UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

O Problema Pseudoviscoso e a Equação de BBM-Burgers Estocásticos

Evaneide Alves Carneiro

São Carlos - SP
Setembro de 2016
O presente trabalho teve suporte financeiro da CAPES (Prodoutoral e Reuni)

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Evaneide Alves Carneiro
BOLSISTA CAPES (PRODOUTORAL E REUNI)
Orientador: Prof. Dr. Cezar Issao Kondo

O Problema Pseudoviscoso e a Equação de BBM-Burgers Estocásticos

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Matemática, área de concentração: Equações Diferenciais Parciais

São Carlos - SP
SETEMBRO DE 2016

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária UFSCar
Processamento Técnico
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

C289p

Carneiro, Evaneide Alves
O problema pseudoviscoso e a equação de BBM-Burgers estocásticos / Evaneide Alves Carneiro. -- São Carlos : UFSCar, 2016.
116 p.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2016.

1. Lei de conservação estocástica. 2. Equação BBMB estocástica. I. Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Tese de Doutorado da candidata Evaneide Alves Carneiro, realizada em 30/09/2016:

Prof. Dr. Cezar Issao Kondo
UFSCar

Prof. Dr. Cesar Rogério de Oliveira
UFSCar

Prof. Dr. Jose Ruidival Soares dos Santos Filho
UFSCar

Prof. Dr. Marcelo Martins dos Santos
UNICAMP

Prof. Dr. Rafael Andrés Rosales Mitrowsky
USP

Ao Wally.

Agradecimentos

Ao Wally, meu companheiro e amigo de todos os momentos.

À minha família, que mesmo de longe me apoiou e compreendeu as ausências.

À UFU, ao CONFACIP e em especial aos professores do Curso de Matemática da FACIP, pelo companheirismo na ocasião do afastamento para cumprir essa etapa profissional.

A todos os amigos da pós-graduação.

Aos professores do PPGM/UFSCar, pela oportunidade de aprendizagem.

Aos demais professores e técnicos-administrativos do DM/UFSCAR e a todos que de alguma forma contribuíram para a realização desta tese.

Aos professores da banca, que disponibilizaram tempo, conhecimento e paciência para contribuir com o trabalho.

À professora Claudete Matilde Webler, pelas valiosas contribuições.

Ao meu orientador, professor Cezar Issao Kondo, pela disponibilidade e pelos valiosos ensinamentos.

À CAPES pelo auxílio financeiro.

Muito obrigada!

Resumo

Este trabalho é dividido em duas partes: na primeira parte, estudamos a convergência de uma certa sequência de soluções aproximadas para uma solução da Lei de Conservação estocástica, nos casos aditivo e multiplicativo.

Na segunda parte, obtemos resultados de existência, unicidade e propriedades de regularidade da solução para a equação de Benjamin-Bona-Mahony-Burgers (BBMB) estocástica, também nos casos aditivo e multiplicativo.

Palavras Chave: Lei de conservação estocástica, Equação BBMB estocástica.

Abstract

This work is divided in two parts: In the first part, we study the convergence of a sequence of approximating solutions to a solution of the stochastic conservation law, in the additive and multiplicative case. In the second part, we obtain existence, uniqueness and regularity results to a solution of the Benjamin-Bona-Mahony-Burgers (BBMB) stochastic equation.

Key Words: Stochastic conservation law, BBMB stochastic equation.

Sumário

Lista de Símbolos

Notações Gerais

$\mathscr{B}(X)$	$\sigma-$álgebra dos borelianos do espaço X.
$\mathbb{1}_A$	Função característica do conjunto A.
$a \wedge b$	Mínimo entre a e b.
$\mathrm{supp}(f)$	Suporte da função f.
f^-	A parte negativa da função f.
$\mathscr{L}^n$	Medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$.
X'	Dual do espaço X.
$\langle f,u\rangle_{X',X}$	Aplicação de dualidade, ou seja, $f \in X', u \in X$ e $\langle f,u\rangle_{X',X} = f(u)$.

Espaços de Funções

$C_0^\infty(\mathbb{R})$	O espaço das funções $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ com suporte compacto.
$C^{2,1}(\mathbb{R})$	O subespaço de $C^2(\mathbb{R})$ formado pelas funções f tais que, para $m = 0,1,2$, $D^m f$ é Lipschitz contínua.
$M(A)$	O espaço das medidas de Radon sobre A.
$W_{loc}^{-1,p}(A)$	O espaço das funções f tais que, para todo aberto limitado B com $\overline{B} \subset A$, temos $f\restriction_B \in W^{-1,p}(B)$.
$H_{loc}^{-1}(A)$	O espaço das funções f tais que, para todo aberto limitado B com $\overline{B} \subset A$, temos $f\restriction_B \in H^{-1}(B)$.
$\mathcal{N}_\omega^2(0,T;L^2(\mathbb{R}))$	O espaço de Banach dos processos predizíveis a valores em $L^2(\mathbb{R})$ munido com a norma $\|X\|_{\mathcal{N}_\omega^2(0,T;L^2(\mathbb{R}))} = \left(E\left[\int_0^T \|X(s)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 ds\right]\right)^{\frac{1}{2}}$.

Introdução

O estudo das equações diferenciais estocásticas tem se tornado mais comum nos últimos anos, e algumas razões para tal podem ser encontradas na literatura especializada. Segundo Oksendal ([18]), existem várias razões pelas quais nós deveríamos aprender mais sobre equações diferenciais estocásticas, e uma delas é que "... o assunto tem se desenvolvido como um fascinante campo de pesquisa com muitas questões interessantes sem resposta."(OKSENDAL, 2000, p. XV, tradução nossa).

Outra motivação, segundo Bauzet ([1]), é que o modelo estocástico muitas vezes descreve melhor a realidade do fenômeno a ser estudado, e também que "... certos fenômenos que se deseja descrever por modelos são inerentemente não determinísticos. Por isso, a escolha de um modelo estocástico parece mais consistente."(BAUZET, 2013, p. 10, tradução nossa). Na introdução do trabalho citado, a autora descreve alguns exemplos que justificam tal afirmação.

Neste trabalho, nosso objetivo é obter resultados de convergência para a equação pseudo-viscosa estocástica e resultados de existência e regularidade para a equação BBM-Burgers estocástica nos casos aditivo e multiplicativo. Uma equação estocástica é aditiva quando o termo estocástico não depende da solução da equação. Caso o termo estocástico dependa da solução, a equação é multiplicativa.

O primeiro problema consiste no seguinte: mostraremos, por meio de um método de compacidade compensada, a existência de uma solução para a Lei de conservação Estocástica

$$u_t + (f(u))_x = \sigma \frac{dW}{dt} \text{ em } [0,T] \times \mathbb{R} \times \Omega, \tag{1}$$

$$u(0,\cdot) = u_0, \tag{2}$$

onde $W = \{(W_t, \mathscr{G}_t); 0 \leq t \leq T\}$ é um Movimento Browniano padrão unidimensional (ver Definição 1.11 na página 19) definido no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathscr{G}, P)$ (ver Definição 1.1 página 15), e as funções f, σ e u_0 satisfazem certas hipóteses apropriadas (ver página 32). Esse método de compacidade consiste em obter a convergência, quando $\varepsilon \to 0^+$, das soluções do problema pseudoviscoso

$$u_t + (f(u))_x = \varepsilon\left((\beta(u_x))_x + u_{xx}\right) + \sigma_\varepsilon \frac{dW}{dt} \text{ em } [0,T] \times \mathbb{R} \times \Omega, \tag{3}$$

$$u(0,\cdot) = u_{0,\varepsilon}, \tag{4}$$

para uma solução do problema (1)-(2). As funções σ_ε e $u_{0,\varepsilon}$ são definidas através de convolução das funções σ e u_0 com um *mollifier* padrão (ver (2.5) e (2.10)), e β tem as propriedades listadas na página 37.

As soluções do problema pseudoviscoso serão obtidas por meio da equação regularizada

$$u_t + (f_n(u))_x = \varepsilon\left((\beta(u_x))_x + u_{xx}\right) + \sigma_\varepsilon \frac{dW}{dt} \text{ em } [0,T] \times \mathbb{R} \times \Omega, \tag{5}$$

$$u_0 = u_{0,n,\varepsilon}, \tag{6}$$

onde f_n é definida por meio de uma localização da função f (conforme (2.3)) e é tal que $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ fracamente em $L^2(\mathbb{R})$, e $u_{0,n,\varepsilon}$ é definida por meio de uma localização de $u_{0,\varepsilon}$, conforme (2.6).

Depois, estudaremos a existência e propriedades de regularidade das soluções da equação

$$u_t + (f(u))_x = \sigma_\varepsilon \frac{dW}{dt} + \varepsilon u_{xx} + \delta u_{xxt} \text{ em } [0,T] \times \mathbb{R} \times \Omega \tag{7}$$

com dado inicial

$$u(0,x) = u_{0,\varepsilon}(x), \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{8}$$

nos casos aditivo e multiplicativo. No caso aditivo, modificamos a hipótese sobre f (ver página 71) e no caso multiplicativo modificamos também a hipótese sobre σ (ver página 99) e a definição de σ_ε (conforme (4.1)).

No artigo [14], C. Kondo e C. M. Webler estudaram a equação de BBM-Burgers generalizada:

$$u_t + f(u)_x = \delta u_{xxt} + \sum_{n=1}^{N} (-1)^{n+1} \gamma_n \partial_x^{2n} u, \qquad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+. \tag{9}$$

Notemos que o caso $N = 1$ é a equação determinística associada a (7) (ou seja, quando $\sigma_\varepsilon \equiv 0$ em (7)). No artigo citado acima, os autores obtêm resultados de existência e regularidade de soluções e usam um método de compacidade compensada para estabelecer a convergência de tais soluções, quando os coeficientes tendem a zero, para uma solução da Lei de Conservação

$$u_t + (f(u))_x = 0.$$

Quanto à Lei de Conservação Estocástica (1), vários trabalhos tratam de aplicar um processo semelhante ao descrito acima, de compacidade compensada, para diferentes equações. Os principais trabalhos estudados foram [12], [9], [1] e [4], brevemente descritos a seguir.

Em [12], J. U. Kim usa compacidade compensada para provar, por meio de um método de viscosidade nula, que as soluções de

$$u_t + (f(u))_x = \sigma \frac{dW}{dt} + \varepsilon u_{xx}$$

convergem, em um sentido apropriado, para uma solução entrópica de (1).

No artigo [9], J. Feng e D. Nualart estenderam os resultados de [12] em duas direções:

consideraram o problema multiplicativo e também multidimensional ($x \in \mathbb{R}^d$). Eles obtiveram resultados de existência e regularidade, bem como estimativas uniformes para as soluções da equação aproximada. A seguir, aplicaram um método de compacidade compensada para mostrar a existência (apenas no caso $x \in \mathbb{R}$) e unicidade (no caso multidimensional) da solução entrópica estocástica forte para a Lei de Conservação

$$\partial_t u(t,x) + \mathrm{div}_x(f(u(t,x))) = \int_{z\in Z} \sigma(x,u;z)\partial_t W(t,dz),$$

onde Z é um espaço métrico.

Posteriormente, G.Q. Chen, Q. Ding e K. H. Karlsen, no artigo [4], adicionando uma hipótese de limitação BV no dado inicial, provaram que o problema multiplicativo

$$\partial_t u(t,x) + \mathrm{div}_x(f(u(t,x))) = \sigma(u(t,x))\partial_t W(t)$$

é bem posto em L^p.

Em um trabalho mais recente, C. Bauzet, em sua tese de doutorado [1], também considerou o problema multiplicativo e multidimensional relacionado com o problema estudado em [12], e obteve nesses casos resultados de existência e unicidade da solução entrópica estocástica para a lei de conservação. Além disso, a autora obteve esses resultados para o problema de Dirichlet correspondente.

Por fim, quanto à abordagem pseudoviscosa, no artigo [17], os autores P. Marcati e R. Natalini estudam a convergência de soluções do problema pseudoviscoso para uma solução da lei de conservação no caso determinístico.

No presente trabalho, os resultados do Capítulo 2 estendem o trabalho de [12] por meio da adição do termo $(\beta(u_x))_x$ e por considerar o caso multiplicativo, que é também o caso estudado em [1] sem o termo $(\beta(u_x))_x$. Já os resultados dos capítulos 3 e 4 estendem o trabalho de existência e unicidade feito em [23] para o caso estocástico.

CAPÍTULO 1

Pré-requisitos

1.1 Cálculo Estocástico

As definições e resultados desta seção foram extraídos das referências: [5], [11], [18] e especialmente de [15].

1.1.1. Definições Básicas

Definição 1.1 *Dizemos que* $(\Omega, \mathscr{G}, P)$ *é um* ***espaço de probabilidade completo*** *se* Ω *é um conjunto,* $\mathscr{G}$ *é uma* $\sigma-$*álgebra sobre* Ω *e* P *é uma medida de probabilidade completa em* $(\Omega, \mathscr{G})$*, isto é,*

$$A \subset B \in \mathscr{G} \text{ e } P(B) = 0 \Rightarrow A \in \mathscr{G}.$$

Daqui por diante, $(\Omega, \mathscr{G}, P)$ denota um espaço de probabilidade completo.

Definição 1.2 *Seja* $(\Sigma, \mathscr{F})$ *um espaço mensurável. Dizemos que uma função* $Y : \Omega \to \Sigma$ *é* *mensurável se, para todo* $A \in \mathscr{F}$, $Y^{-1}(A) := \{\omega \in \Omega : Y(\omega) \in A\} \in \mathscr{G}$.

Uma ***variável aleatória a valores em*** Σ *ou simplesmente* ***variável aleatória*** X *é uma função mensurável* $X : \Omega \to \Sigma$.

Se X *é uma variável aleatória a valores em um espaço de Banach separável, dizemos que a* ***Esperança*** *de* X *é o número*

$$E[X] := \int_\Omega X(\omega)dP(\omega).$$

Se $X \in L^1(\Omega, \mathscr{G})$ *e* $\mathscr{G}_1 \subset \mathscr{G}$ *é uma sub-*σ*-álgebra, definimos a* ***Esperança Condicional*** *de* X *em relação a* $\mathscr{G}_1$, *denotada por* $E[X|\mathscr{G}_1]$ *como a única (a menos de um conjunto de medida nula) variável aleatória* Y *satisfazendo as duas condições seguintes:*

1. Y *é* $\mathscr{G}_1$*-mensurável;*
2. $\displaystyle\int_A X dP = \int_A Y dP$, $\forall A \in \mathscr{G}_1$.

Definição 1.3 *Sejam* $X_i : \Omega \to \mathbb{R}^n (i = 1, \ldots)$ *variáveis aleatórias. Dizemos que elas são* ***independentes*** *se, para qualquer inteiro* $k \geq 2$ *e todos os borelianos* $B_1, B_2, \ldots, B_k \subset \mathbb{R}^n$, *temos:*

$$P(X_1 \in B_1, X_2 \in B_2, \ldots, X_k \in B_k) = P(X_1 \in B_1) \cdot P(X_2 \in B_2) \cdot \ldots \cdot P(X_k \in B_k).$$

Definição 1.4 *Seja* Σ *um espaço de Banach separável munido com a* σ*-álgebra* $\mathscr{B}(\Sigma)$. *Um* ***processo estocástico a valores em*** Σ *é uma coleção parametrizada de variáveis aleatórias* $\{X_t\}_{t \in \mathbb{I}}$ *definidas em* $(\Omega, \mathscr{G}, P)$ *e assumindo valores em* Σ. *Usualmente,* $\mathbb{I}$ *é um intervalo contido em* $[0, \infty)$, *o que nos permite uma conveniente interpretação da variável* t *como tempo.*

Note que, para todo $t \in \mathbb{I}$ *fixado, temos uma variável aleatória*

$$X_t : \Omega \to \Sigma.$$

Por outro lado, fixando $\omega \in \Omega$, *podemos considerar a função*

$$t \mapsto X_t(\omega),\ t \in \mathbb{I},$$

que é denominada ***caminho, trajetória*** *ou* ***realização*** *do processo estocástico* X_t *em* ω.

Podemos denotar o processo estocástico $\{X_t\}_{t\in\mathbb{I}}$ *também por* $X_t, X(t), X_t(\omega)$, $X(t)(\omega)$ *ou ainda* $X(t,\omega)$.

Destacaremos duas situações particulares que aparecerão durante este trabalho. Primeiramente, seja $\Sigma = \mathbb{R}^n$. Um **processo estocástico a valores em** $\mathbb{R}^n$ é uma coleção parametrizada de variáveis aleatórias $\{X_t\}_{t\in\mathbb{I}}$, onde

$$X_t : \Omega \to \mathbb{R}^n.$$

Já um **processo estocástico a valores em** $L^2(\mathbb{R})$ é uma coleção parametrizada de variáveis aleatórias $\{X_t\}_{t\in\mathbb{I}}$, onde

$$X_t : \Omega \to L^2(\mathbb{R}),$$

o que significa que, fixando $(t,\omega) \in \mathbb{I}\times\Omega$, a imagem $X_t(\omega)$ é uma função de $x \in \mathbb{R}$, e temos

$$\int_{\mathbb{R}} [X_t(\omega)(x)]^2 dx < \infty.$$

Definição 1.5 *O* ***processo estocástico*** $\{X_t\}_{t\in\mathbb{I}}$ *é* ***mensurável*** *se, para todo* $A \in \mathscr{B}(\Sigma)$, *o conjunto* $\{(t,\omega); X_t(\omega) \in A\}$ *pertence à* $\sigma-$*álgebra produto* $\mathscr{B}(\mathbb{I})\otimes\mathscr{G}$, *ou seja, a aplicação*

$$(t,\omega) \mapsto X_t(\omega),$$

onde

$$X_t(\omega) : (\mathbb{I}\times\Omega, \mathscr{B}(\mathbb{I})\otimes\mathscr{G}) \to (\Sigma, \mathscr{B}(\Sigma))$$

é mensurável.

Definição 1.6 *Uma* ***filtração*** *em* $(\Omega,\mathscr{G})$ *é uma família não decrescente* $\{\mathscr{G}_t\}_{t\in\mathbb{I}}$ *de sub*$-\sigma-$*álgebras de* $\mathscr{G}$, *ou seja, uma coleção de* $\sigma-$*álgebras* $\mathscr{G}_t \subset \mathscr{G}$ *tal que*

$$0 \le s < t \Rightarrow \mathscr{G}_s \subset \mathscr{G}_t.$$

Neste trabalho, assumiremos que todas as $\sigma-$álgebras $\{\mathscr{G}_t\}$ são completas.

Definição 1.7 *Um* ***processo estocástico*** $\{X_t\}$ *é* ***adaptado à filtração*** $\{\mathscr{G}_t\}$ *se, para cada* $t \in \mathbb{I}$*,* X_t *é uma variável aleatória* $\mathscr{G}_t$*-mensurável.*

Definição 1.8 *Dizemos que o processo estocástico* X *é* ***progressivamente mensurável*** *com relação à filtração* $\{\mathscr{G}_t\}$ *se, para todo* $t \in [0,T]$*, a aplicação*

$$X : [0,t] \times \Omega \to \Sigma, \ (s,\omega) \mapsto X(s,\omega)$$

é $\mathscr{B}([0,t]) \times \mathscr{G}_t$*-mensurável.*

Notemos que todo processo progressivamente mensurável é adaptado.

Definição 1.9 *Seja* X_t *um processo estocástico adaptado à filtração* $\{\mathscr{G}_t\}$ *com* $E[|X_t|] < \infty$, $\forall t \in \mathbb{I}$*. Dizemos que* X_t *é um* ***martingale*** *com relação a* $\{\mathscr{G}_t\}$ *se, para todo* $s \leq t, s \in \mathbb{I}$*,*

$$E[X_t|\mathscr{G}_s] = X_s, \ q.\ t.\ p.\ \omega \in \Omega.$$

Definição 1.10 *Fixemos uma filtração* $\{\mathscr{G}_t\}_{t\in\mathbb{I}}$ *que é contínua à direita, isto é,*

$$\mathscr{G}_t = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathscr{G}_{t+\frac{1}{n}}.$$

Denotemos por $\mathscr{A}$ *a coleção dos processos estocásticos mensuráveis* $X(t,\omega)$ *que satisfazem as duas condições seguintes:*

i. $\{X_t\}$ *é adaptado à filtração* $\{\mathscr{G}_t\}$*;*

ii. *Todas as trajetórias de* X *são contínuas à esquerda.*

Seja $\mathscr{P}$ *a menor* σ*-álgebra de subconjuntos de* $\mathbb{I} \times \Omega$ *com relação à qual todos os processos estocásticos em* $\mathscr{A}$ *são mensuráveis. Dizemos que o processo* $X(t)$ *é* ***predizível*** *se a função* $(t,\omega) \mapsto X(t,\omega)$ *é* $\mathscr{P}$*-mensurável.*

Observação 1.1 *Muitas vezes durante este trabalho, principalmente quando tratarmos de integrais, omitiremos a varíavel* ω *do processo estocástico.*

1.1.2. Movimento Browniano

Definição 1.11 *Um **Movimento Browniano** (padrão unidimensional) é um processo estocástico mensurável e adaptado $W = \{(W(t), \mathscr{G}_t); t \in \mathbb{I}\}$ definido em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathscr{G}, P)$ a valores em $\mathbb{R}$ com as seguintes propriedades:*

i. $P\{\omega : W(0,\omega) = 0\} = 1$.

ii. *Para $0 \leq s < t$, a variável aleatória $W(t) - W(s)$ é normalmente distribuída com média zero e variância $t - s$, ou seja, para $a < b$,*

$$P\{a \leq W(t) - W(s) \leq b\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_a^b \mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2(t-s)}} dx.$$

iii. *$W(t)$ tem incrementos independentes, isto é, se $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, as variáveis aleatórias*

$$W(t_1), W(t_2) - W(t_1), \ldots, W(t_n) - W(t_{n-1})$$

são independentes.

iv. *Quase todas as trajetórias de $W(t)$ são funções contínuas, ou seja,*

$$P\{\omega : W(\cdot, \omega) \ \text{ é contínua } \} = 1.$$

1.1.3. Integral de Itô

Fixemos um Movimento Browniano $W = \{(W(t), \mathscr{G}_t); t \in [0,T]\}$.

Usaremos $L^2_{ad}([0,T] \times \Omega)$ para denotar o espaço de todos os processos estocásticos $X(t,\omega)$, $t \in [0,T], \omega \in \Omega$ satisfazendo:

(i) $X(t,\omega)$ é adaptado à filtração $\{\mathscr{G}_t\}$;

(ii) $\displaystyle\int_0^T E[|X(t)|^2] dt < \infty$.

Definiremos a seguir a integral estocástica

$$I(X) = \int_0^T X(t)dW(t),\ X \in L^2_{ad}([0,T]\times\Omega).$$

A definição dessa integral segue a ideia da definição da Integral de Lebesgue e será dividida em três passos: começaremos definindo-a para um processo estocástico escada, a seguir veremos um resultado de aproximação e por fim generalizaremos a definição para todo processo estocástico em $L^2_{ad}([0,T]\times\Omega)$.

Suponhamos inicialmente que X é um processo estocástico escada em $L^2_{ad}([0,T]\times\Omega)$, ou seja:

$$X(t,\omega) = \sum_{i=1}^{n} \xi_{i-1}(\omega)\mathbb{1}_{[t_{i-1},t_i)}(t),$$

onde $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = T, \xi_{i-1}$ é $\mathscr{G}_{t_{i-1}}-$mensurável e $E[\xi^2_{i-1}] < \infty$. Neste caso, definimos

$$I(X) = \int_0^T X(t)dW(t) := \sum_{i=1}^{n} \xi_{i-1}(W(t_i) - W(t_{i-1})). \tag{1.1}$$

Lema 1.1 *Seja $I(X)$ definida por* (1.1). *Então*

a. *Para quaisquer $a,b \in \mathbb{R}$ e X,Y processos estocásticos escada, temos:*

$$I(aX+bY) = aI(X)+bI(Y).$$

b. $E[I(X)] = 0$.

c. $E[|I(X)|^2] = \int_0^T E[|X(t)|^2]dt.$

Demonstração: Ver Kuo [15], página 44.

Lema 1.2 *Seja $X \in L^2_{ad}([0,T]\times\Omega)$. Então existe uma sequência $\{X_n(t); n\geq 1\}$ de processos estocásticos escada em $L^2_{ad}([0,T]\times\Omega)$ tal que:*

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T E[|X(t)-X_n(t)|^2]dt = 0. \tag{1.2}$$

Demonstração: Ver Kuo [15], páginas 45-47.

Agora podemos generalizar a definição de integral estocástica. Sejam $X \in L^2_{ad}([0,T]\times\Omega)$ e $\{X_n\}$ a sequência dada pelo Lema 1.2. Para cada n, a integral $I(X_n)$ já está definida. Aplicando o Lema 1.1 - item **c**, temos

$$E[|I(X_n)-I(X_m)|^2] = \int_0^T E[|X_n(t)-X_m(t)|^2]dt \to 0, \text{ quando } n,m\to\infty.$$

Portanto, a sequência $\{I(X_n)\}$ é de Cauchy em $L^2(\Omega)$. Usamos isso para definir:

Definição 1.12 *Sejam $X \in L^2_{ad}([0,T]\times\Omega)$ e $\{X_n\}$ a sequência dada pelo Lema 1.2. Então a* ***Integral de Itô*** *de X, com a mesma notação de* (1.1)*, é definida por:*

$$I(X) = \int_0^T X(t)dW(t) := \lim_{n\to\infty} I(X_n) \text{ em } L^2(\Omega).$$

Teorema 1.1 *Sejam $X,Y \in L^2_{ad}([0,T]\times\Omega)$. Então a Integral de Itô é uma variável aleatória e valem:*

a. *Para quaisquer $a,b\in\mathbb{R}$:*

$$I(aX+bY) = aI(X)+bI(Y).$$

b. $E[I(X)] = 0$.

c. $E[|I(X)|^2] = \int_0^T E[|X(t)|^2]dt$.

Demonstração: Ver Kuo [15], página 48.

Notemos que, por este teorema, a Integral de Itô $I : L^2_{ad}([0,T]\times\Omega)\to L^2(\Omega)$ é uma isometria. Outra importante propriedade desta integral está no teorema a seguir.

Teorema 1.2 *Seja $X \in L^2_{ad}([0,T]\times\Omega)$. Então o processo estocástico*

$$I_t = \int_0^t X(s)dW(s),\ 0\le t\le T$$

é um martingale com respeito à filtração $\{\mathscr{G}_t\}$.

Demonstração: Ver Kuo [15], página 53.

Observação 1.2 *A Integral de Itô pode ser estendida para uma classe maior de integrandos, $\mathscr{L}_{ad}(\Omega, L^2[0,T])$, que denota o espaço de todos os processos estocásticos $X(t,\omega), t \in [0,T]$, $\omega \in \Omega$ satisfazendo:*

(i) $X(t,\omega)$ é adaptado à filtração $\{\mathscr{G}_t\}$;

(ii) $\int_0^T |X(t)|^2 dt < \infty$, q. t. p. $\omega \in \Omega$.

Observemos que $L^2_{ad}([0,T]\times\Omega) \subset \mathscr{L}_{ad}(\Omega, L^2[0,T])$. Para fazer tal extensão da integral de Itô, necessitamos do conceito de tempo de parada.

Definição 1.13 *Uma variável aleatória $\tau : \Omega \to [0,T]$ é um **tempo de parada** com respeito à filtração $\{\mathscr{G}_t; 0 \le t \le T\}$ se $\{\omega : \tau(\omega) \le t\} \in \mathscr{G}_t, \forall\, t \in [0,T]$.*

Seja $X \in \mathscr{L}_{ad}(\Omega, L^2[0,T])$. Para cada n fixo, definimos:

$$\tau_n(\omega) = \begin{cases} \inf\left\{t; \int_0^t |X(s,\omega)|^2 ds > n\right\}, & \text{se } \left\{t; \int_0^t |X(s,\omega)|^2 ds > n\right\} \neq \emptyset, \\ T, & \text{se } \left\{t; \int_0^t |X(s,\omega)|^2 ds > n\right\} = \emptyset. \end{cases}$$

Então τ_n é um tempo de parada e definimos

$$I_{t\wedge\tau_n} = \int_0^{t\wedge\tau_n} X(s)dW(s) = \int_0^T \mathbb{1}_{[0,t\wedge\tau_n]}(s) f(s) dW(s),\ 0 \le t \le T.$$

Definição 1.14 *Um processo estocástico $\mathscr{G}_t$-adaptado $X_t, 0 \le t \le T$, é um **martingale local** com relação a $\{\mathscr{G}_t\}$ se existe uma sequência de tempos de parada $\tau_n, n = 1,2,...,$ tal que:*

1. *τ_n é monotonicamente crescente para T quando $n \to \infty$;*
2. *Para cada $n, X_{t\wedge\tau_n}$ é um martingale com respeito a $\mathscr{G}_t$.*

Através de um resultado de densidade estendemos a integral estocástica de $L_{ad}(\Omega, L^2[0,T])$ para $\mathscr{L}_{ad}(\Omega, L^2[0,T])$ e temos o seguinte resultado:

Teorema 1.3 *Seja $X \in \mathscr{L}_{ad}(\Omega, L^2[0,T])$. Então o processo estocástico $I_t = \int_0^t X(s)dW(s)$ é um martingale local com respeito a $\{\mathscr{G}_t\}$.*

Demonstração: Ver Kuo [15], página 71.

1.1.4. Fórmula de Itô

Nesta seção enunciaremos a Fórmula de Itô, que é a fórmula do cálculo estocástico equivalente à regra da cadeia.

Observação 1.3 *Usamos a notação $\mathscr{L}_{ad}(\Omega, L^1[0,T])$ para denotar o espaço de todos os processos estocásticos $X(t)$ que são $\{\mathscr{G}_t\}-$ adaptados e tais que $\int_0^T |X(t)|dt < \infty$, q. t. p. $\omega \in \Omega$.*

Definição 1.15 *Um **processo de Itô** é um processo estocástico da forma*

$$X_t = X_0 + \int_0^t g(s)dW(s) + \int_0^t h(s)ds,\ 0 \leq t \leq T, \tag{1.3}$$

onde X_0 é $\mathscr{G}_0-$mensurável, $g \in \mathscr{L}_{ad}(\Omega, L^2[0,T])$ e $h \in \mathscr{L}_{ad}(\Omega, L^1[0,T])$.

Podemos reescrever a equação (1.3) na forma de equação diferencial estocástica:

$$dX_t = g(t)dW(t) + h(t)dt.$$

Teorema 1.4 ***[Fórmula de Itô]*** *Seja X_t um processo de Itô dado por:*

$$X_t = X_0 + \int_0^t g(s)dW(s) + \int_0^t h(s)ds,\ 0 \leq t \leq T.$$

Seja $\theta(t,x)$ uma função contínua com derivadas parciais $\frac{\partial \theta}{\partial t}, \frac{\partial \theta}{\partial x}$ e $\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$ contínuas. Então

$\theta(t,X_t)$ também é um processo de Itô e vale

$$\begin{aligned}\theta(t,X_t) =& \theta(0,X_0)+\int_0^t \frac{\partial\theta}{\partial x}(s,X_s)g(s)dW(s)+\\ &\int_0^t\left[\frac{\partial\theta}{\partial t}(s,X_s)+\frac{\partial\theta}{\partial x}(s,X_s)h(s)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}(s,X_s)(g(s))^2\right]ds.\end{aligned}\tag{1.4}$$

Demonstração: Ver Kuo [15], página 103.

Observação 1.4 *Se o processo de Itô é tal que X_0 e h tomam valores em um espaço de Hilbert H e a função $\theta(t,x):[0,T]\times H\to\mathbb{R}$ é contínua com derivadas parciais $\frac{\partial\theta}{\partial t}$, $\frac{\partial\theta}{\partial x}$ e $\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}$ uniformemente contínuas em subconjuntos limitados de $[0,T]\times H$, então vale*

$$\begin{aligned}\theta(t,X_t) =& \theta(0,X_0)+\int_0^t\left\langle\frac{\partial\theta}{\partial x}(s,X_s),g(s)dW(s)\right\rangle+\\ &\int_0^t\left[\frac{\partial\theta}{\partial t}(s,X_s)+\left\langle\frac{\partial\theta}{\partial x}(s,X_s),h(s)\right\rangle+\frac{1}{2}\left\langle\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}(s,X_s),(g(s))^2\right\rangle\right]ds,\end{aligned}\tag{1.5}$$

conforme DaPrato [5], página 106.

1.1.5. Desigualdade de Burkholder-Davis-Gundy

Teorema 1.5 ***[Desigualdade de Burkholder-Davis-Gundy]*** *Para todo $m>0$, existe uma constante C_m tal que:*

$$E\left[\left(\sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t X(s)dW(s)\right|\right)^{2m}\right]\le C_mE\left[\left(\int_0^T|X(t)|^2dt\right)^m\right].$$

Demonstração: Ver Chen [4], página 712.

1.2 Resultados envolvendo os espaços $L^p(I,X)$

Os resultados desta seção foram extraídos do livro [2].

Definição 1.16 *Sejam X um espaço de Banach e I um intervalo real. Para todo $p\in[1,+\infty)$,* *denotamos por* $L^p(I,X)$ *o conjunto das funções Lebesgue mensuráveis definidas em I e com valores em X tais que* $t \mapsto \|f(t)\|_X^p$ *é integrável em I. O espaço* $L^\infty(I,X)$ *é constituído pelas funções Lebesgue mensuráveis definidas em I com valores em X tais que* $\sup\mathrm{ess}_{t\in I}\|f(t)\|_X < \infty$.

Teorema 1.6 *Os espaços* $L^p(I,X)$ *são de Banach,* $\forall\, p \in [1,+\infty]$, *com as normas:*

$$\|f\|_{L^p(I,X)} = \left(\int_I \|f(t)\|_X^p dt\right)^{\frac{1}{p}},\ 1 \leq p < +\infty,$$

$$\|f\|_{L^\infty(I,X)} = \sup\mathrm{ess}_{t\in I}\|f(t)\|_X.$$

Demonstração: Ver Boyer [2], página 92.

