^{r+1}\|u\|^{s(r+1)}_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} \\
&\leq c\|u\|^{p(\alpha+1)}_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} + k_3c_1\|u\|^{q(\alpha+1)}_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} - \frac{c_2a_1^{r+1}}{(r+1)s^{r+1}}\|u\|^{s(r+1)}_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)},
\end{aligned}$$

sendo $c_1, c_2, c > 0$ constantes que independem de u. Portanto, pela desigualdade anterior e do fato que $\gamma(\alpha+1) < s(r+1)$ conclui-se que

$$\frac{J(u)}{\|u\|^{s(r+1)}_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)}} \leq o(1) - \frac{c_2}{r+1}\left(\frac{a_1}{s}\right)^{r+1}.$$

Logo $J(u) < 0$ quando $\|u\|_{W_0^{1,\gamma}(\Omega)} > R$, para $R > 0$ grande. □

Demonstração do Teorema 4.1: Pelos Lemas 4.1 e 4.2 temos a geometria do passa da montanha simétrico verificada, bem como a condição de compacidade de Cerami. Logo, aplicando o teorema do passo da montanha simétrico [4] obtemos uma sequência (w_j) de pontos críticos satisfazendo $J(w_j) \to +\infty$. □

Capítulo

5

Apêndice

5.1 Resultados Variacionais

Esta seção contêm os resultados variacionais que foram utilizados ao decorrer do trabalho. O primeiro desses resultados é devido à Ambrosseti Rabinotwiz [4] e é uma ferramenta importante no tratamento de problemas com não linearidade superlinear.

Teorema 5.1 (Teorema do Passo da Montanha) *Seja V espaço de Banach e suponha $E \in C^1(V)$ satisfazendo a condição de Palais-Smale. Assuma que*

(i) $E(0) = 0$;

(ii) Existe $\rho > 0$, $\alpha > 0$ *tal que* $\|u\| = \rho$ *então* $E(u) \geq \alpha$;

(iii) Existe $u_1 \in V$ *de modo que* $\|u\| \geq \rho$ *e* $E(u_1) < \alpha$.

Defina

$$P = \big\{p \in C^0([0,1]; V); p(0) = 0, p(1) = u_1\big\}.$$

Então,

$$\beta = \inf_{p \in P} \sup_{u \in p} E(u) \geq \alpha$$

é valor crítico.

O próximo resultado é uma versão do passo da montanha adaptada para funcionais com $\mathbb{Z}_2$ simetria e é conhecida por teorema do passo da montanha simétrico sendo também devido a Ambrosseti Rabinowtiz.

Teorema 5.2 (Teorema do Passo da Montanha Simétrico [48])
Seja E um espaço de Banach e seja $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ satisfazendo (PS). Suponha que I seja par, $I(0) = 0$ e satisfaça

(i) Existem $\alpha, \rho > 0$ *verificando* $I(u) \geq \alpha$ *se* $\|u\| = \rho$.

(ii) Para todo subespaço de dimensão finita $Z \subset E$ *existe* $R = R(Z) > 0$ *de modo que* $I(u) \leq 0$ *para todo* $u \in Z$ *satisfazendo* $\|u\| \geq R$.

Então, I possui uma sequência ilimitada de valores críticos.

O teorema do passo da montanha simétrico ainda permanece válido se trocarmos a condição de compacidade conhecida como Palais-Smale pelo condição de compacidade introduzida por Cerami. Isso é possível, pois a prova do lema da deformação usado em [49] também se verifica com a condição de Cerami (ver Teorema 1.3 de [9])

O próximo resultado é um refinamento do Teorema de Clark [38], uma vez que nos dá informações sobre os pontos críticos e não valores críticos. Tal teorema é uma importante ferramenta para tratar problemas subcrítico e sublinear com simetria.

Teorema 5.3 (Liu-Wang [38]) *Seja X um espaço de Banach, $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$. Assuma ϕ satisfazendo a condição (PS), par, limitado inferiormente e $\phi(0) = 0$. Se para todo $k \in \mathbb{N}$ existe subespaço k-dimensional X^k de X e $\rho_k > 0$ satisfazendo $\sup\limits_{X^k \cap S_{\rho_k}} \phi < 0$, sendo*

$$S_\rho = \{u \in X; \|u\| = \rho\},$$

então pelo menos uma das seguintes conclusões se verificam:

(i) Existe uma sequência de pontos críticos $\{u_k\}$ satisfazendo $u_k \neq 0$, $\phi(u_k) < 0$ para todo k e $\|u_k\| \to 0$, quando $k \to +\infty$.

