

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**Estabilidade em equações de reação e difusão: interação  
entre difusibilidade e geometria em superfícies de  
revolução e um problema singularmente perturbado no  
caso de intersecção das raízes da equação degenerada**

Maicon Sônego

São Carlos - SP

Março - 2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**Estabilidade em equações de reação e difusão: interação  
entre difusibilidade e geometria em superfícies de  
revolução e um problema singularmente perturbado no  
caso de intersecção das raízes da equação degenerada**

Maicon Sônego

Tese apresentada ao PPG-M  
da UFSCar como parte dos  
requisitos para a obtenção do  
título de Doutor em Matemá-  
tica.

Orientador: Prof. Dr. Arnaldo Simal do Nascimento

São Carlos - SP

Março - 2013

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da  
Biblioteca Comunitária/UFSCar**

S698ee      Sônego, Maicon.  
Estabilidade em equações de reação e difusão : interação entre difusibilidade e geometria em superfícies de revolução e um problema singularmente perturbado no caso de intersecção das raízes da equação degenerada / Maicon Sônego. -- São Carlos : UFSCar, 2013.  
85 f.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2013.

1. Equações diferenciais parciais. 2. Equações diferenciais parciais não-lineares. 3. Equações de reação e difusão (Matemática). 4. Estabilidade linearizada. 5. Equilíbrios estáveis não-constantemente. 6. Gama-convergência. I. Título.

CDD: 515.353 (20<sup>a</sup>)

**Banca Examinadora:**



---

**Prof. Dr. Arnaldo Simal do Nascimento**  
DM – UFSCar



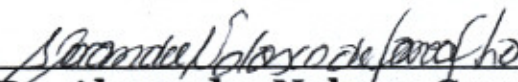
---

**Profa. Dra. Cláudia Butarello Gentile**  
DM – UFSCar



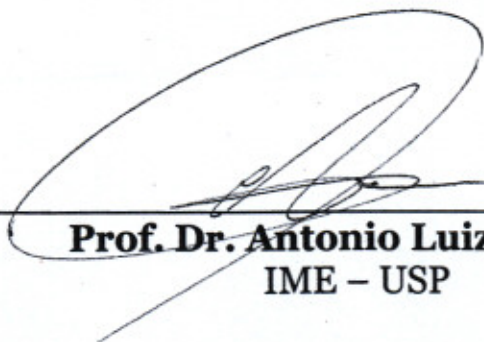
---

**Prof. Dr. Alexandre Casassola Gonçalves**  
FFCLRP – USP



---

**Prof. Dr. Alexandre Nolasco Carvalho**  
ICMC – USP



---

**Prof. Dr. Antonio Luiz Pereira**  
IME – USP

*Aos meus pais Mario e Regina.*

# Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus.

Ao meu orientador Prof. Dr. Arnaldo Simal do Nascimento, por ter me dado a oportunidade de trabalharmos juntos e por toda atenção, paciência e competência com que me orientou desde o mestrado.

Aos membros da minha banca de defesa pública, Profa. Dra. Claudia Buttarello Gentile, Prof. Dr. Alexandre Nolasco, Prof. Dr. Antônio Luis Pereira e Prof. Dr. Alexandre Casassola, pela leitura criteriosa do meu trabalho e pelas diversas sugestões e correções.

Aos membros da banca de qualificação, Profa. Dra. Claudia Buttarello Gentile e Prof. Dr. Gustavo Ferron Madeira, pelas críticas e sugestões a este trabalho.

Ao Programa de Pós-Graduação em Matemática e a todos os professores do Departamento de Matemática da Universidade Federal de São Carlos, pela minha formação e amizades conquistadas.

Agradeço a minha família, meu pai Mario, minha mãe Regina meus irmãos Mateus e Marília por toda confiança e incentivo que me deram durante o desenvolvimento desta tese.

Agradeço minha namorada Helen, o amor da minha vida, por todo carinho, apoio e companheirismo que foram fundamentais durante toda minha vida acadêmica.

A todos os amigos da pós, pela ajuda mútua que existe nas amizades, e pelos momentos de alegria e descontração que me proporcionaram durante todo o doutorado.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

# Resumo

Neste trabalho estudamos dois problemas distintos. O primeiro é um problema parabólico com difusibilidade variável sobre superfícies de revolução. O objetivo é encontrar mecanismos de interação entre a difusibilidade e a geometria do domínio que garantam a existência de soluções estacionárias estáveis não-constantes, assim como a não-existência.

O segundo é um problema de reação e difusão singularmente perturbado no caso de intersecção das raízes da equação degenerada. Provamos a existência e o perfil geométrico de quatro famílias de soluções estacionárias estáveis não-constantes.

Para os dois problemas utilizamos como recursos principais a teoria de  $\Gamma$ -convergência e técnicas de cálculo variacional.

# Abstract

In this work we study two distinct problems. The first is a parabolic problem with variable diffusivity on surfaces of revolution. The objective is to find mechanisms of interaction between the diffusivity function and the geometry of the domain ensuring the existence of stationary stable nonconstant solution as well as non-existence.

The second is a problem of reaction and diffusion singularly perturbed in the case of intersecting roots of the degenerate equation. We prove the existence and geometric profile of four families of stationary stable non-constant solutions to the parabolic equation.

In both problems the main tools used are  $\Gamma$ -convergence theory and techniques of variational calculus.



# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>13</b>
1.1 Superfícies de Revolução . . . . .	13
1.2 Funções de Variação Limitada . . . . .	15
1.2.1 O Caso Unidimensional . . . . .	19
1.3 O Teorema de Kohn e Sternberg . . . . .	20
<b>2 Padrões em Superfícies de Revolução Sem Fronteira</b>	<b>23</b>
2.1 Apresentação do Problema e Análise de Estabilidade . . . . .	23
2.2 Não-Existência de Padrões: Condição Suficiente . . . . .	26
2.3 Existência de Padrões: Condição Suficiente . . . . .	30
<b>3 Padrões em Superfícies de Revolução Com Fronteira</b>	<b>38</b>
3.1 Resultados Análogos . . . . .	38
3.2 Uma Condição Suficiente para Existência de Padrões . . . . .	40
<b>4 Sobre a Necessidade da Condição de Igualdade de Área</b>	<b>54</b>
4.1 Preliminares . . . . .	54
4.2 O Resultado Principal . . . . .	55
<b>5 Uma EDP Parabólica Singularmente Perturbada no Caso de Intersecção das Raízes da Equação Degenerada</b>	<b>59</b>
5.1 Apresentação do Problema . . . . .	59
5.2 $\Gamma$ -convergência . . . . .	62
5.3 Mínimo Local Isolado . . . . .	72
5.4 Demonstração do Teorema 5.1.1 . . . . .	77
5.5 Exemplos . . . . .	78
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>82</b>

# Lista de Figuras

1	Função $u_\epsilon$ , para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno. . . . .	8
2	Domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ tal que $\gamma \cap \partial\Omega = \emptyset$ . . . . .	9
3	Domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ tal que $\gamma \cap \partial\Omega \neq \emptyset$ . . . . .	10
1.1	Domínio de Revolução sem Fronteira . . . . .	14
1.2	Domínio de Revolução com Fronteira . . . . .	14
2.1	Comportamento das funções $f$ e $F$ . . . . .	31
2.2	Domínio $\mathcal{M}$ com um “gargalo” na altura $\chi(s_m)$ . . . . .	36
3.1	Domínio $\mathcal{D}_1$ . . . . .	39
3.2	Domínio $\mathcal{D}_2$ . . . . .	39
3.3	Domínio $\mathcal{D}_3$ . . . . .	40
3.4	Funções $a(\cdot)$ e $z(\cdot)$ . . . . .	47
3.5	Função $a(\cdot)$ e domínio de revolução $\mathcal{D}$ . . . . .	53
5.1	Função $f$ em $\Omega_a$ , $\gamma$ e $\Omega_b$ . . . . .	61
5.2	Função $F$ em $\Omega_a$ , $\gamma$ e $\Omega_b$ . . . . .	61
5.3	Comportamento das famílias $\{u_\epsilon^1\}, \dots, \{u_\epsilon^4\}$ com $\epsilon$ suficientemente pequeno e $\gamma = \{x_0\}$ . . . . .	78
5.4	Funções $a$ , $b$ e $\theta$ . . . . .	79
5.5	Domínio $\Omega = \Omega_a \cup \Omega_b \cup \gamma$ . . . . .	80

# Introdução

O objetivo desta tese é encontrar condições que garantam a existência, assim como a não-existência, de soluções estacionárias (ou soluções de equilíbrio) não-constantas estáveis de determinados problemas parabólicos. A existência de tais soluções é de extrema importância no estudo da teoria qualitativa de equações diferenciais parciais parabólicas semilineares; em particular, as equações de reação e difusão. A estrutura gradiente que, em geral, ocorre nestes tipos de problemas faz com que as soluções se aproximem de soluções estacionárias quando o tempo cresce arbitrariamente. Portanto, a dinâmica do problema está diretamente relacionada com a existência, ou não, de soluções estacionárias e suas propriedades de estabilidade.

Este trabalho aborda dois problemas de naturezas distintas, e por isso o dividimos em PROBLEMA 1 e PROBLEMA 2. Os Capítulos 2, 3 e 4 se referem ao PROBLEMA 1 enquanto que o Capítulo 5 é dedicado ao PROBLEMA 2.

## PROBLEMA 1

O PROBLEMA 1 desta tese é destinado a encontrar condições suficientes que garantam a existência, assim como a não-existência, de soluções estacionárias não-constantas e estáveis (as quais, por brevidade, chamaremos de *padrões*) para o seguinte problema de difusão:

$$u_t = \operatorname{div}(a(x)\nabla u) + f(u), \quad (x, t) \in \mathcal{M} \times \mathbb{R}^+ \quad (0.0.1)$$

onde  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$  é uma superfície de revolução sem fronteira. O caso onde o domínio é uma superfície de revolução com fronteira, o qual denotaremos por  $\mathcal{D}$ , também será tratado e sobre a fronteira consideramos condição de Neumann:

$$\left. \begin{aligned} u_t &= \operatorname{div}(a(x)\nabla u) + f(u), & (x, t) &\in \mathcal{D} \times \mathbb{R}^+ \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= 0, & (x, t) &\in \partial\mathcal{D} \times \mathbb{R}^+ \end{aligned} \right\} \quad (0.0.2)$$

sendo  $\nu$  o vetor normal unitário e exterior à  $\partial\mathcal{D}$ .

Nos modelos mais comuns de difusão a função  $a(\cdot)$  é chamada de *difusibilidade* e grosseiramente falando, mede o grau de dificuldade de mobilidade do difusor

dentro do domínio. Em geral, a difusibilidade corresponde às propriedades do material do qual a superfície é feita. Aqui, a função  $a(\cdot)$  é suave e positiva, enquanto o *termo de reação*  $f(\cdot)$  é de classe  $C^1(\mathbb{R})$  e, em alguns momentos desta tese, será considerado do tipo bi-estável.

Este tipo de problema aparece como modelo matemático em muitas áreas distintas. Uma solução desse problema pode modelar, por exemplo, a concentração de uma substância em um meio heterogêneo com o tempo evoluindo e sob efeito do termo de reação.

Nosso objetivo é encontrar mecanismos de interação entre a função de difusibilidade  $a(\cdot)$  e a geometria do domínio  $\mathcal{M}$  ou  $\mathcal{D}$ , tanto para produzir padrões para (0.0.1) e (0.0.2) como para não produzir padrões.

Existem muitos trabalhos que abordam a questão de existência, ou não, de padrões para problemas do tipo (0.0.1) e (0.0.2) em domínios limitados de  $\mathbb{R}^n$  quando a difusibilidade é constante. Os primeiros trabalhos que trataram este assunto foram [7] e [8] para problemas com condições de Neumann na fronteira, onde foi provado que, para o caso de difusibilidade constante, não existem padrões se o domínio for convexo. Em [7], foi construído um exemplo de existência de padrões em um domínio não-convexo, outro exemplo foi dado em [9].

Ainda, se  $a(\cdot)$  for uma função constante, a não-existência de padrões para (0.0.1) sobre uma variedade Riemanniana sem fronteira com curvatura de Ricci não-negativa foi provada em [17], generalizando um resultado similar sobre superfícies de revolução que aparece em [1]. No caso em que o domínio é uma superfície de revolução, os autores em [2] mostraram que não existem padrões se a soma da curvatura Gaussiana sobre cada ponto  $p$  e a curvatura geodésica do paralelo passando por  $p$ , é não-negativa.

Em domínios limitados de  $\mathbb{R}^n$ , o papel da difusibilidade quanto à existência, ou não, de padrões para problemas do tipo (0.0.1) e (0.0.2) já foi considerada por muitos autores. No caso unidimensional, isto é, quando  $\mathcal{D}$  é um intervalo, sujeito à condição de Neumann na fronteira, a condição suficiente para não-existência de padrões encontrada em [12] é  $a'' < 0$ . Uma condição um pouco mais geral que esta é encontrada em [13], a saber,  $(\sqrt{a})'' < 0$ . Em domínios com dimensão  $n \geq 2$ , este problema ainda está em aberto.

Ainda em domínios unidimensionais, a existência de funções de difusibilidade que originam padrões para (0.0.2) foi abordada em [10, 11]. Estes resultados foram generalizados para domínios com dimensão 2 em [18], e para qualquer dimensão em [16]. Citamos também [14], onde um problema com condições de fronteira de Neumann não-linear é considerado.

Agora faremos um breve resumo de nossos principais resultados. Para isto, considere uma curva suave  $C$  em  $\mathbb{R}^3$  parametrizada por

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \psi(s) \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= \chi(s) \end{aligned} \right\} \quad (0.0.3)$$

com  $s \in I := [0, l]$ , e as funções  $\psi$  e  $\chi$  de classe  $C^2(I)$ . Ainda,  $\psi > 0$  em  $(0, l)$ ,  $\psi(0) = \psi(l) = 0$  e

$$(\psi')^2 + (\chi')^2 = 1 \text{ em } I.$$

Considere também a superfície de revolução  $\mathcal{M}$ , sem fronteira, gerada ao rotacionar  $C$  em torno do eixo  $x_3$ .

- Vamos supor, ao longo de todo o texto, que a difusibilidade  $a(\cdot)$  é independente da variável angular  $\theta$  e assim, abusando da notação, denotaremos  $a(x(s, \theta)) = a(s)$ .

Uma condição suficiente para não-existência de padrões para (0.0.1) que obtemos é a seguinte:

$$K + (K_g)^2 \geq \frac{(a'\psi)'}{2a\psi} \text{ em } (0, l)$$

onde  $K$  é a curvatura Gaussiana e  $K_g$  é a curvatura geodésica de  $\mathcal{M}$ .

Em particular se

- $\mathcal{M}$  é a fronteira de um domínio convexo de  $\mathbb{R}^3$  e
- $a'\psi$  é não-crescente em  $(0, l)$

então (0.0.1) não admite padrões.

O mesmo resultado é obtido para (0.0.2) (em  $\mathcal{D}$  consideramos  $\psi(0) > 0$  e  $\psi(l) > 0$ , ou seja,  $\mathcal{D}$  possui fronteira), o que generaliza a condição encontrada em [12]. Isto pode ser visto considerando  $\psi \equiv 1$ , o que corresponde a um cilindro circular reto finito, e então a condição de não-existência de padrões seria  $a'' \leq 0$ , como encontrado em [12].

Nosso resultado também generaliza [2], onde o mesmo problema com  $a=\text{cte}$  é tratado, e a condição obtida é  $K + (K_g)^2 \geq 0$ .

Após introduzir um pequeno parâmetro  $\epsilon > 0$  na equação (0.0.1)

$$u_t = \epsilon^2 \operatorname{div}(a(x)\nabla u) + f(u), \quad (x, t) \in \mathcal{M} \times \mathbb{R}^+ \quad (0.0.4)$$

tornando-a singularmente perturbada, concluímos que uma condição suficiente para existência de padrões é

- $\sqrt{a}\psi$  possui um mínimo local isolado em  $(0, l)$ ,

desde que termo de reação  $f$  seja do tipo bi-estável e satisfaça a condição de igualdade de área, por exemplo,  $f(u) = u - u^3$ . Nestas condições, provamos a existência de uma família de soluções estacionárias não-constantes estáveis de (0.0.4),  $\{u_\epsilon\}_{0 < \epsilon \leq \epsilon_0}$  para algum  $\epsilon_0 > 0$ . Em particular, se  $a = \text{cte}$ , tal condição é satisfeita se, grosseiramente falando, a superfície  $\mathcal{M}$  possuir um “gargalo”.

O perfil geométrico das soluções também é apresentado, isto é, obtemos o comportamento assintótico, quando  $\epsilon \rightarrow 0$ , da família de padrões encontrada. Todos estes resultados permanecem válidos para o problema (0.0.2).

Além disso, para o problema (0.0.2) obtemos outra condição suficiente para existência de padrões, qual seja, se

- $\left(\frac{(a\psi)'}{\psi}\right)'(s_0) > 0$  para algum  $s_0 \in (0, l)$  e
- $a'(s) \geq 0$  em  $(0, s_0)$  e  $a'(s) \leq 0$  em  $(s_0, l)$ ,

então provamos que existe  $f \in C^1(\mathbb{R})$ , dependendo de  $a(\cdot)$  e  $\psi(\cdot)$ , tal que (0.0.2) admite padrões.

O resultado descrito acima é obtido somente em superfícies de revolução com fronteira ( $\psi(0) > 0$  e  $\psi(l) > 0$ ) e segue os passos de [13] e [2], onde um resultado mais forte é apresentado para o mesmo problema considerando  $a(\cdot)$  constante. O recente trabalho [3] aborda o mesmo caso (com  $a(\cdot)$  constante) em superfícies de revolução sem fronteira ( $\psi(0) = \psi(l) = 0$ ) e o mesmo resultado é obtido adicionando a hipótese de que  $\psi$  é uma função analítica. Nesta tese tratamos somente o caso em superfícies de revolução com fronteira, porém, acreditamos ser possível seguir os argumentos de [3] e concluir resultados análogos em superfícies de revolução sem fronteira.

Vários exemplos de superfícies de revolução e funções de difusibilidade diferentes são dados, tanto para os casos de existência de padrões quanto para os casos de não-existência.

No Capítulo 1 desta tese fixamos algumas notações e apresentamos resultados úteis para desenvolvimento do trabalho. Neste capítulo discutiremos as propriedades das superfícies de revolução, algumas ferramentas de Geometria Diferencial e também das funções de variação limitada. No Capítulo 2 apresentamos o PROBLEMA 1, um pequeno resumo acerca da teoria de estabilidade de soluções e obtemos todos os nossos resultados relativos à equação definida em uma superfície de revolução sem fronteira (o problema (0.0.1)), ou seja, estendemos o resultado de não-existência dado em [2], para o caso onde  $a(\cdot)$  é não-constante. Após introduzir um pequeno parâmetro positivo na equação (0.0.1) fornecemos condições suficientes para a existência de uma família de soluções estacionárias estáveis  $\{v_\epsilon\}_{0 < \epsilon \leq \epsilon_0}$  e seu comportamento assintótico. Este último resultado é obtido por meio da técnica de  $\Gamma$ -convergência

No Capítulo 3 trabalhamos com o problema (0.0.2) e, além de apresentar os resultados análogos àqueles feitos no Capítulo 2, conseguimos outra condição suficiente para existência de padrões. Como já dito, a demonstração segue os argumentos e técnicas utilizados em [13] e que também foram usados quando  $a=\text{cte}$  em [2].

A família de padrões obtida na Seção 2.3 desenvolve camada de transição interna, isto é, existem constantes  $\alpha < \beta$  tais que as soluções  $\{v_\epsilon\}$  saltam, quando  $\epsilon \rightarrow 0$ , de valores próximos de  $\alpha$  para valores próximos de  $\beta$  através de uma curva, a chamada camada de transição interna. Para tal resultado é assumido que o termo de reação  $f(\cdot)$  satisfaz a condição de igualdade de área, a saber,

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\xi) d\xi = 0.$$

Finalmente, no Capítulo 4 provamos que, de fato, a condição de igualdade de área sobre  $f(\cdot)$  é uma condição necessária para a família de padrões desenvolver camada de transição interna.

O trabalho [15] é resultado do PROBLEMA 1 desta tese.

## PROBLEMA 2

Equações diferenciais cujas derivadas de maior ordem aparecem multiplicadas por um parâmetro positivo pequeno são chamadas equações diferenciais singularmente perturbadas. Tais problemas modelam, em geral, processos com diferentes escalas no tempo e/ou espaço. Exemplos de problemas similares aos estudados nesta tese com aplicações em bioquímica, hidrodinâmica e dinâmica populacional onde duas ou mais espécies interagem em um sistema altamente competitivo, podem ser encontrados em [37, 38, 42], e em suas referências.

O PROBLEMA 2 estuda uma equação parabólica singularmente perturbada com condições de Neumann na fronteira. Antes de enunciar formalmente o problema e apresentar os resultados obtidos, vamos entender em que “ambiente” tal problema está inserido. Como referência geral, citamos o survey [37].

Considere o seguinte problema singularmente perturbado:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon^2 \Delta u + f(u, x) &= 0 & x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) &= 0 & x \in \partial\Omega \end{aligned} \right\} \quad (0.0.5)$$

sendo  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ( $n \geq 1$ ) um conjunto aberto, limitado e com fronteira suave,  $\epsilon$  um pequeno parâmetro positivo,  $\nu$  o vetor normal exterior a  $\partial\Omega$  e  $f$  uma função duas vezes continuamente diferenciável.

O interesse no problema acima está relacionado à existência de soluções, ao comportamento assintótico com respeito a  $\epsilon$ , e à estabilidade (no sentido de Lya-

punov) das soluções quando vistas como soluções estacionárias do correspondente problema parabólico, a saber

$$\left. \begin{aligned} u_t &= \epsilon^2 \Delta u + f(u, x) & (x, t) &\in \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) &= 0 & x &\in \partial\Omega \times \mathbb{R}^+. \end{aligned} \right\} \quad (0.0.6)$$

Neste contexto o método de sub e super-solução aparece com destaque. As funções  $\underline{U}_\epsilon$  e  $\overline{U}_\epsilon$  são chamadas *sub-solução* e *super-solução* do problema (0.0.5), respectivamente, se satisfazem as três condições abaixo:

- (i)  $\underline{U}_\epsilon \leq \overline{U}_\epsilon, x \in \Omega;$
- (ii)  $\epsilon^2 \Delta \underline{U}_\epsilon + f(\underline{U}_\epsilon, x) \geq 0$  e  $\epsilon^2 \Delta \overline{U}_\epsilon + f(\overline{U}_\epsilon, x) \leq 0, x \in \Omega;$
- (iii)  $\frac{\partial \underline{U}_\epsilon}{\partial \nu}(x) \geq 0, \frac{\partial \overline{U}_\epsilon}{\partial \nu}(x) \leq 0, x \in \partial\Omega.$

É bem conhecido (veja [36], por exemplo) que se existem sub-solução e super-solução para o problema (0.0.5), então existe uma solução  $U_\epsilon(x)$  satisfazendo

$$\underline{U}_\epsilon \leq U_\epsilon(x) \leq \overline{U}_\epsilon \quad \forall x \in \Omega.$$

Além da existência de soluções, tal método é muito utilizado no estudo da unicidade local da solução e também para investigar sua estabilidade na dinâmica do problema parabólico. Portanto, fica clara a importância e o interesse no estudo de condições para que tenhamos garantia da existência de sub e super-solução para o problema (0.0.5).