Teorema 1.7 *Se* $p < +\infty$, *então o conjunto das funções contínuas em I com valores em X é denso em* $L^p(I,X)$.

Demonstração: Ver Boyer [2], página 92.

Teorema 1.8 *Sejam V e H dois espaços de Hilbert tais que V está mergulhado em H de forma contínua e densa. Então o espaço*

$$E_{2,2} = \left\{u \in L^2((0,T),V),\ \frac{du}{dt} \in L^2((0,T),V')\right\}$$

está continuamente mergulhado em $C([0,T],H)$.

Demonstração: Ver Boyer [2], página 101.

Teorema 1.9 *Sejam* $B_0 \subset B_1 \subset B_2$ *três espaços de Banach tais que* B_0 *está continuamente mergulhado em* B_1 *e* B_1 *está compactamente mergulhado em* B_2, *e* p,r *tais que* $1 \leq p,r \leq +\infty$. *Para* $T > 0$, *definimos:*

$$E_{p,r} = \left\{v \in L^p((0,T),B_0),\ \frac{dv}{dt} \in L^r((0,T),B_2)\right\}.$$

Então:

i) Se $p < +\infty$, o mergulho de $E_{p,r}$ em $L^p((0,T),B_1)$ é compacto.

ii) Se $p = +\infty$ e $r > 1$, o mergulho de $E_{p,r}$ em $C^0([0,T],B_1)$ é compacto.

Demonstração: Ver Boyer [2], páginas 102-105.

1.3 Transformada de Fourier

As definições e propriedades da transformada de Fourier citadas nesta seção podem ser encontradas em [6].

Definição 1.17 *Se $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, definimos sua transformada de Fourier*

$$\hat{u}(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} u(x)dx, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n$$

e sua transformada inversa por

$$\check{u}(x) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi\cdot x} u(\xi)d\xi, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Teorema 1.10 ***[Teorema de Plancherel]*** *Se $u \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, então $\hat{u}$, $\check{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e*

$$\|\widehat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\check{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \tag{1.6}$$

Demonstração: Ver Evans [6], página 183.

Observação 1.5 *Em virtude da igualdade (1.6) podemos definir a transformada de Fourier e a inversa para uma função $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, conforme Evans [6], página 184.*

Teorema 1.11 ***[Propriedades da transformada de Fourier]*** *Sejam $u, v \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Então*

(i) $\int_{\mathbb{R}^n} u\bar{v}dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}\bar{\hat{v}}d\xi$;

(ii) $\widehat{D^\alpha u} = (i\xi)^\alpha \hat{u}$ *para cada multi-índice α tal que $D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n)$;*

(iii) Se $u, v \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ *então* $(u * v)\check{} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \hat{u}\hat{v}$;

(iv) Além disso, $u = (\hat{u})\check{}$.

Demonstração: Ver Evans [6], página 184.

1.4 Outros resultados

Teorema 1.12 ***[Teorema de Young]*** *Sejam* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *e* $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$*, com* $1 \leq p \leq \infty$*. Então, q. t. p.* $x \in \mathbb{R}^n$*, a função* $x \mapsto f(x-y)g(y)$ *é integrável em* $\mathbb{R}^n$*. Definindo*

$$(f \star g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy,$$

temos $(f \star g) \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *e vale a seguinte desigualdade*

$$\|f \star g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \tag{1.7}$$

Demonstração: Ver Brezis [3], página 104.

Observação 1.6 *A Desigualdade de Jensen, enunciada a seguir, encontra-se demonstrada em alguns livros (por exemplo, em Evans [6], página 621) para o caso em que E é um aberto limitado do* $\mathbb{R}^n$ *e* μ *é a Medida de Lebesgue. Para constar, fazemos a demonstração de modo análogo para* (E, μ) *um espaço de medida finita.*

Teorema 1.13 ***[Desigualdade de Jensen]*** *Sejam* (E, μ) *um espaço de medida finita,* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função convexa e* $f \in L^1(E)$*. Então:*

$$\varphi\left(\frac{1}{\mu(E)} \int_E f(x)dx\right) \leq \frac{1}{\mu(E)} \int_E \varphi(f(x))dx.$$

Demonstração: Note que a desigualdade acima é imediata se $(\varphi \circ f) \notin L^1(E)$. Consideremos então $(\varphi \circ f) \in L^1(E)$. Sendo φ uma função convexa, para cada $p \in \mathbb{R}$, existe $r \in \mathbb{R}$ tal que

$$\varphi(q) \geq \varphi(p) + r(q-p), \ \forall q \in \mathbb{R}.$$

Tomando $p = \frac{1}{\mu(E)} \int_E f(x)dx$ e $q = f(x)$, temos

$$\varphi(f(x)) \geq \varphi\left(\frac{1}{\mu(E)}\int_E f(x)dx\right) + r\left(f(x) - \frac{1}{\mu(E)}\int_E f(x)dx\right), \; \forall q \in \mathbb{R}.$$

Integrando com relação a x sobre E, obtemos

$$\int_E \varphi(f(x))dx \geq \mu(E)\varphi\left(\frac{1}{\mu(E)}\int_E f(x)dx\right) + r\left(\int_E f(x)dx - \int_E f(x)dx\right),$$

como queríamos. ■

Definição 1.18 *Seja X um espaço de Banach. Uma função $f : [0,T] \to X$ é fortemente mensurável se existe uma sequência $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de funções simples $f_k : [0,T] \to X$ tal que $f_k(x) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(x)$, $\forall\, x \in [0,T]$.*

Teorema 1.14 ***[Teorema de Bochner]*** *Seja X um espaço de Banach. Uma função fortemente mensurável $f : [0,T] \to X$ é somável se e somente se $t \mapsto \|f(t)\|_X$ é somável. Neste caso,*

$$\left\|\int_0^T f(t)dt\right\|_X \leq \int_0^T \|f(t)\|_X dt.$$

Demonstração: Ver Evans [6], página 650.

Teorema 1.15 ***[Lema de Gronwall]*** *Seja $\varphi \in L^1[a,b]$ satisfazendo:*

$$\varphi(t) \leq f(t) + \beta\int_a^t \varphi(s)ds, \; \forall\, t \in [a,b],$$

onde $f \in L^1[a,b]$ e β é uma constante positiva. Então:

$$\varphi(t) \leq f(t) + \beta\int_a^t f(s)e^{\beta(t-s)}ds.$$

Em particular, se $f(t)$ é constante, digamos $f \equiv \alpha$, então:

$$\varphi(t) \leq \alpha e^{\beta(t-a)}, \; \forall\, t \in [a,b].$$

Demonstração: Ver Kuo [15], página 188.

Teorema 1.16 ***[Lema de Murat]*** *Sejam A um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira suave e $M(A)$ o espaço das medidas de Radon sobre A. Seja $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ uma sequência limitada em $W_{loc}^{-1,p}(A)$, para algum $p > 2$, tal que $f_k = g_k + h_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$, onde $\{g_k\}$ é uma sequência pré-compacta em $H_{loc}^{-1}(A)$ e $\{h_k\}$ é uma sequência limitada em $M(A)$. Então $\{f_k\}$ é pré-compacta em $H_{loc}^{-1}(A)$.*

Demonstração: Ver Frid [10], página 33.

Teorema 1.17 *Sejam f e u_0 suficientemente regulares, e suponhamos que não existe intervalo no qual f é afim. Se u_ε é uma sequência de soluções aproximadas da Lei de Conservação (1), então, para todo compacto $K \subset [0,T] \times \mathbb{R}$, existe uma subsequência u_{ε_m} tal que*

$$u_{\varepsilon_m} \longrightarrow u \text{ fortemente em } L^r(K), \; 1 < r \leq 2N + 4,$$

onde N é tal que

$$|f(x)| + |f'(x)| + |f''(x)| \leq C|x|^N + C, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Demonstração: Ver Lu [16], Lema 3.3, página 357.

Definição 1.19 *Seja Y em espaço de Banach. Dizemos que uma função $u : [0,T] \to Y$ é fracamente contínua se, $\forall\ \psi \in Y'$, a função definida por $t \in [0,T] \mapsto \langle \psi, u(t) \rangle_{Y',Y} \in \mathbb{R}$ é contínua. Se $Y = L^2(\mathbb{R})$, dizemos que u é fracamente contínua em $[0,T]$ a valores em $L^2(\mathbb{R})$ se, para toda sequência $\{t_n\} \subset [0,T]$ tal que $\lim_{n\to\infty} t_n = t$, temos que $u(t_n, \cdot) \to u(t, \cdot)$ fracamente em $L^2(\mathbb{R})$, ou seja,*

$$\int_{\mathbb{R}} u(t_n, x)\phi(x)dx \to \int_{\mathbb{R}} u(t, x)\phi(x)dx, \ \forall\ \phi \in L^2(\mathbb{R}), \text{ quando } t_n \to t.$$

Teorema 1.18 *Sejam V e Y espaços de Banach, V reflexivo, V um subconjunto denso de Y e tais que a aplicação inclusão de V em Y é contínua. Então*

$$L^\infty([0,T], V) \cap C_w(0,T;Y) = C_w(0,T;V),$$

onde $C_w(0,T;Y)$ denota o conjunto das funções fracamente contínuas de $[0,T]$ em Y, conforme a definição acima.

Demonstração: Ver Strauss [21], Teorema 2.1, página 544.

Observação 1.7 *O próximo resultado está enunciado em Kim [12], página 241, e demonstrado para o caso $1 \leq p < \infty$. Abaixo fazemos o caso $p = \infty$.*

Lema 1.3 *Sejam X um Espaço de Banach e $\{u_n\}$ uma sequência limitada em $L^p(\Omega;X)$, para algum $p \in [1,\infty]$. Suponhamos que existam $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ com $P(\tilde{\Omega}) = 1$, e uma função u $\mathscr{G}$-mensurável a valores em X tal que, para todo $\omega \in \tilde{\Omega}$, toda subsequência limitada de $\{u_n(\omega)\}$ possui uma subsequência que converge fracamente em X para $u(\omega)$. Então $u \in L^p(\Omega;X)$.*

Demonstração: Sejam $p = \infty$, $\omega \in \tilde{\Omega}$ e $\{u_n(\omega)\}$ uma subsequência que converge fracamente em X para $u(\omega)$. Então:

$$\|u(\omega)\|_X \leq \liminf_{n\to\infty} \|u_n(\omega)\|_X$$

$$\sup\mathrm{ess}_{\omega\in\Omega} \|u(\omega)\|_X \leq \sup\mathrm{ess}_{\omega\in\Omega} \liminf_{n\to\infty} \|u_n(\omega)\|_X \leq C,$$

o que prova que $u \in L^\infty(\Omega;X)$. ■

1.5 Definições e Hipóteses

Quando estudamos equações diferenciais estocásticas, um importante passo é definir o que entendemos por solução da mesma, que é o que faremos a seguir.

Definição 1.20 *Um par de funções suaves $(\eta,\psi) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ é chamado de par de entropia associado à Lei de Conservação (1) se $\psi' = \eta' f'$ e a função η é afim fora de um conjunto compacto. Dizemos que o par é convexo se η é convexa. Um conjunto especial de entropias que desempenhará um papel importante na nossa análise é*

$$\begin{aligned}\mathscr{E} =& \{\eta \in C^{2,1}(\mathbb{R}) \text{ com as seguintes características:}\\ & \eta \text{ é não negativa, convexa,}\\ & \eta(0) = 0 \text{ e existe } \delta > 0 \text{ tal que}\\ & \eta'(x) = 1, \text{ se } x > \delta \text{ e } \eta'(x) = -1, \text{ se } x < -\delta.\}\end{aligned} \tag{1.8}$$

Definição 1.21 ***(Solução Entrópica)*** *Seja $T > 0$ dado. Dizemos que um processo estocástico u a valores em $L^2(\mathbb{R})$ e adaptado à filtração $\mathscr{G}_t$ é uma solução entrópica da equação* (1) *com dado inicial* (2) *se, para quase todo $\omega \in \Omega$, temos*

$$u \text{ é fracamente contínua em } [0,T] \text{ a valores em } L^2(\mathbb{R}) \text{ (Ver Definição 1.19, página 29)}; \tag{1.9}$$

$$u \in L^\infty([0,T], L^p(\mathbb{R})), \ \forall\, p \in [2,\infty). \tag{1.10}$$

Além disso, para toda função não negativa $\varphi \in C_0^\infty([0,T]\times\mathbb{R})$, $k \in \mathbb{R}$ e $\eta \in \mathscr{E}$, para quase todo $\omega \in \Omega$, temos

$$\begin{aligned}\mu_{\eta,k}(\varphi) := & \int_{\mathbb{R}} \eta(u_0 - k)\varphi(0)dx + \int_0^T \int_{\mathbb{R}} [\eta(u-k)\varphi_t - F^\eta(u,k)\varphi_x]\, dxdt \\ & + \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \eta'(u-k)\sigma\varphi dxdW(t) + \frac{1}{2}\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \eta''(u-k)\sigma^2\varphi dxdt \geq 0,\end{aligned} \tag{1.11}$$

onde

$$F^\eta(u,k) \equiv \int_k^u \eta'(\zeta - k) f'(\zeta) d\zeta. \tag{1.12}$$

Definição 1.22 ***(Solução Entrópica a Valores de Medida)*** *Seja $T > 0$ dado. Um processo estocástico $u \in \mathscr{N}_\omega^2(0,T;L^2(\mathbb{R}\times(0,1))) \cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega\times\mathbb{R}\times(0,1)))$ é uma solução entrópica a valores de medida de Young da equação* (1) *com dado inicial* (2) *se, para toda função não-negativa $\varphi \in C_0^\infty([0,T]\times\mathbb{R})$, $k \in \mathbb{R}$ e $\eta \in \mathscr{E}$,*

$$\int_0^1 \mu_{\eta,k}(\varphi) d\alpha \geq 0, \ \ q.\ t.\ p.\ \omega \in \Omega.$$

Observação 1.8 *Na integral acima, a medida $\mu_{\eta,k}$ depende de α porque u depende (ver Apêndice A, página 110).*

Assumiremos as seguintes hipóteses sobre as funções f, σ e o dado inicial u_0:

(H1) A função f é de classe C^2, com:

$$f''(x) \neq 0, \; q.t.p.\; x \in \mathbb{R}. \tag{1.13}$$

Além disso, para algum inteiro $N \geq 2$ e para alguma constante positiva C,

$$|f(x)| + |f'(x)| + |f''(x)| \leq C|x|^N + C, \forall x \in \mathbb{R} \tag{1.14}$$

(H2) A função $\sigma(t,x) : [0,\infty) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é tal que $\sigma(t,x) = 0$, se $(t,x) \notin [0,\infty) \times [-M,M]$, para algum $M \in (0,\infty)$. Além disso,

$$\sigma \in C([0,\infty); W^{1,\infty}(\mathbb{R})). \tag{1.15}$$

(H3) A condição inicial u_0 é um processo $\mathscr{G}_0$ mensurável a valores em $L^p(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$, para cada $1 < p < \infty$, e tal que:

$$0 < E\left(\|u_0\|^p_{L^p(\mathbb{R})}\right) + E\left(\|(u_0)_x\|^p_{L^p(\mathbb{R})}\right) < \infty, \; 1 \leq p < \infty. \tag{1.16}$$

Agora notemos que, definindo $J(t,x,\omega) = \displaystyle\int_0^t \sigma(s,x,\omega)dW(s)$ e $U = u - J$, podemos reescrever (7) como:

$$\partial_t U + \partial_x(f(U+J)) - \varepsilon\partial^2_{xx}U - \delta\partial^3_{xxt}U = \varepsilon\partial^2_{xx}J + \delta\partial^3_{xxt}J. \tag{1.17}$$

Observação 1.9 *Com a hipótese* **(H2)** *acima, obtemos, para quase todo* $\omega \in \Omega$*, para todo*

$0 < \gamma < \frac{1}{2}$ *e para* $t_1, t_2 \in [0, T]$ *com* $t_1 \leq t_2$ *(o outro caso é análogo):*

$$
\begin{aligned}
&|J(t_2, x, \omega) - J(t_1, x, \omega)| \leq \int_{t_1}^{t_2} |\sigma(s, x, \omega)| dW(s) \\
&\leq \int_{t_1}^{t_2} \|\sigma(s, \omega)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} dW(s) \leq \int_{t_1}^{t_2} \|\sigma(s, \omega)\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R})} dW(s) \\
&\leq \sup_{s \in [0,T]} \|\sigma(s, \omega)\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R})} \int_{t_1}^{t_2} dW(s) \leq C(T, \omega, \gamma)|t_2 - t_1|^\gamma.
\end{aligned}
$$

Na última desigualdade acima, usamos o fato do Movimento Browniano ser Hölder contínuo. Fazendo o cálculo análogo para $\dfrac{\partial J}{\partial x}$*, obtemos:*

$$
\|J(t_2, \omega) - J(t_1, \omega)\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R})} \leq C(T, \omega, \gamma)|t_2 - t_1|^\gamma. \tag{1.18}
$$

1.6 Principais Resultados

A seguir, enunciamos os resultados principais deste trabalho.

No Capítulo 2, provamos que:

Teorema 1.19 *Sob as hipóteses* **(H1)-(H2)-(H3)** *(ver página 32), existe uma solução entrópica de*

$$
\begin{cases}
u_t + (f(u))_x = \sigma \dfrac{dW}{dt}, \\
u(0, \cdot) = u_0, & \text{em } (0, T) \times \mathbb{R} \times \Omega.
\end{cases} \tag{1.19}
$$

Teorema 1.20 *Sob as hipóteses* **(HM1)-(HM2)-(H3)** *(ver página 66), existe uma solução entrópica a valores de medida de*

$$
\begin{cases}
u_t + (f(u))_x = \sigma(u) \dfrac{dW}{dt}, \\
u(0, \cdot) = u_0, & \text{em } (0, T) \times \mathbb{R} \times \Omega.
\end{cases} \tag{1.20}
$$

O resultado principal do Capítulo 3 é:

Teorema 1.21 *Suponhamos que* u_0, f *e* σ *satisfazem as hipóteses* **(H1*)-(H2)-(H3)** *(ver página*

71). Então o Problema de Cauchy

$$u_t + (f(u))_x - \varepsilon u_{xx} - \delta u_{xxt} = \sigma_\varepsilon \frac{dW}{dt} \tag{1.21}$$

$$u(0,\cdot) = u_{0,\varepsilon}, \tag{1.22}$$

onde

$$\sigma_\varepsilon(t,x) = \int_{\mathbb{R}} \sigma(t,x-y)\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\rho\left(\frac{y}{\sqrt{\varepsilon}}\right)dy,$$

$$\begin{cases} \rho(x) \geq 0, \forall\, x \in \mathbb{R}, \;\; e \;\; \rho(x) = 0 \;\; para \;\; |x| \geq 1, \\ \rho(x) = \rho(-x), \forall\, x \in \mathbb{R}, \;\; e \;\; \|\rho\|_{L^1(\mathbb{R})} = 1, \end{cases}$$

admite uma única solução local

$$u \in C([0,T]; H^1(\mathbb{R})),$$

onde T depende de δ e $\|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}$.

Por fim, no Capítulo 4, provamos que:

Teorema 1.22 *Suponhamos que u_0, f e σ satisfazem as hipóteses* **(H1*)-(H2*)-(H3)** *(ver página 99). Então o Problema de Cauchy*

$$u_t + (f(u))_x - \varepsilon u_{xx} - \delta u_{xxt} = \sigma_\varepsilon(u) \frac{dW}{dt} \tag{1.23}$$

$$u(0,\cdot) = u_{0,\varepsilon}, \tag{1.24}$$

onde

$$\sigma_\varepsilon(u(t,x)) = \int_{\mathbb{R}} \sigma(u(t,x-y))\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\rho\left(\frac{y}{\sqrt{\varepsilon}}\right)dy,$$

admite uma única solução local

$$u \in C([0,T]; H^1(\mathbb{R})),$$

onde T depende de δ e $\|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}$.

CAPÍTULO 2

Convergência de Soluções do Problema Pseudoviscoso para a Solução da Lei de Conservação Estocástica

Consideremos a Lei de Conservação Estocástica Aditiva

$$\begin{cases} u_t + (f(u))_x = \sigma \dfrac{dW}{dt}, \\ u(0,\cdot) = u_0, \qquad\qquad \text{em } (0,T)\times\mathbb{R}\times\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

onde $W = \{(W_t, \mathscr{G}_t); 0 \leq t \leq T\}$ é um Movimento Browniano padrão unidimensional definido no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathscr{G}, P)$, e as funções f, σ e u_0 satisfazem as hipóteses **(H1)-(H3)** enunciadas no final do capítulo anterior (ver página 32).

Nosso objetivo é mostrar a convergência de soluções do problema pseudoviscoso com dados iniciais regularizados (descrito adiante) para a solução entrópica de (2.1) (ver Definição 1.21, página 31). A unicidade da solução entrópica para (2.1) pode ser encontrada em vários artigos, tanto no caso aditivo quanto no caso multiplicativo. Citamos, por exemplo, Kim [12], Bauzet [1] e Feng [9].

Seja $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ satisfazendo:

$$\begin{cases} \rho(x) \geq 0, \forall\, x \in \mathbb{R}, \text{ e } \rho(x) = 0 \text{ para } |x| \geq 1, \\ \rho(x) = \rho(-x), \forall\, x \in \mathbb{R}, \text{ e } \|\rho\|_{L^1(\mathbb{R})} = 1. \end{cases} \tag{2.2}$$

Vamos definir $f_n \in C_0^2(\mathbb{R})$, $\sigma_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ e $u_{0,n,\varepsilon}$, para $\varepsilon > 0$, $n \geq 1$, tais que:

$$f_n(y) = f(y)\alpha_n(y), \tag{2.3}$$

onde:

$$\alpha_n(y) = \begin{cases} 1, & |y| \leq n, \\ & \qquad 0 \leq \alpha_n(y) \leq 1, |\alpha_n'(y)| \leq 2, \forall y, \alpha_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \\ 0, & |y| \geq n+1, \end{cases} \tag{2.4}$$

e

$$\sigma_\varepsilon(t,x) = \int_{\mathbb{R}} \sigma(t, x-y) \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \rho\left(\frac{y}{\sqrt{\varepsilon}}\right) dy, \tag{2.5}$$

$$u_{0,n,\varepsilon}(x,\omega) = \int_{|y|\leq n} u_0(y,\omega) \frac{1}{\varepsilon} \rho\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) dy. \tag{2.6}$$

Observação 2.1 *As afirmações sobre convolução e suporte feitas a seguir referem-se à variável x. Note que, como*

$$\sigma_\varepsilon = \sigma \star \rho_{\sqrt{\varepsilon}},$$

temos

$$\operatorname{supp}(\sigma_\varepsilon) \subset \overline{\operatorname{supp}(\sigma) + \operatorname{supp}(\rho_{\sqrt{\varepsilon}})}.$$

Como $\operatorname{supp}(\sigma) \subset [-M, M]$ *e, para* $\varepsilon < 1$, $\operatorname{supp}(\rho_{\sqrt{\varepsilon}}) \subset [-1, 1]$, *então*

$$\operatorname{supp}(\sigma_\varepsilon) \subset [-M-1, M+1].$$

Consideraremos o seguinte problema, para quase todo ω, fixados $n \geq 1$ e $0 \leq \varepsilon \leq 1$:

$$u_t + (f_n(u))_x = \varepsilon\left((\beta(u_x))_x + u_{xx}\right) + \sigma_\varepsilon dW \text{ em } [0,T] \times \mathbb{R} \times \Omega, \tag{2.7}$$

$$u(0,\cdot) = u_{0,\varepsilon,n}, \tag{2.8}$$

onde a função $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é tal que:

i. β é não-decrescente e $\beta(0) = 0$;

ii. $|\beta'(u)| \leq K, \forall\, u \in \mathbb{R}$.

Observação 2.2 *Note que a hipótese [i.] acima implica que $x\beta(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.*

Mostraremos primeiramente, que quando $n \to \infty$, a sequência de soluções $(u_n^\varepsilon(t,x,\omega))$ de (2.7)-(2.8) converge, em um espaço adequado, para uma solução do problema:

$$\begin{cases} u_t - [\varepsilon((\beta(u_x))_x + u_{xx}) - (f(u))_x] = \sigma_\varepsilon \dfrac{dW}{dt}, \\ u(0,\cdot) = u_{0,\varepsilon}, \qquad\qquad \text{em } (0,T) \times \mathbb{R} \times \Omega, \end{cases} \tag{2.9}$$

onde

$$u_{0,\varepsilon} := \int_{\mathbb{R}} u_0(y) \frac{1}{\varepsilon} \rho\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) dy. \tag{2.10}$$

Depois mostraremos que, quando $\varepsilon \to 0^+$, as soluções de (2.9) convergem para uma solução da Lei de Conservação Estocástica (2.1).

Começaremos obtendo estimativas uniformes em n para as soluções de (2.7)-(2.8) nos espaços $L^p, p \geq 2$.

2.1 Estimativas em L^p, para $p \geq 2$

Durante esta seção, a fim de simplificar a notação, omitiremos os índices, denotando u_n^ε simplesmente por u. Também usaremos a mesma letra C para denotar diferentes constantes. Conforme já citado, nosso objetivo aqui é obter estimativas uniformes em n para as soluções de

(2.7)-(2.8) nos espaços $L^p, p \geq 2$. Precisamente, mostraremos que:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon E\left[\int_0^T \int_{\mathbb{R}} u^{p-2} u_x^2 dxds\right] &\leq C(p),\\
\varepsilon E\left[\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \beta(u_x) u_x dxds\right] &\leq C,\\
E\left[\|u\|^p_{L^p((0,T)\times\mathbb{R}}\right] &\leq C(p),\\
\varepsilon E\left[\|u\|^2_{L^2(0,T;H^1(\mathbb{R}))}\right] &\leq C,\\
E\left[\|u\|^p_{L^p((0,T)\times\mathbb{R}}\right] &\leq C(p),\\
E\left[\|f_n(u)_x\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\mathbb{R}))}\right] &\leq C,\\
\varepsilon E\left[\|u_{xx}\|^2_{L^2(0,T;H^{-1}(\mathbb{R}))}\right] &\leq C,\\
\varepsilon E\left[\|(\beta(u_x))_x\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\mathbb{R}))}\right] &\leq C.
\end{aligned}
$$

Sejam u a solução de (2.7)-(2.8) e p um inteiro par, $p \geq 2$. Seja Q_k o conjunto de todos os $t \in [0,T]$ que satisfazem uma das seguintes condições:

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^p(\mathbb{R})} \geq k, \tag{2.11}$$

$$\int_0^t \|u(s,\cdot)^{p-1}(f_n(u(s,\cdot)))_x\|_{L^1(\mathbb{R})} ds \geq k, \tag{2.12}$$

$$\int_0^t \|u(s,\cdot)^{p-1}(u(s,\cdot))_{xx}\|_{L^1(\mathbb{R})} ds \geq k, \tag{2.13}$$

$$\int_0^t \|u(s,\cdot)^{p-2}((u(s,\cdot))_x)^2\|_{L^1(\mathbb{R})} ds \geq k, \tag{2.14}$$

$$\int_0^t \|u(s,\cdot)^{p-1}(\beta(u_x(s,\cdot)))_x\|_{L^1(\mathbb{R})} ds \geq k, \tag{2.15}$$

$$\int_0^t \|u(s,\cdot)^{p-2}\beta(u_x(s,\cdot))u_x(s,\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})} ds \geq k, \tag{2.16}$$

$$\int_0^t \|u(s,\cdot)^{p-1}\|^2_{L^2(\mathbb{R})} ds \geq k, \tag{2.17}$$

$$\int_0^t \|u(s,\cdot)^{p-2}\sigma_\varepsilon^2(s,\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})} ds \geq k. \tag{2.18}$$

A seguir, definimos um tempo de parada T_k da seguinte forma

$$T_k(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{se } \|u_{0,n,\varepsilon}\|_{L^p(\mathbb{R})} \geq k, \\ \inf Q_k & \text{se } \|u_{0,n,\varepsilon}\|_{L^p(\mathbb{R})} < k \quad \text{e } Q_k \neq \emptyset, \\ T, & \text{se } \|u_{0,n,\varepsilon}\|_{L^p(\mathbb{R})} < k \quad \text{e } Q_k = \emptyset. \end{cases} \tag{2.19}$$

Vamos aplicar a Fórmula de Itô para $(u(t,x))^p$. Obtemos

$$\begin{aligned} u(t,x)^p =& u(0,x)^p + \int_0^t p(u(s,x))^{p-1}\sigma_\varepsilon(s,x)dW(s) \\ &+ \int_0^t p(u(s,x))^{p-1}[\varepsilon((\beta(u_x))_x + u_{xx}) - (f_n(u))_x]ds \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t p(p-1)(u(s,x))^{p-2}\sigma_\varepsilon^2(s,x)ds, \ \forall t \in [0,T]. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Aplicando a fórmula acima para $t \wedge T_k$ e integrando em $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \|u(t\wedge T_k,\cdot)\|^p_{L^p(\mathbb{R})} = \|u_{0,n,\varepsilon}\|^p_{L^p(\mathbb{R})} &- \int_{\mathbb{R}}\int_0^{t\wedge T_k} p(u(s,x))^{p-1}(f_n(u))_x dsdx \\ &+ \varepsilon\int_{\mathbb{R}}\int_0^{t\wedge T_k} p(u(s,x))^{p-1}u_{xx}dsdx \\ &+ \varepsilon\int_{\mathbb{R}}\int_0^{t\wedge T_k} p(u(s,x))^{p-1}(\beta(u_x))_x dsdx \\ &+ \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\int_0^{t\wedge T_k} p(p-1)(u(s,x))^{p-2}\sigma_\varepsilon^2(s,x)dsdx \\ &+ \int_{\mathbb{R}}\int_0^{t\wedge T_k} p(u(s,x))^{p-1}\sigma_\varepsilon(s,x)dW(s)dx. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Estudaremos a Esperança de cada uma das integrais acima, começando pela última parcela.