(ii) Existe $r > 0$ tal que para todo $0 < a < r$ existe um ponto crítico u com $\|u\| = a$ e $\phi(u) = 0$.

O próximo resultado é a respeito de minimização

Teorema 5.4 (Princípio Variacional de Ekeland)
Seja V um espaço métrico completo e $F : V \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ uma função semicontínua inferiormente e limitada inferiormente. Então, para todo $\epsilon > 0$ existe $v \in V$ tal que:

$$F(v) \leq \inf_{v \in V} F(v) + \epsilon \quad e \quad F(w) \geq F(v) - \epsilon d(v, w) \quad \textit{para todo } w \in V.$$

5.2 Cálculo diferencial para funcionais reais

As definições e resultados dessa seção são encontrados em [10] e têm a finalidade de dar suporte para provar que os funcionais de energia associados aos problemas apresentados neste trabalho sejam de classe $C^1(W_0^{1,\gamma}(\Omega), \mathbb{R})$.

Definição 5.1 *Seja X um espaço de Banach, U um subconjunto aberto de X e seja $I : U \to \mathcal{R}$ um funcional. Dizemos que I é (Fréchet) diferenciável em $u \in U$ se existe $A \in X^*$ na qual*

$$\lim_{\|v\| \to 0} \frac{I(u+v) - I(u) - Av}{\|v\|} = 0,$$

e será denotada por $I'(u)$.

Definição 5.2 *Seja X um espaço de Banach, $U \subset X$ um conjunto aberto e seja $I : U \to \mathbb{R}$ um funcional. Dizemos que I é Gâteaux diferenciável em $u \in U$ se existe $A \in X^*$ na qual para todo $v \in X$,*

$$\lim_{t \to 0} \frac{I(u + tv) - I(u)}{t} = Av. \tag{5.1}$$

Se I é Gâteaux diferenciável em u, existe somente um funcional linear $A \in X^*$ satisfazendo (5.1) *e será denotada por $I'_G(u)$.*

Proposição 5.1 *Assuma que $U \subset X$ é um conjunto aberto, que I é Gâteaux diferenciável sobre U e que I'_G é contínua em $u \in U$. Então I é também diferenciável em u e $I'_G(u) = I'(u)$.*

Proposição 5.2 *Assuma que I e J são diferenciáveis em $u \in U$ com $U \subset X$. Então as seguintes propriedades se verificam:*

(i) Se a e b são números reais, $aI + bJ$ são diferenciáveis em u e

$$(aI + bJ)'(u) = aI'(u) + bJ'(u);$$

(ii) O produto IJ é diferenciável em u e

$$(IJ)'(u) = J(u)I'(u) + I(u)J'(u);$$

(iii) Se $\gamma : \mathbb{R} \to U$ é diferenciável em t_0 e $u = \gamma(t_0)$, então a composição $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $\eta(t) = I(\gamma(t))$ é diferenciável em t_0 e

$$\eta'(t_0) = I'(u)\gamma'(t_0);$$

(iv) Se $A \subset \mathbb{R}$ é um conjunto aberto, $f : A \to \mathbb{R}$ é diferenciável em $I(u) \in A$, então a composição $k(u) = f(I(u))$ é definida em um vizinhança aberta V de u, é diferenciável em u e

$$k'(u) = f'(I(u))I'(u).$$

5.3 Princípio do Máximo

Uma ferramenta muito útil quando se estuda positividade de uma solução é o chamado Princípio do Máximo forte. Aqui apresentaremos uma versão que contempla o operador não homogêneo que estudamos neste trabalho. Tal resultado é o Teorema 5.3.4 de Pucci e Serrin [46]. Antes de enunciar tal teorema vamos definir solução clássica

Definição 5.3 *Dizemos que u é solução clássica se $u \in C^1(\Omega)$ e satisfaz a equação* (5.2) *no sentido das distribuições.*

Consideremos a inequação diferencial

$$\operatorname{div}\{A(|Du|)Du\} + B(x, u, Du) \leq 0 \tag{5.2}$$

num domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Suponha que A satisfaça

$(A1)$ $A \in C^1(\mathbb{R}^+)$,

$(A2)$ $s \mapsto sA(s)$ é estritamente crescente em $\mathbb{R}^+$ e $sA(s) \to 0$ quando $s \to 0$,

e que $B(x, z, \xi) \in L^\infty_{loc}(\Omega \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n)$ está sujeito a uma das condições $(B1)$ ou $(B2)$ abaixo:

Existe uma constante $k > 0$ e não linearidades f e g contínuas em $\mathbb{R}^+_0$, na qual

$(B1)$ $B(x, z, \xi) \geq -k\phi(|\xi|) - f(z)$,

$(B2)$ $B(x, z, \xi) \leq k\phi(|\xi|) - g(z)$,

para $x \in \Omega$, $z \geq 0$, e para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ com $|\xi| \leq 1$.