As seguintes equações relacionadas ao problema (0.0.5) têm grande importância nesta questão,

$$f(u, x) = 0, \quad (0.0.7)$$

chamada *equação degenerada* e

$$\frac{d^2 u}{d^2 \xi} = f(u, x), \quad (0.0.8)$$

chamada *equação associada*, sendo  $x$  considerado como um parâmetro. Assuma que a equação degenerada (0.0.7) possua uma raiz  $u = \phi(x)$  satisfazendo

$$\partial_1 f(\phi(x), x) < 0, \quad \forall x \in \overline{\Omega}. \quad (0.0.9)$$

Note que esta condição implica que a raiz  $u = \phi(x)$  é isolada. Além disso, a solução  $u = \phi(x)$  da equação degenerada corresponde a uma família de soluções de equilíbrio da equação associada (0.0.8). Um ponto de equilíbrio de



(0.0.8)  $u = \tilde{u}(x)$  é dito ser *estável* (*instável*) se a desigualdade  $\partial_1 f(\tilde{u}(x), x) < 0$  ( $\partial_1 f(\tilde{u}(x), x) > 0$ ) ocorre em  $\Omega$ . A condição (0.0.9) garante que  $u = \phi(x)$  é uma solução de equilíbrio estável de (0.0.8).

Nestas condições, o método de sub e super-solução garante que existe uma família de soluções de (0.0.5),  $\{u_\epsilon\}_{0 < \epsilon \leq \epsilon_0}$  para algum  $\epsilon_0 > 0$ , tal que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} u_\epsilon(x) = \phi(x), \quad x \in \Omega.$$

A prova deste resultado é bem conhecida (veja [37, 44]), e usa de maneira crucial o fato de que a raiz  $u = \phi(x)$  da equação degenerada é isolada, isto é, satisfaz (0.0.9).

Situações de mesma natureza, ou seja, quando a raiz da equação degenerada é isolada, aparecem também em sistemas de equações diferenciais ordinárias, ou parciais, singularmente perturbados. Neste contexto têm destaque os trabalhos de A. N. Tikhonov sobre o comportamento assintótico das soluções (veja [37, 46, 47], por exemplo).

O PROBLEMA 2 desta tese estuda um problema no qual a condição (0.0.9) é violada. Muitos trabalhos seguindo esta direção têm aparecido nos últimos anos, por isso, fazemos aqui um breve relato da técnica utilizada e dos resultados obtidos.

Considere o problema (0.0.6) com  $n = 1$  (então  $\Omega = (0, 1)$ , por exemplo) e assumamos as seguintes hipóteses sobre  $f$ :

( $H_1$ ) A função  $f(u, x)$  admite duas raízes  $u(x) = \phi_1(x)$  e  $u = \phi_2(x)$ , isto é,

$$f(\phi_1(x), x) = f(\phi_2(x), x) = 0, \quad \forall x \in \Omega,$$

tais que

- $\phi_1(x) > \phi_2(x)$  se  $x \in (0, x_0)$ ,
- $\phi_1(x) < \phi_2(x)$  se  $x \in (x_0, 1)$  e
- $\phi_1(x_0) = \phi_2(x_0)$ .

A hipótese acima diz que as raízes de  $f$  se intersectam em  $x_0$ , e então

$$\partial_1 f(\phi_1(x_0), x_0) = \partial_1 f(\phi_2(x_0), x_0) = 0 \tag{0.0.10}$$

ou seja, não ocorre a condição (0.0.9). A partir daí, a seguinte hipótese é assumida a fim de encontrar condições para aplicação do método de sub e super-solução:

( $H_2$ )

$$\partial_1 f(\phi_1(x), x) < 0 \quad \text{e} \quad \partial_1 f(\phi_2(x), x) > 0, \quad \forall x \in (0, x_0)$$

e

$$\partial_1 f(\phi_1(x), x) > 0 \quad \text{e} \quad \partial_1 f(\phi_2(x), x) < 0, \quad \forall x \in (x_0, 1).$$

A hipótese  $(H_2)$  implica que as soluções de equilíbrio  $u(x) = \phi_1(x)$  e  $u = \phi_2(x)$ , da equação associada (0.0.8), mudam seus tipos de estabilidade ao passar por  $x_0$ . Esta é a razão que faz tal teoria ser chamada de *problemas singularmente perturbados no caso de mudança de estabilidade*. Esta nova noção foi proposta em [39] e em geral os autores seguem os seguintes passos para obter a existência e o comportamento assintótico das soluções. Primeiramente a seguinte função é considerada:

$$\phi(x) = \begin{cases} \phi_1(x), & x \in [0, x_0] \\ \phi_2(x), & x \in [x_0, 1], \end{cases} \quad (0.0.11)$$

esta função é chamada *raiz composta estável* da equação degenerada  $f(u, x) = 0$  ( $\partial_1 f(\phi(x), x) < 0$  para  $x \neq x_0$ ). Note que, em geral,  $\phi$  não é suave em  $x_0$ . Além de  $(H_1)$  e  $(H_2)$ , as seguintes hipóteses são assumidas:

$$(H_3) \quad \partial_1^2 f(\phi(x_0), x_0) > 0;$$

$$(H_4) \quad \partial_1 f(\phi(x), x) \geq m |x - x_0|, \quad \forall x \in [0, 1], \text{ onde } m \text{ é um número positivo.}$$

A função  $f(u, x) = (u - \phi_1(x))(u - \phi_2(x))$  é um exemplo que satisfaz  $(H_2)$  –  $(H_4)$ , desde que  $\phi_1$  e  $\phi_2$  satisfaçam  $(H_1)$ .

Nestas condições, com a técnica de expansão assintótica e um refinamento no método de construir as sub e super-soluções, é possível concluir que o problema (0.0.5) admite uma família de soluções,  $\{u_\epsilon\}_{0 < \epsilon \leq \epsilon_0}$  para algum  $\epsilon_0 > 0$ , tal que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} u_\epsilon(x) = \phi(x) \quad \forall x \in (0, 1). \quad (0.0.12)$$

Veja a ilustração abaixo:

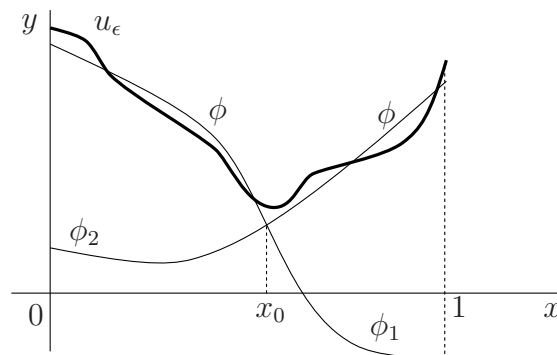


Figura 1: Função  $u_\epsilon$ , para  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno.

O resultado acima pode ser visto em [37, 44]. Obviamente, o mesmo problema pode ser proposto em dimensões maiores. Para  $n = 2$ , as raízes da equação

degenerada  $\phi_1(x)$  e  $\phi_2(x)$  se intersectam em uma curva suave  $\gamma$  (tal que  $\partial\Omega \cap \gamma = \emptyset$ ) que divide  $\Omega$  em duas componentes suaves e conexas  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  e assim, com hipóteses análogas a  $(H_2) - (H_4)$  obtêm-se os mesmos resultados [37, 40, 42]. Um problema similar com  $n \geq 2$  é abordado em [38] onde os autores consideram como domínio a bola unitária e  $f(u, x) = -(u - a(|x|))(u - b(|x|))$ , ou seja, as raízes da equação degenerada são funções radiais. Para sistemas de equações diferenciais singularmente perturbados no caso de mudança de estabilidade, citamos [37, 41].

Os resultados obtidos pelo método discutido acima limitam-se às dimensões  $n = 1$  e  $n = 2$  (exceto [38] onde um caso especial é tratado, como mencionado anteriormente). Além disso, a hipótese de que a curva  $\gamma$ , ou seja, a curva de intersecção das raízes da equação degenerada, não intersecta a fronteira do domínio  $\Omega$  é fundamental, como pode ser visto em [37]. Veja a ilustração abaixo:

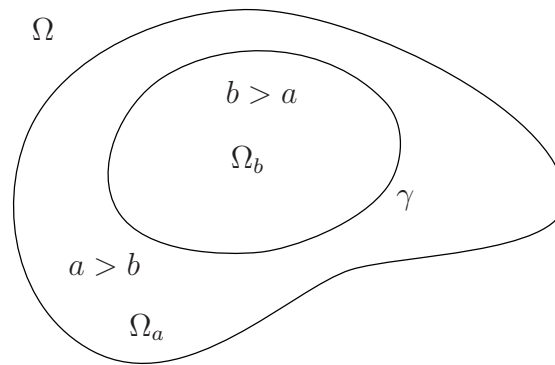


Figura 2: Domínio  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  tal que  $\gamma \cap \partial\Omega = \emptyset$ .

Poucos trabalhos estudam a estabilidade (no sentido de Lyapunov) das soluções encontradas. De fato, em [37] os autores declaram a importância de tais resultados e a dificuldade de obtê-los. Veja por exemplo [38] onde o domínio é uma bola unitária e as raízes são radiais. Em [43] resultados de estabilidade são obtidos assumindo certo comportamento periódico de  $f$ , e em [45] o problema (0.0.6) é estudado com  $n = 1$ .

Como já dito, o problema abordado nesta tese (veja (0.0.13), abaixo) viola a condição (0.0.9), pois por hipótese, as raízes da equação degenerada se intersectam (veja condição  $(f_1)$ ) e portanto não são isoladas, porém, como veremos adiante, não podemos dizer que é um caso de mudança de estabilidade. Nossos resultados não limitam a dimensão do domínio, ou seja, consideramos  $n \geq 1$ . Todas as soluções encontradas são estáveis no sentido de Lyapunov, e ainda, nosso método permite que  $\gamma$  intercepte a fronteira de  $\Omega$ . Veja a figura seguinte que ilustra esta situação.

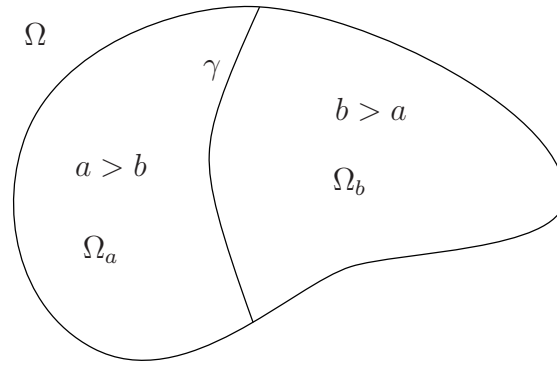


Figura 3: Domínio  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  tal que  $\gamma \cap \partial\Omega \neq \emptyset$ .

Finalmente, descrevemos nosso problema e os resultados obtidos. Considere a seguinte equação parabólica singularmente perturbada e condições de Neumann na fronteira:

$$\left. \begin{aligned} u_t(x) &= \epsilon^2 \operatorname{div}(k(x)\nabla u(x)) + f(u, x) & x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) &= 0 & x \in \partial\Omega \end{aligned} \right\} \quad (0.0.13)$$

sendo  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ( $n \geq 1$ ) um conjunto aberto, limitado e com fronteira suave,  $\epsilon$  um pequeno parâmetro positivo e  $\nu$  o vetor normal exterior a  $\partial\Omega$ . A função de difusibilidade  $k(\cdot)$  é suave e estritamente positiva.

Vale ressaltar que todos os trabalhos relacionados ao fenômeno de mudança de estabilidade assumem, por conveniência do método utilizado, difusibilidade constante. Como sabemos, e inclusive já vimos no PROBLEMA 1 desta tese, a difusibilidade desempenha importante papel quanto à existência, ou não, de soluções estacionárias estáveis de problemas parabólicos. Como ficará claro, nossos resultados são independentes do comportamento de  $k(\cdot)$  o que se estabelece como outra importante contribuição desta tese.

A função  $f(\cdot)$  é de classe  $C^1$  e satisfaz as hipóteses apresentadas abaixo.

( $f_1$ ) Existem uma subvariedade  $(n-1)$ -dimensional  $\gamma \subset \Omega$  dividindo  $\Omega$  em duas componentes conexas denominadas  $\Omega_a$  e  $\Omega_b$ , tais que as fronteiras  $\partial\Omega_a$  e  $\partial\Omega_b$  são de Lipschitz, e três funções  $\theta, a, b \in C^1(\overline{\Omega})$  que são raízes de  $f$ , ou seja,

$$f(a(x), x) = f(b(x), x) = f(\theta(x), x) = 0, \quad \forall x \in \Omega.$$

Além disso,

- $a > \theta > b$  em  $\Omega_a$
- $b > \theta > a$  em  $\Omega_b$
- $a = \theta = b$  em  $\gamma$ .

- (f<sub>2</sub>)
- $\partial_1 f(a(x), x) < 0, \quad \forall x \in (\Omega \setminus \gamma),$
  - $\partial_1 f(b(x), x) < 0, \quad \forall x \in (\Omega \setminus \gamma).$

(f<sub>3</sub>)

$$\int_{\min\{a(x), b(x)\}}^{\max\{a(x), b(x)\}} f(\xi, x) \, d\xi = 0, \quad \forall x \in \Omega$$

(condição de igualdade de área).

(f<sub>4</sub>) Existem constantes positivas  $c_1, c_2$  e  $s_0$  e um número  $p \geq 2$  tal que

$$c_1 |s|^p \leq F(s, x) \leq c_2 |s|^p,$$

para todo  $s$  satisfazendo  $|s| \geq s_0$ , onde

$$F(u, x) = \begin{cases} - \int_{b(x)}^u f(\xi, x) \, d\xi, & x \in \Omega_a \\ 0, & x \in \gamma \\ - \int_{a(x)}^u f(\xi, x) \, d\xi, & x \in \Omega_b. \end{cases} \quad (0.0.14)$$

A hipótese (f<sub>1</sub>) diz que

$$\partial_1 f(a(x), x) = \partial_1 f(b(x), x) = 0, \quad \forall x \in \gamma,$$

ou seja, as raízes  $a(x)$  e  $b(x)$  da equação degenerada  $f(u, x) = 0$  não são isoladas.

A hipótese (f<sub>2</sub>) confirma que não estamos em um caso de mudança de estabilidade.

Precisamos ainda que a função  $F$  seja do tipo *poço duplo*, por isso, além de (f<sub>1</sub>) e (f<sub>2</sub>) assumimos que  $f(\cdot)$  satisfaz a condição de igualdade de área (f<sub>3</sub>). A hipótese (f<sub>4</sub>) é necessária para controlarmos o crescimento da função  $F$ .

A função  $f(u, x) = (u - a(x))(u - b(x))(u - \theta(x))$  com  $\theta(x) = \left(\frac{a(x) + b(x)}{2}\right)$ , é o mais simples exemplo que satisfaz (f<sub>2</sub>) – (f<sub>4</sub>), desde que  $a, b$  e  $\theta$  satisfaçam (f<sub>1</sub>). Note que quando  $b(x) = -a(x)$ , temos  $\theta(x) \equiv 0$ .

Com as hipóteses acima provamos a existência de quatro famílias de soluções estacionárias e estáveis de (0.0.13):

$$\{u_\epsilon^1\}_{0 < \epsilon \leq \epsilon_0}, \dots, \{u_\epsilon^4\}_{0 < \epsilon \leq \epsilon_0},$$

para algum  $\epsilon_0 > 0$ , tais que

- $|u_\epsilon^1 - u_0^1|_{L^1(\Omega)} \rightarrow 0$  quando  $\epsilon \rightarrow 0$ , sendo  $u_0^1(x) = a(x)\chi_{\Omega_a}(x) + b(x)\chi_{\Omega_b}(x)$ ;
- $|u_\epsilon^2 - u_0^2|_{L^1(\Omega)} \rightarrow 0$  quando  $\epsilon \rightarrow 0$ , sendo  $u_0^2(x) = b(x)\chi_{\Omega_a}(x) + a(x)\chi_{\Omega_b}(x)$ ;

- $|u_\epsilon^3 - u_0^3|_{L^1(\Omega)} \rightarrow 0$  quando  $\epsilon \rightarrow 0$ , sendo  $u_0^3(x) = a(x)$ ;
- $|u_\epsilon^4 - u_0^4|_{L^1(\Omega)} \rightarrow 0$  quando  $\epsilon \rightarrow 0$ , sendo  $u_0^4(x) = b(x)$ .

Nos problemas que ocorrem intersecção das raízes da equação degenerada e mudança de estabilidade, o comportamento assintótico da família de soluções é dada de maneira pontual (veja (0.0.12)), enquanto que no nosso caso conseguimos na topologia  $L^1(\Omega)$ . Porém, além de conseguirmos a existência, o comportamento assintótico quando  $\epsilon \rightarrow 0$ , e principalmente a estabilidade de quatro famílias de soluções estacionárias de (0.0.13), nosso método não restringe a dimensão do domínio, não exclui a possibilidade de  $\gamma$  interceptar a fronteira de  $\Omega$  e considera o termo de difusibilidade não-constante.

A apresentação do problema e todos os detalhes dos resultados discutidos acima, são o conteúdo do Capítulo 5.

# Capítulo 1

## Preliminares

Este capítulo é dedicado a apresentar as principais definições e alguns resultados conhecidos que serão úteis no decorrer deste trabalho. Desde já, a menos que seja dito o contrário, chamaremos de *domínio* todo subconjunto  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 1$ ), que seja limitado, aberto, conexo e com fronteira suficientemente suave.

### 1.1 Superfícies de Revolução

O PROBLEMA 1 desta tese se refere a equações diferenciais parabólicas definidas em superfícies de revolução. Nesta seção definiremos estes domínios e veremos algumas de suas propriedades.

Sejam  $C$  uma curva em  $\mathbb{R}^3$  parametrizada por

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \psi(s) \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= \chi(s) \end{aligned} \right\} \quad (1.1.1)$$

com  $s \in I := [0, l]$ , e as funções  $\psi$  e  $\chi$  de classe  $C^2(I)$ . Ainda,  $\psi > 0$  em  $(0, l)$  e

$$(\psi')^2 + (\chi')^2 = 1 \text{ em } I. \quad (1.1.2)$$

Por simplicidade, vamos supor ainda que

$$\chi' \geq 0 \text{ em } (0, 0 + \epsilon) \cup (l - \epsilon, l), \quad (1.1.3)$$

para algum  $\epsilon > 0$ .

Seja  $\mathcal{M}$  a superfície de revolução de  $\mathbb{R}^3$  obtida através da revolução da curva  $C$  em torno do eixo  $x_3$ . Assim,  $\mathcal{M}$  é parametrizada por

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \psi(s) \cos(\theta) \\ x_2 &= \psi(s) \operatorname{sen}(\theta) \\ x_3 &= \chi(s) \end{aligned} \right\} \quad (1.1.4)$$

com  $(s, \theta) \in I \times [0, 2\pi)$ .

Separamos nosso problema em dois casos:

- *Caso 1:* Considere  $\psi(0) = \psi(l) = 0$ , então  $\mathcal{M}$  não possui fronteira. Neste caso tomamos  $\psi'(0) = -\psi'(l) = 1$ , uma vez que sempre assumimos que  $\mathcal{M}$  e a métrica Riemannian  $g$  (a ser definida adiante) definida sobre  $\mathcal{M}$  são suaves (veja [6]). Este caso é tratado no Capítulo 2.

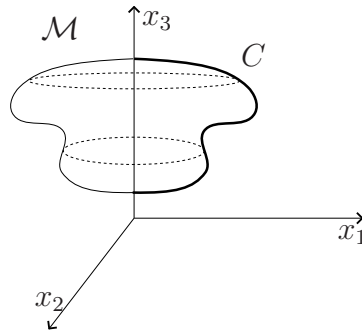


Figura 1.1: Domínio de Revolução sem Fronteira

- *Caso 2:* Considere  $\psi(0) > 0$  e  $\psi(l) > 0$ , então  $\mathcal{M}$  é uma superfície de revolução com fronteira  $\partial\mathcal{M}$ . Temos que  $\partial\mathcal{M} = \gamma_0 \cup \gamma_l$  onde  $\gamma_0$  e  $\gamma_l$  são duas circunferências parametrizadas com coordenadas locais  $(s, \theta)$  por

$$\gamma_0 : \begin{cases} s(t) = 0 \\ \theta(t) = t \end{cases} \quad \text{e} \quad \gamma_l : \begin{cases} s(t) = l \\ \theta(t) = t \end{cases}$$

com  $t \in [0, 2\pi)$ . Este é o caso que será tratado no Capítulo 3.

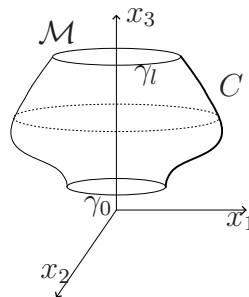


Figura 1.2: Domínio de Revolução com Fronteira

A superfície de revolução  $\mathcal{M}$ , com parametrização (1.1.4), é uma variedade Riemanniana 2-dimensional com a métrica em coordenadas locais dada por (usando



notação de Einstein)

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j, \quad (g^{ij}) = (g_{ij}^{-1}), \quad |g| = \det(g_{ij}).$$

O elemento de área sobre  $\mathcal{M}$  é

$$d\sigma = \sqrt{|g|} dx^1 dx^2$$

e  $d\gamma$  denota o elemento de comprimento de arco sobre  $\mathcal{M}$ .