Com o objetivo de usar o Teorema de Fubini para a função $\int_0^{t\wedge T_k}(u(s,x))^{p-1}\sigma_\varepsilon(s,x)dW(s)$ no espaço $\Omega\times\mathbb{R}$, mostraremos que essa função está em $L^1(\Omega\times\mathbb{R})$. Temos

$$\left(E\left[\int_{\mathbb{R}}\left|\int_0^{t\wedge T_k} u(s,x)^{p-1}\sigma_\varepsilon(s,x)dW(s)\right|dx\right]\right)^2 =$$

usando o Teorema de Tonelli e o fato que, na variável x, o suporte de σ_ε está contido em

$[-M-1, M+1]$ (conforme Observação 2.1 na página 36), obtemos

$$= \left(\int_{-M-1}^{M+1} E\left[\left| \int_0^{t \wedge T_k} u(s,x)^{p-1} \sigma_\varepsilon(s,x) dW(s) \right| \right] dx \right)^2$$

pela Desigualdade de Jensen (Teorema 1.13, página 27)

$$\leq (2M+2) \int_{-M-1}^{M+1} E\left[\int_0^{t \wedge T_k} u(s,x)^{p-1} \sigma_\varepsilon(s,x) dW(s) \right]^2 dx$$

pelo Teorema 1.1, item **c.** (página 21)

$$\begin{aligned}
&= (2M+2) \int_{-M-1}^{M+1} E\left[\int_0^{t \wedge T_k} u(s,x)^{2(p-1)} \sigma_\varepsilon^2(s,x) ds \right] dx \\
&\leq (2M+2) \|\sigma_\varepsilon\|^2_{L^\infty((0,T)\times\mathbb{R})} \int_{-M-1}^{M+1} E\left[\int_0^{t \wedge T_k} u(s,x)^{2(p-1)} ds \right] dx \\
&\leq (2M+2) \|\sigma_\varepsilon\|^2_{L^\infty((0,T)\times\mathbb{R})} E\left[\int_0^{t \wedge T_k} \|u(s,\cdot)^{p-1}\|^2_{L^2(\mathbb{R})} ds \right] \\
&\leq (2M+2) \|\sigma_\varepsilon\|^2_{L^\infty((0,T)\times\mathbb{R})} E[k] = (2M+2)k \|\sigma_\varepsilon\|^2_{L^\infty((0,T)\times\mathbb{R})} < \infty.
\end{aligned}$$

Com isso, podemos mudar a ordem de integração e obter

$$E\left[\int_{\mathbb{R}} \int_0^{t \wedge T_k} u(s,x)^{p-1} \sigma_\varepsilon(s,x) dW(s) dx \right] = \int_{\mathbb{R}} E\left[\int_0^{t \wedge T_k} u(s,x)^{p-1} \sigma_\varepsilon(s,x) dW(s) \right] dx = 0, \tag{2.22}$$

pelo Teorema 1.1, item **b.** (página 21)

Agora, escrevendo

$$A_k \equiv \{(s,\omega) \in [0,t] \times \Omega; s \leq T_k(\omega) \wedge t\} \text{ e } B_k \equiv \{(s,\omega) \in [0,t] \times \Omega; s \leq T_k(\omega)\}$$

temos $A_k = B_k$, e assim

$$
\begin{aligned}
E\left[\int_{\mathbb{R}}\int_0^{t\wedge T_k} u(s,x)^{p-1}(f_n(u))_x dsdx\right] &= \int_{\Omega\times(0,t\wedge T_k(\omega))}\int_{\mathbb{R}} u(s,x)^{p-1}(f_n(u))_x dxdsd\omega \\
&= \int_{\Omega\times(0,t)} \mathbb{1}_{A_k}(s,\omega)\int_{\mathbb{R}} u(s,x)^{p-1}(f_n(u))_x dxdsd\omega \\
&= \int_{\Omega\times(0,t)} \mathbb{1}_{B_k}(s,\omega)\int_{\mathbb{R}} u(s,x)^{p-1}(f_n(u))_x dxdsd\omega \\
&= \int_0^t E\left[\mathbb{1}_{B_k}(s,\omega)\int_{\mathbb{R}} u(s,x)^{p-1}(f_n(u))_x dx\right] ds. \quad (2.23)
\end{aligned}
$$

Notemos que, considerando $q_n(u) = \displaystyle\int_0^u v^{p-1}f'{}_n(v)dv$, temos $q_n'(u) = u^{p-1}f_n'(u)$ e portanto

$$
\int_{\mathbb{R}} u^{p-1}(f_n(u))_x dx = \int_{\mathbb{R}} u^{p-1}f_n'(u)u_x dx = \int_{\mathbb{R}} q_n'(u)u_x dx = \int_{\mathbb{R}} (q_n(u))_x dx = 0. \quad (2.24)
$$

Logo,

$$
E\left[\int_{\mathbb{R}}\int_0^{t\wedge T_k} u^{p-1}(f_n(u))_x dsdx\right] = 0. \quad (2.25)
$$

Agora, sendo $p \geq 2$ um inteiro par, e usando a igualdade $u^{p-1}u_{xx} = (u^{p-1}u_x)_x - (p-1)u^{p-2}(u_x)^2$, obtemos

$$
\begin{aligned}
E\left[\int_{\mathbb{R}}\int_0^{t\wedge T_k} u^{p-1}u_{xx} dsdx\right] &= \int_0^t E\left[\mathbb{1}_{B_k}(s,\omega)\int_{\mathbb{R}} u^{p-1}u_{xx}dx\right] ds = \\
&= -\int_0^t E\left[\mathbb{1}_{B_k}(s,\omega)\int_{\mathbb{R}} (p-1)u^{p-2}(u_x)^2 dx\right] ds \leq 0.
\end{aligned}
$$

Similarmente, usando que

$$
u^{p-1}(\beta(u_x))_x = (u^{p-1}\beta(u_x))_x - (p-1)u^{p-2}u_x\beta(u_x),
$$

obtemos

$$E\left[\int_{\mathbb{R}}\int_0^{t\wedge T_k} u^{p-1}(\beta(u_x))_x ds dx\right] = \int_0^t E\left[\mathbb{1}_{B_k}(s,\omega)\int_{\mathbb{R}} u^{p-1}(\beta(u_x))_x dx\right] ds =$$
$$= -\int_0^t E\left[\mathbb{1}_{B_k}(s,\omega)\int_{\mathbb{R}}(p-1)u^{p-2}\beta(u_x)u_x dx\right] ds \leq 0. \tag{2.26}$$

Observação 2.3 *No próximo resultado, usaremos o seguinte fato, válido para p par, $p \geq 2$, e $a, b \in \mathbb{R}$:*

$$a^{p-2}b^2 = |a|^{p-2}|b|^2 \leq (\max\{|a|,|b|\})^{p-2}(\max\{|a|,|b|\})^2 = (\max\{|a|,|b|\})^p \leq |a|^p + |b|^p. \tag{2.27}$$

Temos

$$\begin{aligned} E\left[\int_0^{t\wedge T_k}\int_{\mathbb{R}} u^{p-2}\sigma_\varepsilon^2 dx ds\right] &= E\left[\int_0^t \mathbb{1}_{B_k}(s,\omega)\int_{\mathbb{R}} u^{p-2}\sigma_\varepsilon^2 dx ds\right] \\ &\leq E\left[\int_0^t \mathbb{1}_{B_k}(s,\omega)\int_{\mathbb{R}}(|u|^p + |\sigma_\varepsilon|^p) dx ds\right] \\ &= E\left[\int_0^t \mathbb{1}_{B_k}(s,\omega)\left(\|u(s,\cdot)\|_{L^p(\mathbb{R})}^p + \|\sigma_\varepsilon(s,\cdot)\|_{L^p(\mathbb{R})}^p\right) ds\right] \\ &\leq \int_0^t E\left[\|u(s\wedge T_k,\cdot)\|_{L^p(\mathbb{R})}^p\right] ds + T\|\sigma_\varepsilon\|_{C([0,T];L^p(\mathbb{R}))}^p. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Substituindo estes resultados em (2.21), obtemos

$$\begin{aligned} E\left[\|u(t\wedge T_k,]\cdot)\|_{L^p(\mathbb{R})}^p\right] &+ \varepsilon p(p-1)\int_0^t E\left[\mathbb{1}_{B_k}(s,\omega)\int_{\mathbb{R}} u^{p-2}(u_x)^2 dx\right] ds \\ &+ \varepsilon p(p-1)\int_0^t E\left[\mathbb{1}_{B_k}(s,\omega)\int_{\mathbb{R}} u^{p-2}\beta(u_x)u_x dx\right] ds \\ \leq E\left[\|u_{0,n,\varepsilon}\|_{L^p(\mathbb{R})}^p\right] &+ \frac{1}{2}p(p-1)T\|\sigma_\varepsilon\|_{C([0,T];L^p(\mathbb{R}))}^p \\ &+ \frac{1}{2}p(p-1)\int_0^t E\left[\|u(s\wedge T_k,\cdot)\|_{L^p(\mathbb{R})}^p\right] ds. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Portanto, temos

$$E\left[\|u(t\wedge T_k,\cdot)\|^p_{L^p(\mathbb{R})}\right] \leq E\left[\|u_{0,n,\varepsilon}\|^p_{L^p(\mathbb{R})}\right] + \frac{1}{2}p(p-1)T\|\sigma_\varepsilon\|^p_{C([0,T];L^p(\mathbb{R}))}$$
$$+\frac{1}{2}p(p-1)\int_0^t E\left[\|u(s\wedge T_k,\cdot)\|^p_{L^p(\mathbb{R})}\right]ds. \tag{2.30}$$

Pelo Lema de Gronwall (Teorema 1.15, página 28), concluímos que

$$E\left[\|u(t\wedge T_k,\cdot)\|^p_{L^p(\mathbb{R})}\right] \leq C(p),\ \forall t\in[0,T]. \tag{2.31}$$

Agora notemos que, para quase todo $\omega\in\Omega, T_k(\omega)\to T$ quando $k\to\infty$. Portanto, pelo Lema de Fatou,

$$E\left[\|u(t,\cdot)\|^p_{L^p(\mathbb{R})}\right] = E\left[\liminf_{k\to\infty}\|u(t\wedge T_k,\cdot)\|^p_{L^p(\mathbb{R})}\right]$$
$$\leq \liminf_{k\to\infty} E\left[\|u(t\wedge T_k,\cdot)\|^p_{L^p(\mathbb{R})}\right] < C(p),\ \forall t\in[0,T]. \tag{2.32}$$

Analogamente,

$$\varepsilon E\left[\int_0^T\int_{\mathbb{R}} u^{p-2}u_x^2\,dxds\right] \leq C(p), \tag{2.33}$$
$$\varepsilon E\left[\int_0^T\int_{\mathbb{R}} \beta(u_x)u_x\,dxds\right] \leq C(p). \tag{2.34}$$

Tomando $p=2$ nestas duas últimas desigualdades, obtemos

$$\varepsilon E\left[\int_0^T\int_{\mathbb{R}} u_x^2\,dxds\right] = \varepsilon E\left[\|u_x\|^2_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}))}\right] \leq C, \tag{2.35}$$
$$\varepsilon E\left[\int_0^T\int_{\mathbb{R}} \beta(u_x)u_x\,dxds\right] = \varepsilon E\left[\|\beta(u_x)u_x\|_{L^1([0,T]\times\mathbb{R})}\right] \leq C. \tag{2.36}$$

Juntando (2.35) com (2.32) para $p=2$, obtemos

$$\varepsilon E\left[\|u\|^2_{L^2(0,T;H^1(\mathbb{R}))}\right] \leq C. \tag{2.37}$$

Também, de (2.32), obtemos

$$E\left[\|u\|^p_{L^p((0,T)\times\mathbb{R})}\right] \leq C. \tag{2.38}$$

Notemos que, pelas propriedades de β (ver página 37) e por (2.35), temos também

$$\varepsilon E\left[\int_0^T\int_{\mathbb{R}}(\beta(u_x))^2 dxds\right] \leq K\varepsilon E\left[\int_0^T\int_{\mathbb{R}} u_x^2 dxds\right] \leq C. \tag{2.39}$$

Mostraremos a seguir que

$$\|f_n(u(t,x)) - f_n(0)\|_{L^2((0,T)\times\mathbb{R})} \leq C\left[\|u\|^{N+1}_{L^{2N+2}((0,T)\times\mathbb{R})} + \|u\|_{L^2((0,T)\times\mathbb{R})}\right].$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\|f_n(u(t,x)) - f_n(0)\|^2_{L^2((0,T)\times\mathbb{R})} &= \int_0^T\int_{\mathbb{R}}(f_n(u(t,x)) - f_n(0))^2 dxdt \\
\leq \int_0^T\int_{\mathbb{R}}(|f_n'(\alpha u(t,x)||u(t,x)|)^2 dxdt &\leq C\int_0^T\int_{\mathbb{R}}(|(\alpha u(t,x))^N + 1||u(t,x)|)^2 dxdt \\
\leq C\int_0^T\int_{\mathbb{R}}((|u(t,x)|^N + 1)|u(t,x)|)^2 dxdt &= C\int_0^T\int_{\mathbb{R}}(|u(t,x)|^{N+1} + |u(t,x)|)^2 dxdt \\
&\leq C\int_0^T\int_{\mathbb{R}}\left(|u(t,x)|^{2N+2} + |u(t,x)|^2\right) dxdt.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\|f_n(u(t,x)) - f_n(0)\|_{L^2((0,T)\times\mathbb{R})} &\leq C\left(\int_0^T\int_{\mathbb{R}}\left(|u(t,x)|^{2N+2} + |u(t,x)|^2\right) dxdt\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C\left[\left(\int_0^T\int_{\mathbb{R}}|u(t,x)|^{2N+2} dxdt\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_0^T\int_{\mathbb{R}}|u(t,x)|^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\
&\leq C\left[\left(\int_0^T\int_{\mathbb{R}}|u(t,x)|^{2N+2} dxdt\right)^{\frac{N+1}{2N+2}}\right. \\
&\qquad\left. + \left(\int_0^T\int_{\mathbb{R}}|u(t,x)|^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\
&= C\left[\|u\|^{N+1}_{L^{2N+2}((0,T)\times\mathbb{R})} + \|u\|_{L^2((0,T)\times\mathbb{R})}\right].
\end{aligned}$$

Concluímos, de (2.38), que

$$E\left[\|f_n(u(t,x)) - f_n(0)\|_{L^2((0,T)\times\mathbb{R})}\right] \leq C.$$

Portanto

$$E\left[\|f_n(u)_x\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\mathbb{R}))}\right] \leq C. \tag{2.40}$$

Também temos, de (2.37)

$$\varepsilon E\left[\|u_{xx}\|^2_{L^2(0,T;H^{-1}(\mathbb{R}))}\right] \leq C, \tag{2.41}$$

$$\varepsilon E\left[\|(\beta(u_x))_x\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\mathbb{R}))}\right] \leq \varepsilon K E\left[\|u_{xx}\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\mathbb{R}))}\right] \leq C. \tag{2.42}$$

Essas três últimas estimativas nos dão

$$E\left[\left\|\frac{\partial}{\partial t}\left(u - \int_0^T \sigma_\varepsilon dW\right)\right\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\mathbb{R}))}\right] \leq C \tag{2.43}$$

Observação 2.4 *Notemos que as estimativas provadas nesta seção para p par, estendem-se, por interpolação, para todo $p \geq 2$.*

Para finalizar essa seção, mostraremos que

$$E[\|u(t)\|^p_{L^\infty([0,T];L^p(\mathbb{R}))}] \leq C. \tag{2.44}$$

Integrando a Fórmula de Itô (2.20) para $x \in \mathbb{R}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|^p_{L^p(\mathbb{R})} = \|u(0)\|^p_{L^p(\mathbb{R})} &- \int_{\mathbb{R}}\int_0^t p(u(s,x))^{p-1}(f_n(u))_x ds dx \\
&+ \varepsilon \int_{\mathbb{R}}\int_0^t p(u(s,x))^{p-1} u_{xx} ds dx \\
&+ \varepsilon \int_{\mathbb{R}}\int_0^t p(u(s,x))^{p-1}(\beta(u_x))_x ds dx \\
&+ \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\int_0^t p(p-1)(u(s,x))^{p-2}\sigma^2_\varepsilon(s,x) ds dx \\
&+ \int_{\mathbb{R}}\int_0^t p(u(s,x))^{p-1}\sigma_\varepsilon(s,x) dW(s) dx.
\end{aligned} \tag{2.45}$$

Pelos cálculos feitos anteriormente, temos

$$E\left[\int_{\mathbb{R}}\int_0^t p(u(s,x))^{p-1}(f_n(u))_x dsdx\right] = 0$$
$$\varepsilon E\left[\int_{\mathbb{R}}\int_0^t p(u(s,x))^{p-1}u_{xx}dsdx\right] = -\varepsilon\int_0^t E\left[\int_{\mathbb{R}}(p-1)u^{p-2}(u_x)^2dx\right]ds \leq 0.$$
$$\varepsilon E\left[\int_{\mathbb{R}}\int_0^t p(u(s,x))^{p-1}(\beta(u_x))_x dsdx\right] = -\varepsilon\int_0^t E\left[\int_{\mathbb{R}}(p-1)u^{p-2}\beta(u_x)u_x dx\right]ds \leq 0.$$

Substituindo em (2.45), obtemos

$$\begin{aligned}\|u(t)\|^p_{L^p(\mathbb{R})} &\leq \|u(0)\|^p_{L^p(\mathbb{R})} \\ &+ \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\int_0^t p(p-1)(u(s,x))^{p-2}\sigma_\varepsilon^2(s,x)dsdx \\ &+ \int_{\mathbb{R}}\int_0^t p(u(s,x))^{p-1}\sigma_\varepsilon(s,x)dW(s)dx. \end{aligned} \tag{2.46}$$

Portanto

$$\begin{aligned}\sup_{0\leq t\leq T}\|u(t)\|^p_{L^p(\mathbb{R})} &\leq \|u(0)\|^p_{L^p(\mathbb{R})} \\ &+ \sup_{0\leq t\leq T}\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\int_0^t p(p-1)(u(s,x))^{p-2}\sigma_\varepsilon^2(s,x)dsdx \\ &+ \sup_{0\leq t\leq T}\int_{\mathbb{R}}\int_0^t p(u(s,x))^{p-1}\sigma_\varepsilon(s,x)dW(s)dx. \end{aligned} \tag{2.47}$$

A Esperança da segunda parcela do lado direito pode ser estimada usando (2.32) e (2.28). Para a terceira parcela, temos

$$\begin{aligned} &E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_{\mathbb{R}}\int_0^t (u(s,x))^{p-1}\sigma_\varepsilon(s,x)dW(s)dx\right|\right] \\ &= E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t\int_{\mathbb{R}}(u(s,x))^{p-1}\sigma_\varepsilon(s,x)dxdW(s)\right|\right]\end{aligned}$$

Pela Desigualdade de Burkholder Davis Gundy (Teorema 1.5, página 24) com $m = \frac{1}{2}$, obtemos

$$\leq CE\left[\left(\int_0^T\left(\int_{\mathbb{R}}(u(s,x))^{p-1}\sigma_\varepsilon(s,x)dx\right)^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}\right] \leq C(p),$$

por (2.38) e pela limitação de $\|\sigma_\varepsilon\|_{C([0,T];L^\infty(\mathbb{R}))}$. Substituindo em (2.47), concluímos que, para todo $p \in [2,\infty)$, vale

$$E\left[\|u\|^p_{L^\infty([0,T];L^p(\mathbb{R}))}\right] \leq C(p). \tag{2.48}$$

2.2 Existência de Solução de (2.9)

Nesta seção, provaremos o seguinte resultado.

Teorema 2.1 *Sejam $T > 0$ dado e $u_n^\varepsilon(\omega)$ uma sequência de soluções suaves de* (2.7)-(2.8). *Sob as hipóteses* **(H1)-(H2)-(H3)**, *existe uma subsequência $u_{n_k}^\varepsilon(\omega)$ tal que $u_{n_k}^\varepsilon(\omega) \to u^\varepsilon$, onde u^ε é solução de 2.9 e, para quase todo $\omega \in \Omega$,*

$$u^\varepsilon(\omega) \in C([0,T];L^2(\mathbb{R})) \cap L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R})) \cap L^2(0,T;H^1(\mathbb{R})), \tag{2.49}$$

u^ε é progressivamente mensurável com respeito a $\mathcal{G}_t$ e assume valores em $L^2(\mathbb{R})$. Além disso, u^ε é também $\mathcal{G}$-mensurável a valores em $L^\infty(0,T;L^p(\mathbb{R}))$, $\forall\, p \geq 2$, e satisfaz

$$E\left[\|u^\varepsilon\|^p_{L^\infty(0,T;L^p(\mathbb{R}))}\right] + \varepsilon E\left[\|u^\varepsilon\|^2_{L^2(0,T;H^1(\mathbb{R}))}\right] \leq C(p), \tag{2.50}$$

onde C é uma constante positiva independente de ε.

2.2.1. Convergência

Observação 2.5 *Daqui por diante, para simplificar a escrita, usaremos as seguintes notações:*

$$J = \int_0^T \sigma dW \ \ e \ \ J_\varepsilon = \int_0^T \sigma_\varepsilon dW.$$

Comecemos definindo

$$\mathscr{E}(v) = \|v\|_{L^\infty(0,T;L^p(\mathbb{R}))} + \left\| \frac{\partial}{\partial t}(v - J_\varepsilon) \right\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\mathbb{R}))} + \sqrt{\varepsilon}\|v\|_{L^2(0,T;H^1(\mathbb{R}))}, \tag{2.51}$$

e consideremos o conjunto

$$\tilde{\Omega}_\varepsilon = \bigcap_{p=2}^{\infty} \bigcup_{L=1}^{\infty} \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} \{\omega \in \Omega : \mathscr{E}(u_n^\varepsilon(\omega)) \leq L\}. \tag{2.52}$$

Pelas estimativas (2.37), (2.43) e (2.48), temos

$$P(\tilde{\Omega}_\varepsilon) = 1. \tag{2.53}$$

Modificando $\tilde{\Omega}_\varepsilon$, se necessário, por um conjunto com medida P nula, podemos assumir que, para cada $\omega \in \tilde{\Omega}_\varepsilon$, e cada $n \in \mathbb{N}$, valem: (1.18), (2.7)-(2.8), e $u_0 \in L^p(\mathbb{R})$, para todo $p \in [1, \infty)$.

Notemos que

$$\tilde{\Omega}_\varepsilon = \bigcap_{p=2}^{\infty} \bigcup_{L=1}^{\infty} \left(\limsup_{n\to\infty} \{\omega : \mathscr{E}(u_n^\varepsilon(\omega)) \leq L\} \right),$$

e lembremos que

$$\limsup_{n\to\infty} \{\omega : \mathscr{E}(u_n^\varepsilon(\omega)) \leq L\} = \{\omega : \omega \in \{\mathscr{E}(u_n^\varepsilon) \leq L\}\text{, para infinitos n's.}\}$$

Portanto, para todo $\omega \in \tilde{\Omega}_\varepsilon$, existe um inteiro positivo $L(p,\omega)$ e uma subsequência (que também depende de p e de ω), que continuaremos denotando por $\{u_n^\varepsilon\}$, tal que

$$\mathscr{E}(u_n^\varepsilon) \leq L(p,\omega),\ \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{2.54}$$

Assim, dado qualquer compacto $K \subset \mathbb{R}$, temos

$$\|u_n^\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;L^p(K))} \leq L(p,\omega), \tag{2.55}$$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial t}(u_n^\varepsilon - J_\varepsilon) \right\|_{L^2(0,T;H^{-1}(K))} \leq L(p,\omega), \tag{2.56}$$

$$\|u_n^\varepsilon\|_{L^2(0,T;H^1(K))} \leq L(p,\omega). \tag{2.57}$$

Como

$$H^1(K) \hookrightarrow L^2(K) \hookrightarrow H^{-1}(K)$$

e

$$L^p(K) \hookrightarrow L^2(K) \hookrightarrow H^{-1}(K),$$

onde a primeira inclusão é contínua e a segunda é compacta em cada uma das sequências acima, pelo Teorema 1.9, podemos extrair uma nova subsequência, ainda denotada por $\{u_n^\varepsilon\}$, tal que, para alguma função $u^\varepsilon(\omega)$, temos

$$u_n^\varepsilon \to u^\varepsilon(\omega) \quad \text{fortemente em} \quad L^2(0,T;L^2_{loc}(\mathbb{R})), \tag{2.58}$$

$$u_n^\varepsilon \to u^\varepsilon(\omega) \quad \text{fortemente em} \quad C([0,T];H^{-1}_{loc}(\mathbb{R})), \tag{2.59}$$

$$(f_n(u_n^\varepsilon) - f_n(0)) \to (f(u^\varepsilon(\omega)) - f(0)) \quad \text{fracamente em} \quad L^2((0,T)\times\mathbb{R}). \tag{2.60}$$

Observação 2.6 *Dizer que $u_n^\varepsilon \to u^\varepsilon(\omega)$ fortemente em $L^2(0,T;L^2_{loc}(\mathbb{R}))$ significa dizer que, dado um aberto limitado com fronteira Lipschitz $A \subset \mathbb{R}$, temos $u_n^\varepsilon \to u^\varepsilon(\omega)$ fortemente em $L^2(0,T;L^2(A))$, e analogamente para a segunda convergência.*

Assim $u^\varepsilon(\omega)$ satisfaz, no sentido das distribuições:

$$u_t^\varepsilon + (f(u^\varepsilon))_x - \varepsilon u_{xx}^\varepsilon - \varepsilon(\beta(u_x^\varepsilon))_x = \sigma_\varepsilon \frac{dW}{dt} \text{ em } (0,T)\times\mathbb{R}, \tag{2.61}$$

$$u^\varepsilon(0,\cdot) = u_{0,\varepsilon} \text{ em } \mathbb{R}, \tag{2.62}$$

$$\mathscr{E}(u^\varepsilon(p,\omega)) \leq L(p,\omega), \tag{2.63}$$

onde $u_{0,\varepsilon}$ é dada por (2.10).

2.2.2. Regularidade do Limite

Como $u(\omega)$ é única (pelo Teorema 2.2, página 51), segue que ela é independente da escolha da subsequência escolhida satisfazendo (2.58), (2.59) e (2.60). Pelo Teorema 1.8 (página 25) com $V = H^1(\mathbb{R})$ e $H = L^2(\mathbb{R})$, vemos que, para todo $\omega \in \tilde{\Omega}_\varepsilon$,

$$u(\omega) \in C([0,T]; L^2(\mathbb{R})). \tag{2.64}$$

Agora, fixemos $s \in (0,T]$, e consideremos

$$\begin{aligned} \mathscr{E}_s(v) = \|v\|_{L^\infty(0,s;L^1(\mathbb{R})\cap L^2(\mathbb{R}))} + \left\| \frac{\partial}{\partial t}(v - J_\varepsilon) \right\|_{L^2(0,s;H^{-1}(\mathbb{R}))} \\ + \sqrt{\varepsilon}\|v\|_{L^2(0,s;H^1(\mathbb{R}))}. \end{aligned} \tag{2.65}$$

Seja $b_r(w)$ a bola aberta de centro w e raio r em $H^{-1}(\mathbb{R})$. (Se $r \leq 0$, $b_r(w)$ denota o conjunto vazio.)

Consideremos $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ tal que $0 \leq \psi(x) \leq 1$, $\forall\ x$, e $\psi(x) = 1$ se $|x| \leq 1$. Denotemos $\psi_\nu(x) = \psi\left(\dfrac{x}{\nu}\right), \nu > 0$.

Sejam $a > 0$ e $w \in H^{-1}(\mathbb{R})$. Pelo procedimento acima para a obtenção de $u(\omega)$ e pela unicidade da solução, vemos que

$$\begin{aligned} \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{L=1}^{\infty}\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=m}^{\infty}\left(\{\mathscr{E}_s(u_n) \leq L\} \cap \left\{\psi_\nu u_n(s) \in b_{a-\frac{1}{k}}(w)\right\} \cap \tilde{\Omega}_\varepsilon\right) = \\ = \tilde{\Omega}_\varepsilon \cap \{\psi_\nu u(s) \in b_a(w)\}. \end{aligned} \tag{2.66}$$

Isso mostra que $\psi_\nu u(s)$ é $\mathscr{G}_s$-mensurável a valores em $H^{-1}(\mathbb{R})$. Assim, dado um Boreliano B em $H^{-1}(\mathbb{R})$, $(\psi_\nu u(s))^{-1}(B) \in \mathscr{G}_s$. Consideremos agora uma bola $\tilde{B}$ fechada em $L^2(\mathbb{R})$. Como $L^2(\mathbb{R}) \subset H^{-1}(\mathbb{R})$, $\tilde{B}$ é um Boreliano de $H^{-1}(\mathbb{R})$. Logo, $(\psi_\nu u(s))^{-1}(\tilde{B}) \in \mathscr{G}_s$. Isso mostra que $\psi_\nu u(s)$ é $\mathscr{G}_s$-mensurável a valores em $L^2(\mathbb{R})$. Fazendo $\nu \to \infty$, concluímos que $u(s)$ é também $\mathscr{G}_s$-mensurável a valores em $L^2(\mathbb{R})$. Assim, segue de (2.64) que u é progressivamente mensurável com respeito à filtração $\{\mathcal{G}_t\}$ assumindo valores em $L^2(\mathbb{R})$. Consideremos agora uma bola fechada G em $L^p(\mathbb{R})$, $p > 2$. Como, para cada $\omega \in \tilde{\Omega}_\varepsilon$,

$$u(\omega) \in C([0,t];L^2(\mathbb{R})) \cap L^\infty(0,t;L^p(\mathbb{R})),\ \forall\, t \in [0,T],$$

segue que

$$u^{-1}(G) \cap ([0,t] \times \tilde{\Omega}_\varepsilon) = u^{-1}(G \cap L^2(\mathbb{R})) \cap ([0,t] \times \tilde{\Omega}_\varepsilon).$$

Como $G \cap L^2(\mathbb{R})$ é um boreliano de $L^2(\mathbb{R})$, vemos que u é também progressivamente mensurável com valores em $L^p(\mathbb{R})$. Considerando, de forma similar a (2.66), bolas abertas em $L^2((0,T) \times \mathbb{R})$, provamos que u é $\mathcal{G}$-mensurável a valores em $L^2((0,T) \times \mathbb{R})$, e considerando bolas fechadas em $L^\infty(0,T;L^p(\mathbb{R}))$, u é $\mathcal{G}$-mensurável a valores em $L^\infty(0,T;L^p(\mathbb{R}), p \geq 2$. Agora, usando o Lema 1.3 (página 30), concluimos, das estimativas (2.37) e (2.48), que a função u satisfaz (2.50), $\forall\ 2 \leq p < \infty$. Vemos assim que u satisfaz as condições de regularidade do Teorema 2.1 (página 47), para quase todo ω.

2.3 Unicidade da Solução Aproximada

Teorema 2.2 *Fixemos $\varepsilon > 0$, $\omega \in \Omega$ tal que $J \in C([0,T];W^{1,\infty}(\mathbb{R}))$ e $4N \leq p < \infty$. Sejam u_1 e u_2 duas soluções de*

$$u_t + (f(u))_x = [\varepsilon((\beta(u_x))_x + u_{xx})] + (J_\varepsilon)_t \tag{2.67}$$

no sentido das distribuições sobre $(0,T) \times \mathbb{R}$ com a mesma condição inicial

$$u_1(0,\cdot) = u_0 = u_2(0,\cdot).$$

Suponhamos ainda que

$$u_i \in L^p((0,T) \times \mathbb{R}) \cap L^2((0,T);H^1(\mathbb{R})), \qquad i = 1,2. \tag{2.68}$$

Então $u_1 = u_2$.

Demonstração: Inicialmente notemos que

$$L^p((0,T)\times\mathbb{R})\cap L^2((0,T);H^1(\mathbb{R}))\subset L^q((0,T);W^{\alpha,p}(\mathbb{R})),$$

onde

$$\alpha=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{p}\right)\theta,\ 0<\theta<1,\ \text{e}\ \frac{1}{q}=\frac{\theta}{2}+\frac{1-\theta}{p}.$$

Assim, como $p\geq 4N$, temos

$$\frac{1}{q}=\frac{\theta}{2}+\frac{1-\theta}{p}\leq\frac{\theta}{2}+\frac{1-\theta}{4N}=\frac{\theta(2N-1)+1}{4N}\leq\frac{1}{2N},$$

para θ suficientemente pequeno. Logo, $q\geq 2N$ e temos $W^{\alpha,p}(\mathbb{R})\subset L^\infty(\mathbb{R})$.

Como u_1 e u_2 são soluções, temos

$$(u_1-u_2)_t=\varepsilon(u_1-u_2)_{xx}+\varepsilon(\beta((u_1)_x-\beta((u_2)_x))_x-(f(u_1)-f(u_2))_x.$$

Multiplicando por (u_1-u_2), obtemos

$$\begin{aligned}&(u_1-u_2)_t(u_1-u_2)=\\&\varepsilon(u_1-u_2)_{xx}(u_1-u_2)+\varepsilon(\beta((u_1)_x-\beta((u_2)_x))_x(u_1-u_2)-(f(u_1)-f(u_2))_x(u_1-u_2),\end{aligned}$$

ou seja

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left((u_1-u_2)^2\right)_t=\\&\varepsilon(u_1-u_2)_{xx}(u_1-u_2)+\varepsilon\left(\beta((u_1)_x)-\beta((u_2)_x)\right)_x(u_1-u_2)-(f(u_1)-f(u_2))_x(u_1-u_2).\end{aligned}$$

Integrando em $(0,t)\times\mathbb{R}$ e usando integração por partes em x, obtemos, para todo $t\in[0,T]$,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\|(u_1-u_2)(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\\&\leq\int_0^t\int_{\mathbb{R}}\Big[|(f(u_1)-f(u_2))_x(u_1-u_2)|-\varepsilon\left((u_1-u_2)_x\right)^2\end{aligned}$$

$$
\left. - \varepsilon \left(\beta((u_1)_x) - \beta((u_2)_x)\right)(u_1 - u_2)_x \right] dxds
$$

$$
\leq \int_0^t \int_{\mathbb{R}} |(f(u_1) - f(u_2))_x (u_1 - u_2)| dxds. \tag{2.69}
$$

Agora, notemos que

$$
\begin{aligned}
\sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \|f'(u_1 + \alpha(u_2 - u_1))\|^2_{L^\infty(\mathbb{R})} &\leq C\|u_1 + \alpha(u_2 - u_1)\|^{2N}_{L^\infty(\mathbb{R})} + C \\
&\leq C\left(\|u_1\|^{2N}_{L^\infty(\mathbb{R})} + \|u_2\|^{2N}_{L^\infty(\mathbb{R})}\right) + C. \qquad (2.70)
\end{aligned}
$$

Substituindo em (2.69), obtemos

$$
\begin{aligned}
\|(u_1 - u_2)(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} &\leq 2\int_0^t \int_{\mathbb{R}} |(f(u_1) - f(u_2))_x (u_1 - u_2)| dxds \\
&\leq 2\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \|f'(u_1 + \alpha(u_2 - u_1))\|_{L^\infty(\mathbb{R})} |u_1 - u_2|^2 dxds \\
&= \int_0^t \theta(s) \|(u_1 - u_2)(s)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} ds,
\end{aligned}
$$

com $\theta(s) \in L^1([0,T])$. Portanto, $\|(u_1 - u_2)(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = 0$, o que prova que $u_1 = u_2$. ■

2.4 Convergência quando $\varepsilon \to 0$

O objetivo dessa seção é provar a existência de uma solução no sentido da Definição 1.21 para o problema (2.1). Como já citado anteriormente, a unicidade dessa solução pode ser encontrada em vários trabalhos, por exemplo, [1], [9] e [12].

Teorema 2.3 *Sob as hipóteses* **(H1)-(H2)-(H3)** *(ver página 32), existe uma solução entrópica de* (2.1).

A técnica utilizada será a seguinte: já sabemos que existe uma única solução u^ε para o problema aproximado (2.9) com a condição inicial (2.10). Provaremos que, quando $\varepsilon \to 0^+$, essa sequência de soluções converge em um sentido apropriado para uma solução de (2.1). Para tal, usaremos, entre outros, alguns resultados conhecidos - como o Lema de Murat - e as estimativas provadas anteriormente.

Sejam $\Phi \in C^2(\mathbb{R})$ tal que $|\Phi(y)| + |\Phi'(y)| + |\Phi''(y)|$ é uniformemente limitada, e Θ_n dada por

$$\Theta_n(s) = \int_0^s \Phi'(z) f_n'(z) dz.$$

Seja u_n^ε a solução de (2.7)-(2.8) obtida no capítulo anterior. Pela Fórmula de Itô aplicada a $\Phi(u_n^\varepsilon)$, obtemos, no sentido das distribuições sobre $(0,T) \times \mathbb{R}$ e para todo $n = 1, 2, \ldots$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\Phi(u_n^\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x}\Theta_n(u_n^\varepsilon) &= \varepsilon \partial_x(\Phi'(u_n^\varepsilon)\partial_x u_n^\varepsilon) - \varepsilon \Phi''(u_n^\varepsilon)(\partial_x u_n^\varepsilon)^2 \\
&\quad + \varepsilon \partial_x(\Phi'(u_n^\varepsilon)\beta((u_n^\varepsilon)_x)) - \varepsilon \Phi''(u_n^\varepsilon)\beta((u_n^\varepsilon)_x)(u_n^\varepsilon)_x \\
&\quad + \frac{1}{2}\Phi''(u_n^\varepsilon)\sigma_\varepsilon^2 + \frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \Phi'(u_n^\varepsilon)\sigma_\varepsilon dW.
\end{aligned}$$

Da seção anterior, sabemos que existe um conjunto $\tilde{\Omega}_\varepsilon \subset \Omega$ com $P(\tilde{\Omega}_\varepsilon) = 1$ e tal que, para todo $\omega \in \tilde{\Omega}_\varepsilon$ existe uma subsequência, que continuaremos a denotar por (u_n^ε) com

$$u_n^\varepsilon \longrightarrow u^\varepsilon \text{ fortemente em } L^2((0,T) \times K),$$

para cada compacto $K \subset \mathbb{R}$, quando $n \to \infty$. Além disso,

$$\varepsilon \|(u_n^\varepsilon)_x\|^2_{L^2((0,T)\times\mathbb{R})} \leq C(\omega),$$

onde $C(\omega)$ é uma constante independente de ε e n.