Além disso, assuma que f e g satisfaçam

$(F2)$ $f(0) = 0$ e f é não decrescente sobre algum intervalo $(0, \delta), \delta > 0$.

$(G2)$ $g(0) = 0$ e g é não decrescente sobre algum intervalo $(0, \delta), \delta > 0$.

Tendo em vista as considerações acima podemos enunciar o princípio do máximo forte para o operador (5.2).

Teorema 5.5 (Princípio do Máximo Forte) *Sejam $(B1)$ e $(F2)$ satisfeitas. O princípio do máximo forte é válido para* (5.2) *é suficiente que ou $f \equiv 0$ em $[0, d]$, $d > 0$, ou*

$$\int_{0^+} \frac{ds}{H^{-1}(F(s))} = \infty,$$

sendo $F(u) = \int_0^u g(s)ds$.

Assuma $(B2)$ e $(G2)$. O princípio do máximo forte é válido para (5.2) *é suficiente que ou $g \equiv 0$ em $[0, d]$, $d > 0$, ou*

$$\int_{0^+} \frac{ds}{H^{-1}(G(s))} = \infty,$$

sendo $G(u) = \int_0^u g(s)ds$.

Por princípio do máximo significa que se u é solução clássica não negativa com $u(x_0) = 0$ para algum ponto $x_0 \in \Omega$ então $u \equiv 0$ em Ω.

O próximo resulta é útil para aplicarmos o teorema do princípio do máximo. O mesmo pode ser encontrado em [40, 29].

Teorema 5.6 *Seja $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ com $q \geq p^*$ satisfazendo*

$$\int_\Omega a(x, u, \nabla u)\nabla v = \int_\Omega b(x, u)v$$

para v *da forma* $(u-c)^+$ *ou* $(u+c)^-$, $c>0$ *constante. Aqui as funções* $a(x,s,\eta)$ *e* $b(x,s)$ *são assumidas para verificar* $x\in\Omega$, $s\in\mathbb{R}$ *e* $\eta\in\mathbb{R}^N$,

$$\langle a(x,s,\eta),\eta\rangle \geq \nu|\eta|^p-(1+|s|^{\alpha_1})\varphi_1(x),$$

$$(sign\, s)b(x,s)\leq (1+|s|^{\alpha_2})\varphi_2(x),$$

com $\nu>0$, $0\leq\varphi_i\in L^{r_i}(\Omega)$, $r_i>\dfrac{N}{p}$, $0\leq\alpha_1<\dfrac{p(N+q)}{N}-\dfrac{q}{r_1}$ *e* $0\leq\alpha_2<\dfrac{p(N+q)}{N}-1-\dfrac{q}{r_2}$. *Então* $u\in L^\infty$ *e* $\|u\|_{L^\infty}$ *pode ser estimado em termos de* $\|u\|_{L^q}$, ν, α_i, $\|\varphi\|_{L^{r_i}}$ *e* Ω.

Referências Bibliográficas

[1] C.O. Alves, F.J.S.A. Corrêa e T.F. Ma, *Positive solutions for a quasilinear elliptic equation of Kirchhoff type*, Comput. Math. Appl. 49 (2005), 85-93.

[2] A. Ambrosetti, H. Brezis e G. Cerami, *Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems*, J. Funct. Anal. 122 (1994) 519-543.

[3] H. Brezis *Funcional Analysis, Sobolev Spaces and partial differential equations*, Springer, 2011.

[4] A. Ambrosetti e P.H. Rabinowitz, *Dual variational methods in critical point theory and applications* J. Funct. Anal. 14 (1973) 349-381.

[5] J. G. Azorero e P. H. Alonso, *Multiplicity of solutions for elliptic problems with critical exponent or with a nonsymetric term*, Trans. Am. Math. Soc. 323 (1991) 877-895.

[6] J. G. Azorero, I.P Alonso e J.J. Manfredi *Sobolev versus Hölder local minimizers and global multiplicity for some quasilinear elliptic equations.* Communicatioons in contemporary Mathematics, 2 (2000) 385-404.

[7] A. Ambrosetti and D. Arcoya, *Positive Solutions of Elliptic Kirchhoff Equations,* Adv. Nonlin. Stud. 17 (2016) 3-15.