Dado um campo vetorial suave  $X$  sobre  $\mathcal{M}$ , o operador divergente de  $X$  é definido como

$$\operatorname{div}_g X = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{|g|} X^i), \quad (1.1.5)$$

e o gradiente Riemanniano, denotado por  $\nabla_g \phi$ , de uma função real  $\phi$  suficientemente suave definida em  $\mathcal{M}$ , é dado por

$$(\nabla_g \phi)^i = g^{ij} \partial_j \phi. \quad (1.1.6)$$

Na Seção 2.1 veremos como o operador divergente  $\operatorname{div}_g(a(x)\nabla_g u)$  pode ser expresso na superfície de revolução  $\mathcal{M}$  com coordenadas  $x^1 = s$ ,  $x^2 = \theta$  quando a função  $a(\cdot)$  é independente da variação angular  $\theta$ .

Temos ainda que, sob estas condições, a *curvatura Gaussiana*  $K$  de  $\mathcal{M}$  é dada por

$$K(s) = \frac{-\psi''}{\psi}(s) \quad (1.1.7)$$

com  $s \in (0, l)$  e, para referência futura, a quantidade

$$\frac{\pm\psi'}{\psi}(s) \quad (1.1.8)$$

representa a *curvatura geodésica*  $K_g$  dos paralelos  $s = \text{cte}$  sobre  $\mathcal{M}$ . Aqui o sinal de  $K_g$  depende da orientação da parametrização. Para mais detalhes sugerimos [6, 26, 29], por exemplo.

## 1.2 Funções de Variação Limitada

Todas as definições e resultados dessa seção podem ser encontradas em [22, 25, 27], por exemplo.

**Definição 1.2.1.** Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto aberto e limitado com fronteira Lipschitz e  $u \in L^1(\Omega)$ , então dizemos que  $u$  possui *variação limitada* se

$$\int_{\Omega} |Du| := \sup \left\{ \int_{\Omega} u \operatorname{div} g \, dx : g \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^n), \quad |g| \leq 1 \right\} < \infty.$$

Se uma função  $u$  possui variação limitada então o gradiente de  $u$ ,  $Du$ , no sentido das distribuições, define uma medida de Radon com *variação total* finita em  $\Omega$  dada por

$$|Du|(\Omega) = \int_{\Omega} |Du|.$$

A variação total  $|Du|$  é, por si só, uma medida de Radon.

**Definição 1.2.2.** Definimos o conjunto  $BV(\Omega)$  como sendo o conjunto das funções  $u \in L^1(\Omega)$  com variação limitada. Tal conjunto munido com a norma

$$|u|_{BV(\Omega)} = |u|_{L^1(\Omega)} + |Du|(\Omega)$$

é um espaço de Banach.

Se  $u \in BV(\Omega)$ , a integral de qualquer função contínua e não-negativa  $h$ , com respeito à medida  $|Du|$  pode ser expressa por (veja [23], por exemplo)

$$\int_{\Omega} h(x) |Du| = \sup \left\{ \int_{\Omega} u \operatorname{div} g \, dx : g \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^n), \quad |g| \leq h \right\}. \quad (1.2.1)$$

Dentre as muitas propriedades envolvendo as funções de variação limitada que podem ser vistas nas referências desta seção, destacamos a existência do operador traço

$$T : BV(\Omega) \rightarrow L^1(\Omega)$$

que é linear e limitado, e também o seguinte teorema de extensão

**Teorema 1.2.3.** *Sejam  $U$  e  $\Omega$  subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$  abertos, limitados e com fronteira Lipschitz tal que  $U \subset \Omega$ . Seja  $u_1 \in BV(U)$  e  $u_2 \in BV(\Omega \setminus \bar{U})$ . Defina*

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} u_1(x), & x \in U \\ u_2(x), & x \in \Omega \setminus \bar{U}. \end{cases}$$

Então  $\bar{u} \in BV(\Omega)$ .

O teorema acima aparece em [22] com  $\Omega = \mathbb{R}^n$ , uma demonstração análoga pode ser feita considerando  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um subconjunto próprio, aberto e com fronteira Lipschitz.

**Definição 1.2.4.** Seja  $A$  um conjunto de Borel contido em um subconjunto aberto  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$ , definimos o *perímetro de  $A$  em  $\Omega$*  como sendo

$$\text{Per}_\Omega A := |D\chi_A|(\Omega),$$

onde  $\chi_A$  representa a função característica relativa ao conjunto  $A$ ,

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Se  $\text{Per}_\Omega A < \infty$  então dizemos que  $A$  possui *perímetro finito*. Quando  $\Omega = \mathbb{R}^n$  denotaremos  $\text{Per}_{\mathbb{R}^n} A$  simplesmente por  $\text{Per} A$ .

Ao longo deste trabalho será de imensa importância o uso da medida de Hausdorff  $n$ -dimensional  $\mathcal{H}^n$ . Para a sua definição e suas propriedades recomendamos [22, 27]. As próximas duas proposições podem ser encontradas em [22, 27] e [25] respectivamente.

**Proposição 1.2.5.**  $\mathcal{H}^n$  coincide com a medida de Lebesgue  $\mathcal{L}^n$  em conjuntos  $\mathcal{L}^n$ -mensuráveis.

**Proposição 1.2.6.** Sejam  $A \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto limitado com fronteira  $C^2$  e  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto. Então

$$\text{Per}_\Omega A = \mathcal{H}^{n-1}(\partial A \cap \Omega).$$

Estabeleceremos agora a *desigualdade isoperimétrica clássica* para conjuntos de perímetro finito e também uma versão local, chamada *desigualdade isoperimétrica relativa*.

**Teorema 1.2.7.** Seja  $E \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto limitado de perímetro finito. Então existe uma constante  $c = c(n)$  tal que

$$\mathcal{H}^n(E)^{(n-1)/n} \leq c \text{Per} E.$$

Ainda, para cada bola  $B(r) \subset \mathbb{R}^n$ ,

$$\min \{ \mathcal{H}^n(B(r) \cap E), \mathcal{H}^n(B(r) \setminus E) \}^{(n-1)/n} \leq c \text{Per}_{B(r)}(E).$$

**Definição 1.2.8.** Dizemos que um conjunto boreliano  $A$  é de *Caccioppoli* se  $\text{Per}_\Omega A < \infty$  para todo conjunto limitado  $\Omega$ .

**Definição 1.2.9.** Seja  $A$  um conjunto de Caccioppoli, dizemos que  $x \in \partial_* A$ , a

fronteira de medida teórica de  $A$  se

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}^n(B(x, r) \cap A)}{r^n} > 0,$$

e

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}^n(B(x, r) \setminus A)}{r^n} > 0.$$

Pelo Teorema Gauss-Green Generalizado que pode ser visto na página 209 de [22], temos que

$$|D\chi_A| = \mathcal{H}^{n-1} \llcorner \partial_* A, \quad (1.2.2)$$

ou seja, para todo aberto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

$$\text{Per}_\Omega A = \mathcal{H}^{n-1}(\partial_* A \cap \Omega). \quad (1.2.3)$$

A proposição abaixo é uma versão da fórmula de co-área e será de extrema importância neste trabalho

**Proposição 1.2.10.** *Dados  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  aberto,  $u \in BV(\Omega)$  e  $f$  uma função contínua em  $\Omega$ , temos que*

$$\int_\Omega f |Du| = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{\Omega \cap \partial_* \{x \in \Omega : u(x) > \xi\}} f \, d\mathcal{H}^{n-1} \right] d\xi.$$

Denotamos por  $A \Delta B$  a diferença simétrica entre os conjuntos  $A$  e  $B$ , ou seja,

$$A \Delta B = (B^c \cap A) \cup (A^c \cap B).$$

**Lema 1.2.11.** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto limitado, aberto e com fronteira Lipschitz. Seja  $A \subset \Omega$  um subconjunto de perímetro finito em  $\Omega$  e  $0 < \mathcal{L}^n(A) < \mathcal{L}^n(\Omega)$ . Então existe uma sequência de abertos  $A_j$  tal que*

- (i)  $\partial A_j$  é de classe  $C^2$ ,
- (ii)  $\mathcal{L}^n((A_j \cap \Omega) \Delta A) \rightarrow 0$  quando  $j \rightarrow \infty$ ,
- (iii)  $\text{Per}_\Omega A_j \rightarrow \text{Per}_\Omega A$  quando  $j \rightarrow \infty$ ,
- (iv)  $\mathcal{H}^{n-1}(\partial A_j \cap \partial \Omega) = 0$ ,
- (v)  $\mathcal{L}^n(A_j \cap \Omega) = \mathcal{L}^n(A)$ , para  $j$  suficientemente grande.

### 1.2.1 O Caso Unidimensional

A noção clássica de variação limitada para funções reais de variável real usa de maneira essencial a ordenação de  $\mathbb{R}$ , razão pela qual não é diretamente generalizável a dimensões mais altas. Veja abaixo tal definição.

**Definição 1.2.12.** Sejam  $f$  uma função real de variável real e  $a < b$  dois números reais. A *variação de  $f$  no intervalo  $[a, b]$*  é dada por

$$\text{var}_a^b(f) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})| : n \in \mathbb{N}, a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b \right\}.$$

Uma função  $f$  diz-se de *variação limitada* se existir uma constante  $C > 0$  tal que  $\text{var}_a^b(f) \leq C$  quaisquer que sejam  $a < b$ , definindo-se a *variação de  $f$*  como

$$\text{var}(f) = \sup \{ \text{var}_a^b(f) : a < b \in \mathbb{R} \}.$$

Esta definição de variação limitada é muito conhecida e frequentemente utilizada para funções  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Entretanto, torna-se inviável quando o estudo envolve conceitos que se mantêm inalterados quando se alteram valores da função em questão em conjuntos de medida nula. Esta limitação da definição clássica de variação limitada é eliminada introduzindo-se uma nova definição de variação em dimensão 1 - a *variação essencial* - que não é afetada por mudanças no valor de  $f$  em conjuntos de medida nula e cuja generalização às dimensões superiores é equivalente à Definição 1.2.1. No Capítulo 2 fazemos uso desta noção de variação para funções de variável real, que é definida abaixo.

A definição de variação essencial depende de outro conceito, o de *continuidade aproximada*:

**Definição 1.2.13.** Uma função  $f$  é *aproximadamente contínua num ponto  $x_0$* , se  $\forall \delta > 0$ , o conjunto  $X = f^{-1} \{y : |u - f(x_0)| > \delta\}$  tiver densidade igual a zero em  $x_0$ , ou seja, se

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}(X \cap B(x_0, r))}{\mathcal{L}(B(x_0, r))} = 0.$$

**Definição 1.2.14.** Seja  $f$  uma função real integrável em  $[a, b]$ . A *variação essencial de  $f$  no intervalo  $[a, b]$*  é

$$\text{varess}_a^b(f) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})| : n \in \mathbb{N}, a < t_0 < t_1 < \dots < t_n < b \right\},$$

sendo cada  $t_i$  um ponto de continuidade aproximada de  $f$ . Uma função  $f$  diz-se de *variação essencial limitada* ou  $f \in BV(\mathbb{R})$ , se existir uma constante  $C > 0$  tal

que  $\text{varess}(f) \leq C$  quaisquer que sejam  $a < b$ , sendo

$$\text{varess}(f) = \sup \{ \text{varess}_a^b(f) : a < b \in \mathbb{R} \}.$$

**Teorema 1.2.15.** *Se  $f \in L^1((a, b))$ , então*

$$\text{varess}(f) = \sup \left\{ \int_a^b f \phi' \, dx : \phi \in C_0^1((a, b)), |\phi| \leq 1 \right\}.$$

Dada uma função  $u \in L_{loc}^1(a, b)$ , definimos o *conjunto de transição*  $S_u$  de  $u$  como o conjunto dos pontos onde o limite aproximado superior e inferior diferem ou não são finitos, sendo

$$\inf_{t \in \mathbb{R}} \left\{ \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^1(B(x_0, r) \cap \{u > t\})}{\mathcal{H}^1(B(x_0, r))} = 0 \right\}$$

e

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \left\{ \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^1(B(x_0, r) \cap \{u < t\})}{\mathcal{H}^1(B(x_0, r))} = 0 \right\}$$

o limite aproximado de  $u$  em  $x_0$  superior e inferior, respectivamente. Seja  $u \in BV((a, b), \{\alpha, \beta\})$  com  $\alpha$  e  $\beta$  constantes, ou seja,  $u \in BV(a, b)$  e  $u(x) \in \{\alpha, \beta\}$  para todo  $x \in (a, b)$ . Então, denotando  $\mathcal{H}^0$  como a medida da contagem, temos que  $\mathcal{H}^0(S_u) < \infty$  e  $|\beta - \alpha| \mathcal{H}^0(S_u)$  coincide com a variação total  $|Du|$ . Consequentemente dada  $h$  uma função contínua e positiva

$$\int_{(a, b)} h(x) |Du| = |\beta - \alpha| \int_{S_u} h(x) \, d\mathcal{H}^0 = |\beta - \alpha| \sum_{x \in S_u} h(x). \quad (1.2.4)$$

A definição de conjunto de transição poderia, de modo análogo, ser feita em dimensões maiores, porém o caso  $n = 1$  é suficiente para nossos propósitos.

A demonstração do Teorema 1.2.15, assim como todos os detalhes desta subseção, podem ser encontrados em [22, 25, 27], por exemplo.

### 1.3 O Teorema de Kohn e Sternberg

Nesta seção apresentaremos um teorema devido a Kohn e Sternberg que será de extrema importância para a obtenção de alguns dos principais resultados desta tese. Para enunciarmos tal teorema necessitamos de algumas definições preliminares.

Existem várias versões equivalentes da definição de  $\Gamma$ -convergência sendo que a por nós adotada é aquela encontrada em [18, 31], por exemplo.

Para as próximas definições considere  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ( $n \geq 1$ ) um subconjunto aberto,

Lipschitz e limitado.

**Definição 1.3.1.** Seja  $\{E_\epsilon\}_{\epsilon>0} : L^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  uma família de funcionais reais estendidos. Dizemos que  $\{E_\epsilon\}_{\epsilon>0}$   $\Gamma$ -converge a  $E_0$  quando  $\epsilon \rightarrow 0$ , se:

- (i) para cada  $v \in L^1(\Omega)$  e para qualquer sequência  $\{v_\epsilon\}$  em  $L^1(\Omega)$  tal que  $v_\epsilon \rightarrow v$  em  $L^1(\Omega)$ , quando  $\epsilon \rightarrow 0$ , implica que

$$E_0(v) \leq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} E_\epsilon(v_\epsilon).$$

- (ii) para cada  $v \in L^1(\Omega)$  existe uma sequência  $\{v_\epsilon\}$  em  $L^1(\Omega)$  tal que  $v_\epsilon \rightarrow v$  em  $L^1(\Omega)$ , quando  $\epsilon \rightarrow 0$ , e

$$E_0(v) \geq \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} E_\epsilon(v_\epsilon).$$

Neste caso também dizemos que  $E_0$  é o  $\Gamma$ -limite da família  $\{E_\epsilon\}_{\epsilon>0}$  e escrevemos

$$\Gamma(L^1(\Omega)^-) - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} E_\epsilon(v) = E_0(v).$$

**Definição 1.3.2.** Dizemos que  $v_0 \in L^1(\Omega)$  é um *mínimo local de  $E_0$*  se existe  $\mu > 0$  tal que

$$E_0(v_0) \leq E_0(v) \quad \text{sempre que} \quad 0 < |v - v_0|_{L^1(\Omega)} < \mu.$$

Ainda, se

$$E_0(v_0) < E_0(v) \quad \text{sempre que} \quad 0 < |v - v_0|_{L^1(\Omega)} < \mu,$$

então  $v_0$  é chamado *mínimo local isolado de  $E_0$* .

Muitos dos argumentos utilizados nesta tese relacionam os mínimos locais isolados de um determinado funcional  $\Gamma$ -limite  $E_0$ , com os mínimos locais da família de funcionais de energia  $\{E_\epsilon\}_{\epsilon>0}$  dos quais  $E_0$  é o  $\Gamma$ -limite [18, 32]. Esta relação é dada pelo Teorema de Kohn e Sternberg que é apresentado abaixo.

**Teorema 1.3.3** ([30]). *Suponha que uma sequência de funcionais reais estendidos*

$$\{E_\epsilon\}_{\epsilon>0} : L^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\},$$

$\Gamma$ -converge para um funcional real estendido  $E_0$  e também que as seguintes hipóteses são satisfeitas:

- (i) *Toda sequência  $\{v_\epsilon\}_{\epsilon>0}$  tal que  $E_\epsilon(v_\epsilon) \leq C < \infty$  para todo  $\epsilon > 0$ , é compacta em  $L^1(\Omega)$ .*

(ii) Existe um mínimo local isolado  $v_0$  de  $E_0$ .

Então existe  $\epsilon_0 > 0$  e uma família  $\{v_\epsilon\}_{0 < \epsilon < \epsilon_0}$  tal que

- $v_\epsilon$  é um mínimo local de  $E_\epsilon$ .
- $|v_\epsilon - v_0|_{L^1(\Omega)} \rightarrow 0$ , quando  $\epsilon \rightarrow 0$ .



## Capítulo 2

# Padrões em Superfícies de Revolução Sem Fronteira

Neste capítulo apresentamos o PROBLEMA 1 e obtemos resultados de existência e não-existência de padrões quando o problema parabólico é definido em uma superfície de revolução sem fronteira  $\mathcal{M}$ . Vale salientar que o PROBLEMA 1 engloba tanto o caso de domínios sem fronteira, quanto o caso de domínios com fronteira que será tratado no Capítulo 3. Exemplos, para os nossos resultados de existência e não-existência de padrões são apresentados no final de cada seção.

Além disso, fazemos aqui um pequeno resumo sobre estabilidade de soluções estacionárias.

### 2.1 Apresentação do Problema e Análise de Estabilidade

O PROBLEMA 1 desta tese é encontrar condições suficientes para existência, como também para não existência, de soluções estacionárias não-constantes e estáveis das duas seguintes equações parabólicas,

$$u_t = \operatorname{div}(a(\cdot)\nabla u) + f(u), \quad (x, t) \in \mathcal{M} \times \mathbb{R}^+ \quad (2.1.1)$$

onde

- $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$  é uma superfície de revolução sem fronteira, ou seja, estamos no *Caso 1*, veja Seção 1.1.

Denotamos por  $\operatorname{div}$  o operador divergente sobre  $\mathcal{M}$ .

Quando estivermos no *Caso 2*, ou seja, o domínio é uma superfície de revolução com fronteira, então trocaremos a notação  $\mathcal{M}$  por  $\mathcal{D}$ . Além disso, consideramos a condição de Neumann homogênea na fronteira:

$$\left. \begin{aligned} u_t &= \operatorname{div}(a(\cdot)\nabla u) + f(u), & (x, t) &\in \mathcal{D} \times \mathbb{R}^+ \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= 0, & (x, t) &\in \partial\mathcal{D} \times \mathbb{R}^+ \end{aligned} \right\} \quad (2.1.2)$$

sendo  $\nu$  o vetor normal unitário e exterior à  $\partial\mathcal{D}$ .

Nos dois problemas acima consideramos a função de difusibilidade  $a(\cdot)$  de classe  $C^2$  e estritamente positiva.

- Além disso, pensando nas coordenadas  $(s, \theta)$ , tomamos  $a(\cdot)$  independente da variação angular  $\theta$ . Assim, abusando da notação escreveremos

$$a(x) = a(s), \quad \forall x = (\psi(s) \cos(\theta), \psi(s) \operatorname{sen}(\theta), \chi(s)) \in \mathcal{M}. \quad (2.1.3)$$

O termo de reação  $f(\cdot)$  é uma função de classe  $C^1$  e em determinados pontos desta tese será considerado do tipo bi-estável (veja Seção 2.3 e Seção 3.2).

Utilizando (2.1.3) e os conceitos discutidos na Seção 1.1, iremos escrever os problemas (2.1.1) e (2.1.2) nas coordenadas  $(s, \theta)$  fazendo uso da métrica  $g$ . Fixando  $x^1 = s$  e  $x^2 = \theta$ , temos que

$$(g_{ij})_{i,j=1,2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \psi^2 \end{bmatrix},$$

portanto  $|g| = \psi^2$ , e uma conta simples (veja (1.1.5) e (1.1.6)) mostra que

$$\nabla_g u = \left( \frac{\partial u}{\partial s}, \frac{1}{\psi^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \quad (2.1.4)$$

e

$$\operatorname{div}_g(a(x)\nabla_g u) = au_{ss} + \frac{(\psi a)_s}{\psi} u_s + \frac{a}{\psi^2} u_{\theta\theta}. \quad (2.1.5)$$

Assim, as soluções do problema (2.1.1) definido sobre  $\mathcal{M}$  necessariamente satisfazem

$$u_t = au_{ss} + \frac{(\psi a)_s}{\psi} u_s + \frac{a}{\psi^2} u_{\theta\theta} + f(u), \quad (s, \theta, t) \in (0, l) \times (0, 2\pi) \times \mathbb{R}^+ \quad (2.1.6)$$

Em relação às soluções de problema (2.1.2) definido sobre  $\mathcal{D}$ , temos que  $\partial\mathcal{D} = \gamma_0 \cup \gamma_l$  (veja *Caso 2*). Assim, usando (1.1.3) temos que

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = -\frac{\partial u}{\partial s}(0) \text{ em } \gamma_0, \text{ e } \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial u}{\partial s}(l) \text{ em } \gamma_l. \quad (2.1.7)$$

Portanto, de (2.1.5) e (2.1.7) as soluções do problema (2.1.2) satisfazem

$$\left. \begin{aligned} u_t &= au_{ss} + \frac{(\psi a)_s}{\psi} u_s + \frac{a}{\psi^2} u_{\theta\theta} + f(u), (s, \theta, t) \in (0, l) \times (0, 2\pi) \times \mathbb{R}^+ \\ u'(0) &= 0, \quad u'(l) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.1.8)$$

**Observação 2.1.1.** *Estamos interessados na existência, ou não, de soluções não-constantas, estacionárias e estáveis dos problemas (2.1.1) e (2.1.2). Como veremos adiante, será de fundamental importância as equações (2.1.6) e (2.1.8).*

No que segue, chamaremos  $U$  de *solução estacionária* do problema (2.1.6), ou de (2.1.8), se  $U$  for independente do tempo  $t$ . Isto é,  $U$  deve satisfazer

$$\operatorname{div}_g(a(\cdot)\nabla_g U) + f(U) = 0, \quad x \in \mathcal{M} \quad (2.1.9)$$

no caso (2.1.6), ou

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div}_g(a(\cdot)\nabla_g U) + f(U) &= 0, & x \in \mathcal{D} \\ \frac{\partial U}{\partial \nu} &= 0, & x \in \partial\mathcal{D} \end{aligned} \right\} \quad (2.1.10)$$

no caso (2.1.8).