Pela Desigualdade de Burkhölder-Davis-Gundy (Teorema 1.5, página 24), obtemos

$$\begin{aligned}
&E\left[\sup_{t\in[0,T]}\left\|\int_0^t \left(\Phi'(u_n^\varepsilon) - \Phi'(u^\varepsilon)\right)\sigma_\varepsilon dW\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\right] \\
&\leq CE\left[\int_0^T \left\|\left(\Phi'(u_n^\varepsilon) - \Phi'(u^\varepsilon)\right)\sigma_\varepsilon\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})} dt\right],
\end{aligned} \tag{2.71}$$

onde a constante C é independente de ε e n. Como

$$E\left[\int_0^T \left\|\left(\Phi'(u_n^\varepsilon)-\Phi'(u^\varepsilon)\right)\sigma_\varepsilon\right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt\right] \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

podemos extrair uma subsequência, ainda denotada por (u_n^ε), tal que, para quase todo ω,

$$\int_0^t \Phi'(u_n^\varepsilon)\sigma_\varepsilon dW \to \int_0^t \Phi'(u^\varepsilon)\sigma_\varepsilon dW \quad \text{em} \;\; L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R})). \tag{2.72}$$

Assim, excluindo de $\tilde{\Omega}_\varepsilon$ os elementos de um conjunto de medida nula que depende de Φ, e fazendo

$$\Theta(s) = \int_0^s \Phi'(z)f'(z)dz, \tag{2.73}$$

temos, para cada $\omega \in \tilde{\Omega}_\varepsilon$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\Phi(u^\varepsilon)+\frac{\partial}{\partial x}\Theta(u^\varepsilon) &= \varepsilon\partial_x(\Phi'(u^\varepsilon)\partial_x u^\varepsilon) - \varepsilon\Phi''(u^\varepsilon)(\partial_x u^\varepsilon)^2 \\ &\quad + \varepsilon\partial_x(\Phi'(u^\varepsilon)\beta(u_x^\varepsilon)) - \varepsilon\Phi''(u^\varepsilon)\beta(u_x^\varepsilon)u_x^\varepsilon \\ &\quad + \frac{1}{2}\Phi''(u^\varepsilon)\sigma_\varepsilon^2 + \frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \Phi'(u^\varepsilon)\sigma_\varepsilon dW\end{aligned} \tag{2.74}$$

no sentido das distribuições sobre $(0,T)\times\mathbb{R}$.

Agora, escolhamos funções $I_k(y), \Phi_k(y)$ e $\Lambda_k(y) \in C^2(\mathbb{R})$ satisfazendo

$$I_k(y) = \begin{cases} y, & |y| \le k, \\ & \qquad\qquad |I_k(y)| \le |y|,\; |I_k'(y)| \le 2,\; |I_k''(y)| \le 2, \\ 0, & |y| \ge 2k, \end{cases} \tag{2.75}$$

$$\Phi_k(y) = \int_0^y I_k'(\xi)f'(\xi)d\xi, \quad \Lambda_k(y) = \int_0^y I_k'(\xi)(f'(\xi))^2 d\xi, \tag{2.76}$$

e consideremos

$$v_{\varepsilon,k}(t) = \int_0^t I_k'(u^\varepsilon)\sigma_\varepsilon dW, \tag{2.77}$$

$$w_{\varepsilon,k}(t) = \int_0^t I_k'(u^\varepsilon) f'(u^\varepsilon)\sigma_\varepsilon dW. \tag{2.78}$$

Segue de (2.50) e das propriedades do movimento Browniano que, para cada $0 < \alpha < 1$, temos

$$E\left[\int_0^T \int_0^T \frac{\|v_{\varepsilon,k}(t_2) - v_{\varepsilon,k}(t_1)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}}{|t_2 - t_1|^{1+\alpha}} dt_1 dt_2\right] \leq C_1, \tag{2.79}$$

$$E\left[\int_0^T \int_0^T \frac{\|w_{\varepsilon,k}(t_2) - w_{\varepsilon,k}(t_1)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}}{|t_2 - t_1|^{1+\alpha}} dt_1 dt_2\right] \leq C_2, \tag{2.80}$$

onde C_1 e C_2 são constantes positivas independentes de k e de $0 < \varepsilon \leq 1$.

Para ver isso, suponhamos inicialmente $t_1 < t_2$. Temos

$$\begin{aligned}
\|v_{\varepsilon,k}(t_2) - v_{\varepsilon,k}(t_1)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} &= \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{t_1}^{t_2} I_k'(u^\varepsilon)\sigma_\varepsilon dW \right|^2 dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{t_1}^{t_2} |I_k'(u^\varepsilon)||\sigma_\varepsilon| dW \right)^2 \\
&\leq \int_{-M}^{M} \left(\int_{t_1}^{t_2} 2|\sigma_\varepsilon| dW \right)^2 \\
&\leq C\|\sigma_\varepsilon\|^2_{C([0,T];W^{1,\infty}(\mathbb{R}))} |t_2 - t_1|^{2\gamma},
\end{aligned}$$

para algum $\gamma \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$. Nesta última desigualdade usamos a Holder continuidade do Movimento Browniano, de forma análoga ao que fizemos na prova da desigualdade (1.18). Assim,

$$\begin{aligned}
E&\left[\int_0^T \int_0^T \frac{\|v_{\varepsilon,k}(t_2) - v_{\varepsilon,k}(t_1)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}}{|t_2 - t_1|^{1+\alpha}} dt_1 dt_2\right] \\
&\leq E\left[C \int_0^T \int_0^T \frac{|t_2 - t_1|^{2\gamma}}{|t_2 - t_1|^{1+\alpha}} dt_1 dt_2\right] \leq C_1.
\end{aligned}$$

Os demais casos são provados de forma semelhante.

Tomando $\alpha = \frac{1}{2}$ em (2.79) e (2.80), obtemos

$$E\left[\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \|v_{\varepsilon,k}\|^2_{H^{\frac{1}{4}}(0,T;L^2(\mathbb{R}))}\right] \leq C_1, \tag{2.81}$$

$$E\left[\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \|w_{\varepsilon,k}\|^2_{H^{\frac{1}{4}}(0,T;L^2(\mathbb{R}))}\right] \leq C_2. \tag{2.82}$$

Observação 2.7 *Lembrando que, para uma função $a(t,x)$ e $0 < \gamma < 1$, temos*

$$\|a\|_{H^\gamma(0,T;L^2(\mathbb{R}))} = \left(\int_0^T \|a(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})} dt + \int_0^T \int_0^T \frac{\|a(s,\cdot) - a(t,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}}{|s-t|^{1+2\gamma}} dsdt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Agora escolhemos uma sequência $\{\varepsilon_m\} \subset (0,1]$ que converge a zero, e definimos

$$\hat{\Omega} = \bigcup_{L=1}^{\infty} \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{m=j}^{\infty} \left\{\Pi_p(u^{\varepsilon_m}) \leq L\right\}, \tag{2.83}$$

onde

$$\begin{aligned} \Pi_p(u^\varepsilon) = & \|u^\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;L^p(\mathbb{R}))} + \sqrt{\varepsilon}\|u^\varepsilon\|_{L^2(0,T;H^1(\mathbb{R}))} \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\|v_{\varepsilon,k}\|^2_{H^{\frac{1}{4}}(0,T;L^2(\mathbb{R}))} + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\|w_{\varepsilon,k}\|^2_{H^{\frac{1}{4}}(0,T;L^2(\mathbb{R}))}. \end{aligned} \tag{2.84}$$

Segue então de (2.50), (2.81) e (2.82) que

$$P(\hat{\Omega}) = 1. \tag{2.85}$$

Tomemos agora

$$\tilde{\Omega} = \bigcap_{m=1}^{\infty} \tilde{\Omega}_{\varepsilon_m}, \tag{2.86}$$

onde $\tilde{\Omega}_{\varepsilon_m}$ foi definido anteriormente e modificado por um conjunto negligível para que (2.74) seja válida. Notemos que $P(\tilde{\Omega}) = 1$. Para todo $\omega \in \tilde{\Omega}$, (2.74) segue com $\Phi = I_k$ e também com

$\Phi = \Phi_k$, $\forall\, k \geq 1$, isto é,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} I_k(u^\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x}\Phi_k(u^\varepsilon) &= \varepsilon\partial_x(I'_k(u^\varepsilon)\partial_x u^\varepsilon) - \varepsilon I''_k(u^\varepsilon)(\partial_x u^\varepsilon)^2 \\ &+ \varepsilon\partial_x(I'_k(u^\varepsilon)\beta(u^\varepsilon_x)) - \varepsilon I''_k(u^\varepsilon)\beta(u^\varepsilon_x)u^\varepsilon_x \\ &+ \frac{1}{2}I''_k(u^\varepsilon)\sigma^2_\varepsilon + \frac{\partial}{\partial t}\int_0^t I'_k(u^\varepsilon)\sigma_\varepsilon dW = \sum_{i=1}^{6}\Sigma_i\end{aligned} \tag{2.87}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\Phi_k(u^\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x}\Lambda_k(u^\varepsilon) &= \varepsilon\partial_x(\Phi'_k(u^\varepsilon)\partial_x u^\varepsilon) - \varepsilon\Phi''_k(u^\varepsilon)(\partial_x u^\varepsilon)^2 \\ &+ \varepsilon\partial_x(\Phi'_k(u^\varepsilon)\beta(u^\varepsilon_x)) - \varepsilon\Phi''_k(u^\varepsilon)\beta(u^\varepsilon_x)u^\varepsilon_x \\ &+ \frac{1}{2}\Phi''_k(u^\varepsilon)\sigma^2_\varepsilon + \frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \Phi'_k(u^\varepsilon)\sigma_\varepsilon dW = \sum_{i=1}^{6}\Delta_i.\end{aligned} \tag{2.88}$$

Fixemos agora $\omega \in \hat{\Omega} \cap \tilde{\Omega}$. Então existe uma subsequência, ainda denotada por $\{u^{\varepsilon_m}\}$ tal que $\Pi_{2N+4}(u^{\varepsilon_m})$ é uniformemente limitada. Portanto, segue que:

$$\{u^{\varepsilon_m}\} \quad \text{é uniformemente limitada em} \quad L^{2N+4}((0,T)\times\mathbb{R}), \tag{2.89}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}v_{\varepsilon_m,k} \text{ e } \frac{\partial}{\partial t}w_{\varepsilon_m,k} \quad \text{são uniformemente limitadas em} \quad H^{-\frac{3}{4}}((0,T)\times\mathbb{R}). \tag{2.90}$$

Analisemos agora os limites de cada uma das parcelas em (2.87). Pelas propriedades de I_k, Φ_k, σ, juntamente com (2.89) e (2.90), concluímos que as parcelas $\Sigma_2, \Sigma_4, \Sigma_5$ e Σ_6 são uniformente limitadas. Agora, usando as desigualdades (2.35) e (2.36), provamos que as outras duas parcelas convergem a zero, conforme feito a seguir.

Seja $\varphi \in C_0^\infty([0,T]\times\mathbb{R})$. Temos:

$$\begin{aligned}|\langle\Sigma_1,\varphi\rangle| \leq& \varepsilon\int_0^T\int_{\mathbb{R}}\left|\partial_x(I'_k(u^\varepsilon)\partial_x u^\varepsilon)\varphi\right| dxdt \\ =& \varepsilon\int_0^T\int_{\mathbb{R}}\left|I'_k(u^\varepsilon)\partial_x u^\varepsilon\varphi_x\right| dxdt \\ \leq& 2\varepsilon\int_0^T\int_{\mathbb{R}}|\partial_x u^\varepsilon\varphi_x|\, dxdt\end{aligned}$$

$$\leq 2\varepsilon\|\varphi_x\|_{L^2((0,T)\times\mathbb{R})}\|\partial_x u^\varepsilon\|_{L^2((0,T)\times\mathbb{R})}.$$

$$\begin{aligned}|\langle\Sigma_3,\varphi\rangle| &\leq \varepsilon\int_0^T\int_{\mathbb{R}}\left|\partial_x(I_k'(u^\varepsilon)\beta(u_x^\varepsilon))\varphi\right|dxdt\\ &= \varepsilon\int_0^T\int_{\mathbb{R}}\left|(I_k'(u^\varepsilon)\beta(u_x^\varepsilon))\varphi_x\right|dxdt\\ &\leq 2\varepsilon\int_0^T\int_{\mathbb{R}}|\beta(u_x^\varepsilon))\varphi_x|\,dxdt\\ &\leq 2\varepsilon\|\varphi_x\|_{L^2((0,T)\times\mathbb{R})}\|\beta(u^\varepsilon)_x\|_{L^2((0,T)\times\mathbb{R})}.\end{aligned}$$

De forma análoga, estimamos as parcelas de (2.88). Logo, pelo Lema de Murat (Teorema 1.16, página 29), existem compactos $A_k, B_k \subset H^{-1}_{loc}((0,T)\times\mathbb{R})$ tais que

$$\frac{\partial}{\partial t}I_k(u^{\varepsilon_m}) + \frac{\partial}{\partial x}\Phi_k(u^{\varepsilon_m}) \in A_k, \forall\, m \geq 1, \tag{2.91}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi_k(u^{\varepsilon_m}) + \frac{\partial}{\partial x}\Lambda_k(u^{\varepsilon_m}) \in B_k, \forall\, m \geq 1. \tag{2.92}$$

Por um resultado de Lu [16] (Teorema 1.17, página 29), podemos extrair uma subsequência, ainda denotada por $\{u^{\varepsilon_m}\}$ tal que $\{\varepsilon_m\} \to 0$ e

$$u^{\varepsilon_m} \to u \text{ fortemente em } L^{2N+4}((0,T)\times K), \tag{2.93}$$

para todo compacto $K \subset \mathbb{R}$. (Notemos que o problema é aditivo e ω está fixado em um conjunto de medida total, por isso podemos usar esse resultado). Como $\Pi_{2N+4}(u^{\varepsilon_m})$ é uniformemente limitada, segue que

$$\frac{\partial(u^{\varepsilon_m} - J^{\varepsilon_m})}{\partial t} \text{ é uniformemente limitada em } L^2(0,T;H^{-1}(\mathbb{R})). \tag{2.94}$$

Consequentemente,

$$u^{\varepsilon_m} - J^{\varepsilon_m} \to u - J \text{ fortemente em } C([0,T];H^{-1}_{loc}(\mathbb{R})). \tag{2.95}$$

Ainda pela limitação uniforme de $\Pi_{2N+4}(u^{\varepsilon_m})$, temos

$$u \in L^\infty(0,T;L^p(\mathbb{R})),\ \forall\, 2 \leq p \leq 2N+4, \tag{2.96}$$

e

$$\frac{\partial(u-J)}{\partial t} \in L^2(0,T;H^{-1}(\mathbb{R})). \tag{2.97}$$

Concluímos com isso que $u(t)$ é $L^2(\mathbb{R})$-fracamente contínua em t, por um resultado de Strauss (Teorema 1.18, página 29).

A seguir, mostraremos que u satisfaz a condição (1.11).

2.4.1. Formulação Entrópica

Fixemos $\omega \in \hat{\Omega} \cap \tilde{\Omega}$. Sejam $\varphi \in C_0^\infty([0,T]\times\mathbb{R})$ uma função não negativa, $\eta \in \mathscr{E}$, e $k \in \mathbb{R}$. Aplicaremos a Fórmula de Itô ((1.4) e Observação 1.4, página 24) à função

$$\begin{aligned}\Psi : [0,T]\times L^2(\mathbb{R}) &\to \mathbb{R}\\ (t,v) &\mapsto \int_{\mathbb{R}} \eta(v-k)\varphi(t,x)dx.\end{aligned}$$

Observemos que, para quaisquer $v, g \in L^2(\mathbb{R})$,

$$\Psi_t(s,v) = \int_{\mathbb{R}} \eta(v-k)\varphi_t(s,x)dx, \tag{2.98}$$

$$\langle \Psi_v(s,v), g\rangle = \int_{\mathbb{R}} \eta'(v-k)\varphi(s,x)g(x)dx, \tag{2.99}$$

$$\langle \Psi_{vv}(s,v), g\rangle = \int_{\mathbb{R}} \eta''(v-k)\varphi(s,x)g(x)dx. \tag{2.100}$$

Devido à regularidade de η e de φ, as derivadas acima são uniformemente contínuas em subconjuntos limitados de $[0,T]\times L^2(\mathbb{R})$, o que nos permite aplicar a Formula de Itô. Obtemos

$$\begin{aligned}0 \leq \Psi(T,u^{\varepsilon_m}(T)) &= \Psi(0,u_0^{\varepsilon_m}) + \int_0^T \Psi_t(s,u^{\varepsilon_m})ds\\ &+ \int_0^T \langle \Psi_v(s,u^{\varepsilon_m}), \varepsilon_m u_{xx}^{\varepsilon_m} + \varepsilon_m(\beta(u_x^{\varepsilon_m}))_x - (f(u^{\varepsilon_m}))_x\rangle ds\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_0^T \langle \Psi_v(s,u^{\varepsilon_m}), \sigma_{\varepsilon_m}(s,x)\rangle dW(s) \\
&+\frac{1}{2}\int_0^T \langle \Psi_{vv}(s,u^{\varepsilon_m}), \sigma^2_{\varepsilon_m}(s,x)\rangle ds. \qquad (2.101)
\end{aligned}
$$

Usando (2.98), obtemos

$$
\int_0^T \Psi_t(s,u^{\varepsilon_m})ds = \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \eta(u^{\varepsilon_m}-k)\varphi_t(s,x)dxds. \qquad (2.102)
$$

Agora, usando (2.99), temos

$$
\begin{aligned}
\int_0^T \langle \Psi_v(s,u^{\varepsilon_m}), \varepsilon_m u^{\varepsilon_m}_{xx}\rangle ds &= \varepsilon_m \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \eta'(u^{\varepsilon_m}-k)u^{\varepsilon_m}_{xx}\varphi(s,x)dxds \\
&= \varepsilon_m \int_0^T \int_{\mathbb{R}} (\eta'(u^{\varepsilon_m}-k)u^{\varepsilon_m}_{x})_x\varphi(s,x)dxds \\
&- \varepsilon_m \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \eta''(u^{\varepsilon_m}-k)(u^{\varepsilon_m}_{x})^2\varphi(s,x)dxds \\
&= -\varepsilon_m \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \eta'(u^{\varepsilon_m}-k)u^{\varepsilon_m}_{x}\varphi_x(s,x)dxds \\
&- \varepsilon_m \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \eta''(u^{\varepsilon_m}-k)(u^{\varepsilon_m}_{x})^2\varphi(s,x)dxds. \qquad (2.103)
\end{aligned}
$$

Analogamente,

$$
\begin{aligned}
\int_0^T \langle \Psi_v(s,u^{\varepsilon_m}), \varepsilon_m(\beta(u^{\varepsilon_m}_x))_x\rangle ds &= \varepsilon_m \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \eta'(u^{\varepsilon_m}-k)(\beta(u^{\varepsilon_m}_x))_x\varphi(s,x)dxds \\
&= -\varepsilon_m \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \eta'(u^{\varepsilon_m}-k)\beta(u^{\varepsilon_m}_x)\varphi_x(s,x)dxds \\
&- \varepsilon_m \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \eta''(u^{\varepsilon_m}-k)u^{\varepsilon_m}_x\beta(u^{\varepsilon_m}_x)\varphi(s,x)dxds. \qquad (2.104)
\end{aligned}
$$

Obtemos ainda

$$
\begin{aligned}
\int_0^T \langle \Psi_v(s,u^{\varepsilon_m}), (f(u^{\varepsilon_m}))_x\rangle ds &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \eta'(u^{\varepsilon_m}-k)(f(u^{\varepsilon_m}))_x\varphi(s,x)dxds \\
&= -\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \eta'(u^{\varepsilon_m}-k)f(u^{\varepsilon_m})\varphi_x(s,x)dxds \\
&- \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \eta''(u^{\varepsilon_m}-k)u^{\varepsilon_m}_x f(u^{\varepsilon_m})\varphi(s,x)dxds. \qquad (2.105)
\end{aligned}
$$

Agora, notemos que

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_{\mathbb{R}}\eta''(u^{\varepsilon_m}-k)u_x^{\varepsilon_m}f(u^{\varepsilon_m})\varphi(s,x)dxds &= \int_0^T\int_{\mathbb{R}}\varphi(s,x)\frac{\partial}{\partial x}\left[\int_k^{u^{\varepsilon_m}}\eta''(\zeta-k)f(\zeta)d\zeta\right]dxds\\ &= -\int_0^T\int_{\mathbb{R}}\varphi_x(s,x)\left[\int_k^{u^{\varepsilon_m}}\eta''(\zeta-k)f(\zeta)d\zeta\right]dxds.\end{aligned}$$

Substituindo em (2.105), obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^T\langle\Psi_v(s,u^{\varepsilon_m}),(f(u^{\varepsilon_m}))_x\rangle ds &= -\int_0^T\int_{\mathbb{R}}\eta'(u^{\varepsilon_m}-k)f(u^{\varepsilon_m})\varphi_x(s,x)dxds\\ &\quad+\int_0^T\int_{\mathbb{R}}\varphi_x(s,x)\left[\int_k^{u^{\varepsilon_m}}\eta''(\zeta-k)f(\zeta)d\zeta\right]dxds\\ &= \int_0^T\int_{\mathbb{R}}\Big[-\eta'(u^{\varepsilon_m}-k)f(u^{\varepsilon_m})\\ &\qquad+\int_k^{u^{\varepsilon_m}}\eta''(\zeta-k)f(\zeta)d\zeta\Big]\varphi_x(s,x)dxds\\ &= -\int_0^T\int_{\mathbb{R}}\left[\int_k^{u^{\varepsilon_m}}\eta'(\zeta-k)f'(\zeta)d\zeta\right]\varphi_x(s,x)dxds, \qquad (2.106)\end{aligned}$$

onde, na última passagem, usamos a fórmula de integração por partes.

Ainda usando (2.99), temos

$$\int_0^T\langle\Psi_v(s,u^{\varepsilon_m}),\sigma_{\varepsilon_m}(s,x)\rangle dW(s)=\int_0^T\int_{\mathbb{R}}\eta'(u^{\varepsilon_m}-k)\sigma_{\varepsilon_m}(s,x)\varphi(s,x)dxdW(s). \qquad (2.107)$$

Por fim, usando (2.100), obtemos

$$\int_0^T\langle\Psi_{vv}(s,u^{\varepsilon_m}),\sigma^2_{\varepsilon_m}(s,x)\rangle ds=\int_0^T\int_{\mathbb{R}}\eta''(u^{\varepsilon_m}-k)\sigma^2_{\varepsilon_m}(s,x)\varphi(s,x)dxds. \qquad (2.108)$$

Substituindo (2.102), (2.103), (2.104), (2.106), (2.107) e (2.108) em (2.101), obtemos

$$\begin{aligned}0\le&\int_{\mathbb{R}}\eta(u_0^{\varepsilon_m}-k)\varphi(0)dx+\int_0^T\int_{\mathbb{R}}\eta(u^{\varepsilon_m}-k)\varphi_t(s,x)dxds\\ &-\varepsilon_m\int_0^T\int_{\mathbb{R}}\eta'(u^{\varepsilon_m}-k)u_x^{\varepsilon_m}\varphi_x(s,x)dxds\\ &-\varepsilon_m\int_0^T\int_{\mathbb{R}}\eta''(u^{\varepsilon_m}-k)(u_x^{\varepsilon_m})^2\varphi(s,x)dxds\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\varepsilon_m \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \eta'(u^{\varepsilon_m}-k)\beta(u_x^{\varepsilon_m})\varphi_x(s,x)dxds \\
&-\varepsilon_m \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \eta''(u^{\varepsilon_m}-k)u_x^{\varepsilon_m}\beta(u_x^{\varepsilon_m})\varphi(s,x)dxds \\
&+\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \left[\int_k^{u^{\varepsilon_m}} \eta'(\zeta-k)f'(\zeta)d\zeta\right]\varphi_x(s,x)dxds \\
&+\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \eta'(u^{\varepsilon_m}-k)\sigma_{\varepsilon_m}(s,x)\varphi(s,x)dxdW(s) \\
&+\frac{1}{2}\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \eta''(u^{\varepsilon_m}-k)\sigma_{\varepsilon_m}^2(s,x)\varphi(s,x)dxds. \qquad (2.109)
\end{aligned}
$$

Portanto

$$
\begin{aligned}
0 \leq &\int_{\mathbb{R}} \eta(u_0^{\varepsilon_m}-k)\varphi(0)dx + \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \eta(u^{\varepsilon_m}-k)\varphi_t(s,x)dxds \\
&-\varepsilon_m \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \eta'(u^{\varepsilon_m}-k)u_x^{\varepsilon_m}\varphi_x(s,x)dxds \\
&-\varepsilon_m \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \eta'(u^{\varepsilon_m}-k)\beta(u_x^{\varepsilon_m})\varphi_x(s,x)dxds \\
&+\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \left[\int_k^{u^{\varepsilon_m}} \eta'(\zeta-k)f'(\zeta)d\zeta\right]\varphi_x(s,x)dxds \\
&+\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \eta'(u^{\varepsilon_m}-k)\sigma_{\varepsilon_m}(s,x)\varphi(s,x)dxdW(s) \\
&+\frac{1}{2}\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \eta''(u^{\varepsilon_m}-k)\sigma_{\varepsilon_m}^2(s,x)\varphi(s,x)dxds. \qquad (2.110)
\end{aligned}
$$

Nosso objetivo agora é passar o limite quando $m \to \infty$ na desigualdade acima. De (2.35) e (2.39), concluímos que $(\sqrt{\varepsilon}u_x^{\varepsilon})_{\varepsilon>0}$ e $(\sqrt{\varepsilon}(\beta(u^{\varepsilon}))_x)_{\varepsilon>0}$ são limitadas em $L^2([0,T]\times\mathbb{R})$. Assim, como

$$|\eta'(u^{\varepsilon_m}-k)\varphi_x(s,x)| \leq C_1$$

temos

$$\lim_{m\to\infty} \varepsilon_m \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \eta'(u^{\varepsilon_m}-k)u_x^{\varepsilon_m}\varphi_x(s,x)dxds = \lim_{m\to\infty} \sqrt{\varepsilon_m}\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \eta'(u^{\varepsilon_m}-k)\varphi_x(s,x)\sqrt{\varepsilon_m}u_x^{\varepsilon_m}dxds = 0,$$

e

$$\lim_{m\to\infty} \varepsilon_m \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \eta'(u^{\varepsilon_m} - k)\beta(u_x^{\varepsilon_m})\varphi_x(s,x)dxds$$
$$= \lim_{m\to\infty} \sqrt{\varepsilon_m} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \eta'(u^{\varepsilon_m} - k)\varphi_x(s,x)\sqrt{\varepsilon_m}\beta(u_x^{\varepsilon_m})dxds = 0.$$

Assim, por (2.93) e pelos limites acima, obtemos, passando o limite quando $m \to \infty$ em (2.110),

$$\begin{aligned} 0 \le & \int_{\mathbb{R}} \eta(u_0 - k)\varphi(0)dx + \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \eta(u-k)\varphi_t(s,x)dxds \\ & + \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \left[\int_k^u \eta'(\zeta - k) f'(\zeta) d\zeta \right] \varphi_x(s,x)dxds \\ & + \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \eta'(u-k)\sigma(s,x)\varphi(s,x)dxdW(s) \\ & + \frac{1}{2}\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \eta''(u-k)\sigma^2(s,x)\varphi(s,x)dxds, \end{aligned} \tag{2.111}$$

o que prova que u satisfaz (1.11).

2.4.2. Conclusão do Problema Aditivo

Notemos agora que, da unicidade de solução, temos: para cada $\omega \in \hat{\Omega} \cap \tilde{\Omega}$, toda subsequência $\{u^{\varepsilon_m}\}$ com $\Pi_p(u^{\varepsilon_m}),\ 2N+4 \le p < \infty$ uniformemente limitada converge para u. Portanto, (1.10) é satisfeita. Ainda pela unicidade e usando (2.95), podemos chegar a uma igualdade semelhante a (2.66) e repetir o argumento que se segue para mostrar que $u(t)$ é $\mathscr{G}_t$-mensurável a valores em $L^2(\mathbb{R})$, o que completa a prova do Teorema 2.3. ■

Para concluirmos essa seção, provemos que uma solução entrópica de (2.1) é também uma solução fraca, seguindo [1].

Proposição 2.1 *Toda solução entrópica (no sentido da Definição 1.21) é uma solução fraca.*

Demonstração: Sejam $\varphi \in C_0^\infty([0,T) \times \mathbb{R})$ não negativa, $\eta \in \mathscr{E}$ e $k \in \mathbb{R}$. Suponhamos inicialmente $k < 0$. Temos

$$\mu_{\eta,k}(\varphi) = \int_{(0,T)\times\mathbb{R}} [(u-k)\varphi_t - (f(u) - f(k))\varphi_x]\, dxdt$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_{\mathbb{R}}(u_0-k)\varphi(0)dx \\
&+\int_{(0,T)\times\mathbb{R}}\left([\eta(u-k)-u+k]\,\varphi_t-[F^{\eta}(u,k)-f(u)+f(k)]\,\varphi_x\right)dxdt \\
&+\int_{\mathbb{R}}[\eta(u_0-k)-u_0+k]\varphi(0)dx \\
&-\int_0^T\int_{\mathbb{R}}\varphi_t(t,x)\eta'(u-k)\sigma dxdW(t) \\
&+\frac{1}{2}\int_{(0,T)\times\mathbb{R}}\sigma^2\eta''(u-k)\varphi dxdt := \sum_{j=1}^{6} I_j.
\end{aligned}
$$

Agora, como

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{(0,T)}k\varphi_t dtdx = \int_{\mathbb{R}}[k\varphi(T)-k\varphi(0)]dx$$

e

$$\int_{\mathbb{R}}f(k)\varphi_x dx = 0,$$

obtemos

$$I_1+I_2 = \int_{(0,T)\times\mathbb{R}}[u\varphi_t - f(u)\varphi_x]\,dxdt + \int_{\mathbb{R}}u_0\varphi(0)dx.$$

Também temos

$$
\begin{aligned}
|F^{\eta}(u,k)-f(u)+f(k)| &= \left|\int_k^u \eta'(\zeta-k)f'(\zeta)d\zeta - (f(u)+f(k))\right| \\
&= \left|\int_k^u [\eta'(\zeta-k)-1]f'(\zeta)d\zeta\right| \\
&\le c(f')\left|\int_k^u [1-\eta'(\zeta-k)]d\zeta\right| \\
&= c(f')\left|\int_0^{u-k}[1-\eta'(\zeta)]d\zeta\right| \\
&\le c(f')\left[\delta+2(u-k)^-\right],
\end{aligned}
$$

onde δ é o parâmetro associado com η na definição de $\mathscr{E}$ (Definição 1.20).

Agora, quando $k\to-\infty$,

$$\eta(u-k)-(u-k) = \int_0^{u-k}[\eta'(r)-1]dr \to \int_0^{\infty}[\eta'(r)-1]dr = \int_0^{\delta}[\eta'(r)-1]dr = \eta(\delta)-\delta.$$

Assim,

$$\lim_{\delta\to 0}\lim_{k\to-\infty}(I_3+I_4)=0.$$

Temos também

$$\lim_{k\to-\infty} I_6=0.$$

Por fim, notemos que

$$\lim_{k\to-\infty} I_5=-\int_0^T\int_{\mathbb{R}}\varphi_t(t)\int_0^t\sigma(u)dW(\alpha)dxdt.$$

Concluimos então, que, para toda função não negativa $\varphi\in C_0^\infty([0,T)\times\mathbb{R})$,

$$\int_{(0,T)\times\mathbb{R}}\left(\left[u-\int_0^t\sigma(u)dW(\alpha)\right]\varphi_t-f(u)\varphi_x\right)dxdt+\int_{\mathbb{R}}u_0\varphi(0)dx\geq 0.$$

A desigualdade oposta pode ser provada tomando $k>0$, usando $(k-u)$ no lugar de $(u-k)$ e considerando o limite quanto $k\to+\infty$. Portanto, u é uma solução fraca. ■

2.5 O Problema Multiplicativo

Consideremos agora o problema

$$\begin{cases} u_t-[\varepsilon((\beta(u_x))_x+u_{xx})-(f(u))_x]=\sigma(u)\dfrac{dW}{dt}, & \\ u(0,\cdot)=u_{0,\varepsilon}, & \text{em } (0,T)\times\mathbb{R}\times\Omega, \end{cases} \tag{2.112}$$

onde

$$u_{0,\varepsilon}:=\int_{\mathbb{R}}u_0(y)\frac{1}{\varepsilon}\rho\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)dy, \tag{2.113}$$

com as seguintes hipóteses:

(HM1) $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ é uma função de Lipschitz e $f(0)=0$;

(HM2) $\sigma:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ é uma função de Lipschitz e $\sigma(0)=0$.