[8] T. Barstsch e M. Willem, *On an elliptic equation with concave and convex nonlinearities*, Proc. Amer. Math. Soc. 123 (1995) 3555-3561.

[9] P. Bartolo, V. Benci e D. Fortunato, *Abstract critical point theorems and applications to some nonlinear problems with strong resonance at infinity.* Nonlin. Analysis 7 (1983) 981-1012.

[10] M. Bandiale e E. Serra, *Semilinear Elliptic Equations for Beginners: Existence results via the variational approach*, Springer (2011).

[11] S. Barile e G.M. Figueiredo, *Existence of least energy positive, negative and nodal solutions for a class of p&q-problems with potentials vanishing at infinity*, J. Math. Anal. Appl. 427 (2015) 1205-1233.

[12] S. Bernstein, *Sur une classe d'équations fonctionnelles aux dérivés partilles,* Bull. Acad. Sci. URSS. Sér. Math (Izvestia Akad. Nauk SSSP) 4 (1940) 17-26.

[13] C.Chen, J. Huang e L. Liu *Multiple solutions to the nonhomegeneous p-Kirchhoff elliptic equation with concave-convex nonlinearities*, Appl. Math. Lett. 26 (2013) 754-759.

[14] F.J.S.A. Correa, A. S.S. Correa e G.M. Figueiredo, *Positive solutions for a class of p&q-singular elliptic equation*, Nonlinear Analysis: Real World Applications 16 (2014) 163-169.

[15] F.J.S.A. Corrêa e A.C. dos Reis Costa, *On an elliptic equation of p-Kirchhoff type via variational methods,* Bull. Aust. Math. Soc. 74 (2006) 263-277.

[16] F.J.S.A. Corrêa e A.C. dos Reis Costa, *On a $p(x)$-Kirchhoff equation with critical exponent and an additional term via truncation argument,* Math. Nachr. 288 (2015) 1226-1240.

[17] F.J.S.A. Corrêa and A.C. dos Reis Costa, *A Variational approach for a Bi-nonlocal elliptic problem involving the $p(x)$-Laplacian e non-linearity with non-standard Growth*, Glasgow Math. J. 56 (2014) 317-333.

[18] F.J.S.A. Corrêa e A.C. dos Reis Costa, *On a bi-nonlocal p(x)-Kirchhoff equation via Krasnoselskii's genus*, Math. Meth. Appl. Sci. 38 (2014) 87-93.

[19] D.G. Costa e C.A. Magalhaes, *Variational elliptic problems which are nonquadratic at infinity,* Nonlinear Analys. Theory Methods & Application, 23 (1994) 1401-1412.

[20] M. Chipot e J. F. Rodrigues, *On a class of nonlocal nonlinear elliptic problems*, RAIRO Model. Math. Anal. Número. 26 (1992) 447-467.

[21] M. Chipot e B. Lovat, *Some remarks on nonlocal elliptic and parabolic problems*, Nonlinear Anal. 30 (1997) 4619-4627.

[22] F.J.S.A. Corrêa, M. Delgado e A. Suárez, *A variational approach to a nonlocal elliptic problem with sign-changing nonlinearity*, Advanced Nonlinear Studies 11 (2011), 361-375.

[23] I. Ekeland, *Nonconvex minimazation problems,* Bull. Amer. Math. Soc. 1 (1979) 443-473.

[24] G.M. Figueiredo, *Existence e multiplicity of solutions for a class of p&q elliptic problems with critical exponent*, Math. Nachr. 286 (2013) 1129-1141.

[25] G.M. Figueiredo e J.R.S Junior, *Multiplicity of solutions for a Kirchhoff equation with subcritical or critical growth*, Differential Integral Equations 25 (2012) 853-868.

[26] G.M. Figueiredo, G.M. Bisci e R. Servadei, *On a fractional Kirchhoff-type equation via krasnoselskii's genus*, Asymptotic Analysis 94 (2015) 347-361.

[27] G.M. Figueiredo, *Existence of positive solutions for a class of p&q elliptic problems with critical growth in* $\mathbb{R}^N$, Math. Anl. Appl. 378 (2011) 507-518.

[28] G.M. Figueiredo, N. Ikoma e J.R. Santos Júnior, *Existence and concentration result for the Kirchhoff type equations with general nonlinearities,* Arch. Ration. Mech. Anal. 3 (2014) 931-979.

[29] D. G. de Figueiredo, J.P. Gossez e P. Ubilla, *Local "superlinearity"and "sublinearity"for the p-Laplacian*, Journal of Functional Analysis 257 (2009) 721-752.