Uma solução estacionária  $U$  de (2.1.6) ou (2.1.8) é chamada *estável* (no sentido de Lyapunov) se para cada  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$|u(\cdot, t) - U|_{L^\infty} < \epsilon \text{ para todo } t > 0, \text{ sempre que } |u_0 - U|_{L^\infty} < \delta,$$

onde  $u_0 = u(\cdot, 0)$ . Se existe  $\delta_1 > 0$  tal que

$$|u_0 - U|_{L^\infty} < \delta_1 \text{ implica que } |u(\cdot, t) - U|_{L^\infty} \rightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow \infty,$$

então  $U$  é chamada *assintoticamente estável*. Dizemos que  $U$  é *instável* se não é estável.

Argumentos clássicos de estabilidade linearizada podem ser usados para inferir a estabilidade da solução estacionária  $U$  do problema (2.1.6) ou (2.1.8). Com efeito, denote por  $\lambda_1$  o autovalor principal (i.e., o menor autovalor) do problema de autovalores do problema linearizado em torno de  $U$

$$\operatorname{div}_g(a(\cdot)\nabla_g \phi) + f'(U)\phi + \lambda\phi = 0, \quad x \in \mathcal{M} \quad (2.1.11)$$

no caso (2.1.6), ou

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div}_g(a(\cdot)\nabla_g \phi) + f'(U)\phi + \lambda\phi &= 0, & x \in \mathcal{D} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \nu} &= 0, & x \in \partial\mathcal{D} \end{aligned} \right\} \quad (2.1.12)$$

no caso (2.1.8). Em ambos os casos o espectro consiste de uma quantidade enumerável de autovalores

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \dots$$

É bem conhecido o seguinte critério de estabilidade:

- se  $\lambda_1 > 0$  então  $U$  é assintoticamente estável;
- se  $\lambda_1 < 0$  então  $U$  é instável;
- se  $\lambda_1 = 0$  então  $U$  pode ser estável como também pode ser instável.

Ainda, o primeiro autovalor  $\lambda_1$  é caracterizado pelo princípio variacional de Rayleigh

$$\lambda_1 = \inf \left\{ \frac{R_U(\phi)}{\int_{\mathcal{M}} \phi^2 d\sigma} : \phi \in H^1(\mathcal{M}), \phi \neq 0 \right\} \quad (2.1.13)$$

onde

$$R_U(\phi) := \int_{\mathcal{M}} [a |\nabla_g \phi|^2 - f'(U)\phi^2] d\sigma. \quad (2.1.14)$$

Para mais detalhes sobre tais questões de estabilidade sugerimos [4], em especial veja os Teoremas 5.1.1 e 5.1.3.

## 2.2 Não-Existência de Padrões: Condição Suficiente

Começamos esta seção com um lema relacionado às soluções estacionárias do problema (2.1.6). Este Lema foi provado em [1, 2] com  $a(\cdot)$  constante, porém a demonstração para nosso caso é inteiramente análoga e apresentaremos aqui para conveniência do leitor.

**Lema 2.2.1.** *Cada solução estacionária  $u$  do problema (2.1.1) sobre  $\mathcal{M}$ , que depende da variação angular  $\theta$ , é instável.*

*Demonstração.* Por (2.1.5),  $u$  é solução estacionária de (2.1.6), ou seja,

$$au_{ss} + \frac{(\psi a)_s}{\psi} u_s + \frac{a}{\psi^2} u_{\theta\theta} + f(u) = 0,$$

e como as funções  $a(\cdot)$  e  $\psi(\cdot)$  não dependem de  $\theta$ , podemos derivar a equação acima em relação a  $\theta$  e obtermos

$$a(u_\theta)_{ss} + \frac{(\psi a)_s}{\psi} (u_\theta)_s + \frac{a}{\psi^2} (u_\theta)_{\theta\theta} + f'(u)u_\theta = 0,$$

assim  $u_\theta$  é uma autofunção de (2.1.11) com autovalor  $\lambda = 0$ . Como a função  $u$  não é constante temos que  $u_\theta$  muda de sinal (note que  $u$  é regular em  $\mathcal{M}$ , logo  $u(0) = u(2\pi)$ ) e portanto  $\lambda = 0$  não é o menor autovalor uma vez que a autofunção associada ao menor autovalor não muda de sinal, veja [35] por exemplo. Segue que o menor autovalor é negativo, ou seja,  $u$  é instável.  $\square$

Podemos agora enunciar e provar o principal resultado desta seção:

**Teorema 2.2.2.** *Se*

$$-\left(\frac{\psi'}{\psi}\right)'(s) \geq \frac{(a'\psi)'}{2a\psi}(s), \quad \forall s \in (0, l) \quad (2.2.1)$$

então cada solução estacionária não-constante de (2.1.1) é instável.

Em particular, este é o caso se

- $\mathcal{M}$  for a fronteira de um domínio convexo de  $\mathbb{R}^3$  e
- $(a'\psi)(\cdot)$  for uma função não-crescente.

*Demonstração.* Considere  $v$  uma solução estacionária não-constante de (2.1.1). Pelo Lema 2.2.1 podemos assumir que  $v$  é independente da variação angular  $\theta$ , ou seja,  $v = v(s)$ . Caso contrário teríamos diretamente que  $v$  é instável. Assim, usando (2.1.5) temos que  $v$  satisfaz

$$av_{ss} + \frac{(\psi a)_s}{\psi}v_s + f(v) = 0 \text{ em } (0, l). \quad (2.2.2)$$

Diferenciando com respeito a  $s$  e denotando  $' := \frac{d}{ds}$ , temos

$$a'v'' + av''' + \left(\frac{(\psi a)'}{\psi}\right)'v' + \frac{(\psi a)'}{\psi}v'' + f'(v)v' = 0$$

logo,

$$\operatorname{div}_g(a\nabla_g v') + a'v'' + \left(\frac{(\psi a)'}{\psi}\right)'v' + f'(v)v' = 0.$$

Agora, multiplicando a equação acima por  $v'$  e integrando sobre  $\mathcal{M}$ , obtemos

$$\int_{\mathcal{M}} \left[ v' \operatorname{div}_g(a\nabla_g v') + a'v''v' + \left(\frac{(\psi a)'}{\psi}\right)'(v')^2 + f'(v)(v')^2 \right] d\sigma = 0,$$

segue que, após aplicação de integração por partes,

$$\int_{\mathcal{M}} [a(v'')^2 - f'(v)(v')^2] d\sigma = \int_{\mathcal{M}} v''a'v' d\sigma + \int_{\mathcal{M}} \left(\frac{(\psi a)'}{\psi}\right)'(v')^2 d\sigma.$$

Lembrando que  $d\sigma = \psi ds d\theta$ , temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{M}} v'' a' v' d\sigma &= \int_0^{2\pi} \int_0^l v'' a' v' \psi ds d\theta \\ &= - \int_0^{2\pi} \int_0^l (v')^2 (a'\psi)' ds d\theta - \int_0^{2\pi} \int_0^l v'' a' v' \psi ds d\theta \\ &= - \int_0^{2\pi} \int_0^l (v')^2 (a'\psi)' ds d\theta - \int_{\mathcal{M}} v'' a' v' d\sigma. \end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_{\mathcal{M}} v'' a' v' d\sigma = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^l (v')^2 (a'\psi)' ds d\theta.$$

Assim, lembrando a definição do funcional  $R_v$  (veja (2.1.14)) temos que

$$\begin{aligned} R_v(v') &= \int_{\mathcal{M}} \left[ a |\nabla_g v'|^2 - f'(v)(v')^2 \right] d\sigma \\ &= \int_{\mathcal{M}} \left[ a(v'')^2 - f'(v)(v')^2 \right] d\sigma \\ &= \int_{\mathcal{M}} v'' a' v' d\sigma + \int_{\mathcal{M}} \left( \frac{(\psi a)'}{\psi} \right)' (v')^2 d\sigma \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^l \left[ -\frac{(a'\psi)'}{2} + \psi \left( \frac{(\psi a)'}{\psi} \right)' \right] (v')^2 ds d\theta. \end{aligned}$$

Finalmente, um cálculo simples mostra que

$$-\left( \frac{\psi'}{\psi} \right)' \geq \frac{\psi' a' + \psi a''}{2a\psi} \Rightarrow -\frac{(a'\psi)'}{2} + \psi \left( \frac{(\psi a)'}{\psi} \right)' \leq 0.$$

Portanto  $R_v(v') \leq 0$  e, por (2.1.13), temos que  $\lambda_1 \leq 0$ . Se  $R_v(v') < 0$  então  $\lambda_1 < 0$  e segue que  $v$  é instável.

Se  $\lambda_1 = 0$ , como  $\lambda_1$  é um autovalor simples, i.e., o auto-espaço associado possui dimensão 1 (veja [35], por exemplo), temos que  $v' = c\phi$  onde  $\phi$  é uma autofunção correspondente ao autovalor  $\lambda_1$  e  $c \neq 0$ . É bem conhecido que  $\phi$  não possui zeros em  $\mathcal{M}$  e isto nos dá uma contradição, uma vez que  $v'$  se anula em qualquer ponto de máximo de  $v$  em  $\overline{\mathcal{M}} = \mathcal{M}$ .

A última afirmação do teorema é facilmente provada observando que, neste

caso,

$$-\left(\frac{\psi'}{\psi}\right)' = K + (K_g)^2 \geq 0 \quad \text{e} \quad \frac{\psi'a' + \psi a''}{2a\psi} = \frac{(a'\psi)'}{2a\psi} \leq 0,$$

onde  $K$  e  $K_g$  são definidos em (1.1.7) e (1.1.8), respectivamente.

O teorema está provado □

**Observação 2.2.3.** *A condição (2.2.1) tem um significado geométrico, no sentido que*

$$-\left(\frac{\psi'}{\psi}\right)' = -\frac{\psi''}{\psi} + \left(\frac{\psi'}{\psi}\right)^2 = K + (K_g)^2.$$

Ainda, (2.2.1) generaliza a condição obtida em [2], a saber

$$-\left(\frac{\psi'}{\psi}\right)' \geq 0,$$

onde o caso  $a \equiv \text{cte}$  foi abordado.

**Observação 2.2.4.** *Note que o Teorema 2.2.2 é válido para qualquer função  $f \in C^1(\mathbb{R})$ . No caso onde  $\psi > 0$  em  $[0, l]$  com condição de fronteira de Neumann e  $a(\cdot)$  uma função constante, os autores em [2], baseado no trabalho [13], mostraram que se*

$$-\left(\frac{\psi'}{\psi}\right)'(s_0) < 0$$

para algum  $s_0 \in (0, l)$ , então existe  $f \in C^1(\mathbb{R})$  (dependendo somente de  $\psi(\cdot)$ ) tal que (2.1.6) admite padrões. Seguindo o método de [2, 13] provaremos o mesmo no Capítulo 3 (veja Seção 3.2), com  $f$  dependendo de  $a(\cdot)$  e  $\psi(\cdot)$  e assumindo que estas funções satisfaçam determinadas hipóteses.

A partir da condição (2.2.1), dada pelo Teorema 2.2.2, que garante a não-existência de padrões para o problema (2.1.1), podemos construir muitos exemplos de superfícies que, combinadas à convenientes funções  $a(\cdot)$ , não admitem padrões. O simples exemplo abaixo ilustra esta possibilidade.

**Exemplo 2.2.5.** Se considerarmos  $\mathcal{M}$  a esfera unitária, então  $\psi(s) = \text{sen}(s)$ ,  $\chi(s) = \text{cos}(s)$  e  $I = (0, \pi)$ . Neste caso, se

$$a(s) = \text{sen}^2(s) + 1 \quad s \in (0, \pi),$$

i.e.

$$a(x) = x_1^2 + x_2^2 + 1 \quad x \in \mathcal{M}$$

podemos, depois de um certo trabalho de cálculo, observar que a condição (2.2.1) é satisfeita, e portanto não existe padrão nesta situação.

Por outro lado, se

$$a(s) = \text{sen}^2(2s) + 1 \quad s \in (0, \pi),$$

i.e.

$$a(x) = 4x_3^2(x_1^2 + x_2^2) + 1 \quad x \in \mathcal{M}$$

então a condição (2.2.1) não é satisfeita sobre a esfera unitária. Portanto, é possível que exista  $f$  de modo que o problema (2.1.6) possua padrões. De fato, na seção seguinte veremos que isto ocorre quando  $f$  é do tipo bi-estável.

## 2.3 Existência de Padrões: Condição Suficiente

O objetivo desta seção é encontrar condições suficientes para a existência de padrões para o problema (2.1.1) com um pequeno parâmetro  $\epsilon > 0$  introduzido, ou seja, nesta seção procuramos soluções estacionárias não-constantes e estáveis para o seguinte problema:

$$\partial_t u_\epsilon = \epsilon^2 \text{div}_g(a(\cdot)\nabla_g u_\epsilon) + f(u_\epsilon), \quad (x, t) \in \mathcal{M} \times \mathbb{R}^+ \quad (2.3.1)$$

onde  $\epsilon$  é um pequeno parâmetro positivo. Aqui, assumimos que o termo de reação  $f$  satisfaz as seguintes hipóteses:

( $f_1$ )  $f$  tem três zeros consecutivos  $\alpha$ ,  $\theta$  e  $\beta$ ,  $\alpha < \theta < \beta$ , satisfazendo  $f'(\alpha) < 0$ ,  $f'(\beta) < 0$ .

( $f_2$ )  $\int_\alpha^\beta f(\xi) \, d\xi = 0$  (a condição de igualdade de área).

( $f_3$ ) Existem constantes positivas  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $s_0$  e um número  $p \geq 2$  tal que

$$c_1 |s|^p \leq F(s) \leq c_2 |s|^p$$

para  $|s| \geq s_0$ , onde

$$F(s) = - \int_\alpha^s f(\xi) \, d\xi. \quad (2.3.2)$$

Sob estas condições, dizemos que a função  $F(\cdot)$  é do tipo “poço-duplo” (ou “double-well”). Temos que

$$F(s) \geq 0,$$

$$F(s) = 0 \Leftrightarrow s = \alpha \text{ ou } s = \beta, \quad (2.3.3)$$



e  $F(\cdot)$  é de classe  $C^2$ . A hipótese  $(f_3)$ , responsável por controlar o crescimento de  $F(\cdot)$ , é essencial para garantir a compacidade de determinadas soluções encontradas. A hipótese  $(f_2)$ , conhecida como condição de igualdade de área, implica (2.3.3) e tem caráter necessário no nosso método, como será provado no Capítulo 4.

Veja abaixo uma figura que ilustra o comportamento de  $f(\cdot)$  e  $F(\cdot)$ .

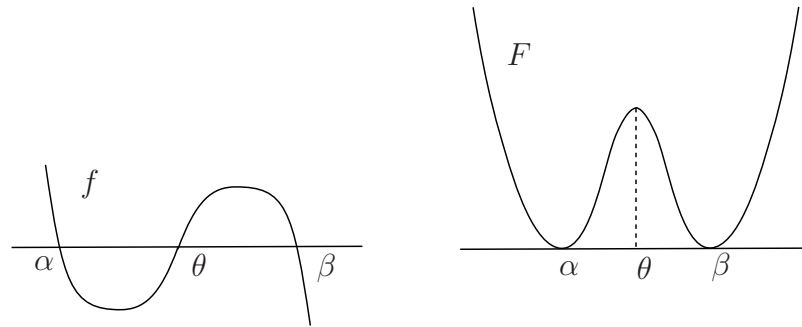


Figura 2.1: Comportamento das funções  $f$  e  $F$ .

**Exemplo 2.3.1.** A função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(s) = (s - \alpha)(s - \beta) \left( s - \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \right)$$

satisfaz as condições  $(f_1)$ ,  $(f_2)$  e  $(f_3)$ .

O método que usamos nesta seção para encontrar padrões para o problema (2.3.1) utiliza de maneira crucial o Teorema 1.3.3. Existem muitos trabalhos que se utilizam da mesma técnica, citamos por exemplo [18, 30]. Em geral esta técnica fornece propriedades qualitativas geométricas das soluções, como pode ser visto nos trabalhos citados. Além disso, no nosso caso, esta técnica fornece condições suficientes sobre a geometria do domínio (aqui representada pela função  $\psi(\cdot)$ ) combinada com o termo de difusibilidade  $a(\cdot)$  para a formação de padrões.

Para este propósito, consideramos o seguinte problema

$$\partial_t u_\epsilon = \epsilon^2 \partial_s (\psi a \partial_s u_\epsilon) + \psi f(u_\epsilon), \quad s \in (0, l). \tag{2.3.4}$$

Note que, por (2.1.5), cada solução estacionária de (2.3.4) é também uma solução estacionária de (2.3.1).

Agora apresentamos a família de funcionais de energia associada ao problema (2.3.4), ou seja, os funcionais cujos pontos críticos são soluções estacionárias de (2.3.4). Temos que  $\{E_\epsilon\} : L^1(I) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ , é dado por

$$E_\epsilon = \begin{cases} \int_0^l \left[ \frac{\epsilon}{2} a(s) \psi(s) (u')^2 + \frac{\psi(s) F(u)}{\epsilon} \right] ds, & u \in H^1(I) \\ \infty, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.3.5)$$

sendo  $F$  como em (2.3.2).

Nosso próximo passo é encontrar mínimos locais para a família  $\{E_\epsilon\}$ , e para isto faremos uso do Teorema 1.3.3. Portanto, devemos encontrar condições para obtermos as hipóteses de tal teorema.

A demonstração do teorema abaixo pode ser encontrada em [31] para  $a(\cdot)$  e  $\psi(\cdot)$  constantes. Quando as funções  $a(\cdot)$  e  $\psi(\cdot)$  não são constantes, basicamente a mesma demonstração, com alterações bastante previsíveis, pode ser seguida para demonstrar o seguinte resultado.

**Teorema 2.3.2.** *Seja  $E_0 : L^1(I) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  um funcional definido por*

$$E_0(u) = \begin{cases} \gamma \int_0^l \sqrt{a(s)} \psi(s) |D\chi_{\{u=\beta\}}|, & u \in BV(I, \{\alpha, \beta\}) \\ \infty, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.3.6)$$

onde  $\gamma = \int_\alpha^\beta \sqrt{F(s)} ds$ . Então

$$\Gamma(L^1(I)^-) - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} E_\epsilon(v) = E_0(v)$$

onde  $E_\epsilon$  é dado por (2.3.5).

A hipótese (i) do Teorema 1.3.3 é uma consequência da hipótese  $(f_3)$  sobre  $f$  e do fato que  $BV(I)$  está compactamente contido em  $L^1(I)$ . Todos os detalhes desta afirmação estão feitos na Proposição 3 de [31]. De fato, é neste ponto que justifica-se a hipótese de crescimento  $(f_3)$  sobre  $f$ . Outras referências usaram do mesmo artifício, veja [18, 30, 33].

Portanto, a fim de verificarmos as hipóteses do Teorema 1.3.3, resta-nos encontrar um mínimo local isolado de  $E_0$  (veja 2.3.6). No que segue,  $\chi_{(a,b)}$  denota a função característica do conjunto  $(a, b)$ .

**Teorema 2.3.3.** *Se a função  $\sqrt{a}\psi : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$  assume um mínimo local isolado em  $s_0 \in (0, l)$ , então*

$$u_0 = \alpha \chi_{(0, s_0)} + \beta \chi_{(s_0, l)} \quad (2.3.7)$$

é um mínimo local isolado de  $E_0$ , onde  $\alpha$  e  $\beta$  são como em  $(f_1)$ .

*Demonstração.* Como  $\sqrt{a}\psi(\cdot)$  assume um mínimo local isolado em  $s_0$ , existe  $\delta_0 >$

0 tal que

$$(\sqrt{a}\psi)(s_0) < (\sqrt{a}\psi)(s)$$

para todo  $s \in (s_0 - \delta_0, s_0 + \delta_0)$ .

Considere  $\delta = \frac{\delta_0 |\alpha - \beta|}{2}$  e  $u \in BV(I, \{\alpha, \beta\})$  tal que

$$0 < |u - u_0|_{L^1(I)} < \delta. \quad (2.3.8)$$

De acordo com a Definição 1.3.2 devo mostrar que para toda  $u \in L^1(I)$  satisfazendo (2.3.8) ocorre  $E_0(u) > E_0(u_0)$ .

Note que se  $u \notin BV(I, \{\alpha, \beta\})$  então

$$E_0(u) = \infty > E_0(u_0).$$

Seja  $S_u \subset (0, l)$  o conjunto de transição de  $u \in BV(I, \{\alpha, \beta\})$ . Se  $S_u \cap (s_0 - \delta_0, s_0 + \delta_0) = \emptyset$ , então  $u = \alpha$  q.t.p em  $(s_0 - \delta_0, s_0 + \delta_0)$  ou  $u = \beta$  q.t.p em  $(s_0 - \delta_0, s_0 + \delta_0)$ , daí

$$|u - u_0|_{L^1(I)} = \int_I |u - u_0| \, ds \geq |\alpha - \beta| \delta_0 > \delta$$

o que contradiz (2.3.8). Assim,  $S_u \cap (s_0 - \delta_0, s_0 + \delta_0) \neq \emptyset$  e nós podemos tomar  $s_1 \in S_u \cap (s_0 - \delta_0, s_0 + \delta_0)$ . Se  $s_1 \neq s_0$ , temos que

$$\begin{aligned} E_0(u) &= \gamma \int_0^l \sqrt{a(s)} \psi(s) |D\chi_{\{u=\beta\}}| \\ &\geq \gamma(\sqrt{a}\psi)(s_1) \\ &> \gamma(\sqrt{a}\psi)(s_0) \\ &= E_0(u_0) \end{aligned}$$

ou seja, neste caso temos a desigualdade desejada.

Agora, se  $s_1 = s_0$  temos as seguintes possibilidades:

- (i)  $u = u_0$ , então  $|u - u_0|_{L^1(I)} = 0$ , o que contradiz (2.3.8).
- (ii)  $u = \beta\chi_{(0, s_0)} + \alpha\chi_{(s_0, l)}$ , então

$$|u - u_0|_{L^1(I)} \geq 2\delta_0 |\alpha - \beta| > \delta$$

o que contradiz (2.3.8) novamente.