O nosso objetivo aqui é mostrar a convergência, quando $\varepsilon \to 0^+$, de soluções apropriadas de (2.112)-(2.113) para uma solução entrópica a valores de medida (conforme Definição (1.22)) da Lei de Conservação Estocástica Multiplicativa:

$$\begin{cases} u_t + (f(u))_x = \sigma(u)\dfrac{dW}{dt}, \\ u(0,\cdot) = u_0, \qquad\qquad \text{em } (0,T)\times\mathbb{R}\times\Omega. \end{cases} \tag{2.114}$$

Seja $\{u_\varepsilon\} \subset \mathscr{N}^2_\omega(0,T,L^2(R))$ uma sequencia de soluções de (2.112)-(2.113). Da seção passada, temos, para toda função não negativa $\varphi \in C_0^\infty([0,T]\times\mathbb{R})$, $\eta \in \mathscr{E}$ e $k \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} 0 \le &\int_{\mathbb{R}} \eta(u_0^\varepsilon - k)\varphi(0)dx + \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \eta(u^\varepsilon - k)\varphi_t(s,x)dxds \\ &- \varepsilon \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \eta'(u^\varepsilon - k)u_x^\varepsilon \varphi_x(s,x)dxds \\ &- \varepsilon \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \eta'(u^\varepsilon - k)\beta(u_x^\varepsilon)\varphi_x(s,x)dxds \\ &+ \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \left[\int_k^{u^\varepsilon} \eta'(\zeta - k)f'(\zeta)d\zeta\right]\varphi_x(s,x)dxds \\ &+ \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \eta'(u^\varepsilon - k)\sigma(u_\varepsilon)\varphi(s,x)dxdW(s) \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \eta''(u^\varepsilon - k)\sigma^2(u_\varepsilon)\varphi(s,x)dxds. \end{aligned} \tag{2.115}$$

Tomando a Esperança na desigualdade acima, temos, para todo $A \in \mathscr{G}$,

$$\begin{aligned} 0 \le\, &E\left[\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A \eta(u_0^\varepsilon - k)\varphi(0)dx\right] + E\left[\mathbb{1}_A \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \eta(u^\varepsilon - k)\varphi_t(s,x)dxds\right] \\ &- \varepsilon E\left[\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A \eta'(u^\varepsilon - k)u_x^\varepsilon \varphi_x(s,x)dxds\right] \\ &- \varepsilon E\left[\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A \eta'(u^\varepsilon - k)\beta(u_x^\varepsilon)\varphi_x(s,x)dxds\right] \\ &+ E\left[\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A \left[\int_k^{u^\varepsilon} \eta'(\zeta - k)f'(\zeta)d\zeta\right]\varphi_x(s,x)dxds\right] \\ &+ E\left[\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A \eta'(u^\varepsilon - k)\sigma(u_\varepsilon)\varphi(s,x)dxdW(s)\right] \\ &+ \frac{1}{2}E\left[\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A \eta''(u^\varepsilon - k)\sigma^2(u_\varepsilon)\varphi(s,x)dxds\right] \end{aligned}$$

$$= \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2 + \mathrm{I}_3 + \mathrm{I}_4 + \mathrm{I}_5 + \mathrm{I}_6 + \mathrm{I}_7. \tag{2.116}$$

Como u_ε é uma sequência limitada em $\mathcal{N}^2_\omega(0,T,L^2(R))$ e φ tem suporte compacto em $\mathbb{R}$, a sequência de medidas de Young associada $\mathbf{u}_\varepsilon$ possui uma subsequência (que continuará sendo denotada da mesma maneira) que converge para um processo entrópico denotado por $\mathbf{u} \in L^\infty(0,T,L^2(\Omega \times \mathbb{R} \times (0,1)))$. Vamos analisar o limite de cada uma das integrais em (2.116).

Para I_1, usamos as propriedades de η e φ e o fato que $u_0^\varepsilon \to u_0$ em $L^2(\mathbb{R})$, quando $\varepsilon \to 0^+$. Obtemos, pelo Teorema da Convergência Dominada,

$$\mathrm{I}_1 = E\left[\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A \eta(u_0^\varepsilon - k)\varphi(0)dx\right] \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} E\left[\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A \eta(u_0 - k)\varphi(0)dx\right].$$

Analisemos agora a segunda integral. Considerando a função de Carathéodory (veja a Definição (A.1))

$$\Psi(\cdot, u_\varepsilon) := \eta(u_\varepsilon - k)\varphi_t,$$

que é limitada em $L^2(\Omega \times [0,T] \times R)$, temos

$$\mathrm{I}_2 \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} E\left[\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \int_0^1 \mathbb{1}_A \eta(\mathbf{u}(\alpha,\cdot) - k)\varphi_t d\alpha dx dt\right].$$

Para a terceira integral, usamos o fato que $(\sqrt{\varepsilon}u_x^\varepsilon)$ é limitada em $L^2(\Omega \times [0,T] \times R)$ e $|\eta'(u^\varepsilon - k)\varphi_x| \leq C$. Assim,

$$\begin{aligned}
|\mathrm{I}_3| &\leq \varepsilon E\left[\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \left|\mathbb{1}_A \eta'(u^\varepsilon - k)u_x^\varepsilon \varphi_x(s,x)\right| dx ds\right] \\
&\leq C\sqrt{\varepsilon}E\left[\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \left|\sqrt{\varepsilon}u_x^\varepsilon\right| dx ds\right] \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0.
\end{aligned}$$

De forma análoga mostramos que $\mathrm{I}_4 \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$, uma vez que $|\sqrt{\varepsilon}\beta(u_x^\varepsilon)| \leq M|(\sqrt{\varepsilon}u_x^\varepsilon)|$.

Para a quinta integral, procedemos da seguinte forma: definimos

$$g(u^\varepsilon) = \int_k^{u^\varepsilon} \eta'(\zeta - k) f'(\zeta) d\zeta.$$

Então, como $|\eta'(\zeta-\alpha)f'(\zeta)| \leq C$, a função g é de Lipschitz. Assim,

$$|\mathbb{1}_A \varphi_x g(x)| \leq C(|x| + \tilde{C}).$$

Pela teoria das medidas de Young, temos

$$\begin{aligned} \mathrm{I}_5 &= E\left[\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A \left[\int_k^{u^\varepsilon} \eta'(\zeta-k)f'(\zeta)d\zeta\right] \varphi_x(s,x)dxds\right] \\ &\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} E\left[\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \int_0^1 \varphi_x(s,x) \left[\int_k^{\mathbf{u}(\alpha,\cdot)} \mathbb{1}_A \eta'(\zeta-k)f'(\zeta)d\zeta\right] d\alpha dxds\right]. \end{aligned}$$

Analisemos agora I_6. Vamos começar definindo

$$v_\varepsilon = \eta'(u^\varepsilon - k)\sigma(u_\varepsilon)\varphi.$$

Notemos que v_ε é limitada em $L^2(\Omega\times[0,T]\times R)$, logo converge fracamente nesse espaço, ou seja, existe $v \in L^2(\Omega\times[0,T]\times R)$ tal que, para toda $\chi \in L^2(\Omega\times[0,T]\times R)$,

$$E\left[\int_0^T \int_{\mathbb{R}} v_\varepsilon \chi(t,x,\omega)dxdt\right] \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} E\left[\int_0^T \int_{\mathbb{R}} v\chi(t,x,\omega)dxdt\right].$$

Como u_ε é limitada em $L^2(\Omega\times[0,T]\times R)$, existe $\mathbf{u} \in L^2(\Omega\times[0,T]\times R\times(0,1))$ tal que existe uma subsequência de u_ε, denotada da mesma maneira com $u_\varepsilon \to \mathbf{u}$ no sentido das medidas de Young. Dada a função de Carathéodory

$$\Psi(t,x,\omega,\lambda) := \eta'(\lambda-k)\sigma(\lambda)\varphi\chi(x,t,\omega),$$

$\Psi(\cdot,u_\varepsilon)$ é uniformemente integrável. Portanto, pelas propriedades das medidas de Young (Ver A), no limite temos

$$E\left[\int_0^T \int_{\mathbb{R}} v_\varepsilon \chi(t,x,\omega)dxdt\right] \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} E\left[\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \int_0^1 \eta'(\mathbf{u}(\alpha,\cdot)-k)\sigma(\mathbf{u}(\alpha,\cdot))\varphi d\alpha \chi dxdt\right].$$

Pela unicidade do limite fraco em $L^2(\Omega \times [0,T] \times R)$, temos

$$v = \int_0^1 \eta'(\mathbf{u}(\alpha,\cdot)-k)\sigma(\mathbf{u}(\alpha,\cdot))\varphi d\alpha.$$

Agora, pelo fato da integral estocástica ser linear e contínua de $L^2(\Omega\times[0,T]\times R)$ em $L^2(\Omega\times R)$, concluímos que ela é fracamente contínua nesses espaços. Como $v_\varepsilon \rightharpoonup v$ em $L^2(\Omega\times[0,T]\times R)$, então

$$\int_0^t v_\varepsilon dW(s) \rightharpoonup \int_0^t v dW(s)$$

em $L^2(\Omega \times R)$. Tomando $\chi = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{\operatorname{supp}(\varphi)}$, temos

$$\mathrm{I}_6 \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} E\left[\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \int_0^1 \mathbb{1}_A \eta'(\mathbf{u}(\alpha,\cdot)-k)\sigma(\mathbf{u}(\alpha,\cdot))\varphi d\alpha \chi dx dW(t)\right].$$

Finalmente, para a análise de I_7, notemos inicialmente que, como o suporte de $\eta''(\cdot-k)$' é compacto, então $\eta''(u^\varepsilon-k)\sigma^2(u_\varepsilon) \leq C(k)$ e daí a função $\mathbb{1}_A\eta''(u^\varepsilon-k)\sigma^2(u_\varepsilon)\varphi$ é limitada em $L^2(\Omega\times[0,T]\times R)$, com essa limitação dependendo de k. Como k é um número real fixo, concluímos, pela teoria das medidas de Young, que

$$\mathrm{I}_7 \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \frac{1}{2}E\left[\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \int_0^1 \mathbb{1}_A \eta''(\mathbf{u}(\alpha,\cdot)-k)\sigma^2(\mathbf{u}(\alpha,\cdot))\varphi d\alpha dx dt\right].$$

O que acabamos de provar foi o seguinte

Teorema 2.4 *Sob as hipóteses* **(HMA)-(HM2)-(H3)**, *existe uma solução entrópica a valores de medida de*

$$\begin{cases} u_t + (f(u))_x = \sigma(u)\dfrac{dW}{dt}, & \\ u(0,\cdot) = u_0, & \text{em } (0,T)\times\mathbb{R}\times\Omega. \end{cases} \tag{2.117}$$

CAPÍTULO 3

A Equação BBM-Burgers Estocástica Aditiva

Neste capítulo, estudamos a existência e as propriedades de soluções para a equação (7) no caso aditivo (ou seja, quando σ não depende de u) com dados iniciais regularizados. Substituímos a hipótese **(H1)** por

(H1*) $f \in C^2(\mathbb{R})$ é uma função de Lipschitz com $f(0) = 0$.

Sejam $\sigma_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ e $u_{0,\varepsilon}$ como definidos no Capítulo 2.

Passaremos a considerar o seguinte problema:

$$u_t + (f(u))_x - \varepsilon u_{xx} - \delta u_{xxt} = \sigma_\varepsilon \frac{dW}{dt} \tag{3.1}$$

$$u(0,\cdot) = u_{0,\varepsilon}. \tag{3.2}$$

Mostraremos a existência e unicidade de solução local para o problema (3.1)-(3.2). Depois, provaremos um resultado sobre a regularidade de tal solução e uma estimativa *a priori*.

3.1 Existência Local

Denotamos por $\mathscr{F}(u)$ a transformada parcial de Fourier de u com relação a x e $\mathscr{F}^{-1}$ a transformada inversa de $\mathscr{F}$. Assim, formalmente, de (3.1) e (3.2) segue que

$$\mathscr{F}(u_t - \delta u_{xxt} - \varepsilon u_{xx}) = \mathscr{F}(\sigma_\varepsilon W(dt) - (f(u))_x).$$

Assim

$$(1+\delta\xi^2)\mathscr{F}(u)_t + \varepsilon\xi^2\mathscr{F}(u) = \mathscr{F}(\sigma_\varepsilon W(dt)) - \mathscr{F}((f(u))_x). \tag{3.3}$$

Logo,

$$\left[\exp\left\{\frac{\varepsilon\xi^2 t}{1+\delta\xi^2}\right\}\mathscr{F}(u)\right]_t = \frac{\exp\left\{\frac{\varepsilon\xi^2 t}{1+\delta\xi^2}\right\}\mathscr{F}(\sigma_\varepsilon W(dt) - (f(u))_x)}{1+\delta\xi^2}.$$

Integrando em $[0,t]$,obtemos

$$\begin{aligned}\exp\left\{\frac{\varepsilon\xi^2 t}{1+\delta\xi^2}\right\}\mathscr{F}(u) - \mathscr{F}(u_{0,\varepsilon}) &= \int_0^t \frac{\exp\left\{\frac{\varepsilon\xi^2 s}{1+\delta\xi^2}\right\}}{1+\delta\xi^2}\mathscr{F}(\sigma_\varepsilon)W(ds)\\ &\quad - \int_0^t \frac{\exp\left\{\frac{\varepsilon\xi^2 s}{1+\delta\xi^2}\right\}}{1+\delta\xi^2}\mathscr{F}((f(u))_x)ds,\end{aligned}$$

de onde segue que

$$\begin{aligned}\mathscr{F}(u) &= \exp\left\{\frac{-\varepsilon\xi^2 t}{1+\delta\xi^2}\right\}\mathscr{F}(u_{0,\varepsilon})\\ &\quad + \int_0^t \frac{\exp\left\{\frac{-\varepsilon\xi^2(t-s)}{1+\delta\xi^2}\right\}\mathscr{F}(\sigma_\varepsilon)}{1+\delta\xi^2}W(ds) - \int_0^t \frac{\exp\left\{\frac{-\varepsilon\xi^2(t-s)}{1+\delta\xi^2}\right\}\mathscr{F}((f(u))_x)}{1+\delta\xi^2}ds.\end{aligned} \tag{3.4}$$

Tomando $\mathscr{F}^{-1}$, obtemos

$$
\begin{aligned}
u = \mathscr{F}^{-1}&\left(\exp\left\{\frac{-\varepsilon\xi^2 t}{1+\delta\xi^2}\right\}\mathscr{F}(u_{0,\varepsilon})\right)\\
&+\int_0^t \mathscr{F}^{-1}\left(\frac{\exp\left\{\frac{-\varepsilon\xi^2(t-s)}{1+\delta\xi^2}\right\}\mathscr{F}(\sigma_\varepsilon)}{1+\delta\xi^2}\right)W(ds)\\
&-\int_0^t \mathscr{F}^{-1}\left(\frac{\exp\left\{\frac{-\varepsilon\xi^2(t-s)}{1+\delta\xi^2}\right\}\mathscr{F}((f(u))_x)}{1+\delta\xi^2}\right)ds.
\end{aligned}
$$

Portanto, uma equação integral da solução é

$$
\begin{aligned}
u(t,x) = G(t)u_{0,\varepsilon} &- \int_0^t G(t-s)\mathscr{F}^{-1}\left(\frac{\mathscr{F}((f(u))_x)}{1+\delta\xi^2}\right)ds\\
&+\int_0^t G(t-s)\mathscr{F}^{-1}\left(\frac{\mathscr{F}(\sigma_\varepsilon)}{1+\delta\xi^2}\right)W(ds),
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

sendo

$$
G(t)v = \mathscr{F}^{-1}\left(\exp\left\{\frac{-\varepsilon\xi^2 t}{1+\delta\xi^2}\right\}\mathscr{F}(v)\right).
$$

Essa família de operadores também satisfaz as propriedades de semigrupo, como mostramos a seguir.

i) $G(0) = I$ pois $G(0)v = \mathscr{F}^{-1}(\mathscr{F}(v)) = v = I(v)$;

ii) Para $t \geq 0$, $s \geq 0$ temos

$$
\begin{aligned}
G(t)G(s)v &= G(t)\mathscr{F}^{-1}\left(\exp\left\{\frac{-\varepsilon\xi^2 s}{1+\delta\xi^2}\right\}\mathscr{F}(v)\right)\\
&= \mathscr{F}^{-1}\left(\exp\left\{\frac{-\varepsilon\xi^2 t}{1+\delta\xi^2}\right\}\mathscr{F}\left[\mathscr{F}^{-1}\left(\exp\left\{\frac{-\varepsilon\xi^2 s}{1+\delta\xi^2}\right\}\mathscr{F}(v)\right)\right]\right)\\
&= \mathscr{F}^{-1}\left(\exp\left\{\frac{-\varepsilon\xi^2(t+s)}{1+\delta\xi^2}\right\}\mathscr{F}(v)\right)\\
&= G(t+s)v.
\end{aligned}
$$

Para simplificar a notação, denotaremos $u_{0,\varepsilon}$ simplesmente por u_0 e usaremos a notação

$u(t,\cdot)=u(t)$.

Definimos o operador

$$\mathscr{L}u(t)=G(t)u_0-\int_0^t G(t-s)\mathscr{F}^{-1}\left(\frac{\mathscr{F}((f(u))_x)}{1+\delta\xi^2}\right)ds+\int_0^t G(t-s)\mathscr{F}^{-1}\left(\frac{\mathscr{F}(\sigma_\varepsilon)}{1+\delta\xi^2}\right)W(ds),$$

em:

$$\mathscr{A}_T\equiv\left\{u\in C([0,T];H^1(\mathbb{R}));E\left[\|u(t)-G(t)u_0\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\right]\leq E\left[\|u_0\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\right],\ t\in[0,T]\right\},$$

e a norma em $\mathscr{A}_T$ como

$$\|u\|_{\mathscr{A}_T}=\|u\|_{C([0,T];H^1(\mathbb{R}))}\equiv\sup_{0\leq t\leq T}\|u(t)\|_{H^1(\mathbb{R})}.$$

No apêndice deste capítulo, demonstramos que $\mathscr{A}_T$ é um subespaço fechado de $C([0,T];H^1(\mathbb{R}))$, logo é um espaço de Banach. Veja o Teorema 3.3.

Lema 3.1 *Sejam f,σ_ε e u_0 satisfazendo as hipóteses enunciadas. Seja $u(t)\in C([0,T];H^1(\mathbb{R}))$ tal que:*

$$E[\|u(t)-G(t)u_0\|^2_{H^1(\mathbb{R})}]\leq E[\|u_0\|^2_{H^1(\mathbb{R})}],\forall t\in[0,T]. \tag{3.6}$$

Se $T>0$ é suficientemente pequeno então vale, q. t. p. $\omega\in\Omega$:

i. $\mathscr{L}u(t)\in H^1(\mathbb{R})$ *com*

$$E[\|\mathscr{L}u(t)-G(t)u_0\|^2_{H^1(\mathbb{R})}]\leq E[\|u_0\|^2_{H^1(\mathbb{R})}],\forall t\in[0,T] \tag{3.7}$$

$$e\quad E[\|\mathscr{L}u(t)\|^2_{H^1(\mathbb{R})}]\leq 4E[\|u_0\|^2_{H^1(\mathbb{R})}],\forall t\in[0,T]; \tag{3.8}$$

ii. $\mathscr{A}_T$ *é invariante por* $\mathscr{L}$*;*

iii. $\mathscr{L}$ *é uma contração na norma* $\|.\|_{\mathscr{A}_T}$ *em* $\mathscr{A}_T$.

Demonstração:

i. Seja A a constante de Lipschitz de f. Durante a demonstração, usaremos, entre outros resultados, as propriedades da Transformada de Fourier, o Teorema de Plancherel e as seguintes desigualdades:

$$\exp\left\{\frac{-\varepsilon\xi^2\theta}{1+\delta\xi^2}\right\} \leq 1 \ (\theta > 0)\,, \tag{3.9}$$

$$\left(\frac{-\varepsilon\xi^2}{1+\delta\xi^2}\right)^2 = \frac{\varepsilon^2\xi^4}{1+2\delta\xi^2+\delta^2\xi^4} \leq \frac{\varepsilon^2\xi^4}{\delta^2\xi^4} = \frac{\varepsilon^2}{\delta^2}, \tag{3.10}$$

$$\frac{\xi^2}{(1+\delta\xi^2)^2} = \frac{\xi^2}{1+2\delta\xi^2+\delta^2\xi^4} \leq \frac{1}{2\delta} \quad \text{e} \tag{3.11}$$

$$\frac{\xi^4}{(1+\delta\xi^2)^2} = \frac{\xi^4}{1+2\delta\xi^2+\delta^2\xi^4} \leq \frac{1}{\delta^2}. \tag{3.12}$$

Temos

$$\begin{aligned}
E\left[\|G(t)u_0\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\right] &= E\left[\int_{\mathbb{R}} |G(t)u_0|^2 dx\right] + E\left[\int_{\mathbb{R}} \left|\frac{d}{dx}G(t)u_0\right|^2 dx\right] \\
&= E\left[\int_{\mathbb{R}} \left(\mathscr{F}^{-1}\left(\exp\left\{\frac{-\varepsilon\xi^2 t}{1+\delta\xi^2}\right\}\mathscr{F}(u_0)\right)\right)^2 dx\right] \\
&+ E\left[\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{d}{dx}\mathscr{F}^{-1}\left(\exp\left\{\frac{-\varepsilon\xi^2 t}{1+\delta\xi^2}\right\}\mathscr{F}(u_0)\right)\right)^2 dx\right] \\
&= E\left[\int_{\mathbb{R}} \exp\left\{\frac{-2\varepsilon\xi^2 t}{1+\delta\xi^2}\right\}|\mathscr{F}(u_0)|^2 d\xi\right] \\
&+ E\left[\int_{\mathbb{R}} \exp\left\{\frac{-2\varepsilon\xi^2 t}{1+\delta\xi^2}\right\}|\mathscr{F}((u_0)_x)|^2 d\xi\right] \\
&\leq E\left[\int_{\mathbb{R}} |\mathscr{F}(u_0)|^2 d\xi\right] + E\left[\int_{\mathbb{R}} |\mathscr{F}((u_0)_x)|^2 d\xi\right] \\
&= E\left[\int_{\mathbb{R}} |u_0|^2 dx\right] + E\left[\int_{\mathbb{R}} |(u_0)_x|^2 dx\right] \\
&= E\left[\|u_0\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\right].
\end{aligned}$$

Juntando essa desigualdade com (3.6), obtemos, $\forall\, t \in [0,T]$

$$E\left[\|u(t)\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\right] \leq E\left[\left(\|u(t)-G(t)u_0\|_{H^1(\mathbb{R})} + \|G(t)u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}\right)^2\right]$$

$$
\begin{aligned}
&\le 2E\left[\|u(t)-G(t)u_0\|^2_{H^1(\mathbb{R})}+\|G(t)u_0\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\right]\\
&=2\left(E\left[\|u(t)-G(t)u_0\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\right]+E\left[\|G(t)u_0\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\right]\right)\\
&\le 2\left(E\left[\|u_0\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\right]+E\left[\|u_0\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\right]\right)=4E\left[\|u_0\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\right].
\end{aligned}
$$

Integrando em $t\in[0,T]$ e usando o Teorema de Fubini, obtemos

$$
E\left[\int_0^T\|u(t)\|^2_{H^1(\mathbb{R})}dt\right]\le 4E\left[\int_0^T\|u_0\|^2_{H^1(\mathbb{R})}dt\right]=4TE\left[\|u_0\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\right]. \tag{3.13}
$$

Também temos

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}u(t)-G(t)u_0=&-\int_0^t G(t-s)\mathscr{F}^{-1}\left(\frac{\mathscr{F}(f(u)_x)}{1+\delta\xi^2}\right)ds\\
&+\int_0^t G(t-s)\mathscr{F}^{-1}\left(\frac{\mathscr{F}(\sigma_\varepsilon)}{1+\delta\xi^2}\right)dW(s)\\
&=I+II.
\end{aligned}
$$

Então

$$
\begin{aligned}
E[\|\mathscr{L}u(t)-G(t)u_0\|^2_{H^1(\mathbb{R})}]=E[\|I+II\|^2_{H^1(\mathbb{R})}]&\le E[(\|I\|_{H^1(\mathbb{R})}+\|II\|_{H^1(\mathbb{R})})^2]\\
&\le 2(E[\|I\|^2_{H^1(\mathbb{R})}]+E[\|II\|^2_{H^1(\mathbb{R})}]).
\end{aligned} \tag{3.14}
$$

Estimaremos separadamente cada uma das parcelas. Para a primeira, temos

$$
\begin{aligned}
E[\|I\|^2_{H^1(\mathbb{R})}]&=E\left[\left\|-\int_0^t G(t-s)\mathscr{F}^{-1}\left(\frac{\mathscr{F}(f(u)_x)}{1+\delta\xi^2}\right)ds\right\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\right]\\
&=E\left[\left\|\int_0^t\mathscr{F}^{-1}\left(\frac{\exp\left\{\frac{-\varepsilon\xi^2(t-s)}{1+\delta\xi^2}\right\}}{1+\delta\xi^2}[\mathscr{F}((f(u))_x)]\right)ds\right\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\right]
\end{aligned}
$$

usando o Teorema de Bochner (Teorema 1.14, página 28)

$$\leq E\left[\left\{\int_0^t \left\| \mathscr{F}^{-1}\left(\frac{\exp\left\{\frac{-\varepsilon\xi^2(t-s)}{1+\delta\xi^2}\right\}}{1+\delta\xi^2}[\mathscr{F}((f(u))_x)]\right)\right\|_{H^1(\mathbb{R})} ds\right\}^2\right]$$

pela Desigualdade de Jensen (Teorema 1.13, página 27)

$$\leq tE\left[\int_0^t \left\| \mathscr{F}^{-1}\left(\frac{\exp\left\{\frac{-\varepsilon\xi^2(t-s)}{1+\delta\xi^2}\right\}}{1+\delta\xi^2}[\mathscr{F}((f(u))_x)]\right)\right\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 ds\right]$$

pelo Teorema de Plancherel e as propriedades da transformada de Fourier (Teoremas 1.10 e 1.11, página 26)

$$\begin{aligned}
&= tE\left[\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{\exp\left\{\frac{-2\varepsilon\xi^2(t-s)}{1+\delta\xi^2}\right\}|\mathscr{F}((f(u))_x)|^2}{(1+\delta\xi^2)^2} d\xi ds\right] \\
&+ tE\left[\int_0^t \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\exp\left\{\frac{-2\varepsilon\xi^2(t-s)}{1+\delta\xi^2}\right\}|i\xi\mathscr{F}((f(u))_x)|^2}{(1+\delta\xi^2)^2} d\xi\right) ds\right] \\
&= tE\left[\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{\exp\left\{\frac{-2\varepsilon\xi^2(t-s)}{1+\delta\xi^2}\right\}|\mathscr{F}(f(u))|^2\xi^2}{(1+\delta\xi^2)^2} d\xi ds\right] \\
&+ tE\left[\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{\exp\left\{\frac{-2\varepsilon\xi^2(t-s)}{1+\delta\xi^2}\right\}|\mathscr{F}(f(u))|^2\xi^4}{(1+\delta\xi^2)^2} d\xi ds\right]
\end{aligned}$$

usando (3.9), (3.11) e (3.12)

$$\leq t\left(E\left[\frac{1}{2\delta}\int_0^t \int_{\mathbb{R}} |\mathscr{F}(f(u))|^2 d\xi ds\right] + E\left[\frac{1}{\delta^2}\int_0^t \int_{\mathbb{R}} |\mathscr{F}(f(u))|^2 d\xi ds\right]\right)$$

pelo Teorema de Plancherel

$$= t\left(E\left[\frac{1}{2\delta}\int_0^t \int_{\mathbb{R}} |f(u)|^2 dx ds\right] + E\left[\frac{1}{\delta^2}\int_0^t \int_{\mathbb{R}} |f(u)|^2 dx ds\right]\right)$$

agora usamos o fato de f ser Lipschitz com constante A

$$\begin{aligned}
&\leq tA^2\left(E\left[\frac{1}{2\delta}\int_0^t\int_{\mathbb{R}}|u|^2\,dxds\right]+E\left[\frac{1}{\delta^2}\int_0^t\int_{\mathbb{R}}|u|^2\,dxds\right]\right)\\
&= tA^2\left(E\left[\frac{1}{2\delta}\int_0^t\|u(s)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}ds\right]+E\left[\frac{1}{\delta^2}\int_0^t\|u(s)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}ds\right]\right)\\
&= tA^2\left(\frac{1}{2\delta}+\frac{1}{\delta^2}\right)E\left[\int_0^t\|u(s)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}ds\right]\\
&\leq TA^2\left(\frac{1}{2\delta}+\frac{1}{\delta^2}\right)E\left[\int_0^T\|u(s)\|^2_{H^1(\mathbb{R})}ds\right]
\end{aligned}$$

usando (3.13)

$$\leq 4T^2A^2\left(\frac{1}{2\delta}+\frac{1}{\delta^2}\right)E\left[\|u_0\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\right]\leq\frac{1}{4}E\left[\|u_0\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\right],$$

se $T\leq\dfrac{1}{4A}\sqrt{\dfrac{2\delta^2}{\delta+2}}$.

Para a segunda parcela, usamos também a seguinte propriedade da Integral de Itô (Teorema 1.1, item **c.**, página 21):

$$E\left[\left(\int_0^t X\,dW(s)\right)^2\right]=E\left[\int_0^t X^2ds\right]. \tag{3.15}$$

Obtemos

$$\begin{aligned}
E[\|II\|^2_{H^1(\mathbb{R})}] &= E\left[\left\|\int_0^t G(t-s)\mathscr{F}^{-1}\left(\frac{\mathscr{F}(\sigma_\varepsilon)}{1+\delta\xi^2}\right)dW(s)\right\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\right]\\
&= E\left[\left\|\int_0^t \mathscr{F}^{-1}\left(\frac{\exp\left\{\frac{-\varepsilon\xi^2(t-s)}{1+\delta\xi^2}\right\}}{1+\delta\xi^2}[\mathscr{F}(\sigma_\varepsilon)]\right)dW(s)\right\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\right]\\
&= E\left[\int_{\mathbb{R}}\left(\int_0^t \mathscr{F}^{-1}\left(\frac{\exp\left\{\frac{-\varepsilon\xi^2(t-s)}{1+\delta\xi^2}\right\}}{1+\delta\xi^2}[\mathscr{F}(\sigma_\varepsilon)]\right)dW(s)\right)^2dx\right]
\end{aligned}$$

$$+E\left[\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{\partial}{\partial x}\int_0^t \mathscr{F}^{-1}\left(\frac{\exp\left\{\frac{-\varepsilon\xi^2(t-s)}{1+\delta\xi^2}\right\}}{1+\delta\xi^2}[\mathscr{F}(\sigma_\varepsilon)]\right)dW(s)\right)^2 dx\right]$$

usando (3.15), as propriedades da transformada de Fourier e o Teorema de Plancherel

$$\begin{aligned}
&= E\left[\int_{\mathbb{R}}\int_0^t\left(\mathscr{F}^{-1}\left(\frac{\exp\left\{\frac{-\varepsilon\xi^2(t-s)}{1+\delta\xi^2}\right\}}{1+\delta\xi^2}[\mathscr{F}(\sigma_\varepsilon)]\right)\right)^2 dsdx\right]\\
&+E\left[\int_{\mathbb{R}}\int_0^t\left(\mathscr{F}^{-1}\left(\frac{\exp\left\{\frac{-\varepsilon\xi^2(t-s)}{1+\delta\xi^2}\right\}}{1+\delta\xi^2}[\mathscr{F}(\sigma_\varepsilon)_x]\right)\right)^2 dsdx\right]\\
&= E\left[\int_0^t\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{\exp\left\{\frac{-2\varepsilon\xi^2(t-s)}{1+\delta\xi^2}\right\}}{(1+\delta\xi^2)^2}|\mathscr{F}(\sigma_\varepsilon)|^2\right)d\xi ds\right]\\
&+E\left[\int_0^t\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{\exp\left\{\frac{-2\varepsilon\xi^2(t-s)}{1+\delta\xi^2}\right\}\xi^2}{(1+\delta\xi^2)^2}|\mathscr{F}(\sigma_\varepsilon)|^2\right)d\xi ds\right]
\end{aligned}$$

por (3.9) e (3.11)

$$\leq E\left[\int_0^t\int_{\mathbb{R}}|\mathscr{F}(\sigma_\varepsilon)|^2 d\xi ds\right]+E\left[\frac{1}{2\delta}\int_0^t\int_{\mathbb{R}}|\mathscr{F}(\sigma_\varepsilon)|^2 d\xi ds\right]$$

novamente usando o Teorema de Plancherel

$$=\left(1+\frac{1}{2\delta}\right)E\left[\int_0^t\int_{\mathbb{R}}|\sigma_\varepsilon|^2 dxds\right]=\left(1+\frac{1}{2\delta}\right)E\left[\int_0^t\|\sigma_\varepsilon(s,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}ds\right]$$

pela Desigualdade de Young (1.7) (página 27)

$$\begin{aligned}
&\leq\left(1+\frac{1}{2\delta}\right)E\left[\int_0^t\|\sigma(s,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\|\rho_{\sqrt{\varepsilon}}\|^2_{L^1(\mathbb{R})}ds\right]\\
&\leq\left(1+\frac{1}{2\delta}\right)\|\sigma\|^2_{C([0,\infty);W^{1,\infty}(\mathbb{R}))}E\left[\int_0^t 1ds\right]\\
&\leq T\left(1+\frac{1}{2\delta}\right)\|\sigma\|^2_{C([0,\infty);W^{1,\infty}(\mathbb{R}))}\leq\frac{1}{4}E\left[\|u_0\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\right],
\end{aligned}$$

se $T \leq \dfrac{\delta E\left[\|u_0\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\right]}{2(1+2\delta)\|\sigma\|^2_{C([0,\infty);W^{1,\infty}(\mathbb{R}))}}$.