[30] M.E. Filippakis, D. O'Regan e N.S. Papageorgiou, *Multiple and nodal solutions of nonlinear equations with a nonhomogeneous differential operator and concave-convex terms*, Tohoku Math. J. 66 (2014), 583-608.

[31] A. Fiscella. *Infinitely many soltuion for a critical Kirchhoff type problem involving a fractional operator*, Differential and Integral Equations 29 (2016) 513-530.

[32] J.M. Gomes e L. Sanchez, *On a variational approach to some non-local boundary value problems*, Appl. Anal., 84 (2005), 909-925.

[33] J. Huang, C. Chen e Z. Xiu *Existence and multiplicity results for a p-Kirchhoff equation with a concave-convex term*, Appl. Math. Lett. 26 (2013) 1070-1075.

[34] E.J Hurtado, O.H. Miyagaki e R.S. Rodrigues *Multiplicity of solutions for a Kirchhoff equation with subcritical or critical growth*, Milan J. Math. 85 (2017) 71-102.

[35] G. Kirchhoff, Mechanik, Teubner, Leipzig, 1883.

[36] I. H. Kim e Y. Kim *Mountain pass type solutions and positivity of the infimum eigenvalue for quasilinear elliptic equations with variable exponents*, Manuscripta Math. 147 (2015) 169-191.

[37] Y. Komiya e R.Kajikiya, *Existence of infinitely many solutions for the* (p, q)*-Laplace equation*, NoDEA 23 (2016) .

[38] Z. Liu, Zhi-Qinag Wang, *On Clark's theorem and its applications to partially sublinear problems*, Ann. I. H. Poincaré- AN 32 (2015) 1015-1037.

[39] G.M. Lieberman, *The natural generalization of the natural conditions of Ladyzhenskaya and Ural'tseva for elliptic equations*, Comm. Partial Diff. Equ. 16 (1991) 311-361.

[40] O. A. Ladyzhenskaya e N. Uraltseva, *Linear and quasilinear elliptic equations*, Vol.46 of Mathematics in Science and Engineerin, Academic Press, New York, 1968.

[41] J.L. Lions, *On some questions in boundary value problems of mathematical physics, In Proceeding of International Symposium on Continuum mechanics and Partial Differential Equations,* Rio de Janeiro 1977, Math. Stud (Edited by de laPenha and Medeiros) 284-346, vol. 30, North-Holland (1978).

[42] M. Milailescu and V. Radulescu, *A multiplicity results for a nonlinear degenerate problem arising in the theory of eletrorheological fluids,* Proc. R. Soc. A, 462(2006), 2625-2641.

[43] O. H. Miyagaki e M. A. S. Souto. *Superlinear problems without Ambrosetti and Rabinowitz growth condition,* J. Differential Equations 245 (2008), 3628-3638.

[44] S. El Monoumi e N.S.Papageorgiou *Parametric nonlinear nonhomogeneous Neumann equations involving a nonhogeneous differential operator*, Monatsh Math. 177 (2015) 203-233.

[45] D. Motreanu e M. Tanaka, *Existence of positive solutions for nonlinear elliptic equations with convection terms,* Nonlinear Anal. 152 (2017) 38-60.

[46] P. Pucci e J. Serrin, *The Maximum Principle*, Basel: Birkhuser 2007.

[47] S. Pohozaev, *On a class of quasilinear hyberbolic equations,* Math. Sbornick 96 (1975) 152-166 .

[48] P.H. Rabinowitz, The Mountain Pass Theorem: Theme and variations, Differential Equation (D.G. de Figueiredo and C.S. Honig, eds), Lecture Notes in Math., vol. 957, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1982.

[49] P.H. Rabinowitz, Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, vol 65 (Providence, RI: American Mathematical Society, 1986).

[50] D. Repovs, Stationary waves of Schrödinger-type equations with variable exponent, Analysis and Applications 13 (2015) 645-661.

[51] M. Tang, Exact multiplicity for semilinear elliptic Dirichlet problems involving concave and convex nonlinearities. Proccedings of the Royal Society of Edinburgh 133 (2003) 705-717.

[52] M. Struwe, Variational Methods, Springer-Velag, 3 Ed., Berlin, 2000.

[53] M. Schechter e W. Zou. Superlinear problems. Pacific Journal of Mathematics, 214 (2004).

[54] Z.Q. Wang, *Nonlinear Boundary value problems with concave nonlinearities near the origin,* Nonlinear differ. equ. appl. 8 (2001) 15-33.