(iii)  $\exists s_2 \in S_u$  tal que  $s_2 \neq s_1$ , então neste caso

$$E_0(u) \geq \gamma [(\sqrt{a}\psi)(s_2) + (\sqrt{a}\psi)(s_0)] > \gamma(\sqrt{a}\psi)(s_0) = E_0(u_0).$$

O teorema está provado.  $\square$

**Teorema 2.3.4.** *Seja  $\{v_\epsilon\}_{0 < \epsilon \leq \epsilon_0}$  a família de mínimos locais de  $E_\epsilon$  fornecida pela combinação dos Teoremas 1.3.3, 2.3.2 and 2.3.3. Então cada  $v_\epsilon$  é uma solução estacionária estável de (2.3.1).*

*Demonstração.* Primeiramente observamos que, por (2.1.5), cada solução estacionária de (2.3.4) é também uma solução estacionária de (2.3.1). Portanto, como cada  $v_\epsilon$  é uma solução estacionária de (2.3.1), resta-nos analisar sua estabilidade.

Uma solução do problema de autovalor obtido através da linearização do problema (2.3.1) em torno de  $v_\epsilon$ , satisfaz:

$$\epsilon^2 a \partial_s^2 u_\epsilon + \epsilon^2 \frac{\partial_s(\psi a)}{\psi} \partial_s u_\epsilon + \epsilon^2 \frac{a}{\psi^2} \partial_\theta^2 u_\epsilon + f'(v_\epsilon) u_\epsilon + \lambda u_\epsilon = 0. \quad (2.3.9)$$

Nós afirmamos que se  $v_1$  é uma autofunção correspondente ao primeiro autovalor  $\lambda_1$  do problema (2.3.1), então  $v_1$  é independente de  $\theta$ .

É fácil ver que para qualquer  $\theta_0 > 0$ ,  $v_1(s, \theta + \theta_0)$  é também uma autofunção correspondente a  $\lambda_1$ . Além disso, temos que  $v_1$  é  $2\pi$ -periódica em relação a  $\theta$  e

$$\int_0^l \int_0^{2\pi} v_1^2(s, \theta) \psi \, d\theta \, ds = 1. \quad (2.3.10)$$

Como  $\lambda_1$  é um autovalor simples (veja [5]), o auto-espaço correspondente possui dimensão 1, logo existe uma constante  $k$  (que, a priori, depende de  $\theta_0$ ) tal que

$$v_1(s, \theta) = k v_1(s, \theta + \theta_0).$$

Segue que

$$\begin{aligned} \int_0^l \int_0^{2\pi} v_1^2(s, \theta + \theta_0) \psi \, d\theta \, ds &= \int_0^l \int_{\theta_0}^{2\pi + \theta_0} v_1^2(s, \theta) \psi \, d\theta \, ds \\ &= \int_0^l \int_0^{2\pi} v_1^2(s, \theta) \psi \, d\theta \, ds = 1, \end{aligned}$$

e então

$$1 = \int_0^l \int_0^{2\pi} v_1^2(s, \theta) \psi \, d\theta \, ds = k^2 \int_0^l \int_0^{2\pi} v_1^2(s, \theta + \theta_0) \psi \, d\theta \, ds = k^2.$$

Assim  $k = \pm 1$  para qualquer  $\theta_0 > 0$ ,  $0 \leq s \leq 1$  e  $0 < \theta < 2\pi$  o que prova a

nossa afirmação.

Lembre que  $v_\epsilon$  é um mínimo local de  $E_\epsilon$ , então para toda  $\phi \in H^1(I)$

$$E''_\epsilon(v_\epsilon)(\phi) = \int_0^l \left\{ \epsilon a \psi(\phi')^2 - \frac{\psi f'(v_\epsilon) \phi^2}{\epsilon} \right\} ds \geq 0. \quad (2.3.11)$$

Portanto, se  $v_1$  é uma autofunção correspondente ao primeiro autovalor  $\lambda_1$ , temos que

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= R_{v_\epsilon}(v_1) \\ &= \int_{\mathcal{M}} \left[ \epsilon a |\nabla_g v_1|^2 - \frac{f'(v_\epsilon) v_1^2}{\epsilon} \right] d\sigma \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^l \left\{ \epsilon a \psi(v_1')^2 - \frac{\psi f'(v_\epsilon) v_1^2}{\epsilon} \right\} ds d\theta \\ &= 2\pi \int_0^l \left\{ \epsilon a \psi(v_1')^2 - \frac{\psi f'(v_\epsilon) v_1^2}{\epsilon} \right\} ds \\ &= 2\pi E''_\epsilon(v_\epsilon)(v_1) \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Se  $\lambda_1 > 0$  então  $v_\epsilon$  é estável. Se  $\lambda_1 = 0$  então a estabilidade também ocorre e aqui seguimos os passos estabelecidos em [21]. Neste caso  $\lambda_1 = 0$  é um autovalor simples e portanto existe uma variedade local crítica, e invariante 1-dimensional  $W(v_\epsilon)$  tangente a autofunção  $v_1$  de tal forma que se  $v_\epsilon$  é estável em  $W(v_\epsilon)$  então é também estável em  $H^1(\mathcal{M})$  (veja [4], Teorema 6.2.1, por exemplo). Agora, a estabilidade de  $v_\epsilon$  em  $W(v_\epsilon)$  segue da existência de um funcional de Lyapunov e do fato que  $W(v_\epsilon)$  possui dimensão 1 [14, 16].  $\square$

Assim, combinando os Teoremas 1.3.3, 2.3.2, 2.3.3 e 2.3.4 podemos enunciar o principal resultado desta seção:

**Teorema 2.3.5.** *Suponha que  $f$  satisfaz  $(f_1)$ ,  $(f_2)$ ,  $(f_3)$  e que a função*

$$\sqrt{a}\psi : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$$

*assume um mínimo local isolado  $s_0 \in (0, l)$ . Então*

- $\exists \epsilon_0 > 0$  e uma família  $\{v_\epsilon\}_{0 < \epsilon \leq \epsilon_0}$  de soluções estacionárias, não-constantes e estáveis para o problema (2.3.1).
- Além disso,

$$|v_\epsilon - u_0|_{L^1(I)} \rightarrow 0 \text{ quando } \epsilon \rightarrow 0,$$

onde  $u_0$  é dado por (2.3.7).

**Observação 2.3.6.** Argumentos padrões de “bootstrap” asseguram que cada solução  $v_\epsilon$  é clássica, isto é,  $v_\epsilon \in C^2(\mathcal{M})$  (veja [34]).

**Observação 2.3.7.** Note que, além de garantir que a família de soluções é não-constante, a última conclusão do Teorema 2.3.5 fornece o perfil geométrico das soluções obtidas quando  $\epsilon \rightarrow 0$ .

**Observação 2.3.8.** Como esperado, se  $(\sqrt{a}\psi)(\cdot)$  assume um mínimo local isolado em  $s_0 \in (0, l)$  então a condição (2.2.1) não é satisfeita. De fato, um cálculo simples mostra que se

$$(\sqrt{a}\psi)'(s_0) = 0 \text{ e } (\sqrt{a}\psi)''(s_0) > 0$$

para algum  $s_0 \in (0, l)$ , então

$$-\left(\frac{\psi'}{\psi}\right)'(s_0) < \frac{(a'\psi)'(s_0)}{2a(s_0)\psi(s_0)}.$$

**Observação 2.3.9.** No caso particular  $a = cte$ , o Teorema 2.3.5 garante existência de padrões desde que  $\psi(\cdot)$  assuma um ponto de mínimo local isolado, digamos  $s_m$ , em  $(0, l)$ . Isto corresponde, geometricamente, à superfície de revolução possuir um “gargalo” na altura  $\chi(s_m)$ . A figura abaixo ilustra esta situação:

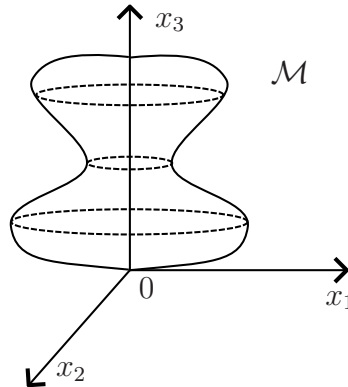


Figura 2.2: Domínio  $\mathcal{M}$  com um “gargalo” na altura  $\chi(s_m)$ .

**Exemplo 2.3.10.** Como afirmado no Exemplo 2.2.5 se  $\mathcal{M}$  é a esfera unitária e

$$a(s) = \text{sen}^2(2s) + 1$$

com  $s \in [0, \pi]$ , temos que a função  $(\sqrt{a}\psi)(\cdot)$  assume um mínimo local isolado em  $s = \frac{\pi}{2}$  e portanto existe uma família  $\{v_\epsilon\}_{0 < \epsilon \leq \epsilon_0}$  de soluções estacionárias não-

constantes e estáveis de (2.3.1) tal que,

$$\|v_\epsilon - u_0\|_{L^1(I)} \rightarrow 0 \text{ quando } \epsilon \rightarrow 0,$$

sendo  $u_0 = \alpha\chi_{(0, \frac{\pi}{2})} + \beta\chi_{(\frac{\pi}{2}, \pi)}$ .

## Capítulo 3

# Padrões em Superfícies de Revolução Com Fronteira

Neste capítulo procuramos condições suficientes para existência e também para não-existência, de padrões para o problema (2.1.2), isto é, quando o domínio é uma superfície de revolução com fronteira. Na primeira seção são enunciados resultados análogos aos obtidos no capítulo anterior, quando o mesmo problema em um domínio sem fronteira foi tratado. Na seção seguinte, obtemos um resultado de existência de padrões seguindo os métodos utilizados em [2, 13]. Novamente, ilustramos com alguns exemplos cada resultado de existência e não-existência de padrões obtidos neste capítulo.

### 3.1 Resultados Análogos

Os dois principais resultados obtidos até aqui em superfícies de revolução sem fronteira (Teoremas 2.2.2 e 2.3.5), podem ser feitos de maneira análoga em superfícies de revolução com fronteira assumindo condição de fronteira de Neumann. Sendo assim, esta seção é dedicada a apresentar apenas os enunciados dos teoremas já que as demonstrações seguem analogamente, a menos de algumas modificações técnicas, àquelas do capítulo anterior. No final, alguns exemplos desta situação serão apresentados.

**Teorema 3.1.1.** *Se*

$$-\left(\frac{\psi'}{\psi}\right)'(s) \geq \frac{(a'\psi)'(s)}{2a(s)\psi(s)}, \quad \forall s \in (0, l) \quad (3.1.1)$$

*então cada solução estacionária não-constante de (2.1.2) é instável.*

**Teorema 3.1.2.** *Se  $f$  satisfizer  $(f_1)$ ,  $(f_2)$ ,  $(f_3)$  e  $(\sqrt{a}\psi)(\cdot)$  assumir um mínimo local isolado  $s_0 \in (s_1, s_2)$ , então existe uma família  $\{v_\epsilon\}_{0 < \epsilon \leq \epsilon_0}$ , para algum  $\epsilon_0 > 0$ ,*



de soluções estacionárias não-constantas e estáveis para o problema

$$\left. \begin{aligned} \partial_t v_\epsilon &= \epsilon^2 \operatorname{div}(a(x)\nabla v_\epsilon) + f(v_\epsilon), \quad (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathcal{D} \\ \frac{\partial v_\epsilon}{\partial \nu} &= 0, \quad x \in \partial\mathcal{D} \end{aligned} \right\} \quad (3.1.2)$$

De posse dos dois resultados acima, muitos exemplos de existência e não-existência de padrões para o problema (2.1.2) podem ser construídos, vejamos abaixo alguns casos simples:

**Exemplo 3.1.3.** Considere as seguintes superfícies:

- $\mathcal{D}_1$  uma superfície cilíndrica parametrizada por  $\psi_1(s) = 1$  e  $\chi_1(s) = s + 1$ ,  $s \in [0, 1]$ ,

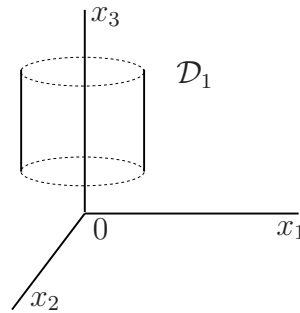


Figura 3.1: Domínio  $\mathcal{D}_1$ .

- $\mathcal{D}_2$  uma superfície anelar formada pela “casca” do tronco de um cone, parametrizada por  $\psi_2(s) = -\frac{\sqrt{2}}{2}s + 1$  e  $\chi_2(s) = \frac{\sqrt{2}}{2}s + 1$ ,  $s \in [0, 1]$ ,

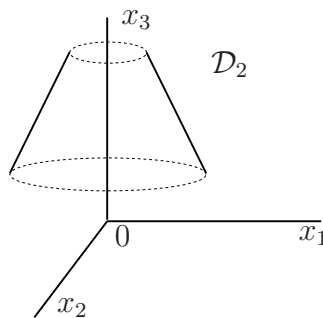


Figura 3.2: Domínio  $\mathcal{D}_2$ .

- $\mathcal{D}_3$  superfície parametrizada por  $\psi_3(s) = \frac{s^2}{4} + \frac{1}{2}$  e  $\chi_3(s) = \frac{s}{4}\sqrt{4 - s^2} + \arcsen(\frac{s}{2})$ ,  $s \in (0, \frac{1}{2})$ .

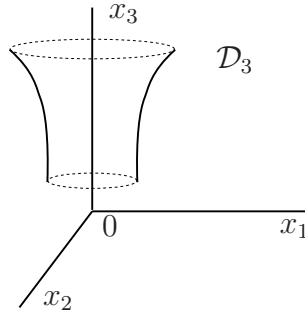


Figura 3.3: Domínio  $\mathcal{D}_3$ .

Como consequência dos resultados acima, temos

- (i) Em  $\mathcal{D}_1$  se  $a(s) = s + 1$  ( $a(x) = x_3, x \in \mathcal{D}_1$ ) ou  $a(s) = -s^2 - 2s + 4$  ( $a(x) = -x_3^2 + 5, x \in \mathcal{D}_1$ ),  $s \in [0, 1]$ , então (3.1.1) é satisfeita pois  $K \equiv 0$  em  $\mathcal{D}_1$  e  $(a'\psi_1)(\cdot)$  é não-crescente em ambos os casos. Portanto, nestes casos não existem padrões de (2.1.2) em  $\mathcal{D}_1$ .
- (ii) Se  $a(x) = x_3^2$  então (3.1.1) ocorre em  $\mathcal{D}_2$  ( $K \geq 0$  em  $\mathcal{D}_2$  e  $(a'\psi_2)(\cdot)$  não-crescente) mas não ocorre em  $\mathcal{D}_1$ . Assim, não existem padrões de (2.1.2) em  $\mathcal{D}_2$ , enquanto que em  $\mathcal{D}_1$  é possível que exista  $f \in C^1(\mathbb{R})$  de modo que ocorra padrões.
- (iii) Ainda em  $\mathcal{D}_1$ , se  $f$  satisfaz  $(f_1), (f_2), (f_3)$  e  $a(s) = s^2 - s + 2$  com  $s \in [0, 1]$  ( $a(x) = x_3^2 - 3x_3 + 4, x \in \mathcal{D}_1$ ) então o problema (3.1.2) possui uma família de soluções estacionárias não-constantes e estáveis  $\{v_\epsilon\}_{0 < \epsilon \leq \epsilon_0}$  para algum  $\epsilon_0 > 0$ , uma vez que  $(\psi_1\sqrt{a})(\cdot)$  assume um mínimo local isolado em  $s = \frac{1}{2}$ .
- (iv) Em  $\mathcal{D}_3$  a curvatura Gaussiana  $K$  é negativa, e se  $a(s) = -s^2 + \frac{1}{2}$  ( $a(x) = -4\sqrt{x_1^2 + x_2^2} + \frac{5}{2}, x \in \mathcal{D}_3$ ) então (3.1.1) ocorre, isto é, não existem padrões de (2.1.2) em  $\mathcal{D}_3$ .

### 3.2 Uma Condição Suficiente para Existência de Padrões

Nesta seção construiremos uma função  $f(\cdot)$  que depende de  $a(\cdot)$  e  $\psi(\cdot)$ , tal que o problema (2.1.2) tenha padrões. Seguiremos os mesmos passos dos trabalhos [2, 13]. Em [13] é considerado um problema unidimensional

$$\left. \begin{aligned} c(x)u_t &= (a^2(x)u_x)_x + f(u), \quad 0 < x < 1, \\ u_x(0, t) &= u_x(1, t) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.2.1)$$

sendo  $c(x)$  e  $a(x)$  funções suaves e positivas. É provado que se  $a_{xx}(x) \leq 0$  para todo  $x \in [0, 1]$ , então toda solução estacionária não-constante de (3.2.1) é instável, e se  $a_{xx}(x_0) > 0$  para algum  $x_0 \in [0, 1]$  então o problema (3.2.1) possui uma solução estacionária estável não-constante, desde que o termo de reação  $f$  seja convenientemente tomado.

Em [2], um resultado análogo é obtido para o problema (2.1.2) com  $a=cte$ , isto é, se  $-\left(\frac{\psi'}{\psi}\right)'(s) \geq 0$  para todo  $s \in (0, l)$  então não existem padrões de (2.1.2), mas se  $-\left(\frac{\psi'}{\psi}\right)'(s_0) < 0$  para algum  $s_0 \in (0, l)$  então a existência de padrões é garantida se  $f$  for convenientemente escolhida. Resultados análogos para o problema (2.1.1), ou seja, em superfícies de revolução sem fronteira, e  $a=cte$ , aparecem em [3] com a hipótese adicional de que  $\psi$  é uma função analítica. Como dito anteriormente, acreditamos que nosso resultado pode ser obtido em superfícies de revolução sem fronteira assumindo  $\psi$  analítica e seguindo os passos de [3].

Nosso resultado não é tão forte quanto os obtidos acima, aqui nós apenas tratamos um caso particular onde

$$-\left(\frac{\psi'}{\psi}\right)'(s_0) < \frac{a'(s_0)\psi'(s_0) + a''(s_0)\psi(s_0)}{2a(s_0)\psi(s_0)},$$

para algum  $s_0 \in (0, l)$ , ou seja, um caso particular que nega a hipótese do nosso resultado de não-existência obtido no Teorema 3.1.1. O principal motivo da limitação de nosso resultado é a necessidade de conhecer o comportamento do termo de difusibilidade  $a(\cdot)$  no interior do domínio.

O objetivo desta seção é provar o seguinte teorema:

**Teorema 3.2.1.** *Se para algum  $s_0 \in (0, l)$*

$$\left(\frac{(a\psi)'}{\psi}\right)'(s_0) > 0 \tag{3.2.2}$$

*e a difusibilidade  $a(\cdot)$  satisfizer*

$$a'(s) \geq 0 \text{ em } (0, s_0) \text{ e } a'(s) \leq 0 \text{ em } (s_0, l), \tag{3.2.3}$$

*então existe  $f \in C^1(\mathbb{R})$  tal que o problema (2.1.2) admite uma solução estacionária não-constante e assintoticamente estável.*

Novamente, conduziremos a demonstração deste teorema estudando o problema (2.1.8) (veja Observação 2.1.1).

Tal demonstração necessitará de vários resultados preliminares. As próximas duas proposições relacionadas ao princípio do máximo podem ser encontradas em

[24]. De fato, em [24] as hipóteses são menos restritivas do que as enunciadas abaixo.

**Proposição 3.2.2.** *Se  $u(x)$  satisfizer a inequação diferencial*

$$u'' + g(x)u' + h(x)u \geq 0 \tag{3.2.4}$$

*em um intervalo  $(a, b)$  com  $h(x) \leq 0$ , se  $g$  e  $h$  são funções limitadas sobre cada subintervalo fechado de  $(a, b)$ , e se  $u$  assumir um máximo não-negativo  $M$  em um ponto interior  $c \in (a, b)$ , então  $u(x) \equiv M$ .*

**Proposição 3.2.3.** *Suponha que  $u$  é uma solução não-constante de (3.2.4) com derivadas laterais em  $a$  e  $b$ , que  $h(x) \leq 0$  e que  $g$  e  $h$  são limitadas em  $[a, b]$ . Se  $u$  possui um máximo não-negativo em  $a$ , então  $u'(a) < 0$ . Se  $u$  possui um máximo não-negativo em  $b$ , então  $u'(b) > 0$ .*

**Lema 3.2.4.** *Seja  $u(x)$  uma solução da equação*

$$u'' + g(x)u' + h(x)u = 0, \quad x \in (a, b) \tag{3.2.5}$$

*satisfazendo  $u(a) = c_1$  e  $u'(a) = c_2$ , com  $c_1$  e  $c_2$  constantes e  $g$  e  $h$  funções limitadas em  $[a, b]$  com  $h(x) \leq 0$ . Se  $z(x)$  for uma função que satisfaz*

$$z'' + g(x)z' + h(x)z \geq 0, \quad x \in (a, b) \tag{3.2.6}$$

e

$$z(a) \geq c_1, \quad z'(a) \geq c_2, \tag{3.2.7}$$

*então  $z(x) \geq u(x)$  em  $(a, b)$ .*

*Demonstração.* Defina a função  $v(x) = z(x) - u(x)$ , temos que

$$v'' + g(x)v' + h(x)v \geq 0, \quad x \in (a, b)$$

e

$$v(a) \geq 0, \quad v'(a) \geq 0.$$

Como  $v(a) \geq 0$ , a função  $v$  possui um máximo não-negativo em qualquer subintervalo  $[a, x_0]$  de  $[a, b]$ . Pela Proposição 3.2.2 este máximo deve ocorrer em  $a$  ou em  $x_0$ . Sendo  $v'(a) \geq 0$  concluímos da Proposição 3.2.3 que o máximo não pode ser em  $a$ , a menos que  $v$  seja uma função constante em  $[a, x_0]$ . Segue que

$$v(x_0) \geq v(a),$$

ou seja, trocando  $x_0$  por  $x$  e usando a definição de  $v$ ,

$$u(x) \leq c_1 + z(x) - z(a)$$

como  $z(a) \geq c_1$ , temos que  $z(x) \geq u(x)$  em  $(a, b)$ .  $\square$

**Lema 3.2.5.** *Seja  $v$  uma solução estacionária do problema (2.1.2). Se existe  $w \in C^2(\mathcal{D}) \cap C^1(\overline{\mathcal{D}})$  tal que  $w \geq 0$ ,  $w$  não identicamente nulo em  $\overline{\mathcal{D}}$  e*

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div}_g(a\nabla_g w) + f'(v)w &\leq 0, & \mathcal{D} \\ \frac{\partial w}{\partial \nu} &> 0, & \partial\mathcal{D} \end{aligned} \right\} \quad (3.2.8)$$

então  $v$  é assintoticamente estável.