Portanto, tomando

$$T = \min\left\{\frac{1}{4A}\sqrt{\frac{2\delta^2}{\delta+2}}, \frac{\delta E\left[\|u_0\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\right]}{2(1+2\delta)\|\sigma\|^2_{C([0,\infty);W^{1,\infty}(\mathbb{R}))}}\right\}$$

e substituindo as desigualdades obtidas para os termos I e II em (3.14), obtemos (3.7). Também temos

$$\begin{aligned} E[\|\mathscr{L}u(t)\|^2_{H^1(\mathbb{R})}] &\leq 2\left(E[\|G(t)u_0\|^2_{H^1(\mathbb{R})}] + E[\|\mathscr{L}u(t) - G(t)u_0\|^2_{H^1(\mathbb{R})}]\right) \\ &\leq 4E[\|u_0\|^2_{H^1(\mathbb{R})}], \forall t \in [0,T], \end{aligned}$$

o que finaliza a prova do item *i*.

ii. Precisamos apenas mostrar que se $u \in C([0,T];H^1(\mathbb{R}))$ então $\mathscr{L}u \in C([0,T];H^1(\mathbb{R}))$, para quase todo $\omega \in \Omega$.

Fixemos $t_0 \in [0,T]$. Como $\mathscr{L}(u)(0) = u_0 \in C([0,T];H^1(\mathbb{R}))$, podemos tomar $t_0 > 0$. Seja $t \in (0,T]$ e, sem perda de generalidade, suponhamos $t_0 < t$. Temos

$$\begin{aligned} E\left[\|\mathscr{L}u(t) - \mathscr{L}u(t_0)\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\right] = E\Bigg[\Bigg\| & G(t)u_0 - G(t_0)u_0 \\ & - \int_0^t G(t-s)\mathscr{F}^{-1}\left(\frac{\mathscr{F}((f(u))_x)}{1+\delta\xi^2}\right) ds \\ & + \int_0^{t_0} G(t_0-s)\mathscr{F}^{-1}\left(\frac{\mathscr{F}((f(u))_x)}{1+\delta\xi^2}\right) ds \\ & + \int_0^t G(t-s)\mathscr{F}^{-1}\left(\frac{\mathscr{F}(\sigma_\varepsilon)}{1+\delta\xi^2}\right) dW(s) \\ & - \int_0^{t_0} G(t_0-s)\mathscr{F}^{-1}\left(\frac{\mathscr{F}(\sigma_\varepsilon)}{1+\delta\xi^2}\right) dW(s)\Bigg\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\Bigg] \end{aligned}$$

fazendo mudanças de variáveis e reescrevendo, obtemos

$$
\begin{aligned}
&= E\,[\|(G(t)u_0 - G(t_0)u_0) \\
&+ \int_{t_0}^{t} G(r)\mathscr{F}^{-1}\left(\frac{\mathscr{F}(f(u(t-r))_x)}{1+\delta\xi^2}\right) dr \\
&- \int_{0}^{t_0} G(r)\mathscr{F}^{-1}\left(\frac{\mathscr{F}(f(u(t_0-r))_x - f(u(t-r))_x)}{1+\delta\xi^2}\right) ds \\
&- \int_{t_0}^{t} G(r)\mathscr{F}^{-1}\left(\frac{\mathscr{F}(\sigma_\varepsilon(t-r))}{1+\delta\xi^2}\right) dW(s) \\
&+ \int_{0}^{t_0} G(r)\mathscr{F}^{-1}\left(\frac{\mathscr{F}(\sigma_\varepsilon(t_0-r) - \sigma_\varepsilon(t-r))}{1+\delta\xi^2}\right) dW(s)\Big\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\Big] \\
&\le 5\Big(E\left[\|G(t)u_0 - G(t_0)u_0\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\right] \\
&+ E\left[\left\|\int_{t_0}^{t} G(r)\mathscr{F}^{-1}\left(\frac{\mathscr{F}(f(u(t-r))_x)}{1+\delta\xi^2}\right) dr\right\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\right] \\
&+ E\left[\left\|\int_{0}^{t_0} G(r)\mathscr{F}^{-1}\left(\frac{\mathscr{F}(f(u(t_0-r))_x - f(u(t-r))_x)}{1+\delta\xi^2}\right) ds\right\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\right] \\
&+ E\left[\left\|\int_{t_0}^{t} G(r)\mathscr{F}^{-1}\left(\frac{\mathscr{F}(\sigma_\varepsilon(t-r))}{1+\delta\xi^2}\right) dW(r)\right\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\right] \\
&+ E\left[\left\|\int_{0}^{t_0} G(r)\mathscr{F}^{-1}\left(\frac{\mathscr{F}(\sigma_\varepsilon(t_0-r) - \sigma_\varepsilon(t-r))}{1+\delta\xi^2}\right) dW(r)\right\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\right]\Big) \\
&= 5\,(III + IV + V + VI + VII).
\end{aligned}
$$

Analisaremos cada parcela separadamente. Os teoremas, desigualdades e propriedades usadas são, na maioria da vezes, análogos aos que usamos na demonstração do item anterior. Destacaremos quando usarmos algum outro resultado. Temos

$$
\begin{aligned}
III &= E\left[\int_{\mathbb{R}} |G(t)u_0 - G(t_0)u_0|^2\, dx\right] + E\left[\int_{\mathbb{R}} \left|\frac{\partial}{\partial x}(G(t)u_0 - G(t_0)u_0)\right|^2 dx\right] \\
&= E\Big[\int_{\mathbb{R}} \Big|\mathscr{F}^{-1}\left(\exp\left\{\frac{-\varepsilon\xi^2 t}{(1+\delta\xi^2)}\right\}\mathscr{F}(u_0)\right) \\
&\quad -\mathscr{F}^{-1}\left(\exp\left\{\frac{-\varepsilon\xi^2 t_0}{1+\delta\xi^2}\right\}\mathscr{F}(u_0)\right)\Big|^2 dx\Big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+E\left[\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathscr{F}^{-1}\left(\exp\left\{\frac{-\varepsilon\xi^2 t}{1+\delta\xi^2}\right\}\mathscr{F}(u_0)\right)\right.\right.\right.\\
&\left.\left.\left.-\mathscr{F}^{-1}\left(\exp\left\{\frac{-\varepsilon\xi^2 t_0}{1+\delta\xi^2}\right\}\mathscr{F}(u_0)\right)\right)\right|^2 dx\right]\\
&=E\left[\int_{\mathbb{R}}\left|\mathscr{F}^{-1}\left(\left(\exp\left\{\frac{-\varepsilon\xi^2 t}{1+\delta\xi^2}\right\}-\exp\left\{\frac{-\varepsilon\xi^2 t_0}{1+\delta\xi^2}\right\}\right)\mathscr{F}(u_0)\right)\right|^2 dx\right]\\
&+E\left[\int_{\mathbb{R}}\left|\mathscr{F}^{-1}\left(\left(\exp\left\{\frac{-\varepsilon\xi^2 t}{1+\delta\xi^2}\right\}-\exp\left\{\frac{-\varepsilon\xi^2 t_0}{1+\delta\xi^2}\right\}\right)\mathscr{F}((u_0)_x)\right)\right|^2 dx\right]\\
&=E\left[\int_{\mathbb{R}}\left(\exp\left\{\frac{-\varepsilon\xi^2 t}{1+\delta\xi^2}\right\}-\exp\left\{\frac{-\varepsilon\xi^2 t_0}{1+\delta\xi^2}\right\}\right)^2|\mathscr{F}(u_0)|^2\,d\xi\right]\\
&+E\left[\int_{\mathbb{R}}\left(\exp\left\{\frac{-\varepsilon\xi^2 t}{1+\delta\xi^2}\right\}-\exp\left\{\frac{-\varepsilon\xi^2 t_0}{1+\delta\xi^2}\right\}\right)^2|\mathscr{F}((u_0)_x)|^2\,d\xi\right]
\end{aligned}
$$

usando o Teorema do Valor Médio aplicado à função exponencial, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\leq E\left[\int_{\mathbb{R}}\left(\left(\frac{-\varepsilon\xi^2}{1+\delta\xi^2}\right)^2\exp\left\{\frac{-\varepsilon\xi^2\theta}{1+\delta\xi^2}\right\}\right)^2|t-t_0|^2|\mathscr{F}(u_0)|^2\,d\xi\right]\\
&+E\left[\int_{\mathbb{R}}\left(\left(\frac{-\varepsilon\xi^2}{1+\delta\xi^2}\right)^2\exp\left\{\frac{-\varepsilon\xi^2\theta}{1+\delta\xi^2}\right\}\right)^2|t-t_0|^2|\mathscr{F}((u_0)_x)|^2\,d\xi\right]\\
&\leq E\left[\int_{\mathbb{R}}\frac{\varepsilon^2}{\delta^2}|t-t_0|^2|u_0|^2\,dx\right]+E\left[\int_{\mathbb{R}}\frac{\varepsilon^2}{\delta^2}|t-t_0|^2|(u_0)_x|^2\,dx\right]\\
&=\frac{\varepsilon^2}{\delta^2}|t-t_0|^2E\left[||u_0||^2_{H^1(\mathbb{R})}\right].
\end{aligned}
$$

Para a segunda parcela, temos

$$
\begin{aligned}
IV&=E\left[\left\|\int_{t_0}^{t}G(r)\mathscr{F}^{-1}\left(\frac{\mathscr{F}(f(u(t-r))_x)}{1+\delta\xi^2}\right)dr\right\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\right]\\
&\leq(t-t_0)\left(E\left[\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}}\frac{\exp\left\{\frac{-2\varepsilon\xi^2 r}{1+\delta\xi^2}\right\}\xi^2|\mathscr{F}(f(u(t-r)))|^2}{(1+\delta\xi^2)^2}d\xi dr\right]\right.\\
&\left.+E\left[\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}}\frac{\exp\left\{\frac{-2\varepsilon\xi^2 r}{1+\delta\xi^2}\right\}\xi^4|\mathscr{F}(f(u(t-r)))|^2}{(1+\delta\xi^2)^2}d\xi dr\right]\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\le (t-t_0)\left(\frac{1}{2\delta}+\frac{1}{\delta^2}\right)E\left[\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}}|f(u(t-r))|^2\,dxdr\right]\\
&\le A^2(t-t_0)\left(\frac{1}{2\delta}+\frac{1}{\delta^2}\right)E\left[\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}}|u(t-r)|^2\,dxdr\right]\\
&= A^2(t-t_0)\left(\frac{1}{2\delta}+\frac{1}{\delta^2}\right)E\left[\int_{t_0}^{t}\|u(t-r)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\,dr\right]\\
&\le A^2(t-t_0)\left(\frac{1}{2\delta}+\frac{1}{\delta^2}\right)E\left[\int_{t_0}^{t}\|u(t-r)\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\,dr\right]\\
&\le 4A^2(t-t_0)\left(\frac{1}{2\delta}+\frac{1}{\delta^2}\right)\int_{t_0}^{t}E\left[\|u_0\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\right]dr\\
&= 4A^2\left(\frac{1}{2\delta}+\frac{1}{\delta^2}\right)|t-t_0|^2E\left[\|u_0\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\right].
\end{aligned}
$$

Para a terceira parcela, obtemos

$$
\begin{aligned}
V &= E\left[\left\|\int_0^{t_0}G(r)\mathscr{F}^{-1}\left(\frac{\mathscr{F}(f(u(t_0-r))_x-f(u(t-r))_x)}{1+\delta\xi^2}\right)dr\right\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\right]\\
&\le t_0E\left[\int_0^{t_0}\int_{\mathbb{R}}\exp\left\{\frac{-2\varepsilon\xi^2 r}{1+\delta\xi^2}\right\}\frac{(\xi^2+\xi^4)|\mathscr{F}(f(u(t_0-r))-f(u(t-r)))|^2}{(1+\delta\xi^2)^2}d\xi dr\right]\\
&\le t_0\left(\frac{1}{2\delta}+\frac{1}{\delta^2}\right)E\left[\int_0^{t_0}\int_{\mathbb{R}}|f(u(t_0-r))-f(u(t-r))|^2dxdr\right]\\
&\le A^2t_0\left(\frac{1}{2\delta}+\frac{1}{\delta^2}\right)E\left[\int_0^{t_0}\int_{\mathbb{R}}|u(t_0-r)-u(t-r)|^2dxdr\right]\\
&= A^2t_0\left(\frac{1}{2\delta}+\frac{1}{\delta^2}\right)E\left[\int_0^{t_0}\|u(t_0-r)-u(t-r)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dr\right]\\
&\le A^2t_0\left(\frac{1}{2\delta}+\frac{1}{\delta^2}\right)E\left[\int_0^{t_0}\|u(t_0-r)-u(t-r)\|^2_{H^1(\mathbb{R})}dr\right]:=L.
\end{aligned}
$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada, $L\to 0$ quando $|t-t_0|\to 0$, pois $u\in C([0,T];H^1(\mathbb{R}))$ e $(t_0-r)\in[0,T]$.

As últimas duas parcelas envolvem integrais estocásticas e faremos uso novamente da isometria de Itô (3.15). Temos

$$
VI = E\left[\left\|\int_{t_0}^{t}G(r)\mathscr{F}^{-1}\left(\frac{\mathscr{F}(\sigma_\varepsilon(t-r))}{1+\delta\xi^2}\right)dW(r)\right\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\right]
$$

$$
\begin{aligned}
&= E\left[\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{t_0}^{t}\mathscr{F}^{-1}\left(\exp\left\{\frac{-\varepsilon\xi^2 r}{1+\delta\xi^2}\right\}\frac{\mathscr{F}(\sigma_\varepsilon(t-r))}{1+\delta\xi^2}\right)dW(r)\right)^2 dx\right]\\
&+ E\left[\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{t_0}^{t}\mathscr{F}^{-1}\left(\exp\left\{\frac{-\varepsilon\xi^2 r}{1+\delta\xi^2}\right\}\frac{\mathscr{F}((\sigma_\varepsilon(t-r))_x)}{1+\delta\xi^2}\right)dW(r)\right)^2 dx\right]\\
&= E\left[\int_{\mathbb{R}}\int_{t_0}^{t}\left(\mathscr{F}^{-1}\left(\exp\left\{\frac{-\varepsilon\xi^2 r}{1+\delta\xi^2}\right\}\right)\frac{\mathscr{F}(\sigma_\varepsilon(t-r))}{1+\delta\xi^2}\right)^2 dr\,dx\right]\\
&+ E\left[\int_{\mathbb{R}}\int_{t_0}^{t}\left(\mathscr{F}^{-1}\left(\exp\left\{\frac{-\varepsilon\xi^2 r}{1+\delta\xi^2}\right\}\right)\frac{i\xi\mathscr{F}(\sigma_\varepsilon(t-r))}{1+\delta\xi^2}\right)^2 dr\,dx\right]\\
&= E\left[\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}}\frac{\exp\left\{\frac{-2\varepsilon\xi^2 r}{1+\delta\xi^2}\right\}}{(1+\delta\xi^2)^2}|\mathscr{F}(\sigma_\varepsilon(t-r))|^2 d\xi\,dr\right]\\
&+ E\left[\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}}\frac{\exp\left\{\frac{-2\varepsilon\xi^2 r}{1+\delta\xi^2}\right\}}{(1+\delta\xi^2)^2}\xi^2|\mathscr{F}(\sigma_\varepsilon(t-r))|^2 d\xi\,dr\right]\\
&\le C\left(1+\frac{1}{2\delta}\right)E\left[\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}}|\sigma_\varepsilon(t-r)|^2 dx\,dr\right]\\
&\le C_1\left(1+\frac{1}{2\delta}\right)E\left[\int_{t_0}^{t}\|\sigma_\varepsilon(r)\|^2_{L^\infty(\mathbb{R})}dr\right]\\
&\le C_1\left(1+\frac{1}{2\delta}\right)E\left[\int_{t_0}^{t}\sup_{r\in\mathbb{R}}\|\sigma(r)\|^2_{L^\infty(\mathbb{R})}dr\right]\\
&\le C_1\left(1+\frac{1}{2\delta}\right)|t-t_0|E\left[||\sigma||^2_{C([0,\infty);L^\infty(\mathbb{R}))}\right].
\end{aligned}
$$

Para a última parcela, temos

$$
\begin{aligned}
VII &= E\left[\left\|\int_0^{t_0}G(r)\mathscr{F}^{-1}\left(\frac{\mathscr{F}(\sigma_\varepsilon(t_0-r)-\sigma_\varepsilon(t-r))}{1+\delta\xi^2}\right)dW(r)\right\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\right]\\
&= E\left[\int_{\mathbb{R}}\left(\int_0^{t_0}\mathscr{F}^{-1}\left(\exp\left\{\frac{-\varepsilon\xi^2 r}{1+\delta\xi^2}\right\}\frac{\mathscr{F}(\sigma_\varepsilon(t_0-r)-\sigma_\varepsilon(t-r))}{1+\delta\xi^2}\right)dW(r)\right)^2 dx\right]\\
&+ E\left[\int_{\mathbb{R}}\left(\int_0^{t_0}\mathscr{F}^{-1}\left(\exp\left\{\frac{-\varepsilon\xi^2 r}{1+\delta\xi^2}\right\}\frac{\mathscr{F}((\sigma_\varepsilon(t_0-r))_x-(\sigma_\varepsilon(t-r))_x)}{1+\delta\xi^2}\right)dW(r)\right)^2 dx\right]\\
&= E\left[\int_{\mathbb{R}}\int_0^{t_0}\left(\mathscr{F}^{-1}\left(\exp\left\{\frac{-\varepsilon\xi^2 r}{1+\delta\xi^2}\right\}\frac{\mathscr{F}(\sigma_\varepsilon(t_0-r)-\sigma_\varepsilon(t-r))}{1+\delta\xi^2}\right)\right)^2 dr\,dx\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+E\left[\int_{\mathbb{R}}\int_0^{t_0}\left(\mathscr{F}^{-1}\left(\exp\left\{\frac{-\varepsilon\xi^2 r}{1+\delta\xi^2}\right\}\frac{\mathscr{F}((\sigma_\varepsilon(t_0-r))_x-(\sigma_\varepsilon(t-r))_x)}{1+\delta\xi^2}\right)\right)^2 dr\,dx\right]\\
&=E\left[\int_0^{t_0}\int_{\mathbb{R}}\exp\left\{\frac{-2\varepsilon\xi^2 r}{1+\delta\xi^2}\right\}\frac{|\mathscr{F}(\sigma_\varepsilon(t_0-r)-\sigma_\varepsilon(t-r))|^2}{(1+\delta\xi^2)^2}\xi\,dr\right]\\
&+E\left[\int_0^{t_0}\int_{\mathbb{R}}\exp\left\{\frac{-2\varepsilon\xi^2 r}{1+\delta\xi^2}\right\}\frac{\xi^2|\mathscr{F}(\sigma_\varepsilon(t_0-r)-\sigma_\varepsilon(t-r))|^2}{(1+\delta\xi^2)^2}d\xi\,dr\right]\\
&\leq\left(1+\frac{1}{2\delta}\right)E\left[\int_0^{t_0}\int_{\mathbb{R}}|\mathscr{F}(\sigma_\varepsilon(t_0-r)-\sigma_\varepsilon(t-r)|^2 d\xi\,dr\right]\\
&\leq\left(1+\frac{1}{2\delta}\right)E\left[\int_0^{t_0}\int_{\mathbb{R}}|\mathscr{F}(\sigma_\varepsilon(t_0-r)-\sigma_\varepsilon(t-r)|^2 dx\,dr\right]\\
&=C\left(1+\frac{1}{2\delta}\right)E\left[\int_0^{t_0}\|(\sigma_\varepsilon(t_0-r)-\sigma_\varepsilon(t-r)\|^2_{L^\infty(\mathbb{R})}dx\right]\longrightarrow 0
\end{aligned}
$$

quando $|t-t_0|\longrightarrow 0$, pelo Teorema da Convergência Dominada.

Mostramos com isso que $E\left[\|\mathscr{L}u(t)-\mathscr{L}u(t_0)\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\right]\longrightarrow 0$ quando $t\longrightarrow t_0$. Assim, dado $\mu>0$, existe $\nu>0$ tal que:

$$|t-t_0|<\nu\Rightarrow E\left[\|\mathscr{L}u(t)-\mathscr{L}u(t_0)\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\right]<\mu.$$

Daí temos que

$$|t-t_0|<\nu\Rightarrow\|\mathscr{L}u(t)-\mathscr{L}u(t_0)\|^2_{H^1(\mathbb{R})}<\mu.$$

Caso contrário, existe t com $|t-t_0|<\nu$ e $\|\mathscr{L}u(t)-\mathscr{L}u(t_0)\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\geq\mu$, de onde temos

$$E\left[\|\mathscr{L}u(t)-\mathscr{L}u(t_0)\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\right]\geq E[\mu]=\mu,$$

o que é uma contradição. Portanto, temos

$$\|\mathscr{L}u(t)-\mathscr{L}u(t_0)\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\longrightarrow 0\ \text{ quando } t\longrightarrow t_0,$$

de modo que

$$\|\mathscr{L}u(t)-\mathscr{L}u(t_0)\|_{H^1(\mathbb{R})}\longrightarrow 0\ \text{ quando } t\longrightarrow t_0.$$

iii. Sejam $u, v \in \mathscr{A}_T$. Temos

$$
\begin{aligned}
&\|\mathscr{L}u(t) - \mathscr{L}v(t)\|^2_{H^1(\mathbb{R})} = \\
&= \left\| -\int_0^t G(t-s)\mathscr{F}^{-1}\left(\frac{\mathscr{F}((f(u))_x - (f(v))_x)}{1+\delta\xi^2}\right) ds \right\|^2_{H^1(\mathbb{R})} \\
&= \left\| \int_0^t \mathscr{F}^{-1}\left(\exp\left\{\frac{-\varepsilon\xi^2(t-s)}{1+\delta\xi^2}\right\} \frac{\mathscr{F}((f(u))_x - (f(v))_x)}{1+\delta\xi^2}\right) ds \right\|^2_{H^1(\mathbb{R})} \\
&\leq \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left(\mathscr{F}^{-1}\left(\exp\left\{\frac{-\varepsilon\xi^2(t-s)}{1+\delta\xi^2}\right\} \frac{\mathscr{F}((f(u))_x - (f(v))_x)}{1+\delta\xi^2}\right)\right)^2 dxds \\
&+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left(\mathscr{F}^{-1}\left(\exp\left\{\frac{-\varepsilon\xi^2(t-s)}{1+\delta\xi^2}\right\} \frac{\mathscr{F}((f(u))_{xx} - (f(v))_{xx})}{1+\delta\xi^2}\right)\right)^2 dxds
\end{aligned}
$$

usando as propriedades da transformada de Fourier e o Teorema de Plancherel

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left(\exp\left\{\frac{-\varepsilon\xi^2(t-s)}{1+\delta\xi^2}\right\} \frac{i\xi\mathscr{F}((f(u)) - (f(v)))}{1+\delta\xi^2}\right)^2 d\xi ds \\
&+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left(\exp\left\{\frac{-\varepsilon\xi^2(t-s)}{1+\delta\xi^2}\right\} \frac{-\xi^2\mathscr{F}((f(u)) - (f(v)))}{1+\delta\xi^2}\right)^2 d\xi ds
\end{aligned}
$$

por (3.9), (3.11) e (3.12)

$$
\leq \left(\frac{1}{2\delta} + \frac{1}{\delta^2}\right) \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (\mathscr{F}(f(u) - f(v)))^2 d\xi ds
$$

usando novamente o Teorema de Plancherel e o fato de f ser Lipschitz

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{1}{2\delta} + \frac{1}{\delta^2}\right) \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (f(u) - f(v))^2 dxds \\
&\leq A^2 \left(\frac{1}{2\delta} + \frac{1}{\delta^2}\right) \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (u-v)^2 dxds \\
&= A^2 \left(\frac{1}{2\delta} + \frac{1}{\delta^2}\right) \int_0^t \|u(s) - v(s)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} ds \\
&\leq A^2 \left(\frac{1}{2\delta} + \frac{1}{\delta^2}\right) \int_0^t \left(\|u(s) - v(s)\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\right) ds \\
&\leq A^2 \left(\frac{1}{2\delta} + \frac{1}{\delta^2}\right) \int_0^T \left(\|u(t) - v(t)\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\right) ds
\end{aligned}
$$

$$\leq A^2\left(\frac{1}{2\delta}+\frac{1}{\delta^2}\right)\int_0^T \sup_{0\leq t\leq T}\left(\|u(t)-v(t)\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\right)ds$$
$$= TA^2\left(\frac{1}{2\delta}+\frac{1}{\delta^2}\right)\|u-v\|^2_{\mathscr{A}_T}.$$

Logo

$$\sup_{0\leq t\leq T}\|\mathscr{L}u(t)-\mathscr{L}v(t)\|_{H^1(\mathbb{R})} < \sqrt{\left(TA^2\left(\frac{1}{2\delta}+\frac{1}{\delta^2}\right)\right)}\|u-v\|_{\mathscr{A}_T}.$$

Assim,

$$\|\mathscr{L}u-\mathscr{L}v\|_{\mathscr{A}_T} < \rho\|u-v\|_{\mathscr{A}_T} \quad (\rho<1),$$

se $T < \dfrac{2\delta^2}{A^2(\delta+2)}$. ■

Observação 3.1 *No resultado acima, o espaço $C([0,T];H^1(\mathbb{R}))$ poderia ter sido substituído por $L^2([0,T];H^1(\mathbb{R}))$.*

Teorema 3.1 *Suponhamos que u_0, f e σ_ε satisfazem as mesmas hipóteses do Lema 3.1. Então o Problema de Cauchy* (3.1)-(3.2) *admite uma única solução local*

$$u \in C([0,T];H^1(\mathbb{R})),$$

onde T depende de δ e $\|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}$.

Demonstração: Sejam $u^0 \equiv 0$ e $u^k \equiv \mathscr{L}(u^{k-1})$. Por indução, as estimativas do Lema 3.1 seguem para cada u^k. Esse lema também garante que $\mathscr{A}_T$ é invariante por $\mathscr{L}$ e que $\mathscr{L}$ é uma contração. Pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, a equação integral (3.5) possui uma única solução $u \in C([0,T];H^1(\mathbb{R}))$.

■

3.2 Regularidade da Solução

Nesta seção, estabeleceremos um resultado de regularidade da solução obtida na seção anterior. Observemos, que como consequência da definição, temos $u_{0,\varepsilon} \in H^2(\mathbb{R})$.

Teorema 3.2 *Suponhamos que u_0, f e σ_ε satisfazem as mesmas hipóteses do Lema 3.1. Então a solução de* (3.1)-(3.2) *dada pelo Teorema 3.1 é tal que*

$$u \in C([0,T];H^2(\mathbb{R})) \text{ com } u_t \in L^2([0,T];H^2(\mathbb{R})).$$

Demonstração: Mostremos que $u \in C((0,T];H^2(\mathbb{R}))$. Temos, para $t \in [0,T]$,

$$\begin{aligned} E[\|u(t)\|^2_{H^2(\mathbb{R})}] &\le 3\Bigg(E\left[\|G(t)u_0\|^2_{H^2(\mathbb{R})}\right] \\ &+E\left[\left\|-\int_0^t G(t-s)\mathscr{F}^{-1}\left(\frac{\mathscr{F}(f(u)_x)}{1+\delta\xi^2}\right)ds\right\|^2_{H^2(\mathbb{R})}\right] \\ &+E\left[\left\|\int_0^t G(t-s)\mathscr{F}^{-1}\left(\frac{\mathscr{F}(\sigma_\varepsilon)}{1+\delta\xi^2}\right)dW(s)\right\|^2_{H^2(\mathbb{R})}\right]\Bigg) \\ &= 3(I+II+III). \end{aligned}$$

Estimaremos cada parcela da soma acima separadamente. Para a primeira parcela, temos

$$\begin{aligned} I &= E\left[\|G(t)u_0\|^2_{H^2(\mathbb{R})}\right] \\ &= E\left[\left\|\mathscr{F}^{-1}\left(\exp\left\{\frac{-\varepsilon\xi^2 t_0}{1+\delta\xi^2}\right\}\mathscr{F}(u_0)\right)\right\|^2_{H^2(\mathbb{R})}\right] \\ &= E\left[\left\|\exp\left\{\frac{-\varepsilon\xi^2 t_0}{1+\delta\xi^2}\right\}\mathscr{F}(u_0)\right\|^2_{H^2(\mathbb{R})}\right] \\ &\le E\left[\|\mathscr{F}(u_0)\|^2_{H^2(\mathbb{R})}\right] \\ &= E\left[\|u_0\|^2_{H^2(\mathbb{R})}\right]. \end{aligned}$$

Para a segunda parcela, obtemos

$$\begin{aligned} II = E&\left[\left\|-\int_0^t G(t-s)\mathscr{F}^{-1}\left(\frac{\mathscr{F}(f(u)_x)}{1+\delta\xi^2}\right)ds\right\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\right] \\ +E&\left[\left\|-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^t G(t-s)\mathscr{F}^{-1}\left(\frac{\mathscr{F}(f(u)_x)}{1+\delta\xi^2}\right)ds\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\right] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq 4T^2A^2\left(\frac{1}{2\delta}+\frac{1}{\delta^2}\right)E\left[\|u_0\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\right]\\
&+tE\left[\int_0^t\int_{\mathbb{R}}\left(\mathscr{F}^{-1}\left(\frac{\xi^2\exp\left\{\frac{-\varepsilon\xi^2(t-s)}{1+\delta\xi^2}\right\}}{1+\delta\xi^2}[\mathscr{F}((f(u))_x)]\right)\right)^2dxds\right]\\
&=4T^2A^2\left(\frac{1}{2\delta}+\frac{1}{\delta^2}\right)E\left[\|u_0\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\right]\\
&+tE\left[\int_0^t\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{\xi^2\exp\left\{\frac{-\varepsilon\xi^2(t-s)}{1+\delta\xi^2}\right\}}{1+\delta\xi^2}[\mathscr{F}((f(u))_x)]\right)^2d\xi ds\right]\\
&\leq 4T^2A^2\left(\frac{1}{2\delta}+\frac{1}{\delta^2}\right)E\left[\|u_0\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\right]+t\frac{1}{\delta^2}E\left[\int_0^t\int_{\mathbb{R}}[\mathscr{F}((f(u))_x)]^2d\xi ds\right]\\
&=4T^2A^2\left(\frac{1}{2\delta}+\frac{1}{\delta^2}\right)E\left[\|u_0\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\right]+t\frac{1}{\delta^2}E\left[\int_0^t\int_{\mathbb{R}}((f(u))_x)^2dxds\right]\\
&\leq 4T^2A^2\left(\frac{1}{2\delta}+\frac{1}{\delta^2}\right)E\left[\|u_0\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\right]+t\frac{1}{\delta^2}E\left[\int_0^t\int_{\mathbb{R}}|f_n'(u)|^2|u_x|^2dxds\right]\\
&\leq 4T^2A^2\left(\frac{1}{2\delta}+\frac{1}{\delta^2}\right)E\left[\|u_0\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\right]+tC\frac{1}{\delta^2}E\left[\int_0^t\int_{\mathbb{R}}|u_x|^2dxds\right]\\
&\leq 4T^2A^2\left(\frac{1}{2\delta}+\frac{1}{\delta^2}\right)E\left[\|u_0\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\right]+4T^2C\frac{1}{\delta^2}E\left[\|u_0\|^2_{H^1(\mathbb{R})}dxds\right]\\
&=\left(4T^2A^2\left(\frac{1}{2\delta}+\frac{1}{\delta^2}\right)+4T^2C\frac{1}{\delta^2}\right)E\left[\|u_0\|^2_{H^1(\mathbb{R})}dxds\right].
\end{aligned}
$$

Para a terceira parcela, temos

$$
\begin{aligned}
III&=E\left[\left\|\int_0^tG(t-s)\mathscr{F}^{-1}\left(\frac{\mathscr{F}(\sigma_\varepsilon)}{1+\delta\xi^2}\right)dW(s)\right\|^2_{H^2(\mathbb{R})}\right]\\
&=E\left[\left\|\int_0^t\mathscr{F}^{-1}\left(\frac{\exp\left\{\frac{-\varepsilon\xi^2(t-s)}{1+\delta\xi^2}\right\}}{1+\delta\xi^2}[\mathscr{F}(\sigma_\varepsilon)]\right)dW(s)\right\|^2_{H^2(\mathbb{R})}\right]\\
&=E\left[\left\|\int_0^t\mathscr{F}^{-1}\left(\frac{\exp\left\{\frac{-\varepsilon\xi^2(t-s)}{1+\delta\xi^2}\right\}}{1+\delta\xi^2}[\mathscr{F}(\sigma_\varepsilon)]\right)dW(s)\right\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\right]\\
&+E\left[\left\|\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\int_0^t\mathscr{F}^{-1}\left(\frac{\exp\left\{\frac{-\varepsilon\xi^2(t-s)}{1+\delta\xi^2}\right\}}{1+\delta\xi^2}[\mathscr{F}(\sigma_\varepsilon)]\right)dW(s)\right)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq T\left(1+\frac{1}{2\delta}\right)\|\sigma\|_{C([0,\infty);W^{1,\infty}(\mathbb{R}))}\\
&+E\left[\left\|\left(\int_0^t \mathscr{F}^{-1}\left(\frac{\xi^2\exp\left\{\frac{-\varepsilon\xi^2(t-s)}{1+\delta\xi^2}\right\}}{1+\delta\xi^2}[\mathscr{F}(\sigma_\varepsilon)]\right)dW(s)\right)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\right]\\
&\leq T\left(1+\frac{1}{2\delta}\right)\|\sigma\|_{C([0,\infty);W^{1,\infty}(\mathbb{R}))}+T\frac{1}{\delta^2}\|\sigma\|_{C([0,\infty);W^{1,\infty}(\mathbb{R}))}.
\end{aligned}
$$

Juntando essas três estimativas, obtemos

$$
\sup_{0\leq t\leq T}\|u(t)\|_{H^2(\mathbb{R})}<\infty.
$$

Agora, sejam $t_0, t \in (0,T]$ e suponhamos, sem perda de generalidade, $t_0 < t$. Temos

$$
\begin{aligned}
E\left[\|\mathscr{L}u(t)-\mathscr{L}u(t_0)\|^2_{H^2(\mathbb{R})}\right] = E\Big[\Big\|&G(t)u_0-G(t_0)u_0\\
&-\int_0^t G(t-s)\mathscr{F}^{-1}\left(\frac{\mathscr{F}((f(u))_x)}{1+\delta\xi^2}\right)ds\\
&+\int_0^{t_0} G(t_0-s)\mathscr{F}^{-1}\left(\frac{\mathscr{F}((f(u))_x)}{1+\delta\xi^2}\right)ds\\
&+\int_0^t G(t-s)\mathscr{F}^{-1}\left(\frac{\mathscr{F}(\sigma_\varepsilon)}{1+\delta\xi^2}\right)dW(s)\\
&-\int_0^{t_0} G(t_0-s)\mathscr{F}^{-1}\left(\frac{\mathscr{F}(\sigma_\varepsilon)}{1+\delta\xi^2}\right)dW(s)\Big\|^2_{H^2(\mathbb{R})}\Big]
\end{aligned}
$$

fazendo mudanças de variáveis e reescrevendo, obtemos

$$
\begin{aligned}
&=E\Big[\Big\|(G(t)u_0-G(t_0)u_0)\\
&+\int_{t_0}^t G(r)\mathscr{F}^{-1}\left(\frac{\mathscr{F}(f(u(t-r))_x)}{1+\delta\xi^2}\right)dr\\
&-\int_0^{t_0} G(r)\mathscr{F}^{-1}\left(\frac{\mathscr{F}(f(u(t_0-r))_x-f(u(t-r))_x)}{1+\delta\xi^2}\right)ds\\
&-\int_{t_0}^t G(r)\mathscr{F}^{-1}\left(\frac{\mathscr{F}(\sigma_\varepsilon(t-r))}{1+\delta\xi^2}\right)dW(s)\\
&+\int_0^{t_0} G(r)\mathscr{F}^{-1}\left(\frac{\mathscr{F}(\sigma_\varepsilon(t_0-r)-\sigma_\varepsilon(t-r))}{1+\delta\xi^2}\right)dW(s)\Big\|^2_{H^2(\mathbb{R})}\Big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq 5\left(E\left[\|G(t)u_0-G(t_0)u_0\|^2_{H^2(\mathbb{R})}\right]\right.\\
&+E\left[\left\|\int_{t_0}^{t}G(r)\mathscr{F}^{-1}\left(\frac{\mathscr{F}(f(u(t-r))_x)}{1+\delta\xi^2}\right)dr\right\|^2_{H^2(\mathbb{R})}\right]\\
&+E\left[\left\|\int_{0}^{t_0}G(r)\mathscr{F}^{-1}\left(\frac{\mathscr{F}(f(u(t_0-r))_x-f(u(t-r))_x)}{1+\delta\xi^2}\right)ds\right\|^2_{H^2(\mathbb{R})}\right]\\
&+E\left[\left\|\int_{t_0}^{t}G(r)\mathscr{F}^{-1}\left(\frac{\mathscr{F}(\sigma_\varepsilon(t-r))}{1+\delta\xi^2}\right)dW(r)\right\|^2_{H^2(\mathbb{R})}\right]\\
&\left.+E\left[\left\|\int_{0}^{t_0}G(r)\mathscr{F}^{-1}\left(\frac{\mathscr{F}(\sigma_\varepsilon(t_0-r)-\sigma_\varepsilon(t-r))}{1+\delta\xi^2}\right)dW(r)\right\|^2_{H^2(\mathbb{R})}\right]\right)\\
&=5\,(IV+V+VI+VII+VIII).
\end{aligned}
$$

Analogamente ao que fizemos na demonstração do item **ii.** do Lema 3.1, obtemos

$$
\begin{aligned}
IV&=E\left[\int_{\mathbb{R}}|G(t)u_0-G(t_0)u_0|^2\,dx\right]+E\left[\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{\partial}{\partial x}(G(t)u_0-G(t_0)u_0)\right|^2dx\right]\\
&+E\left[\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}(G(t)u_0-G(t_0)u_0)\right|^2dx\right]\\
&\leq\frac{\varepsilon^2}{\delta^2}|t-t_0|^2E\left[||u_0||^2_{H^2(\mathbb{R})}\right].
\end{aligned}
$$

Também

$$
\begin{aligned}
V&=E\left[\left\|\int_{t_0}^{t}G(r)\mathscr{F}^{-1}\left(\frac{\mathscr{F}(f(u(t-r))_x)}{1+\delta\xi^2}\right)dr\right\|^2_{H^2(\mathbb{R})}\right]\\
&\leq(t-t_0)\left(E\left[\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}}\frac{\exp\left\{\frac{-2\varepsilon\xi^2r}{1+\delta\xi^2}\right\}|\mathscr{F}((f(u(t-r)))_x)|^2}{(1+\delta\xi^2)^2}d\xi dr\right]\right.\\
&+E\left[\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}}\frac{\exp\left\{\frac{-2\varepsilon\xi^2r}{1+\delta\xi^2}\right\}\xi^2|\mathscr{F}((f(u(t-r)))_x)|^2}{(1+\delta\xi^2)^2}d\xi dr\right]\\
&\left.+E\left[\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}}\frac{\exp\left\{\frac{-2\varepsilon\xi^2r}{1+\delta\xi^2}\right\}\xi^4|\mathscr{F}((f(u(t-r)))_x)|^2}{(1+\delta\xi^2)^2}d\xi dr\right]\right)
\end{aligned}
$$

$$\leq 4C\left(1+\frac{1}{2\delta}+\frac{1}{\delta^2}\right)|t-t_0|^2E\left[\|u_0\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\right].$$

Para a terceira parcela, obtemos

$$\begin{aligned}
VI &= E\left[\left\|\int_0^{t_0} G(r)\mathscr{F}^{-1}\left(\frac{\mathscr{F}(f(u(t_0-r))_x-f(u(t-r))_x)}{1+\delta\xi^2}\right)dr\right\|^2_{H^2(\mathbb{R})}\right]\\
&\leq t_0E\left[\int_0^{t_0}\int_{\mathbb{R}}\exp\left\{\frac{-2\varepsilon\xi^2 r}{1+\delta\xi^2}\right\}\frac{(1+\xi^2+\xi^4)|\mathscr{F}((f(u(t_0-r)))_x-(f(u(t-r)))_x)|^2}{(1+\delta\xi^2)^2}d\xi dr\right]\\
&\leq Ct_0\left(1+\frac{1}{2\delta}+\frac{1}{\delta^2}\right)E\left[\int_0^{t_0}\|u(t_0-r)-u(t-r)\|^2_{H^1(\mathbb{R})}dr\right]\to 0,
\end{aligned}$$

pelo Teorema da Convergência Dominada.

Temos ainda

$$\begin{aligned}
VII &= E\left[\left\|\int_{t_0}^{t} G(r)\mathscr{F}^{-1}\left(\frac{\mathscr{F}(\sigma_\varepsilon(t-r))}{1+\delta\xi^2}\right)dW(r)\right\|^2_{H^2(\mathbb{R})}\right]\\
&\leq C_1\left(1+\frac{1}{2\delta}+\frac{1}{\delta^2}\right)|t-t_0|E\left[||\sigma||^2_{C([0,\infty);L^\infty(\mathbb{R}))}\right].
\end{aligned}$$

Finalmente

$$\begin{aligned}
VIII &= E\left[\left\|\int_0^{t_0} G(r)\mathscr{F}^{-1}\left(\frac{\mathscr{F}(\sigma_\varepsilon(t_0-r)-\sigma_\varepsilon(t-r))}{1+\delta\xi^2}\right)dW(r)\right\|^2_{H^2(\mathbb{R})}\right]\\
&\leq C\left(1+\frac{1}{2\delta}+\frac{1}{\delta^2}\right)E\left[\int_0^{t_0}\|(\sigma_\varepsilon(t_0-r)-\sigma_\varepsilon(t-r)\|^2_{L^\infty(\mathbb{R})}dx\right]\longrightarrow 0
\end{aligned}$$

quando $|t-t_0|\longrightarrow 0$, pelo Teorema da Convergência Dominada.

Provemos agora a regularidade de u_t. Da equação (3.3), temos

$$\mathscr{F}(u_t) = -\frac{\varepsilon\xi^2}{1+\delta\xi^2}\mathscr{F}(u)+\frac{\mathscr{F}(\sigma_\varepsilon)W(dt)-\mathscr{F}((f(u))_x)}{1+\delta\xi^2}.$$

Usando (3.4), obtemos, para $t\in[0,T]$

$$u_t(t) = -\mathscr{F}^{-1}\left[\frac{\varepsilon\xi^2}{1+\delta\xi^2}\exp\left\{\frac{-\varepsilon\xi^2 t}{1+\delta\xi^2}\right\}\mathscr{F}(u_0)\right]$$

$$
\begin{aligned}
&-\int_0^t \mathscr{F}^{-1}\left[\frac{\varepsilon\xi^2}{(1+\delta\xi^2)^2}\exp\left\{\frac{-\varepsilon\xi^2(t-s)}{1+\delta\xi^2}\right\}\mathscr{F}(\sigma_\varepsilon)\right]W(ds)\\
&+\int_0^t \mathscr{F}^{-1}\left[\frac{\varepsilon\xi^2}{(1+\delta\xi^2)^2}\exp\left\{\frac{-\varepsilon\xi^2(t-s)}{1+\delta\xi^2}\right\}\mathscr{F}((f(u))_x)\right]ds\\
&+\mathscr{F}^{-1}\left[\frac{\mathscr{F}(\sigma_\varepsilon)}{1+\delta\xi^2}\right]W(dt)-\mathscr{F}^{-1}\left[\frac{\mathscr{F}((f(u))_x)}{1+\delta\xi^2}\right].
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
&E\left[\int_0^T \|u_t\|^2_{H^1(\mathbb{R})}dt\right]\\
&\leq 5\left(E\left[\int_0^T \left\|\mathscr{F}^{-1}\left(\frac{\varepsilon\xi^2}{1+\delta\xi^2}\exp\left\{\frac{-\varepsilon\xi^2 t}{1+\delta\xi^2}\right\}\mathscr{F}(u_0)\right)\right\|^2_{H^1(\mathbb{R})}dt\right]\right.\\
&+E\left[\int_0^T \left\|\int_0^t \mathscr{F}^{-1}\left[\frac{\varepsilon\xi^2}{(1+\delta\xi^2)^2}\exp\left\{\frac{-\varepsilon\xi^2(t-s)}{1+\delta\xi^2}\right\}\mathscr{F}(\sigma_\varepsilon)\right]W(ds)\right\|^2_{H^1(\mathbb{R})}dt\right]\\
&+E\left[\int_0^T \left\|\int_0^t \mathscr{F}^{-1}\left[\frac{\varepsilon\xi^2}{(1+\delta\xi^2)^2}\exp\left\{\frac{-\varepsilon\xi^2(t-s)}{1+\delta\xi^2}\right\}\mathscr{F}((f(u))_x)\right]ds\right\|^2_{H^1(\mathbb{R})}dt\right]\\
&+E\left[\int_0^T \left\|\mathscr{F}^{-1}\left[\frac{\mathscr{F}(\sigma_\varepsilon)}{1+\delta\xi^2}\right]\right\|^2_{H^1(\mathbb{R})}W(dt)\right]\\
&\left.+E\left[\int_0^T \left\|\mathscr{F}^{-1}\left[\frac{\mathscr{F}((f(u))_x)}{1+\delta\xi^2}\right]\right\|^2_{H^1(\mathbb{R})}dt\right]\right)\\
&=5(B+D+F+G+H).
\end{aligned}
$$

Temos

$$
\begin{aligned}
B&=E\left[\int_0^T \left\|\mathscr{F}^{-1}\left(\frac{\varepsilon\xi^2}{1+\delta\xi^2}\exp\left\{\frac{-\varepsilon\xi^2 t}{1+\delta\xi^2}\right\}\mathscr{F}(u_0)\right)\right\|^2_{H^1(\mathbb{R})}dt\right]\\
&=E\left[\int_0^T \left\|\frac{\varepsilon\xi^2}{1+\delta\xi^2}\exp\left\{\frac{-\varepsilon\xi^2 t}{1+\delta\xi^2}\right\}\mathscr{F}(u_0)\right\|^2_{H^1(\mathbb{R})}dt\right]\\
&\leq \frac{\varepsilon^2}{\delta^2}E\left[\|(u_0)\|^2_{L^2([0,T];H^1(\mathbb{R}))}\right].
\end{aligned}
$$

Também

$$D = E\left[\int_0^T \left\| \int_0^t \mathscr{F}^{-1}\left[\frac{\varepsilon\xi^2}{(1+\delta\xi^2)^2}\exp\left\{\frac{-\varepsilon\xi^2(t-s)}{1+\delta\xi^2}\right\}\mathscr{F}(\sigma_\varepsilon)\right]W(ds)\right\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 dt\right]$$
$$\leq T^2\left(1+\frac{1}{2\delta}\right)\|\sigma\|_{C([0,\infty);W^{1,\infty}(\mathbb{R}))}^2.$$

Ainda

$$F = E\left[\int_0^T \left\| \int_0^t \mathscr{F}^{-1}\left[\frac{\varepsilon\xi^2}{(1+\delta\xi^2)^2}\exp\left\{\frac{-\varepsilon\xi^2(t-s)}{1+\delta\xi^2}\right\}\mathscr{F}((f(u))_x)\right]ds\right\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 dt\right]$$
$$\leq 4T^2A^2\left(\frac{1}{2\delta}+\frac{1}{\delta^2}\right)E\left[\|(u_0)\|_{L^2([0,T];H^1(\mathbb{R}))}^2\right].$$

Temos também, pelas propriedades da Integral de Itô,

$$G = E\left[\int_0^T \left\|\mathscr{F}^{-1}\left[\frac{\mathscr{F}(\sigma_\varepsilon)}{1+\delta\xi^2}\right]\right\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 W(dt)\right] = 0.$$

Finalmente

$$H = E\left[\int_0^T \left\|\mathscr{F}^{-1}\left[\frac{\mathscr{F}((f(u))_x)}{1+\delta\xi^2}\right]\right\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 dt\right] = E\left[\int_0^T \left\|\frac{\mathscr{F}((f(u))_x)}{1+\delta\xi^2}\right\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 dt\right]$$
$$\leq E\left[\int_0^T \|(f(u))_x\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 dt\right] \leq 4TCE\left[\|u_0\|_{L^2([0,T];H^1(\mathbb{R}))}^2\right].$$

■

3.3 Estimativa *a priori*

O objetivo nesta seção é provar uma estimativa para a solução obtida.

Lema 3.2 *Seja $u(t,x)$ uma solução de* (3.1)-(3.2) *em* $[0,T]$*. Então, para todo* $0 \leq t \leq T$*, vale*

$$E\left[\|u(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2\right] + \delta E\left[\|u_x(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2\right] \leq E\left[\|u_0(\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2\right] + \delta E\left[\|(u_0)_x(\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2\right] + C(T), \tag{3.16}$$

onde C é uma constante que depende apenas do tamanho do intervalo. Em particular, C é independente de t.

Demonstração: Aplicando a Fórmula de Itô para $(u(t,x))^2$, obtemos

$$\begin{aligned} u(t,x)^2 =& u(0,x)^2 + \int_0^t 2(u(s,x))\sigma_\varepsilon(s,x)dW(s) \\ &+ \int_0^t 2(u(s,x))[\varepsilon u_{xx}(s,x) + \delta u_{xxs}(s,x) + (f(u(s,x)))_x]ds \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t 2\sigma_\varepsilon^2(s,x)ds, \ \forall t \in [0,T]. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Integrando para $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \|u(t,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} =& \|u_0(\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \int_R \int_0^t 2(u(s,x))\sigma_\varepsilon(s,x)dW(s)dx \\ &+ \int_R \int_0^t 2(u(s,x))[\varepsilon u_{xx}(s,x) + \delta u_{xxs}(s,x) - (f(u(s,x)))_x]dsdx \\ &+ \int_R \int_0^t \sigma_\varepsilon^2(s,x)dsdx, \ \forall t \in [0,T]. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Estimaremos agora a esperança das integrais do lado direito da equação acima. Temos

$$E\left[\int_R \int_0^t 2(u(s,x))\sigma_\varepsilon(s,x)dW(s)dx\right] = \int_R E\left[\int_0^t 2(u(s,x))\sigma_\varepsilon(s,x)dW(s)\right]dx = 0, \tag{3.19}$$

pelo item [**b.**] do Teorema 1.1. Na primeira igualdade acima, pudemos trocar a ordem de integração porque $\int_0^t 2(u(s,x))\sigma_\varepsilon(s,x)dW(s) \in L^1(\Omega \times \mathbb{R})$, conforme mostrado abaixo.

$$\left(E\left[\int_{\mathbb{R}} \left|\int_0^t u(s,x)\sigma_\varepsilon(s,x)dW(s)\right| dx\right]\right)^2 =$$

usando o Teorema de Tonelli e o fato que, na variável x, o suporte de σ_ε está contindo em $[-M-1, M+1]$(conforme Observação 2.1), obtemos

$$= \left(\int_{-M-1}^{M+1} E\left[\left|\int_0^t u(s,x)\sigma_\varepsilon(s,x)dW(s)\right|\right] dx\right)^2$$

pela Desigualdade de Jensen

$$\leq (2M+2)\int_{-M-1}^{M+1} E\left[\int_0^t u(s,x)\sigma_\varepsilon(s,x)dW(s)\right]^2 dx$$

pela propriedade da Integral de Itô (3.15)

$$\begin{aligned}
&= (2M+2)\int_{-M-1}^{M+1} E\left[\int_0^t u(s,x)^2\sigma_\varepsilon^2(s,x)ds\right] dx\\
&\leq (2M+2)\|\sigma_\varepsilon\|^2_{L^\infty((0,T)\times\mathbb{R})}\int_{-M-1}^{M+1} E\left[\int_0^t u(s,x)^2 ds\right] dx \leq\\
&\leq (2M+2)\|\sigma_\varepsilon\|^2_{L^\infty((0,T)\times\mathbb{R})} E\left[\int_0^t \|u(s,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} ds\right] \leq\\
&\leq t(2M+2)\|\sigma_\varepsilon\|^2_{L^\infty((0,T)\times\mathbb{R})} E\left[\|u_0(\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\right] < \infty.
\end{aligned}$$

Para as demais integrais, temos

$$\begin{aligned}
E\left[\int_R\int_0^t \sigma_\varepsilon^2(s,x)dsdx\right] &\leq E\left[\int_0^t \|\sigma_\varepsilon(s)\|^2_{L^\infty(\mathbb{R})}ds\right] \leq E\left[\int_0^T \|\sigma(t)\|^2_{L^\infty(\mathbb{R})}\|\rho_{\sqrt{\varepsilon}}\|^2_{L^1(\mathbb{R})}dt\right]\\
&\leq E\left[\int_0^T \sup_{0\leq t\leq\infty}\|\sigma(t)\|^2_{L^\infty(\mathbb{R})}ds\right] = T\|\sigma\|^2_{C([0,\infty);W^{1,\infty}(\mathbb{R}))}. \qquad (3.20)
\end{aligned}$$

Também

$$E\left[\int_R\int_0^t 2(u(s,x))(f(u(s,x)))_x dsdx\right] = E\left[\int_0^t\int_R 2(u(s,x))(f(u(s,x)))_x dxds\right] = 0, \qquad (3.21)$$

pois, considerando $q(u) = \int_0^u vf'(v)dv$, temos $q'(u) = uf'(u)$ e portanto

$$\int_{\mathbb{R}} u(f(u))_x dx = \int_{\mathbb{R}} uf'(u)u_x dx = \int_{\mathbb{R}} q'(u)u_x dx = \int_{\mathbb{R}} (q(u))_x dx = 0.$$

Usando a igualdade $uu_{xx} = (uu_x)_x - (u_x)^2$, obtemos

$$2\varepsilon E\left[\int_R\int_0^t u(s,x)u_{xx}(s,x)dsdx\right] = -2\varepsilon E\left[\int_0^t\int_R (u_x)^2(s,x)dxds\right]. \qquad (3.22)$$

Analogamente, usando $uu_{xxs} = (uu_{xs})_x - u_x u_{xs} = (uu_{xs})_x - \frac{(u_x^2)_s}{2}$, temos

$$\begin{aligned}2\delta E\left[\int_R\int_0^t u(s,xu_{xxs}(s,x)dsdx\right] &= -2\delta E\left[\int_R\int_0^t \frac{(u_x^2)_s}{2}(s,x)dsdx\right]\\ &= -\delta E\left[\int_R (u_x)^2(t,x)-((u_0)_x)^2(x)dx\right]. \end{aligned}\tag{3.23}$$

Substituindo (3.19), (3.20), (3.21), (3.22) e (3.23) na esperança da fórmula (3.18), obtemos

$$\begin{aligned}&E\left[\|u(t,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\right]+2\varepsilon E\left[\int_0^t\int_R (u_x)^2(s,x)dxds\right]+\delta E\left[\int_R (u_x)^2(t,x)dx\right]\\ &\leq E\left[\|u_0(\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\right]+E\left[\int_R ((u_0)_x)^2(x)dx\right]+T\|\sigma\|_{C([0,\infty);W^{1,\infty}(\mathbb{R}))},\end{aligned}\tag{3.24}$$

e assim temos a estimativa (3.16). ■

Observação 3.2 *Uma vez que o lado direito da nossa estimativa depende do tamanho do intervalo, ela não nos permite estender a solução globalmente. É necessário obter uma estimativa de modo que o lado direito independa de ε e δ.*

3.4 Apêndice

Teorema 3.3 *O espaço*

$$\mathscr{A}_T \equiv \left\{u\in C([0,T];H^1(\mathbb{R}));E\left[\|u(t)-G(t)u_0\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\right]\leq E\left[\|u_0\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\right],\ t\in[0,T]\right\}$$

com a norma $\|u\|_{\mathscr{A}_T} = \|u\|_{C([0,T];H^1(\mathbb{R}))} \equiv \sup_{0\leq t\leq T}\|u(t)\|_{H^1(\mathbb{R})}$ é de Banach.

Demonstração: Seja $(u_n)\subset\mathscr{A}_T$ tal que $\|u_n-u\|_{\mathscr{A}_T}\to 0$ quando $n\to\infty$. Como $C([0,T];H^1(\mathbb{R}))$ é um espaço de Banach, temos $u\in C([0,T];H^1(\mathbb{R}))$ e

$$\sup_{0\leq t\leq T}\|u(t,\cdot)-u_n(t,\cdot)\|_{H^1(\mathbb{R})}\to 0.$$

Mostremos que $u \in \mathscr{A}_T$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup_{0\leq t\leq T} \|u(t,\cdot) - u_n(t,\cdot)\|_{H^1(\mathbb{R})} \leq \varepsilon, \ \forall\, n \geq N.$$

Então, $\forall\, t \in [0,T], \forall\, n \geq N$, temos

$$\begin{aligned}
E\left[\|u(t) - G(t)u_0\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\right] &= E\left[\|u(t) - u_n(t) + u_n(t) - G(t)u_0\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\right] \\
&\leq E\left[\left(\|u(t) - u_n(t)\|_{H^1(\mathbb{R})} + \|u_n(t) - G(t)u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}\right)^2\right] \\
&= E\left[\|u(t) - u_n(t)\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\right] \\
&+ 2E\left[\|u(t) - u_n(t)\|_{H^1(\mathbb{R})}\|u_n(t) - G(t)u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}\right] \\
&+ E\left[\|u_n(t) - G(t)u_0\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\right] \\
&\leq \varepsilon^2 + 2\varepsilon E\left[\|u_n - G(t)u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}\right] + E\left[\|u_n(t) - G(t)u_0\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\right].
\end{aligned}$$

Se $\|u_n - G(t)u_0\|_{H^1(\mathbb{R})} \leq 1$, então

$$E\left[\|u(t) - G(t)u_0\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\right] \leq \varepsilon^2 + 2\varepsilon + E\left[\|u_0\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\right].$$

Caso contrário, temos $E\left[\|u_n - G(t)u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}\right] \leq E\left[\|u_n - G(t)u_0\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\right]$ e portanto

$$E\left[\|u(t) - G(t)u_0\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\right] \leq \varepsilon^2 + (2\varepsilon + 1)E\left[\|u_0\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\right].$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, vemos que

$$E\left[\|u(t) - G(t)u_0\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\right] \leq E\left[\|u_0\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\right], \forall\, t \in [0,T]$$

o que prova que $u \in \mathscr{A}_T$.

$\blacksquare$

CAPÍTULO 4

A Equação BBM-Burgers Estocástica Multiplicativa

Consideraremos agora a equação (7) multiplicativa, isto é, com o termo estocástico σ dependendo de u. Neste caso, substituímos a hipótese **(H2)** por:

(H2*) A função $\sigma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Lipschitz com $\sigma(0) = 0$ e constante de Lipschitz M.

Sejam ρ, f e $u_{0,\varepsilon}$ como no capítulo anterior. Definimos

$$\sigma_\varepsilon(u(t,x)) = \int_{\mathbb{R}} \sigma(u(t,x-y)) \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \rho\left(\frac{y}{\sqrt{\varepsilon}}\right) dy. \tag{4.1}$$

Observação 4.1 *Com essas hipóteses para a função σ, temos, se $u \in L^2(\mathbb{R})$, a seguinte desigualdade:*

$$\|\sigma_\varepsilon(u)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|\sigma(u)\|_{L^2(\mathbb{R})} \|\rho_{\sqrt{\varepsilon}}\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq M\|u\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Como anteriormente, passaremos a considerar o problema:

$$u_t + (f(u))_x - \varepsilon u_{xx} - \delta u_{xxt} = \sigma_\varepsilon(u)\frac{dW}{dt} \tag{4.2}$$

$$u(0,\cdot) = u_{0,\varepsilon}. \tag{4.3}$$

4.1 Existência de Solução

Seguiremos a mesma ideia do capítulo anterior, mas neste caso a norma adequada para o espaço das soluções é outra, como ficará claro posteriormente.

Repetindo os cálculos, vemos que uma equação integral da solução é

$$\begin{aligned} u(t,x) = G(t)u_{0,n,\varepsilon} - \int_0^t G(t-s)\mathscr{F}^{-1}\left(\frac{\mathscr{F}((f(u))_x)}{1+\delta\xi^2}\right)ds \\ + \int_0^t G(t-s)\mathscr{F}^{-1}\left(\frac{\mathscr{F}(\sigma_\varepsilon(u))}{1+\delta\xi^2}\right)W(ds), \end{aligned} \tag{4.4}$$

sendo G a mesma família de operadores dada anteriormente.

Definimos o operador

$$\mathscr{L}u(t) = G(t)u_0 - \int_0^t G(t-s)\mathscr{F}^{-1}\left(\frac{\mathscr{F}((f(u))_x)}{1+\delta\xi^2}\right)ds + \int_0^t G(t-s)\mathscr{F}^{-1}\left(\frac{\mathscr{F}(\sigma_\varepsilon(u))}{1+\delta\xi^2}\right)W(ds),$$

em:

$$\mathscr{A}_T \equiv \left\{u \in C([0,T];H^1(\mathbb{R})); E\left[\|u(t)-G(t)u_0\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\right] \leq E\left[\|u_0\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\right],\ t \in [0,T]\right\},$$

e a norma em $\mathscr{A}_T$ como

$$\|u\|_{\mathscr{A}_T} \equiv \sup_{0\leq t\leq T}\sqrt{E\left[\|u(t)\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\right]}.$$

Notemos a inclusão da esperança na norma de $\mathscr{A}_T$ em relação ao problema aditivo.

No apêndice deste capítulo, demonstramos que $\mathscr{A}_T$ com a norma acima é um espaço de Banach. Veja o Teorema 4.1.

Lema 4.1 *Sejam f,σ e u_0 satisfazendo as hipóteses* ***(H1*), (H2*) e (H3)****. Seja $u(t)\in C([0,T];H^1(\mathbb{R}))$ tal que:*

$$E[\|u(t)-G(t)u_0\|^2_{H^1(\mathbb{R})}]\leq E[\|u_0\|^2_{H^1(\mathbb{R})}],\forall t\in[0,T]. \tag{4.5}$$

Se $T>0$ é suficientemente pequeno então vale, q. t. p. $\omega\in\Omega$:

i. $\mathscr{L}u(t)\in H^1(\mathbb{R})$ com

$$E[\|\mathscr{L}u(t)-G(t)u_0\|^2_{H^1(\mathbb{R})}]\leq E[\|u_0\|^2_{H^1(\mathbb{R})}],\forall t\in[0,T] \tag{4.6}$$

$$e \quad E[\|\mathscr{L}u(t)\|^2_{H^1(\mathbb{R})}]\leq 4E[\|u_0\|^2_{H^1(\mathbb{R})}],\forall t\in[0,T]; \tag{4.7}$$

ii. $\mathscr{A}_T$ é invariante por $\mathscr{L}$;

iii. $\mathscr{L}$ é uma contração na norma $\|.\|_{\mathscr{A}_T}$ em $\mathscr{A}_T$.

Demonstração: Faremos as contas apenas para o termos que envolvem integrais estocásticas.

i. Temos a desigualdade

$$\begin{aligned}E[\|\mathscr{L}u(t)-G(t)u_0\|^2_{H^1(\mathbb{R})}]&=E[\|I+II\|^2_{H^1(\mathbb{R})}]\leq E[(\|I\|_{H^1(\mathbb{R})}+\|II\|_{H^1(\mathbb{R})})^2]\\&\leq 2(E[\|I\|^2_{H^1(\mathbb{R})}]+E[\|II\|^2_{H^1(\mathbb{R})}]).\end{aligned} \tag{4.8}$$

Para a segunda parcela, obtemos

$$\begin{aligned}E[\|II\|^2_{H^1(\mathbb{R})}]&=E\left[\left\|\int_0^t G(t-s)\mathscr{F}^{-1}\left(\frac{\mathscr{F}(\sigma_\varepsilon(u))}{1+\delta\xi^2}\right)dW(s)\right\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\right]\\&=E\left[\left\|\int_0^t\mathscr{F}^{-1}\left(\frac{\exp\left\{\frac{-\varepsilon\xi^2(t-s)}{1+\delta\xi^2}\right\}}{1+\delta\xi^2}[\mathscr{F}(\sigma_\varepsilon(u))]\right)dW(s)\right\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\right]\\&=E\left[\int_{\mathbb{R}}\left(\int_0^t\mathscr{F}^{-1}\left(\frac{\exp\left\{\frac{-\varepsilon\xi^2(t-s)}{1+\delta\xi^2}\right\}}{1+\delta\xi^2}[\mathscr{F}(\sigma_\varepsilon(u))]\right)dW(s)\right)^2dx\right]\end{aligned}$$

$$+E\left[\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{\partial}{\partial x}\int_0^t \mathscr{F}^{-1}\left(\frac{\exp\left\{\frac{-\varepsilon\xi^2(t-s)}{1+\delta\xi^2}\right\}}{1+\delta\xi^2}[\mathscr{F}(\sigma_\varepsilon(u))]\right)dW(s)\right)^2 dx\right]$$

usando (3.15), as propriedades da transformada de Fourier e o Teorema de Plancherel

$$\begin{aligned}
&= E\left[\int_{\mathbb{R}}\int_0^t \left(\mathscr{F}^{-1}\left(\frac{\exp\left\{\frac{-\varepsilon\xi^2(t-s)}{1+\delta\xi^2}\right\}}{1+\delta\xi^2}[\mathscr{F}(\sigma_\varepsilon(u))]\right)\right)^2 dsdx\right]\\
&+ E\left[\int_{\mathbb{R}}\int_0^t \left(\mathscr{F}^{-1}\left(\frac{\exp\left\{\frac{-\varepsilon\xi^2(t-s)}{1+\delta\xi^2}\right\}}{1+\delta\xi^2}[\mathscr{F}(\sigma_\varepsilon(u))_x]\right)\right)^2 dsdx\right]\\
&= E\left[\int_0^t\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{\exp\left\{\frac{-2\varepsilon\xi^2(t-s)}{1+\delta\xi^2}\right\}}{(1+\delta\xi^2)^2}|\mathscr{F}(\sigma_\varepsilon(u))|^2\right)d\xi ds\right]\\
&+ E\left[\int_0^t\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{\exp\left\{\frac{-2\varepsilon\xi^2(t-s)}{1+\delta\xi^2}\right\}\xi^2}{(1+\delta\xi^2)^2}|\mathscr{F}(\sigma_\varepsilon(u))|^2\right)d\xi ds\right]
\end{aligned}$$

por (3.9) e (3.11)

$$\leq E\left[\int_0^t\int_{\mathbb{R}}|\mathscr{F}(\sigma_\varepsilon(u))|^2 d\xi ds\right] + E\left[\frac{1}{2\delta}\int_0^t\int_{\mathbb{R}}|\mathscr{F}(\sigma_\varepsilon(u))|^2 d\xi ds\right]$$

novamente usando o Teorema de Plancherel e a seguir a Observação 4.1

$$\begin{aligned}
&= \left(1+\frac{1}{2\delta}\right)E\left[\int_0^t\int_{\mathbb{R}}|\sigma_\varepsilon(u)|^2 dxds\right] \leq M^2\left(1+\frac{1}{2\delta}\right)E\left[\int_0^t\int_{\mathbb{R}}|u|^2 dxds\right]\\
&\leq M^2\left(1+\frac{1}{2\delta}\right)E\left[\int_0^T \|u\|^2_{H^1(\mathbb{R})}ds\right]\\
&\leq 4M^2\left(1+\frac{1}{2\delta}\right)TE\left[\|u_0\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\right] \leq \frac{1}{4}E\left[\|u_0\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\right],
\end{aligned}$$

se $T \leq \dfrac{\delta}{8M^2(1+2\delta)}$.