*Demonstração.* Seja  $\lambda_1$  o menor autovalor do problema linearizado:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div}_g(a\nabla_g \phi) + f'(v)\phi + \lambda\phi &= 0, & \mathcal{D} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \nu} &= 0, & \partial\mathcal{D} \end{aligned} \right\} \quad (3.2.9)$$

e  $\phi_1$  uma autofunção correspondente. Temos que, como  $\phi_1 > 0$  em  $\overline{\mathcal{D}}$  (veja [35]),

$$\begin{aligned} 0 &\geq \int_{\mathcal{D}} \phi_1 [\operatorname{div}_g(a\nabla_g w) + f'(v)w] \, d\sigma \\ &= - \int_{\mathcal{D}} \nabla_g \phi_1 (a\nabla_g w) \, d\sigma + \int_{\partial\mathcal{D}} \phi_1 a \frac{\partial w}{\partial \nu} \, d\gamma + \int_{\mathcal{D}} \phi_1 f'(v)w \, d\sigma \\ &= \int_{\mathcal{D}} w [\operatorname{div}_g(a\nabla_g \phi_1) + f'(v)\phi_1] \, d\sigma + \int_{\partial\mathcal{D}} a \left[ \phi_1 \frac{\partial w}{\partial \nu} - w \frac{\partial \phi_1}{\partial \nu} \right] \, d\gamma \\ &= -\lambda_1 \int_{\mathcal{D}} w \phi_1 \, d\sigma + \int_{\partial\mathcal{D}} a \phi_1 \frac{\partial w}{\partial \nu} \, d\gamma \\ &> -\lambda_1 \int_{\mathcal{D}} w \phi_1 \, d\sigma. \end{aligned}$$

Segue que  $\lambda_1 > 0$  e portanto  $v$  é assintoticamente estável.  $\square$

Iremos agora construir etapas importantes para iniciar a demonstração do Teorema 3.2.1. Por (3.2.2) e pela regularidade de  $\psi$  e  $a$ , podemos encontrar uma vizinhança  $V$  de  $s_0$  tal que

$$\left( \frac{(a\psi)'}{\psi} \right)'(s) > 0, \quad \forall s \in V. \quad (3.2.10)$$

Agora considere quatro números  $R_1, R_2, R_3$  e  $R_4$  pertencentes a  $V$  tais que

$$R_1 < R_2 < s_0 < R_3 < R_4. \quad (3.2.11)$$

Conseqüentemente, temos que

$$\left( \frac{(a\psi)'}{\psi} \right)' (s) > 0, \quad \forall s \in [R_1, R_4]. \quad (3.2.12)$$

Considere  $z_1 = z_1(s)$  solução do problema de Cauchy

$$\left. \begin{aligned} \left[ \frac{(a\psi z)'}{\psi} \right]' - Bz &= 0 \quad \text{em } [0, R_2) \\ z(0) &= 0, \quad z'(0) = 1. \end{aligned} \right\} \quad (3.2.13)$$

onde

$$B > \bar{B} := \max_{[0, l]} \left| \left[ \frac{(a\psi)'}{\psi} \right]' \right|. \quad (3.2.14)$$

Analogamente, seja  $z_2 = z_2(s)$  solução do problema de Cauchy

$$\left. \begin{aligned} \left[ \frac{(a\psi z)'}{\psi} \right]' - Bz &= 0 \quad \text{em } (R_3, l] \\ z(0) &= 0, \quad z'(0) = -1. \end{aligned} \right\} \quad (3.2.15)$$

Escreveremos  $z_i(s) = z_i(s, B)$ , ( $i = 1, 2$ ), quando interessar a dependência da solução com o parâmetro  $B$ .

**Lema 3.2.6.** *A solução  $z_1$  do problema (3.2.13) tem as seguintes propriedades:*

- (i)  $z_1 > 0$  em  $(0, R_2)$ ;
- (ii)  $z_1(\cdot, B)$  é crescente em  $[0, R_2)$  para todo  $B > \bar{B}$ ;
- (iii)  $z_1(s, \cdot)$  é crescente em  $(\bar{B}, \infty)$  para todo  $s \in (0, R_2)$ ;
- (iv)  $\lim_{B \rightarrow \infty} z_1(s, B) = \infty$  para todo  $s \in (0, R_2)$ .

*Similarmente para  $z_2$  temos:*

- (i')  $z_2 > 0$  em  $(R_3, l)$ ;
- (ii')  $z_2(\cdot, B)$  é decrescente em  $(R_3, l]$  para todo  $B > \bar{B}$ ;
- (iii')  $z_2(s, \cdot)$  é crescente em  $(\bar{B}, \infty)$  para todo  $s \in (R_3, l)$ ;
- (iv')  $\lim_{B \rightarrow \infty} z_2(s, B) = \infty$  para todo  $s \in (R_3, l)$ .

*Demonstração.* (i) Assuma que exista  $s_1 \in (0, R_2)$  tal que

$$z_1(s_1) = 0 \text{ e } z_1(s) > 0, \quad \forall s \in (0, s_1).$$

Então, para algum  $s_2 \in (0, s_1)$  teríamos que

$$z_1(s_2) = \max_{[0, s_1]} z_1 > 0,$$

ou seja,  $z_1'(s_2) = 0$  e  $z_1''(s_2) \leq 0$ , daí

$$\begin{aligned} \left[ \frac{(a\psi z_1)'}{\psi} \right]'(s_2) - Bz_1(s_2) &= \left[ \frac{(a\psi)'z_1 + a\psi z_1'}{\psi} \right]'(s_2) - Bz_1(s_2) \\ &= \left[ \left( \frac{(a\psi)'}{\psi} \right)' z_1 + \frac{(a\psi)'}{\psi} z_1' \right](s_2) \\ &\quad + (a'z_1' + az_1'')(s_2) - Bz_1(s_2) \\ &= (az_1'')(s_2) + z_1(s_2) \left[ \left( \frac{(a\psi)'}{\psi} \right)'(s_2) - B \right] \\ &\stackrel{(*)}{<} 0. \end{aligned}$$

O que contradiz a definição de  $z_1$ . Note que em (\*) foi utilizado (3.2.14).

(ii) Suponha, por absurdo, que exista  $s_1 \in (0, R_2)$  tal que

$$z_1'(s) > 0 \quad \forall s \in (0, s_1) \text{ e } z_1'(s_1) = 0.$$

Então  $z_1''(s_1) \leq 0$ . Por outro lado, com contas análogas às feitas em (i), temos que

$$z_1''(s_1) = - \left( \frac{z_1}{a} \right)'(s_1) \left[ \left( \frac{(a\psi)'}{\psi} \right)'(s_1) - B \right] > 0,$$

já que por (i)  $z_1(s_1) > 0$ . Portanto,  $z_1$  é crescente em  $(0, R_2)$ .

(iii) Tome  $B_1 > B_2 \geq \bar{B}$  e note que

$$\left. \begin{aligned} \left[ \frac{(a\psi z_1(s, B_1))'}{\psi} \right]' - B_2 z_1(s, B_1) &\geq 0 \quad (0, R_2) \\ z_1(0, B_1) = 0, \quad z_1'(0, B_1) &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (3.2.16)$$

A desigualdade no problema acima ocorre pois

$$\left[ \frac{(a\psi z_1(s, B_1))'}{\psi} \right]' - B_2 z_1(s, B_1) = (B_1 - B_2) z_1(s, B_1) \geq 0,$$

para todo  $s \in (0, R_2)$ .

Nosso objetivo é utilizar o Lema 3.2.4. Um conta simples mostra que, neste caso,

$$g(s) = \left[ \frac{(a\psi)'}{a\psi} + \frac{a'}{a} \right] (s) \quad \text{e} \quad h(s) = \frac{1}{a}(s) \left[ \left( \frac{(a\psi)'}{\psi} \right)' - B \right] (s)$$

pela regularidade de  $a$  e  $\psi$  temos que  $g$  e  $h$  são limitadas em  $[0, R_2]$  e por (3.2.14) temos  $h \leq 0$ . Agora, como  $z_1(\cdot, B_2)$  é uma solução da equação (3.2.16) temos pelo Lema 3.2.4 que

$$z_1(s, B_2) \leq z_1(s, B_1), \quad \forall s \in (0, R_2).$$

- (iv) Fixe qualquer  $B_1 > \bar{B}$ , integrando a equação (3.2.13) e lembrando que  $z_1$  satisfaz tal equação, temos para todo  $B \geq B_1$

$$(a\psi z_1(\eta, B))' = \psi \int_0^\eta B z_1(t, B) dt + \psi c_1.$$

Integrando novamente temos

$$a\psi z_1(s, B) = B \int_0^s \psi(\eta) \int_0^\eta z_1(t, B) dt d\eta + c_1 \int_0^s \psi(\eta) d\eta + c_2.$$

Como  $\psi > 0$ ,  $a > 0$  e por (iii)

$$z_1(s, B) \geq \frac{1}{a\psi} \left[ B \int_0^s \psi(\eta) \int_0^\eta z_1(t, B_1) dt d\eta + c_1 \int_0^s \psi(\eta) d\eta + c_2 \right]$$

sendo  $c_1$  e  $c_2$  constantes independentes de  $B$ , a afirmação segue fazendo  $B \rightarrow \infty$ .

Os itens relacionados a  $z_2$  são demonstrados de maneira análoga. □

Agora definimos a seguinte função  $z : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$z(s) := \begin{cases} z_1(s), & \text{se } s \in [0, R_2) \\ z_3(s), & \text{se } s \in [R_2, R_3] \\ z_2(s), & \text{se } s \in (R_3, l] \end{cases} \quad (3.2.17)$$

sendo  $z_3$  uma função positiva, suave e que torne a função  $z$  também suave nos



pontos  $s = R_2$  e  $s = R_3$ . Nestas condições devemos ter pelo Lema 3.2.6 (ii) e (ii') que  $z'_3(R_2) > 0$  e  $z'_3(R_3) < 0$ , respectivamente. Então deve existir  $\bar{s} \in [R_2, R_3]$  tal que  $z'_3(\bar{s}) = 0$ , e portanto tomaremos  $z_3$  de modo que  $s_0$  (lembre que  $s_0 \in [R_2, R_3]$ ) seja o único ponto crítico de  $z_3$ . Conseqüentemente  $z''_3(s_0) < 0$ .

Construímos  $z_3$  desta maneira para garantir que a função  $a'z'_3$  seja positiva em  $[R_2, R_3]$ , assim pelo Lema 3.2.6 e pelas hipóteses sobre  $a(\cdot)$  (veja (3.2.3)) temos

$$a'z'(s) \geq 0, \quad \forall s \in (0, l). \tag{3.2.18}$$

Além disso, a função  $z$  é suave em  $[0, l]$  e

$$z > 0 \text{ em } (0, l) \text{ e } z(0) = z(l) = 0. \tag{3.2.19}$$

Abaixo temos uma ilustração das funções  $a$  e  $z$ .

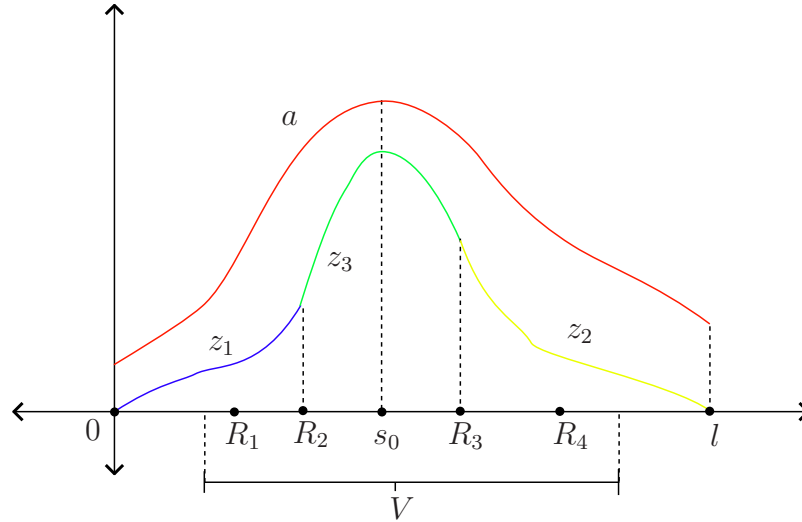


Figura 3.4: Funções  $a(\cdot)$  e  $z(\cdot)$

**Lema 3.2.7.** Dada a função  $z$  definida acima, existe  $f \in C^1(\mathbb{R})$  tal que a função

$$Z(s) := \int_0^s z(t) dt \quad (s \in [0, l]) \tag{3.2.20}$$

é uma solução estacionária não-constante de (2.1.2).

*Demonstração.* Como  $z > 0$  temos que  $u = Z(s)$  é uma função crescente em  $(0, l)$ . Assim, podemos definir uma função suave  $X(u)$  por

$$Z(X(u)) = u, \quad 0 < u < Z(l),$$

ou equivalentemente

$$X(Z(s)) = s, \quad 0 < s < l.$$

Sendo assim, defina a função  $f$  por

$$f(u) := \begin{cases} -Bu - a(0) & \text{se } u \leq 0 \\ -\frac{\frac{d}{du} \{(a\psi)[X(u)]z[X(u)]\}}{\psi[X(u)]\frac{d}{du}[X(u)]} & \text{se } 0 < u < Z(l) \\ -Bu + BZ(l) + a(l) & \text{se } u \geq Z(l). \end{cases} \quad (3.2.21)$$

Não é difícil ver que a função  $f$  assim definida é contínua em  $\mathbb{R}$  e de classe  $C^1$  em  $\mathbb{R} - \{0, Z(l)\}$ , note que  $X(\cdot)$  é suave e satisfaz  $X'(u) = 1/z(X(u)) > 0$ , ou seja,  $f(u)$  é suave em  $(0, Z(l))$ .

Portanto, é suficiente provar que  $f$  é também suave em  $u = 0$  e  $u = Z(l)$ , assim teremos que  $f \in C^1(\mathbb{R})$ . Para mostrar que  $f$  é suave em  $u = 0$  basta provar que

$$f(u) = -Bu - a(0)$$

para todo  $u \in (0, Z(R_2))$ .

Integrando (3.2.13) em  $(0, s)$ , para qualquer  $s$  fixado em  $(0, R_2)$ , obtemos

$$\frac{(a\psi z)'}{\psi}(s) - \frac{(a\psi z)'}{\psi}(0) = B \int_0^s z(t) dt,$$

i.e.

$$\frac{(a\psi z)'}{\psi}(s) = BZ(s) + a(0). \quad (3.2.22)$$

Pela definição de  $f$ , temos para todo  $s \in (0, l)$

$$f(Z(s)) = -\frac{(a\psi z)'}{\psi}(s) \quad (3.2.23)$$

daí, por (3.2.22) e (3.2.23)

$$f(Z(s)) = -BZ(s) - a(0),$$

para todo  $s \in (0, R_2]$ . Agora como  $Z(s)$  cobre  $(0, Z(R_2)]$  quando  $s$  varia em  $(0, R_2)$ ,  $f(u)$  pode ser escrito como

$$f(u) = -Bu - a(0),$$

para todo  $u \in (0, Z(R_2))$ .

Analogamente integramos (3.2.15) sobre  $(s, l)$  para qualquer  $s$  fixado em  $[R_3, l)$

$$\begin{aligned} \frac{(a\psi z)'}{\psi}(l) - \frac{(a\psi z)'}{\psi}(s) &= B \int_0^s z(t) dt \\ &= B \int_0^l z(t) dt - B \int_0^s z(t) dt \\ &= BZ(l) - BZ(s), \end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned} -\frac{(a\psi z)'}{\psi}(s) &= -BZ(s) + BZ(l) - a(l)z'(l) \\ &= -BZ(s) + BZ(l) + a(l). \end{aligned} \tag{3.2.24}$$

Daí, por (3.2.23) e (3.2.24), temos

$$f(Z(s)) = -BZ(s) + BZ(l) + a(l),$$

para todo  $s \in [R_3, l)$ , e então  $f(u) = -Bu + BZ(l) + a(l)$  para todo  $u \in [Z(R_3, Z(l))$ . Portanto  $f \in C^1(\mathbb{R})$ .

Provemos agora que  $Z(\cdot)$  é solução estacionária de (2.1.2) com  $f$  definida por (3.2.21). Para todo  $s \in (0, l)$ ,  $Z(s) \in (0, Z(a))$ , assim

$$f(Z(s)) = -\frac{(a\psi z)'}{\psi}(s) = f(Z(s)) = -\frac{(a\psi Z')'}{\psi}(s),$$

i.e.

$$\frac{(a\psi Z')'}{\psi}(s) + f(Z(s)) = 0 \quad s \in (0, l),$$

e ainda

$$Z'(0) = z(0) = 0 = Z(l) = z(a),$$

segue que  $Z(\cdot)$  é solução estacionária de (2.1.2). Além disso,  $Z(\cdot)$  não é constante uma vez que  $Z' = z > 0$  em  $(0, l)$ .  $\square$

Estamos agora em condições de iniciar a demonstração do Teorema 3.2.1.

*Demonstração. (do Teorema 3.2.1)*

Sejam  $z$  a função definida por (3.2.17),  $m_1 > 0$  e  $m_2 > 0$  constantes a serem escolhidas convenientemente em breve. Defina,

$$w(s) := \begin{cases} z(s) - m_1 z(R_1)(s - R_2)^3 & \text{se } s \in [0, R_2) \\ z(s) & \text{se } s \in [R_2, R_3] \\ z(s) + m_2 z(R_4)(s - R_3)^3 & \text{se } s \in (R_3, l]. \end{cases} \tag{3.2.25}$$

Temos que

$$w > 0 \text{ em } [0, l], \quad (3.2.26)$$

e  $w$  depende do parâmetro  $B$ , pois  $z$  depende de  $B$  (veja (3.2.13), (3.2.15) e (3.2.17)).

Além disso,

$$\frac{\partial w}{\partial \nu}(0) = -w'(0), \text{ e } \frac{\partial w}{\partial \nu}(l) = w'(l) \text{ (veja (2.1.7))} \quad (3.2.27)$$

Com o objetivo de utilizar o Lema 3.2.5, mostraremos a seguinte afirmação:

*Afirmção:* Seja  $Z$  solução estacionária de (2.1.2) definida em (3.2.20). Então existem  $m_1 > 0$ ,  $m_2 > 0$  e  $B > 0$  satisfazendo (3.2.14) tal que

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div}_g(a\nabla_g w) + f'(v)w &\leq 0, & D \\ \frac{\partial w}{\partial \nu} &> 0, & \partial D. \end{aligned} \right\} \quad (3.2.28)$$

Primeiramente observamos que por (3.2.27) e (2.1.5), o problema acima é equivalente a

$$\left. \begin{aligned} \frac{(a\psi w')'}{\psi} + f'(Z)w &< 0, & (0, l) \\ w'(0) &< 0, & w'(l) > 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.2.29)$$

Agora consideramos o intervalo  $(0, l)$  como a união disjunta

$$(0, l) = (0, R_2) \cup [R_2, R_3] \cup (R_3, l).$$

Para todo  $s \in (0, R_2) \cup (R_3, l)$  temos que

$$f'(Z(s)) = -B. \quad (3.2.30)$$

Por (3.2.13) e (3.2.15),

$$\frac{(a\psi z')'}{\psi} - Bz = - \left[ \frac{(a\psi)'}{\psi} \right]' z - a'z'. \quad (3.2.31)$$

Assim, para todo  $s \in (0, R_2)$

$$\begin{aligned} \frac{(a\psi w')'}{\psi} + f'(Z)w &= \frac{(a\psi w')'}{\psi} - Bw \\ &= \frac{(a\psi z' - 3a\psi m_1 z(R_1)(s - R_2)^2)'}{\psi} - Bz + Bz(R_1)(s - R_1)^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(a\psi z')}{\psi} - Bz - 3\frac{(a\psi)'}{\psi}m_1z(R_1)(s - R_2)^2 \\
 &\quad - 6am_1z(R_1)(s - R_2) + Bz(R_1)(s - R_2)^3 \\
 &= - \left[ \frac{(a\psi)'}{\psi} \right]' z - a'z' + m_1z(R_1)(R_2 - s) [6a + \\
 &\quad + 3\frac{(a\psi)'}{\psi}(s - R_2) - Bz(R_1)(s - R_2)^2].
 \end{aligned}$$

Lembrando que  $(0, R_2) = (0, R_1) \cup [R_1, R_2)$ , que  $a'z' \geq 0$  em  $(0, l)$  (veja (3.2.18)) e que  $z = z_1$  em  $(0, R_2)$ , temos

- em  $(0, R_1)$ ,

$$\begin{aligned}
 - \left[ \left( \frac{(a\psi)'}{\psi} \right)' z \right] (s) - a'z'(s) &\leq - \left[ \left( \frac{(a\psi)'}{\psi} \right)' z \right] (s) \\
 &\leq \left| \left( \frac{(a\psi)'}{\psi} \right)' z \right| (s) \\
 &\leq \bar{B}z(R_1),
 \end{aligned}$$

sendo  $\bar{B}$  definido em (3.2.14).

- em  $[R_1, R_2)$ , temos

$$- \left[ \left( \frac{(a\psi)'}{\psi} \right)' z \right] (s) - a'z'(s) \leq -\hat{B}z(s) \leq -\hat{B}z(R_1),$$

onde

$$\hat{B} := \min_{[R_0, R_1]} \left[ \frac{(a\psi)'}{\psi} \right]',$$

e  $\hat{B} > 0$  devido a (3.2.12).

De posse das desigualdades acima, obtemos em  $(0, R_1)$

$$\frac{(a\psi w')'}{\psi} + f'(Z)w \leq z(R_1) \left[ \bar{B} + m_1R_2 (3(CR_2 + 2a(0)) - B(R_1 - R_2)^2) \right], \tag{3.2.32}$$

onde

$$C := \max_{[0, l]} \left| \frac{(a\psi)'}{\psi} \right|.$$

Similarmente, em  $[R_1, R_2)$

$$\frac{(a\psi w')'}{\psi} + f'(Z)w \leq z(R_1) \left[ -\hat{B} + m_1 R_2 (6a(0) + 3CR_2) \right]. \quad (3.2.33)$$

Agora, se

$$m_1 := \frac{\hat{B}}{3R_2(CR_2 + 2a(0))}$$

uma conta simples mostra que o lado direito de (3.2.32) e (3.2.33) são, respectivamente, negativo e nulo se

$$B \geq \max \left\{ \bar{B}, 3 \left( 1 + \frac{\bar{B}}{\hat{B}} \right) \left( \frac{CR_2 + 2a(0)}{(R_1 - R_2)^2} \right) \right\}.$$

Segue que

$$\frac{(a\psi w')'}{\psi} + f'(Z)w < 0 \text{ em } (0, R_2]. \quad (3.2.34)$$

De maneira análoga, obtemos

$$\frac{(a\psi w')'}{\psi} + f'(Z)w < 0 \text{ em } (R_3, l). \quad (3.2.35)$$

Consideramos agora o intervalo  $[R_2, R_3]$ . Como  $Z$  é uma solução estacionária do problema (2.1.2),  $Z$  também é solução estacionária e independente de  $\theta$  de (2.1.8). Portanto em  $[R_2, R_3]$ , ocorre

$$aZ'' + \frac{(a\psi)'}{\psi} Z' + f(Z) = 0.$$

Diferenciando a equação acima e lembrando que  $Z' = z$ , temos

$$az'' + \frac{(a\psi)'}{\psi} z' + f'(Z)z = - \left[ \frac{(a\psi)'}{\psi} \right]' z - a'z',$$

como  $w = z$  em  $[R_2, R_3]$

$$\frac{(a\psi w')'}{\psi} + f'(Z)w = aw'' + \frac{(a\psi)'}{\psi} w' + f'(Z)w = - \left[ \frac{(a\psi)'}{\psi} \right]' z - a'z' < 0.$$

A última desigualdade ocorre pois  $z > 0$  em  $[R_2, R_3]$ , por (3.2.12) e por (3.2.18).

Assim, concluímos a primeira desigualdade de (3.2.29). Resta-nos provar que  $w'(0) < 0$  e  $w'(l) > 0$ . Observe que pelo Lema 3.2.6 (iv) e (iv') podemos tomar  $B$  suficientemente grande tal que

$$z(R_1) = z_1(R_1, B) > \frac{1}{3m_1 R_2^2}, \text{ e } z(R_4) = z_2(R_4, B) > \frac{1}{3m_2(l - R_3)^2},$$

e então

$$w'(0) = 1 - 3m_1 z(R_1) R_2^2 < 0, \text{ e } w'(l) = -1 + 3m_2 z(R_4) (l - R_3)^2 > 0.$$

Isto completa a prova da *Afirmção*. Portanto pelos Lemas 3.2.5 e 3.2.7, temos que  $Z$  é uma solução estacionária estável não-constante do problema (2.1.2) com  $f$  dada por (3.2.21).

O Teorema 3.2.1 está provado. □

**Observação 3.2.8.** Como esperado, as hipóteses sobre  $\psi(\cdot)$  e  $a(\cdot)$  assumidas no Teorema 3.2.1, a saber (3.2.2) e (3.2.3), que garantem a existência de padrões, implicam que

$$-\left(\frac{\psi'}{\psi}\right)'(s_0) < \frac{(a'\psi)'(s_0)}{2a(s_0)\psi(s_0)},$$

em concordância com o Teorema 3.1.1.

**Exemplo 3.2.9.** Considere o domínio de revolução  $\mathcal{D}$  obtido das parametrizações:

$$\psi(s) = \frac{s^2}{4} + \frac{1}{2}, \quad \chi(s) = \frac{s}{4}\sqrt{4-s^2} + \arcsin\left(\frac{s}{2}\right),$$

com  $s \in (0, 1)$ . Considere também

$$a(s) = -s^2 + s + 3$$

i.e.,  $a(x) = -4\sqrt{x_1^2 + x_2^2} + \sqrt{4\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 2} + 5$ ,  $x \in \mathcal{D}$ . Veja abaixo uma ilustração desta situação:

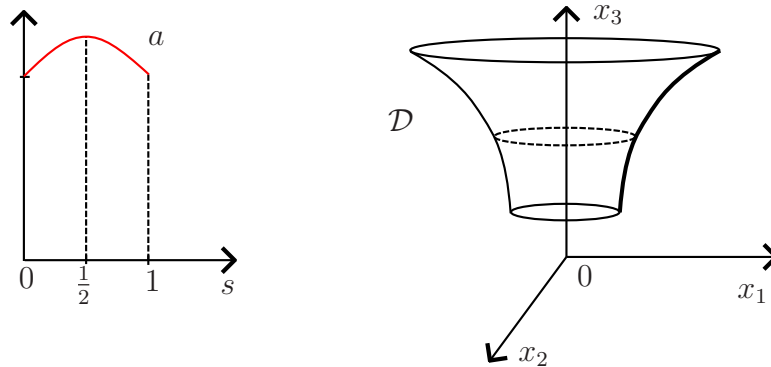


Figura 3.5: Função  $a(\cdot)$  e domínio de revolução  $\mathcal{D}$ .

Uma conta simples mostra que as hipóteses (3.2.2) e (3.2.3) são satisfeitas tomando  $s_0 = \frac{1}{2}$ , e portanto existe  $f$  tal que o problema (2.1.2) admite solução estacionária estável não-constante.

# Capítulo 4

## Sobre a Necessidade da Condição de Igualdade de Área

O objetivo deste capítulo é provar que a condição  $(f_2)$ , chamada “*condição de igualdade de área*”, é necessária para garantirmos a existência das famílias de soluções de (2.3.1) e (3.1.2), que desenvolvem camada de transição interna, tal como afirmam os Teoremas 2.3.5 e 3.1.2.

Faremos aqui a demonstração para o caso em que o domínio é uma superfície de revolução sem fronteira, no entanto, ficará evidente ao longo do capítulo que o mesmo pode ser feito sobre uma superfície de revolução com fronteira onde é prescrita a condição de Neumann (veja Observação 4.2.3).

### 4.1 Preliminares

A condição de igualdade de área  $(f_2)$  é, de fato, uma condição necessária para o desenvolvimento de camada de transição interna (veja a definição abaixo) das soluções estacionárias de (2.3.4), isto é,

$$\epsilon (\psi a v'_\epsilon)' + \psi f(v_\epsilon) = 0, \quad s \in (0, l) \quad (4.1.1)$$

onde  $f$  satisfaz  $(f_1)$ ,  $\psi(0) = \psi(l) = 0$  e, apenas por simplicidade,  $\epsilon^2$  é trocado por  $\epsilon$ .

**Definição 4.1.1.** Diremos que uma família  $\{v_\epsilon\}_{0 < \epsilon \leq \epsilon_0}$  de soluções de (4.1.1) em  $C^2(I)$  desenvolve camada de transição interna, com interface em um ponto  $p \in (0, l)$ , quando  $\epsilon \rightarrow 0$ , se

$$v_\epsilon \rightarrow v_0 \quad \text{em } L^1(I), \quad \text{quando } \epsilon \rightarrow 0,$$

onde  $v_0 = \alpha \chi_{(0,p)} + \beta \chi_{(p,l)}$ , sendo  $\alpha$  e  $\beta$  como em  $(f_1)$ .



Nós apenas consideramos um ponto  $p \in (0, l)$  por simplicidade e necessidade deste trabalho. Poderíamos tomar uma coleção finita de pontos em  $(0, l)$  na definição acima, e isto nos traria pequenas dificuldades técnicas, mas não comprometeria nosso principal resultado que será enunciado na seção seguinte.

Citamos o trabalho [19] como referência ao leitor, onde os autores apresentam exemplos da vasta literatura sobre o assunto, que requerem a condição de igualdade de área para a formação de camada de transição interna por soluções de determinados problemas elíticos. Veja também [20] e suas referências.

## 4.2 O Resultado Principal

O seguinte teorema ainda é válido se a convergência em  $L^1(I)$  na Definição 4.1.1 for trocada por convergência uniforme sobre conjuntos compactos em  $I \setminus \{p\}$ . A demonstração permanece válida sem qualquer modificação, e o único motivo para usarmos a convergência em  $L^1(I)$  é que, neste caso, possuímos exemplos nos capítulos anteriores de soluções que satisfazem tal condição.

**Teorema 4.2.1.** *Seja  $\{v_\epsilon\}_{0 < \epsilon \leq \epsilon_0}$  uma família de soluções de (4.1.1) uniformemente limitada (com respeito a  $\epsilon$ ) que desenvolve camada de transição interna com interface em  $p$ . Então*

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\xi) \, d\xi = 0.$$

*Demonstração.* Para facilitar a notação omitiremos o subíndice  $\epsilon$  em  $v_\epsilon$ , nos próximos cálculos. Multiplicando a equação (4.1.1) por  $sv'$  temos

$$\epsilon sv'(a\psi v')' + sv'\psi f(v) = 0.$$

Note que

$$(sv'a\psi v')' = sv'(a\psi v')' + a\psi v'(v' + sv''),$$

e

$$a\psi v'(v' + sv'') = a\psi \left( (v')^2 + s \left[ \frac{(v')^2}{2} \right]' \right),$$

assim

$$sv'(a\psi v')' = (sv'a\psi v')' - a\psi \left( (v')^2 + s \left[ \frac{(v')^2}{2} \right]' \right). \quad (4.2.1)$$

Multiplicando a equação acima por  $-\epsilon$  e lembrando que, por (4.1.1)

$$-\epsilon(a\psi v')' = \psi f(v),$$

temos

$$sv'\psi f(v) = -\epsilon(sv'a\psi v')' + \epsilon a\psi \left( (v')^2 + s \left[ \frac{(v')^2}{2} \right]' \right).$$

Integrando a equação acima sobre  $(0, l)$ , obtemos

$$\begin{aligned} -\epsilon \int_0^l (sv'a\psi v')' ds + \epsilon \int_0^l a\psi \left[ (v')^2 + s \left( \frac{(v')^2}{2} \right)' \right] ds \\ = \int_0^l sv'\psi f(v) ds \\ = \int_0^l s(\psi F(v))' ds - \int_0^l s\psi' F(v) ds \end{aligned}$$

onde  $F(v) = \int_{\theta}^v f(\xi) d\xi$  e  $\theta$  é qualquer constante tal que  $\alpha < \theta < \beta$ .

Também temos que

$$(sa\psi(v')^2)' = sa\psi [(v')^2]' + (v')^2 (a\psi + s(a\psi)')$$

assim

$$\begin{aligned} -\epsilon \int_0^l [sa\psi [(v')^2]' + (v')^2 (a\psi + s(a\psi)')] ds + \epsilon \int_0^l [a\psi(v')^2 + a\psi s \left( \frac{(v')^2}{2} \right)'] ds = \\ = \int_0^l (s\psi F(v))' ds - \int_0^l \psi F(v) ds - \int_0^l s\psi' F(v) ds \end{aligned}$$

uma vez que  $(s\psi F(v))' = \psi F(v) + s(\psi F(v))'$ . Logo

$$\begin{aligned} -\frac{\epsilon}{2} \int_0^l sa\psi [(v')^2]' ds - \epsilon \int_0^l (v')^2 s(a\psi)' ds \\ = \int_0^l (s\psi F(v))' ds - \int_0^l \psi F(v) ds - \int_0^l s\psi' F(v) ds. \end{aligned}$$

Fazendo integração por partes, obtemos

$$\begin{aligned} -\frac{\epsilon}{2} sa\psi(v')^2 \Big|_0^l + \frac{\epsilon}{2} \int_0^l (v')^2 s(a\psi)' ds + \frac{\epsilon}{2} \int_0^l (v')^2 a\psi ds - \epsilon \int_0^l (v')^2 s(a\psi)' ds = \\ = \int_0^l (s\psi F(v))' ds - \int_0^l \psi F(v) ds - \int_0^l s\psi' F(v) ds. \end{aligned}$$

Finalmente, reescrevendo o subíndice  $\epsilon$  e lembrando que estamos assumindo  $\psi(0) = \psi(l) = 0$ , temos

$$-\frac{\epsilon}{2} sa\psi(v'_\epsilon)^2 \Big|_0^l = 0,$$

e portanto

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\epsilon}{2} \int_0^l (v'_\epsilon)^2 s(a\psi)' ds + \frac{\epsilon}{2} \int_0^l (v'_\epsilon)^2 a\psi ds = \\
 & = \int_0^l (s\psi F(v_\epsilon))' ds - \int_0^l \psi F(v_\epsilon) ds - \int_0^l s\psi' F(v_\epsilon) ds.
 \end{aligned} \tag{4.2.2}$$

Afirmamos que os dois termos do lado esquerdo da equação acima se aproximam de zero quando  $\epsilon \rightarrow 0$ . De fato, denote estes termos por  $I_1, I_2$ , respectivamente.

Multiplicando a equação (4.1.1) por  $v_\epsilon$  e integrando por partes em  $(0, l)$ , obtemos

$$v_\epsilon \psi a v'_\epsilon \Big|_0^l - \epsilon \int_0^l a \psi (v'_\epsilon)^2 ds = - \int_0^l v_\epsilon \psi f(v_\epsilon) ds,$$

isto é,

$$\epsilon \int_0^l a \psi (v'_\epsilon)^2 ds = \int_0^l v_\epsilon \psi f(v_\epsilon) ds,$$

e portanto

$$2I_2 = \epsilon \int_0^l a \psi (v'_\epsilon)^2 ds = \int_0^l v_\epsilon \psi f(v_\epsilon) ds. \tag{4.2.3}$$

Como por hipótese  $|v_\epsilon| \leq M$ , uniformemente em  $\epsilon$ ,  $f$  é contínua e  $v_\epsilon \rightarrow v_0$  q.t.p. em  $I$ , uma aplicação do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue nos dá que o lado direito de (4.2.3) tende a zero, quando  $\epsilon \rightarrow 0$  (lembre que  $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ ), e então  $I_2$  tende a zero, quando  $\epsilon \rightarrow 0$ . Agora, fica fácil ver que  $I_1$  também converge a zero quando  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Como  $\psi(0) = \psi(l) = 0$  temos que

$$\int_0^l (s\psi F(v_\epsilon))' ds = 0.$$

Temos ainda que,  $\{v_\epsilon\}$  é uniformemente limitada em  $\epsilon$  e  $F$  é  $C^1$ , então  $\{F(v_\epsilon)\}$  é limitada em  $(0, l)$ , uniformemente em  $\epsilon$  e então podemos usar novamente o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue para calcular o limite sobre  $(0, p)$  e  $(p, l)$  dos termos do lado direito da equação (4.2.2). Finalmente, quando  $\epsilon \rightarrow 0$ , obtemos

$$\begin{aligned}
 0 & = \int_0^p \psi F(\alpha) ds + \int_p^l \psi F(\beta) ds \\
 & + \int_0^p s\psi' F(\alpha) ds + \int_p^l s\psi' F(\beta) ds
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^p F(\alpha)(s\psi)' ds + \int_p^l F(\beta)(s\psi)' ds \\ &= (F(\alpha) - F(\beta))p\psi(p). \end{aligned}$$

Mas  $p\psi(p) \neq 0$ , então  $F(\alpha) = F(\beta)$ , isto é,

$$\int_\alpha^\beta f(\xi) d\xi = 0$$

e o teorema está provado. □

**Observação 4.2.2.** *A camada de transição poderia ser considerada como um subconjunto finito de pontos de  $I = [0, l]$ , isso apenas traria algumas dificuldades técnicas ao longo da demonstração do Teorema 4.2.1. Fizemos o caso em que a camada de transição é apenas um ponto devido às necessidades deste trabalho.*

**Observação 4.2.3.** *O mesmo resultado poderia ser obtido de maneira análoga se considerássemos uma superfície de revolução com fronteira suprida com condições de Neumann, isto é,  $\psi(0) > 0$ ,  $\psi(l) > 0$ ,  $u'_\epsilon(0) = 0$  e  $u'_\epsilon(l) = 0$ . Observe que nos pontos da demonstração acima em que é usada a hipótese  $\psi(0) = \psi(l) = 0$ , poderíamos usar as condições de Neumann para demonstrar o caso em uma superfície com fronteira.*

# Capítulo 5

## Uma EDP Parabólica Singularmente Perturbada no Caso de Intersecção das Raízes da Equação Degenerada

Neste capítulo consideramos o PROBLEMA 2 desta tese. Provaremos a existência de quatro famílias de soluções estacionárias e estáveis de uma equação de reação e difusão com difusibilidade variável e termo de reação espacial heterogêneo (veja problema (5.1.1) abaixo). De fato, explicitamente provaremos apenas a existência de duas famílias, porém ficará claro que outras duas famílias podem ser analogamente obtidas. Além disso, o comportamento assintótico de tais famílias de soluções quando  $\epsilon \rightarrow 0$ , é fornecido. Novamente, a estratégia é utilizar o Teorema 1.3.3.

### 5.1 Apresentação do Problema

Neste capítulo consideramos o seguinte problema parabólico singularmente perturbado com condições de Neumann na fronteira

$$\left. \begin{aligned} u_t(x) &= \epsilon^2 \operatorname{div}(k(x)\nabla u(x)) + f(u, x) & x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) &= 0 & x \in \partial\Omega \end{aligned} \right\} \quad (5.1.1)$$

onde  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ( $n \geq 1$ ) é um domínio com fronteira suave,  $\epsilon$  um parâmetro positivo pequeno e  $\frac{\partial u}{\partial \nu}$  é a derivada normal exterior de  $u$  sobre  $\partial\Omega$ , isto é,

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \nabla u \cdot \nu,$$

onde  $\nu$  é o vetor normal exterior a  $\partial\Omega$ .

A função  $k(\cdot)$  é suave e estritamente positiva e  $f$  é uma função de classe  $C^1$  que satisfaz as seguintes propriedades:

( $f_1$ ) Existem uma subvariedade  $(n-1)$ -dimensional  $\gamma \subset \Omega$  dividindo  $\Omega$  em duas componentes conexas denominadas  $\Omega_a$  e  $\Omega_b$ , tais que as fronteiras  $\partial\Omega_a$  e  $\partial\Omega_b$  são de Lipschitz, e três funções  $\theta, a, b \in C^1(\bar{\Omega})$  que são raízes de  $f$ , ou seja,

$$f(a(x), x) = f(b(x), x) = f(\theta(x), x) = 0, \quad \forall x \in \Omega.$$

Além disso,

- $a > \theta > b$  em  $\Omega_a$
- $b > \theta > a$  em  $\Omega_b$
- $a = \theta = b$  em  $\gamma$ .

( $f_2$ )

- $\partial_1 f(a(x), x) < 0, \quad \forall x \in (\Omega \setminus \gamma),$
- $\partial_1 f(b(x), x) < 0, \quad \forall x \in (\Omega \setminus \gamma).$

( $f_3$ )

$$\int_{\min\{a(x), b(x)\}}^{\max\{a(x), b(x)\}} f(\xi, x) d\xi = 0, \quad \forall x \in \Omega$$

(condição de igualdade de área).

( $f_4$ ) Existem constantes positivas  $c_1, c_2$  e  $s_0$  e um número  $p \geq 2$  tal que

$$c_1 |s|^p \leq F(s, x) \leq c_2 |s|^p,$$

para todo  $s$  satisfazendo  $|s| \geq s_0$ , onde

$$F(u, x) = \begin{cases} - \int_{b(x)}^u f(\xi, x) d\xi, & x \in \Omega_a \\ 0, & x \in \gamma \\ - \int_{a(x)}^u f(\xi, x) d\xi, & x \in \Omega_b. \end{cases} \quad (5.1.2)$$

Assim definido temos que

$$F(\cdot, x) \geq 0$$

e suas únicas raízes são  $a(x)$  e  $b(x)$ .

A partir de ( $f_1$ ) concluímos que

$$\partial_1 f(a(x), x) = \partial_1 f(b(x), x) = 0 \quad \forall x \in \gamma,$$

ou seja, as raízes  $a(x)$  e  $b(x)$  da equação degenerada

$$f(u, x) = 0 \tag{5.1.3}$$

não são isoladas.

Como visto na Introdução desta tese, tal hipótese é a principal fonte de dificuldade do problema e implica que a teoria padrão de problemas singularmente perturbados, técnicas de expansão assintótica, não pode ser aplicada. A hipótese  $(f_2)$  mostra que nosso problema não é um caso de mudança de estabilidade, veja [37, 38, 40, 42, 43, 44, 45].

Abaixo uma figura que ilustra o comportamento de  $f$  em  $\Omega_a$ ,  $\gamma$  e  $\Omega_b$ .

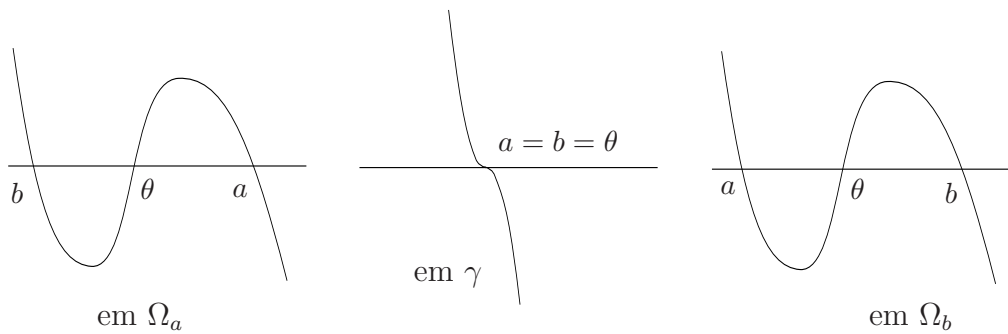


Figura 5.1: Função  $f$  em  $\Omega_a$ ,  $\gamma$  e  $\Omega_b$ .

O comportamento de  $F$  (veja (5.1.2)) pode ser conferido abaixo:

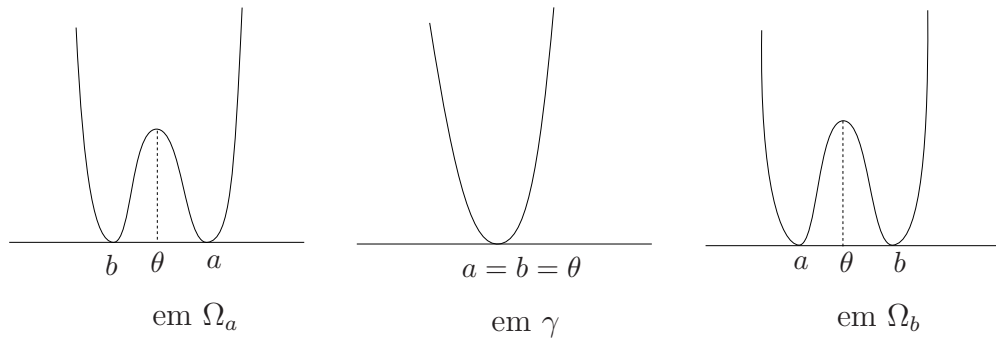


Figura 5.2: Função  $F$  em  $\Omega_a$ ,  $\gamma$  e  $\Omega_b$ .

O objetivo deste capítulo é mostrar o seguinte teorema.