Portanto, tomando

$$T = \min\left\{\frac{1}{4A}\sqrt{\frac{2\delta^2}{\delta+2}}, \frac{\delta}{8M^2(1+2\delta)}\right\},$$

obtemos (4.6).

ii. Seguindo o capítulo anterior, obtemos

$$E\left[\|\mathscr{L}u(t)-\mathscr{L}u(t_0)\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\right] = 5\,(III+IV+V+VI+VII),$$

e precisamos analisar as duas últimas parcelas. Temos

$$\begin{aligned}
IV &= E\left[\left\|\int_{t_0}^{t} G(r)\mathscr{F}^{-1}\left(\frac{\mathscr{F}(\sigma_\varepsilon(u(t-r)))}{1+\delta\xi^2}\right)dW(r)\right\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\right]\\
&= E\left[\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{t_0}^{t}\mathscr{F}^{-1}\left(\exp\left\{\frac{-\varepsilon\xi^2 r}{1+\delta\xi^2}\right\}\frac{\mathscr{F}(\sigma_\varepsilon(u(t-r)))}{1+\delta\xi^2}\right)dW(r)\right)^2 dx\right]\\
&+ E\left[\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{t_0}^{t}\mathscr{F}^{-1}\left(\exp\left\{\frac{-\varepsilon\xi^2 r}{1+\delta\xi^2}\right\}\frac{\mathscr{F}((\sigma_\varepsilon(u(t-r)))_x)}{1+\delta\xi^2}\right)dW(r)\right)^2 dx\right]\\
&= E\left[\int_{\mathbb{R}}\int_{t_0}^{t}\left(\mathscr{F}^{-1}\left(\exp\left\{\frac{-\varepsilon\xi^2 r}{1+\delta\xi^2}\right\}\right)\frac{\mathscr{F}(\sigma_\varepsilon(u(t-r)))}{1+\delta\xi^2}\right)^2 dr\,dx\right]\\
&+ E\left[\int_{\mathbb{R}}\int_{t_0}^{t}\left(\mathscr{F}^{-1}\left(\exp\left\{\frac{-\varepsilon\xi^2 r}{1+\delta\xi^2}\right\}\right)\frac{i\xi\mathscr{F}(\sigma_\varepsilon(u((t-r)))}{1+\delta\xi^2}\right)^2 dr\,dx\right]\\
&= E\left[\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}}\frac{\exp\left\{\frac{-2\varepsilon\xi^2 r}{1+\delta\xi^2}\right\}}{(1+\delta\xi^2)^2}|\mathscr{F}(\sigma_\varepsilon(u(t-r)))|^2 d\xi\,dr\right]\\
&+ E\left[\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}}\frac{\exp\left\{\frac{-2\varepsilon\xi^2 r}{1+\delta\xi^2}\right\}}{(1+\delta\xi^2)^2}\xi^2|\mathscr{F}(\sigma_\varepsilon(u(t-r)))|^2 d\xi\,dr\right]\\
&\le \left(1+\frac{1}{2\delta}\right)E\left[\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}}|\sigma_\varepsilon(u(t-r))|^2 dx\,dr\right]\\
&\le M^2\left(1+\frac{1}{2\delta}\right)E\left[\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}}|(u(t-r))|^2 dx\,dr\right]\\
&\le 4M^2\left(1+\frac{1}{2\delta}\right)|t-t_0|E\left[||u_0||^2_{H^1(\mathbb{R})}\right].
\end{aligned}$$

Para a última parcela, temos

$$
\begin{aligned}
V &= E\left[\left\|\int_0^{t_0} G(r)\mathscr{F}^{-1}\left(\frac{\mathscr{F}(\sigma_\varepsilon(u(t_0-r))-\sigma_\varepsilon(u(t-r)))}{1+\delta\xi^2}\right)dW(r)\right\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\right]\\
&= E\left[\int_{\mathbb{R}}\left(\int_0^{t_0}\mathscr{F}^{-1}\left(\exp\left\{\frac{-\varepsilon\xi^2 r}{1+\delta\xi^2}\right\}\frac{\mathscr{F}(\sigma_\varepsilon(u(t_0-r))-\sigma_\varepsilon(u(t-r)))}{1+\delta\xi^2}\right)dW(r)\right)^2 dx\right]\\
&+ E\left[\int_{\mathbb{R}}\left(\int_0^{t_0}\mathscr{F}^{-1}\left(\exp\left\{\frac{-\varepsilon\xi^2 r}{1+\delta\xi^2}\right\}\times\right.\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.\left.\frac{\mathscr{F}((\sigma_\varepsilon(u(t_0-r)))_x-(\sigma_\varepsilon(u(t-r)))_x)}{1+\delta\xi^2}\right)dW(r)\right)^2 dx\right]\\
&= E\left[\int_{\mathbb{R}}\int_0^{t_0}\left(\mathscr{F}^{-1}\left(\exp\left\{\frac{-\varepsilon\xi^2 r}{1+\delta\xi^2}\right\}\frac{\mathscr{F}(\sigma_\varepsilon(u(t_0-r))-\sigma_\varepsilon(u(t-r)))}{1+\delta\xi^2}\right)\right)^2 dr\,dx\right]\\
&+ E\left[\int_{\mathbb{R}}\int_0^{t_0}\left(\mathscr{F}^{-1}\left(\exp\left\{\frac{-\varepsilon\xi^2 r}{1+\delta\xi^2}\right\}\frac{\mathscr{F}((\sigma_\varepsilon(u(t_0-r)))_x-(\sigma_\varepsilon(u(t-r)))_x)}{1+\delta\xi^2}\right)\right)^2 dr\,dx\right]\\
&= E\left[\int_0^{t_0}\int_{\mathbb{R}}\exp\left\{\frac{-2\varepsilon\xi^2 r}{1+\delta\xi^2}\right\}\frac{|\mathscr{F}(\sigma_\varepsilon(u(t_0-r))-\sigma_\varepsilon(u(t-r)))|^2}{(1+\delta\xi^2)^2}\xi\,dr\right]\\
&+ E\left[\int_0^{t_0}\int_{\mathbb{R}}\exp\left\{\frac{-2\varepsilon\xi^2 r}{1+\delta\xi^2}\right\}\frac{\xi^2|\mathscr{F}(\sigma_\varepsilon(u(t_0-r))-\sigma_\varepsilon(u(t-r)))|^2}{(1+\delta\xi^2)^2}d\xi\,dr\right]\\
&\le \left(1+\frac{1}{2\delta}\right)E\left[\int_0^{t_0}\int_{\mathbb{R}}|\mathscr{F}(\sigma_\varepsilon(u(t_0-r))-\sigma_\varepsilon(u(t-r)))|^2 d\xi\,dr\right]\\
&\le \left(1+\frac{1}{2\delta}\right)E\left[\int_0^{t_0}\int_{\mathbb{R}}|\mathscr{F}(\sigma_\varepsilon(u(t_0-r))-\sigma_\varepsilon(u(t-r)))|^2 dx\,dr\right]\\
&= \left(1+\frac{1}{2\delta}\right)E\left[\int_0^{t_0}\|(\sigma_\varepsilon(u(t_0-r))-\sigma_\varepsilon(u(t-r))\|^2_{L^2(\mathbb{R})}dx\right]\longrightarrow 0
\end{aligned}
$$

quando $|t-t_0|\longrightarrow 0$, pelo Teorema da Convergência Dominada.

iii. Na demonstração deste item está a maior diferença em relação à equação aditiva. No caso anterior, quando calculamos a norma de $\mathscr{L}u(t)-\mathscr{L}v(t)$, o termo estocástico se anula, uma vez que o mesmo não depende de u. Portanto, no presente caso, temos um termo a mais para estimar. O que vale é o seguinte: Sejam u, $v\in\mathscr{A}_T$. Temos

$$\|\mathscr{L}u(t)-\mathscr{L}v(t)\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\le$$

$$
\begin{aligned}
&\leq 2\left(\left\|-\int_0^t G(t-s)\mathscr{F}^{-1}\left(\frac{\mathscr{F}((f(u))_x-(f(v))_x)}{1+\delta\xi^2}\right)ds\right\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\right.\\
&\left.+\left\|\int_0^t G(t-s)\mathscr{F}^{-1}\left(\frac{\mathscr{F}(\sigma_\varepsilon(u)-\sigma_\varepsilon(v))}{1+\delta\xi^2}\right)dW(s)\right\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\right)\\
&=2\left(\left\|\int_0^t \mathscr{F}^{-1}\left(\exp\left\{\frac{-\varepsilon\xi^2(t-s)}{1+\delta\xi^2}\right\}\frac{\mathscr{F}((f(u))_x-(f(v))_x)}{1+\delta\xi^2}\right)ds\right\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\right.\\
&\left.+\left\|\int_0^t \mathscr{F}^{-1}\left(\exp\left\{\frac{-\varepsilon\xi^2(t-s)}{1+\delta\xi^2}\right\}\frac{\mathscr{F}(\sigma_\varepsilon(u)-\sigma_\varepsilon(v))}{1+\delta\xi^2}\right)dW(s)\right\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\right)
\end{aligned}
$$

Estimaremos a esperança da segunda parcela do lado direito. Temos

$$
\begin{aligned}
&E\left[\left\|\int_0^t \mathscr{F}^{-1}\left(\exp\left\{\frac{-\varepsilon\xi^2(t-s)}{1+\delta\xi^2}\right\}\frac{\mathscr{F}(\sigma_\varepsilon(u)-\sigma_\varepsilon(v))}{1+\delta\xi^2}\right)dW(s)\right\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\right]\\
&\leq E\left[\int_0^t\int_{\mathbb{R}}\left(\mathscr{F}^{-1}\left(\exp\left\{\frac{-\varepsilon\xi^2(t-s)}{1+\delta\xi^2}\right\}\frac{\mathscr{F}(\sigma_\varepsilon(u)-\sigma_\varepsilon(v))}{1+\delta\xi^2}\right)\right)^2dxds\right]\\
&+E\left[\int_0^t\int_{\mathbb{R}}\left(\mathscr{F}^{-1}\left(\exp\left\{\frac{-\varepsilon\xi^2(t-s)}{1+\delta\xi^2}\right\}\frac{\mathscr{F}((\sigma_\varepsilon(u))_x-(\sigma_\varepsilon(v))_x)}{1+\delta\xi^2}\right)\right)^2dxds\right]
\end{aligned}
$$

usando as propriedades da transformada de Fourier e o Teorema de Plancherel

$$
\begin{aligned}
&\leq E\left[\int_0^t\int_{\mathbb{R}}\left(\exp\left\{\frac{-\varepsilon\xi^2(t-s)}{1+\delta\xi^2}\right\}\frac{\mathscr{F}(\sigma_\varepsilon(u)-\sigma_\varepsilon(v))}{1+\delta\xi^2}\right)^2dxds\right]\\
&+E\left[\int_0^t\int_{\mathbb{R}}\left(\exp\left\{\frac{-\varepsilon\xi^2(t-s)}{1+\delta\xi^2}\right\}\frac{i\xi\mathscr{F}(\sigma_\varepsilon(u)-\sigma_\varepsilon(v))}{1+\delta\xi^2}\right)^2dxds\right]
\end{aligned}
$$

por (3.9) e (3.11)

$$
\leq E\left[\left(1+\frac{1}{2\delta}\right)\int_0^t\int_{\mathbb{R}}(\mathscr{F}(\sigma_\varepsilon(u)-\sigma_\varepsilon(v))^2d\xi ds\right]
$$

usando novamente o Teorema de Plancherel e a Observação 4.1

$$
=\left(1+\frac{1}{2\delta}\right)E\left[\int_0^t\int_{\mathbb{R}}(\sigma_\varepsilon(u)-\sigma_\varepsilon(v))^2dxds\right]
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq M^2\left(1+\frac{1}{2\delta}\right)E\left[\int_0^t\int_{\mathbb{R}}(u-v)^2dxds\right]\\
&\leq M^2\left(1+\frac{1}{2\delta}\right)E\left[\int_0^t\|u(s)-v(s)\|^2_{H^1(\mathbb{R})}ds\right]\\
&\leq M^2\left(1+\frac{1}{2\delta}\right)\int_0^t\sup_{0\leq s\leq t}E\left[\|u(s)-v(s)\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\right]ds\\
&\leq TM^2\left(1+\frac{1}{2\delta}\right)\sup_{0\leq t\leq T}E\left[\|u(t)-v(t)\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\right].
\end{aligned}
$$

Assim, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\sup_{0\leq t\leq T}\sqrt{E\left[\left\|\int_0^t G(t-s)\mathscr{F}^{-1}\left(\frac{\mathscr{F}(\sigma_\varepsilon(u)-\sigma_\varepsilon(v))}{1+\delta\xi^2}\right)dW(s)\right\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\right]}\\
&\leq\sqrt{TM^2\left(1+\frac{1}{2\delta}\right)}\sup_{0\leq t\leq T}\sqrt{E\left[\|u(t)-v(t)\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\right]}.
\end{aligned}
$$

Do capítulo anterior, temos

$$
\begin{aligned}
&\sup_{0\leq t\leq T}\sqrt{E\left[\left\|-\int_0^t G(t-s)\mathscr{F}^{-1}\left(\frac{\mathscr{F}((f(u))_x-(f(v))_x)}{1+\delta\xi^2}\right)ds\right\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\right]}\\
&\leq\sqrt{TA^2\left(\frac{1}{2\delta}+\frac{1}{\delta^2}\right)}\sup_{0\leq t\leq T}\sqrt{E\left[\|u(t)-v(t)\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\right]}.
\end{aligned}
$$

Juntando as duas estimativas acima, obtemos

$$
\|\mathscr{L}u(t)-\mathscr{L}v(t)\|_{\mathscr{A}_T}<\rho\|u-v\|_{\mathscr{A}_T}\quad(\rho<1),
$$

se $T<\min\left\{\dfrac{\delta^2}{8A_n^2(\delta+2)},\dfrac{\delta}{8M_\varepsilon^2(1+2\delta)}\right\}$. ■

Observação 4.2 *Os resultados de existência local e a estimativa a priori seguem de forma análoga ao capítulo anterior. Quanto à regularidade, neste caso temos*

$$
u\in C([0,T];H^1(\mathbb{R}))\ \textit{com}\ u_t\in L^2([0,T];H^1(\mathbb{R})).
$$

4.2 Apêndice

Teorema 4.1 *O espaço*

$$\mathscr{A}_T \equiv \left\{ u \in C([0,T];H^1(\mathbb{R})); E\left[\|u(t)-G(t)u_0\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\right] \leq E\left[\|u_0\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\right],\ t \in [0,T] \right\}$$

com a norma

$$\|u\|_{\mathscr{A}_T} \equiv \sup_{0\leq t\leq T} \sqrt{E\left[\|u(t)\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\right]}$$

é de Banach.

Demonstração: Seja $(u_n) \subset \mathscr{A}_T$ tal que $\|u_n - u\|_{\mathscr{A}_T} \to 0$ quando $n \to \infty$.

Mostraremos que $u_n \to u$ em $C([0,T];H^1(\mathbb{R}))$, q.t.p. $\omega \in \Omega$.

De fato, suponhamos que existam $\varepsilon > 0$ e $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ com $P(\tilde{\Omega}) > 0$ e

$$\sup_{0\leq t\leq T} \|u_n(t,\omega) - u(t,\omega)\|_{H^1(\mathbb{R})} > \varepsilon,\ \forall \omega \in \tilde{\Omega}.$$

Então existe $s \in [0,T]$ tal que

$$\|u_n(s,\omega) - u(s,\omega)\|_{H^1(\mathbb{R})} > \frac{\varepsilon}{2},\ \forall \omega \in \tilde{\Omega}.$$

Assim

$$E\left[\|u_n(t,\omega)-u(t,\omega)\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\right] \geq \int_{\tilde{\Omega}} \|u_n(s,\omega)-u(s,\omega)\|^2_{H^1(\mathbb{R})} dP \geq \frac{\varepsilon^2}{4} P(\tilde{\Omega}),$$

o que contradiz o fato de

$$\sup_{0\leq t\leq T} \sqrt{E\left[\|u_n(t)-u(t)\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\right]} \to 0.$$

Portanto $u_n \to u$ em $C([0,T];H^1(\mathbb{R}))$ e o restante da demonstração segue como no Teorema 3.3.

■

APÊNDICE A

Medidas de Young

Os resultados aqui citados estão em [1], [20] e [22].

A.1 Definições

Definição A.1 *Sejam* $(\Omega, \mathscr{G}, P)$ *um espaço de probabilidade e* X, Y *espaços topológicos. Uma função* $f : \Omega \times X \longrightarrow Y$ *é uma* ***função de Carathéodory*** *se:*

1. *Para todo* $x \in X$*, a função* $f^x = f(\cdot, x) : \Omega \longrightarrow Y$ *é* $(P, \mathscr{B}(Y))-$*mensurável.*

2. *Para todo* $\omega \in \Omega$*, a função* $f^\omega = f(\omega, \cdot) : X \longrightarrow Y$ *é contínua.*

Definição A.2 *Seja* $(\Omega, \mathscr{G}, P)$ *um espaço de probabilidade. Um subconjunto* K *de* $L^1(\Omega)$ *é* ***uniformemente integrável*** *se*

$$\lim_{c \to \infty} \sup_{f \in K} \int_{\{|f| > c\}} |f| dP = 0,$$

ou seja, dado $\varepsilon > 0$*, existe* $c_\varepsilon > 0$ *tal que, para todo* $c > c_\varepsilon$*,* $\int_{\{|f|>c_\varepsilon\}} |f| dP \leq \varepsilon$*,* $\forall f \in K$*.*

A.2 Espaços de Medida Finita

Consideremos o espaço $L^1(\Theta, \mu, \mathbb{R})$, onde $(\Theta, \mathscr{F}, \mu)$ é um espaço de medida, e μ é uma medida positiva e finita.

A **medida de Young associada** a $u \in L^1(\Theta, \mu, \mathbb{R})$ é τ_u, a medida em $\Theta \times \mathbb{R}$ que é a imagem de μ através da aplicação

$$x \xrightarrow{\alpha} (x, u(x)).$$

Lembrando que, se $(X, \mathscr{F}, \mu)$ é um espaço de medida, $(Y, \mathscr{G})$ é um espaço mensurável e $\alpha : X \to Y$ é uma aplicação mensurável, a imagem de μ pela aplicação α é a medida ν em $\mathscr{G}$ dada por $\mu \circ \alpha^{-1}$, ou seja,

$$\nu(B) = \mu(\alpha^{-1}(B)),\ \forall\, B \in \mathscr{G}.$$

Assim, a medida de Young associada a $u \in L^1(\Theta, \mu, \mathbb{R})$ é tal que, se $A \in \mathscr{F}$ e B é um boreliano de $\mathbb{R}$, então

$$\tau_u(A \times B) = \mu(A \cap u^{-1}(B)).$$

Notemos também que, dada $\varphi : \Theta \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mensurável e não negativa ou τ_u-integrável, temos

$$\int_{\Theta \times \mathbb{R}} \varphi(x, y) d\tau_u = \int_\Theta \varphi(x, u(x)) \mu(dx).$$

Uma **medida de Young** geral é uma medida positiva τ em $\Theta \times \mathbb{R}$ tal que, para todo $A \in \mathscr{F}$, $\tau(A \times \mathbb{R}) = \mu(A)$.

Uma maneira de descrever uma medida de Young τ é pelo seu **fatiamento**, que é a única família de medidas de probabilidade em $\mathbb{R}$, $(d\tau_x)_{x \in \Theta}$, tal que, para qualquer função mensurável e não negativa ou τ-integrável ψ, temos

$$\int_{\Theta \times \mathbb{R}} \psi d\tau = \int_\Theta \left[\int_{\mathbb{R}} \psi(x, \lambda) d\tau_x(\lambda) \right] \mu(dx).$$

Portanto, se $\tau = \tau_u$ é a medida de Young associada com a função u acima, então $\tau_x = \delta_{u(x)}$, a medida de Dirac em $u(x)$. A existência de tal fatiamento é provada, por exemplo, em [7].

Outra maneira de definir medidas de Young em $\Theta \times \mathbb{R}$ é considerar a noção de processo entrópico $\tilde{\mathbf{u}}$ ou de solução a valores de medida $\mathbf{u}$, dadas, respectivamente, em [8] e [19]. Para uma medida de Young τ em $\Theta \times \mathbb{R}$, as funções $\tilde{\mathbf{u}}$ e $\mathbf{u}$ são definidas em $\Theta \times (0,1)$ por

$$\tilde{\mathbf{u}}(x,\alpha) = \sup\{t \in \mathbb{R}, \tau_x((-\infty,t)) < \alpha\}, \quad \mathbf{u}(x,\alpha) = \inf\{t \in \mathbb{R}, \tau_x((-\infty,t)) > \alpha\}. \tag{A.1}$$

Nos trabalhos citados, os autores provam que essas funções são $\mu \times \mathscr{L}$ mensuráveis em $\Theta \times (0,1)$, e, para qualquer função de Carathéodory positiva ψ,

$$\int_\Theta \int_\mathbb{R} \psi(x,\lambda) d\tau_x(\lambda)\mu(dx) = \int_\Theta \int_0^1 \psi(x,\mathbf{u}(x,\alpha)) d\alpha\mu(dx) = \int_\Theta \int_0^1 \psi(x,\tilde{\mathbf{u}}(x,\alpha)) d\alpha\mu(dx).$$

A.2.1. Convergência

Dizemos que uma sequência de medidas de Young $(\tau^n)_n$ **converge estritamente** para τ se $\int_{\Theta\times\mathbb{R}} \psi d\tau^n$ converge para $\int_{\Theta\times\mathbb{R}} \psi d\tau$, para toda função de Carathéodory limitada ψ.

Consideremos agora $(u_n)_n \subset L^1(\Theta,\mu,\mathbb{R})$, e denotemos por τ^n as medidas de Young associadas. Se a sequência $(u_n)_n$ é limitada em $L^1(\Theta,\mu,\mathbb{R})$, o Teorema de Prohorov para medidas de Young (ver, por exemplo, [22], Teorema 7, página 368) assegura que existem uma subsequência $(\tau^{n_k})_k$ de $(\tau^n)_n$ e uma medida de Young τ tais que τ^{n_k} converge estritamente para τ. Além disso ([20], página 347), temos

1. Para toda função de Carathéodory ψ tal que a sequência de funções $\{\psi(\cdot,u_n(\cdot))\}_n$ é uniformemente integrável, temos

$$\int_\Theta \psi(x,u_n)\mu(dx) \longrightarrow \int_{\Theta\times\mathbb{R}} \psi(x,\lambda) d\tau.$$

2. Se a sequência $(u_n)_n$ é uniformemente integrável, a convergência do item anterior segue se $|\psi(x,\lambda)| \leq \alpha(x) + k|\lambda|$, onde $k \geq 0$ e $\alpha \in L^1(\Theta)$.

3. Para toda função mensurável ψ, semicontínua inferiormente com relação à segunda variável e tal que $\{\psi(\cdot, u_n(\cdot))^-\}_n$ é uniformemente integrável, temos

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{\Theta} \psi(x,u_n)\mu(dx) \geq \int_{\Theta\times\mathbb{R}} \psi(x,\lambda)d\tau.$$

A.3 $[0,T]\times\mathbb{R}\times\Omega$

Consideremos agora uma sequência limitada $(u_n)_n \subset \mathcal{N}_{\omega}^2(0,T;L^2(\mathbb{R}))$. Dado $M>0$, denotemos $Q_M = (0,T)\times B(0,M)$. Então u_n é limitada em $L^2(Q_M\times\Omega)$, logo possui uma subsequência, que continuaremos a denotar por (u_n), que converge no sentido das medidas de Young para τ^M em $Q_M\times\Omega$.

Tomando $K>M$, podemos extrair uma subsequência da subsequência acima que converge no sentido das medidas de Young para τ^K em $Q_K\times\Omega$. Portanto, para quaisquer $v\in L^1(Q_M\times\Omega)$ (estendida por 0 em $(Q_K\backslash Q_M)\times\Omega$) e f uma função real contínua limitada, temos

$$\int_{Q_M\times\Omega} v\left(\int_{\mathbb{R}} f(\lambda)d\tau^M(\lambda) - \int_{\mathbb{R}} f(\lambda)d\tau^K(\lambda)\right) dxdtdP = 0.$$

Assim, $\int_{\mathbb{R}} f(\lambda)d\tau^M(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda)d\tau^K(\lambda)$ em $Q_M\times\Omega$ e $\tau^M = \tau^K$ restrita a $Q_M\times\Omega$.

Logo, por um processo diagonal de extração de subsequências, existe uma medida de Young τ em $(0,T)\times\mathbb{R}\times\Omega\times\mathbb{R}$ com a seguinte propriedade: se $\psi : (0,T)\times\mathbb{R}\times\Omega\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é tal que $\psi(\cdot,u_n)$ é uniformemente integrável, então

$$E\left[\int_0^T\int_{\mathbb{R}} \psi(\cdot,u_n)dtdx\right] \longrightarrow E\left[\int_0^T\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \psi(\cdot,\lambda)d\tau_{(t,x,\omega)}dtdx\right].$$

Antes de provar isso, vamos definir integrabilidade uniforme em um espaço de medida infinita. Uma sequência limitada $\psi(\cdot,u_n)$ em $L^1((0,T)\times\mathbb{R}\times\Omega)$ é uniformemente integrável quando:

1. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$(\mathscr{L}^2 \otimes P)(A) < \delta \Longrightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_A |\psi(\cdot, u_n)| dxdtdP < \varepsilon.$$

2. Dado $\varepsilon > 0$, existe $M_\varepsilon > 0$ tal que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{([0,T)\times R]\setminus Q_{M_\varepsilon})\times\Omega} |\psi(\cdot, u_n)| dxdtdP < \varepsilon.$$

Observação A.1 *A primeira das condições acima é equivalente à definição vista no início deste apêndice e a segunda é necessária porque estamos trabalhando com uma medida não finita, no caso a medida de Lebesgue em R^2.*

Seja $\varepsilon > 0$. Pela integrabilidade uniforme, dado $K > 0$, $|\psi(\cdot, u_n)|$ é uniformemente integrável em $Q_K \times \Omega$ e

$$\int_{Q_K\times\Omega} |\psi(\cdot, u_n)| dxdtdP \longrightarrow \int_{Q_K\times\Omega\times\mathbb{R}} |\psi| d\tau.$$

Em particular, para todo $K > M_\varepsilon$,

$$\int_{[Q_K\setminus Q_{M_\varepsilon}]\times\Omega} |\psi(\cdot, u_n)| dxdtdP \longrightarrow \int_{[Q_K\setminus Q_{M_\varepsilon}]\times\Omega\times\mathbb{R}} |\psi| d\tau,$$

e também

$$\int_{[Q_K\setminus Q_{M_\varepsilon}]\times\Omega\times\mathbb{R}} |\psi| d\tau \leq \varepsilon.$$

Assim, pelo Teorema da Convergência Monótona,

$$\int_{([(0,T)\times\mathbb{R}]\setminus Q_{M_\varepsilon})\times\Omega\times\mathbb{R}} |\psi| d\tau \leq \varepsilon.$$

Usando a notação $\mathbf{u}$, temos $\psi(\cdot, \mathbf{u}) \in L^1((0,T) \times \mathbb{R} \times \Omega \times (0,1))$ e

$$\left| \int_{(0,T)\times\mathbb{R}\times\Omega} \psi(\cdot, u_n) dxdtdP - \int_{(0,T)\times\mathbb{R}\times\Omega\times(0,1)} \psi(\cdot, \mathbf{u}) d\alpha dxdtdP \right|$$
$$\leq \left| \int_{Q_{M_\varepsilon}\times\Omega} \psi(\cdot, u_n) dxdtdP - \int_{Q_{M_\varepsilon}\times\Omega\times(0,1)} \psi(\cdot, \mathbf{u}) d\alpha dxdtdP \right|$$

$$+\int_{([(0,T)\times\mathbb{R}]\backslash Q_{M_\varepsilon})\times\Omega}|\psi(\cdot,u_n)|dxdtdP+\int_{([(0,T)\times\mathbb{R}]\backslash Q_{M_\varepsilon})\times\Omega\times(0,1)}|\psi(\cdot,\mathbf{u})|d\alpha dxdtdP.$$

Portanto,

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\int_{(0,T)\times\mathbb{R}\times\Omega}\psi(\cdot,u_n)dxdtdP-\int_{(0,T)\times\mathbb{R}\times\Omega\times(0,1)}\psi(\cdot,\mathbf{u})d\alpha dxdtdP\right|\leq 2\varepsilon.$$

Como ε é arbitrário, temos o resultado enunciado.

Suponhamos agora que $(\psi(t,x,\omega,\lambda))$ é limitada em $L^p((0,T)\times\mathbb{R}\times\Omega)$, para algum $1<p\leq\infty$. Então $\psi(\cdot,u_n)$ possui um subsequência que converge fracamente para $\int_0^1\psi(\cdot,\mathbf{u})d\alpha$ em $L^p((0,T)\times\mathbb{R}\times\Omega)$ (ou fracamente-* se $p=\infty$). Usaremos a mesma notação para a subsequência e denotaremos o limite por χ. Seja q o conjugado de p. Se $\varphi\in L^q((0,T)\times\mathbb{R}\times\Omega)$, então $(\varphi\psi(\cdot,u_n))$ é uniformemente integrável. Portanto, no limite,

$$\int_{(0,T)\times\mathbb{R}\times\Omega}\varphi\chi dxdtdP=\int_{(0,T)\times\mathbb{R}\times\Omega\times(0,1)}\psi(\cdot,\mathbf{u})d\alpha\varphi dxdtdP.$$

Assim, o limite é identificado e a subsequência não é mais necessária. Em particular, se (u_n) é uma sequência limitada em $L^p((0,T)\times\mathbb{R}\times\Omega)$, então $\mathbf{u}\in L^p((0,T)\times\mathbb{R}\times\Omega\times(0,1))$.

Referências Bibliográficas

[1] BAUZET, Caroline. *Étude d'équations aux dérivées partielles stochastiques*. Tese de Doutorado. L'Université de Pau et des Pays de Ládour. Pau, 2013.

[2] BOYER, Franck; FABRIE, Pierre. *Mathematical Tools for the Study of the Incompressible Navier-Stokes Equations and Related Models*. Applied Mathematical Sciences, v. 183. New York: Springer, 2013.

[3] BREZIS, Haim. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Universitext. New York: Springer, 2010.

[4] CHEN, Gui-Qiang; DING, Qian; KARLSEN, Kenneth H. *On Nonlinear Stochastic Balance Laws*. Arch. Rational Mech. Anal. **204**, 2012, p. 707-743.

[5] DA PRATO, Giuseppe; ZABCZYK, Jerzy. *Stochastic Equations in Infinite Dimensions*. Second Edition. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, v. 152. Cambridge: Cambridge University Press, 2014.

[6] EVANS, Lawrence C. *Partial Differential Equations*. Graduate Studies in Mathematics, v. 19. Providence: AMS, 1998.

[7] EVANS, Lawrence C. *Weak Convergence Methods for Nonlinear Partial Differential Equations*. CBMS Regional Conference Series in Math., v. 74. Providence: AMS, 1988.

[8] EYMARD, Robert; GALLOUET, Thierry; HERBIN, Raphaele. *Existence and uniqueness of the entropy solution to a nonlinear hyperbolic Equation*. Chinese Ann. Math. Ser. B **16(1)**, 1995, p. 1-14.

[9] FENG, Jin; NUALART, David. *Stochastic Scalar Conservation Laws*. J. Functional Anal. **255**, 2008, p. 313-373.

[10] FRID, Hermano. *Compacidade Compensada Aplicada às Leis de Conservação*. 19^0 Colóquio Brasileiro de Matemática. Rio de Janeiro: IMPA, 1993.

[11] KARATZAS, Ioannis; SHREVE, Steven E. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Second Edition. New York: Springer, 1991.

[12] KIM, Jong Uhn. *On a Stochastic Scalar Conservation Law*. Indiana University Mathematics Journal **52**, 2003, p. 227-256.

[13] KONDO, Cezar; WEBLER, Claudete M. *The generalized BBM-Burgers equation with nonlinear dissipative term: existence and convergence results*. Applicable Analysis: An International Journal **87**, 2009, p. 1085-1101.

[14] KONDO, Cezar; WEBLER, Claudete M. *Higher-order for the generalized BBM-Burgers equation: existence and convergence results*. Applicable Analysis: An International Journal **88**, 2009, p. 977-995.

[15] KUO, Hui-Hsiung. *Introduction to Stochastic Integration*. Universitext Baton Rouge: Springer, 2006.

[16] LU, Yun-Guang. *Cauchy Problem for an extended model of combustion*. Proceedins of the Royal Society of Edinburgh **120A**, 1992, p. 349-360.

[17] MARCATI, Pierangelo; NATALINI, Roberto. *Convergence of the pseudo-viscosity approximation for conservation laws*. Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications **23(5)**, 1994, p. 621-628.

[18] OKSENDAL, Bernt. *Stochastic Differential Equations*. 5. ed. New York: Springer-Verlag, 2000.

[19] PANOV, Yu E. *On measure-valued solutions of the Cauchy problem for a first-order quasilinear equation*. Izvestiya RAN: Ser. Math **60(2)**, 1996, p. 107-148.

[20] SAADOUNE, Mhammed; VALADIER, Michel. *Extraction of a Good Subsequence From a Bounded Sequence of Integrable Functions*. Journal of Convex Analysis **2**, 1995, p. 345-357.

[21] STRAUSS, Walter A. *On Continuity of Functions with Values in Various Banach Spaces*. Pacific Journal of Mathematics **19-3**, 1996, p. 543-551.

[22] VALADIER, Michel. *A Course on Young Measures*. Workshop on Measure Theory and Real Analysis (Italian), Grado, 1993.

[23] WEBLER, Claudete M. *Equações de BBM-Burgers Generalizadas: Resultados de Existência e Convergência de Soluções*. Tese de Doutorado. Universidade Federal de São Carlos, 2009.