**Teorema 5.1.1.** *Assuma que  $f$  satisfaz as hipóteses  $(f_1)$ – $(f_4)$ . Então existe  $\epsilon_0 > 0$  e quatro famílias de soluções estacionárias estáveis  $\{u_\epsilon^1\}_{0 < \epsilon \leq \epsilon_0}, \dots, \{u_\epsilon^4\}_{0 < \epsilon \leq \epsilon_0}$  de (5.1.1) tais que*

- $|u_\epsilon^1 - u_0^1|_{L^1(\Omega)} \rightarrow 0$  quando  $\epsilon \rightarrow 0$ , sendo  $u_0^1(x) = a(x)\chi_{\Omega_a}(x) + b(x)\chi_{\Omega_b}(x)$ ;
- $|u_\epsilon^2 - u_0^2|_{L^1(\Omega)} \rightarrow 0$  quando  $\epsilon \rightarrow 0$ , sendo  $u_0^2(x) = b(x)\chi_{\Omega_a}(x) + a(x)\chi_{\Omega_b}(x)$ ;

- $|u_\epsilon^3 - u_0^3|_{L^1(\Omega)} \rightarrow 0$  quando  $\epsilon \rightarrow 0$ , sendo  $u_0^3(x) = a(x)$ ;
- $|u_\epsilon^4 - u_0^4|_{L^1(\Omega)} \rightarrow 0$  quando  $\epsilon \rightarrow 0$ , sendo  $u_0^4(x) = b(x)$ .

Da mesma maneira que procedemos na Seção 2.3 faremos uso do Teorema 1.3.3 para demonstrar o teorema acima. Assim, precisamos calcular o  $\Gamma$ -limite da família de funcionais associada ao problema (5.1.1). Este é o conteúdo de nossa próxima seção.

## 5.2 $\Gamma$ -convergência

Considere a família de funcionais  $E_\epsilon : L^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  definida por

$$E_\epsilon(v) = \begin{cases} \int_{\Omega} \left[ \epsilon k(x) |Dv|^2 + \frac{1}{\epsilon} F(v, x) \right] dx, & v \in H^1(\Omega) \\ \infty, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (5.2.1)$$

sendo  $F(v, x)$  dado por (5.1.2).

As equações de Euler-Lagrange da família de funcionais acima, correspondem à família de problemas (5.1.1), ou seja, pontos críticos de cada funcional de energia definido acima são soluções estacionárias do correspondente problema em (5.1.1).

**Observação 5.2.1.** Usaremos a notação  $BV(\Omega, \{a, b\})$  para indicar o conjunto  $\{v \in BV(\Omega) : v(x) \in \{a(x), b(x)\}, \forall x \in \Omega\}$

O principal teorema desta seção está enunciado abaixo.

**Teorema 5.2.2.** Seja  $E_0 : L^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  definido por

$$E_0(v) = \begin{cases} \int_{\Omega} h(x) |D\chi_{\{v=a\}}|, & v \in BV(\Omega, \{a, b\}) \\ \infty, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

onde

$$h(x) = \begin{cases} \int_{a(x)}^{b(x)} \sqrt{k(x)F(s, x)} ds, & x \in \Omega_b \\ 0, & x \in \gamma \\ \int_{b(x)}^{a(x)} \sqrt{k(x)F(s, x)} ds, & x \in \Omega_a. \end{cases} \quad (5.2.2)$$

Então

$$\Gamma\text{-}\lim_{\epsilon \rightarrow 0} E_\epsilon(v) = E_0(v),$$

para todo  $v \in L^1(\Omega)$ .



O funcional candidato a  $\Gamma$ -limite, denotado por  $E_0$ , pode ser interpretado como um funcional perímetro com um peso  $h(\cdot)$ . Os lemas abaixo serão usados para demonstrar o Teorema 5.2.2.

**Lema 5.2.3.** *Seja  $U \subset \Omega$  um conjunto aberto e limitado com fronteira Lipschitz. Seja  $f_1 \in BV(U)$  e  $f_2 \in BV(\Omega \setminus \bar{U})$ . Defina*

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in U \\ f_2(x), & x \in \Omega \setminus \bar{U}. \end{cases}$$

Então  $\bar{f} \in BV(\Omega)$ .

*Demonstração.* Veja [22], pág 183. □

**Observação 5.2.4.** *Ao longo deste capítulo usaremos a seguinte notação:*

$$v^l = v|_{\Omega_l}, \quad l \in \{a, b\}. \quad (5.2.3)$$

**Lema 5.2.5.** *Sejam  $E_\epsilon^l : L^1(\Omega_l) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  ( $l \in \{a, b\}$ ) definidos por*

$$E_\epsilon^l(v) = \begin{cases} \int_{\Omega_l} \left[ \epsilon k(x) |Dv|^2 + \frac{1}{\epsilon} F(v, x) \right] dx, & v \in H^1(\Omega_l) \\ \infty, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então

- $E_\epsilon(v) \geq E_\epsilon^a(v^a) + E_\epsilon^b(v^b)$  se  $v \in L^1(\Omega) \setminus H^1(\Omega)$ .
- $E_\epsilon(v) = E_\epsilon^a(v^a) + E_\epsilon^b(v^b)$  se  $v \in H^1(\Omega)$ .

*Demonstração.* Seja  $v \in L^1(\Omega)$ . Se  $v \in H^1(\Omega)$  então  $v^a \in H^1(\Omega_a)$ ,  $v^b \in H^1(\Omega_b)$  e daí

$$\begin{aligned} E_\epsilon(v) &= \int_{\Omega} \left[ \epsilon k(x) |Dv|^2 + \frac{1}{\epsilon} F(v, x) \right] dx \\ &= \int_{\Omega_a} \left[ \epsilon k(x) |Dv|^2 + \frac{1}{\epsilon} F(v, x) \right] dx + \int_{\Omega_b} \left[ \epsilon k(x) |Dv|^2 + \frac{1}{\epsilon} F(v, x) \right] dx \\ &= E_\epsilon^a(v^a) + E_\epsilon^b(v^b). \end{aligned}$$

Se  $v \notin H^1(\Omega)$  então

$$E_\epsilon(v) = \infty \geq E_\epsilon^a(v^a) + E_\epsilon^b(v^b).$$

□

**Lema 5.2.6.** *Sejam  $E_0^l : L^1(\Omega_l) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  ( $l \in \{a, b\}$ ) definidos por*

$$E_0^l(v) = \begin{cases} \int_{\Omega_l} h(x) |D\chi_{\{v=a\}}|, & v \in BV(\Omega_l, \{a, b\}) \\ \infty, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então

$$E_0(v) = E_0^a(v^a) + E_0^b(v^b), \quad \forall v \in L^1(\Omega).$$

*Demonstração.* Provemos que  $BV(\Omega, \{a, b\}) = \Xi$  onde

$$\Xi = \{v \in L^1(\Omega) : v^a \in BV(\Omega_a, \{a, b\}) \text{ e } v^b \in BV(\Omega_b, \{a, b\})\}.$$

Afirmação:

$$BV(\Omega, \{a, b\}) \subset \Xi.$$

De fato, seja  $v \in BV(\Omega, \{a, b\})$  então dado  $x \in \Omega_a$ ,  $v^a(x) = a(x)$  ou  $v^a(x) = b(x)$ . Se  $v^a \notin BV(\Omega_a, \{a, b\})$  então dado qualquer  $M > 0$  existe  $g_M \in C_0^1(\Omega_a, \mathbb{R}^n)$ , tal que  $|g_M| \leq 1$  e

$$\int_{\Omega_a} v \operatorname{div} g \, dx > M.$$

Se

$$\overline{g_M} = \begin{cases} g_M, & \text{em } \Omega_a \\ 0, & \text{em } \Omega \setminus \Omega_a \end{cases}$$

então  $\overline{g_M} \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ ,  $|\overline{g_M}| \leq 1$  e

$$\int_{\Omega} v \operatorname{div} \overline{g_M} \, dx > M.$$

Isto prova que

$$\int_{\Omega} |Dv| = \sup \left\{ \int_{\Omega} v \operatorname{div} g \, dx : g \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^n), |g| \leq 1 \right\} = \infty,$$

o que é um absurdo pois  $v \in BV(\Omega, \{a, b\})$ . Segue que  $v^a \in BV(\Omega_a, \{a, b\})$ . Analogamente prova-se que  $v^b \in BV(\Omega_b, \{a, b\})$

Por outro lado, se  $v \in \Xi$  temos pelo Lema 5.2.3 que  $v \in BV(\Omega, \{a, b\})$ . Aqui é usada a hipótese que  $\Omega_a$  e  $\Omega_b$  possuem fronteira de Lipschitz.

Considere  $v \in L^1(\Omega)$ . Se  $v \notin BV(\Omega, \{a, b\})$ , então  $v^a \notin BV(\Omega_a, \{a, b\})$  ou  $v^b \notin BV(\Omega_b, \{a, b\})$ . Segue que

$$E_0(v) = \infty = E_0^a(v^a) + E_0^b(v^b).$$

Se  $v \in BV(\Omega, \{a, b\})$ , então lembrando que

$$h(x) = 0, \quad \forall x \in \gamma$$

e usando a fórmula da co-área vista na Proposição 1.2.10, temos

$$\begin{aligned} E_0(v) &= \int_{\Omega} h(x) |D\chi_{\{v=a\}}| \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{\Omega \cap \partial_* \{\chi_{\{v=a\}} > \xi\}} h(x) d\mathcal{H}^{n-1} \right] d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{\Omega_a \cap \partial_* \{\chi_{\{v=a\}} > \xi\}} h(x) d\mathcal{H}^{n-1} \right] d\xi \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{\gamma \cap \partial_* \{\chi_{\{v=a\}} > \xi\}} h(x) d\mathcal{H}^{n-1} \right] d\xi \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{\Omega_b \cap \partial_* \{\chi_{\{v=a\}} > \xi\}} h(x) d\mathcal{H}^{n-1} \right] d\xi \\ &= \int_{\Omega_a} h(x) |D\chi_{\{v=a\}}| + \int_{\gamma} h(x) |D\chi_{\{v=a\}}| + \int_{\Omega_b} h(x) |D\chi_{\{v=a\}}| \\ &= \int_{\Omega_a} h(x) |D\chi_{\{v=a\}}| + \int_{\Omega_b} h(x) |D\chi_{\{v=a\}}| \\ &\stackrel{(*)}{=} \int_{\Omega_a} h(x) |D\chi_{\{v^a=a\}}| + \int_{\Omega_b} h(x) |D\chi_{\{v^b=a\}}| \\ &= E_0^a(v^a) + E_0^b(v^b) \end{aligned}$$

a justificativa de (\*) segue de (1.2.1), uma vez que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_a} h(x) |D\chi_{\{v=a\}}| &= \sup \left\{ \int_{\Omega_a} \chi_{\{v=a\}} \operatorname{div} g \, dx : g \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^n), |g| \leq h \right\} \\ &= \sup \left\{ \int_{\Omega_a} \chi_{\{v^a=a\}} \operatorname{div} g \, dx : g \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^n), |g| \leq h \right\} \\ &= \int_{\Omega_a} h(x) |D\chi_{\{v^a=a\}}| \end{aligned}$$

O mesmo pode ser feito com  $v^b$  em  $\Omega_b$ . □

**Observação 5.2.7.** *O resultado acima não é válido para funcionais do tipo perímetro em geral, sendo que no nosso caso é válido graças ao fato do peso  $h(\cdot)$  se anular em  $\gamma$ .*

**Lema 5.2.8.** *Temos que*

$$\Gamma\text{-}\lim_{\epsilon \rightarrow 0} E_\epsilon^l(v) = E_0^l(v), \quad \forall v \in L^1(\Omega_l) \quad (l \in \{a, b\}).$$

O lema acima pode ser encontrado em [31] (pág. 230) ou [32] (pág. 33). De fato, em [31], a demonstração é feita no caso

$$F(v, x) = (v(x) - a(x))^2(v(x) - b(x))^2 \text{ com } a < b \text{ em } \Omega,$$

ou seja,

$$f(v, x) = 4(v(x) - a(x))(v(x) - b(x)) \left[ v - \left( \frac{a(x) + b(x)}{2} \right) \right].$$

Uma análise criteriosa na demonstração do Teorema 2 em [31], mostra que a função  $f$  acima é um simples exemplo que satisfaz todas as condições suficientes para se obter a  $\Gamma$ -convergência requerida em  $\Omega_a$ . Tal análise pode ser conferida na tese [32], onde o caso geral é detalhadamente demonstrado. Observe que o Lema 5.2.8 calcula o  $\Gamma$ -limite em  $\Omega_a$  onde  $a(x) > b(x)$  e, separadamente, em  $\Omega_b$  onde  $b(x) > a(x)$ . Portanto, nosso caso está de acordo com as condições que aparecem em [31, 32].

Agora estamos prontos para demonstrar o principal teorema desta seção.

*Demonstração do Teorema 5.2.2.* Relembre a Definição 1.3.1 de  $\Gamma$ -convergência na Seção 1.3.

(i) Sejam  $v \in L^1(\Omega)$  e uma sequência  $\{v_\epsilon\} \subset L^1(\Omega)$  tal que  $v_\epsilon \rightarrow v$  em  $L^1(\Omega)$ .

Então

$$\begin{aligned} E_0(v) &\stackrel{(*)}{=} E_0^a(v^a) + E_0^b(v^b) \\ &\stackrel{(**)}{\leq} \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} E_\epsilon^a(v_\epsilon^a) + \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} E_\epsilon^b(v_\epsilon^b) \\ &\leq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} (E_\epsilon^a(v_\epsilon^a) + E_\epsilon^b(v_\epsilon^b)) \\ &\stackrel{(***)}{\leq} \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} E_\epsilon(v_\epsilon). \end{aligned}$$

Foram usados os Lemas 5.2.6, 5.2.8 e 5.2.5 respectivamente em (\*),(\*\*) e (\*\*\*)).

- (ii) Dada  $v \in L^1(\Omega)$  podemos considerar que  $v \in BV\{\Omega, \{a, b\}\}$  pois caso contrário  $E_0(v) = \infty$ . Temos que  $v^l \in BV\{\Omega_l, \{a, b\}\}$  e pelo Lema 5.2.8 existe  $\{u_{\epsilon, l}\} \in L^1(\Omega_l)$  tal que  $u_{\epsilon, l} \rightarrow v^l$  em  $L^1(\Omega_l)$  e

$$E_0^l(v^l) \geq \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} E_\epsilon^l(u_{\epsilon, l}) \quad (l \in \{a, b\}). \quad (5.2.4)$$

Considere

$$v_\epsilon(x) = \begin{cases} u_{\epsilon, a}(x), & x \in \Omega_a \\ a(x), & x \in \gamma \\ u_{\epsilon, b}(x), & x \in \Omega_b. \end{cases} \quad (5.2.5)$$

Então temos que  $v_\epsilon \rightarrow v$  em  $L^1(\Omega)$ . A fim de concluir a prova resta-nos mostrar que

$$E_0(v) \geq \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} E_\epsilon(v_\epsilon).$$

*Afirmção:* As funções  $u_{\epsilon, l}$  ( $l \in \{a, b\}$ ) podem ser construídas de tal forma que

$$v_\epsilon \in H^1(\Omega). \quad (5.2.6)$$

Vamos aceitar isto por enquanto, tal justificativa será feita adiante.

Assim, temos que

$$\begin{aligned} E_0(v) &\stackrel{(*)}{=} E_0^a(v^a) + E_0^b(v^b) \\ &\stackrel{(**)}{\geq} \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} E_\epsilon^a(u_{\epsilon, a}) + \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} E_\epsilon^b(u_{\epsilon, b}) \\ &= \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} E_\epsilon^a(v_\epsilon^a) + \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} E_\epsilon^b(v_\epsilon^b) \\ &\geq \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} (E_\epsilon^a(v_\epsilon^a) + E_\epsilon^b(v_\epsilon^b)) \\ &\stackrel{(***)}{=} \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} E_\epsilon(v_\epsilon). \end{aligned}$$

Em (\*) foi usado o Lema 5.2.6, em (\*\*) foi usado (5.2.4) e finalmente em (\*\*\*) foram usados (5.2.6) e o Lema 5.2.5.

*Prova da Afirmção.* Nosso objetivo é provar que é possível construirmos famílias de funções  $\{u_{\epsilon, a}\}$  e  $\{u_{\epsilon, b}\}$  satisfazendo (5.2.6), ou seja, que  $\{v_\epsilon\} \in H^1(\Omega)$  sendo  $\{v_\epsilon\}$  definida em (5.2.5).

Nossa estratégia é construir famílias de funções  $\{u_{\epsilon,a}\}$  e  $\{u_{\epsilon,b}\}$  que pertencem à  $H^1(\Omega_a)$  e  $H^1(\Omega_b)$ , respectivamente. Em seguida mostramos que  $\{v_\epsilon\}$  é contínua em  $\gamma$  e isto é suficiente para provarmos que  $\{v_\epsilon\} \in H^1(\Omega)$ .

Primeiramente construímos a família  $\{u_{\epsilon,a}\}$  definida em  $\Omega_a$ . Como pode ser visto em [31, 32], a sequência  $\{u_{\epsilon,a}\}$  pode ser construída da seguinte maneira.

Seja

$$E := \{x \in \Omega : v(x) = a(x)\} \quad (5.2.7)$$

e assumamos que  $\partial E$  é de classe  $C^2$ . Na conclusão desta prova mostraremos que esta hipótese não representa perda de generalidade.

Considere

$$A = \{x \in \Omega_a : v(x) = a(x)\}$$

e a função distância com sinal

$$d_a(x) = \begin{cases} \text{dist}(x, \partial A \cap \partial A^c), & x \in A \\ -\text{dist}(x, \partial A \cap \partial A^c), & x \in A^c. \end{cases}$$

Temos que

$$\Lambda_a := \partial A \cap \partial A^c \quad (5.2.8)$$

é de classe  $C^2$ .

Agora considere  $Z_a$  a solução do seguinte problema de valor inicial.

$$\left. \begin{aligned} \frac{dZ}{ds}(s, x) &= \sqrt{k^{-1}(s)F(s, x)}, \quad (s, x) \in \mathbb{R} \times \Omega_a \\ Z(0, x) &= \theta(x), \quad x \in \Omega_a \end{aligned} \right\} \quad (5.2.9)$$

Lembre que em  $\Omega_a$  temos  $a > \theta > b$ . A solução  $Z_a$  do PVI (5.2.9) satisfaz a seguinte propriedade:

$$a(x) > Z_a(s, x) > b(x), \quad \forall (s, x) \in \mathbb{R} \times \Omega_a. \quad (5.2.10)$$

Como  $a(x) = b(x)$ ,  $\forall x \in \gamma$ , segue que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} Z_a(s, x) = a(x_0), \quad \forall (s, x_0) \in \mathbb{R} \times \gamma. \quad (5.2.11)$$

Além disso, para  $x \in \Omega_a$ , temos que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} Z_a(s, x) = a(x), \quad (5.2.12)$$

e

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} Z_a(s, x) = b(x). \quad (5.2.13)$$

As propriedades (5.2.10), (5.2.12) e (5.2.13) podem ser vistas em [28].  
Finalmente, consideramos  $u_{\epsilon,a} : \Omega_a \rightarrow \mathbb{R}$  definida da seguinte maneira.

$$u_{\epsilon,a}(x) = \begin{cases} a(x), & d_a(x) > 2\sqrt{\epsilon} \\ [a(x) - Z_a(x, 1/\sqrt{\epsilon})] \frac{(d_a(x)-2\sqrt{\epsilon})}{\sqrt{\epsilon}} + a(x), & \sqrt{\epsilon} \leq d_a(x) \leq 2\sqrt{\epsilon} \\ Z_a(x, d_a(x)/\epsilon), & |d_a(x)| < \sqrt{\epsilon} \\ [Z_a(x, -1/\sqrt{\epsilon}) - b(x)] \frac{(d_a(x)+2\sqrt{\epsilon})}{\sqrt{\epsilon}} + b(x), & -2\sqrt{\epsilon} \leq d_a(x) \leq -\sqrt{\epsilon} \\ b(x), & d_a(x) < -2\sqrt{\epsilon} \end{cases}$$

Note que  $u_{\epsilon,a} \in H^1(\Omega_a)$  e, como pode ser visto em [31, 32], temos que  $u_{\epsilon,a} \rightarrow v^a$  em  $L^1(\Omega_a)$  e

$$E_0^a(v^a) \geq \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} E_\epsilon^a(u_{\epsilon,a}).$$

De maneira análoga considere

$$B = \{x \in \Omega_b : v(x) = b(x)\},$$

e a função distância com sinal

$$d_b(x) = \begin{cases} \text{dist}(x, \partial B \cap \partial B^c), & x \in B \\ -\text{dist}(x, \partial B \cap \partial B^c), & x \in B^c. \end{cases}$$

Novamente, sendo

$$\Lambda_b := \partial B \cap \partial B^c \tag{5.2.14}$$

temos que  $\Lambda_b$  é de classe  $C^2$ .

Também considere  $Z_b$  a solução do seguinte PVI.

$$\left. \begin{aligned} \frac{dZ}{ds}(s, x) &= \sqrt{k^{-1}(s)F(s, x)}, \quad (s, x) \in \mathbb{R} \times \Omega_b \\ Z(0, x) &= \theta(x), \quad x \in \Omega_b. \end{aligned} \right\} \tag{5.2.15}$$

Em  $\Omega_b$  temos  $a < \theta < b$  e então  $Z_b$  satisfaz

$$a(x) < Z_b(x) < b(x), \quad \forall x \in \Omega_b, \tag{5.2.16}$$

e como  $a(x) = b(x), \forall x \in \gamma$ , também podemos concluir que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} Z_b(s, x) = a(x_0), \quad \forall (s, x_0) \in \mathbb{R} \times \gamma. \tag{5.2.17}$$

Ainda, para  $x \in \Omega_b$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} Z_a(s, x) = a(x), \tag{5.2.18}$$

e

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} Z_a(s, x) = b(x). \quad (5.2.19)$$

Todas as afirmações sobre as soluções  $Z_a$  e  $Z_b$  dos problemas de valor inicial (5.2.9) e (5.2.15), respectivamente, podem ser encontradas em [28].

Definimos  $u_{\epsilon, b} : \Omega_b \rightarrow \mathbb{R}$  da seguinte maneira.

$$u_{\epsilon, b}(x) = \begin{cases} b(x), & d_b(x) > 2\sqrt{\epsilon} \\ [b(x) - Z_b(x, 1/\sqrt{\epsilon})] \frac{(d_b(x) - 2\sqrt{\epsilon})}{\sqrt{\epsilon}} + b(x), & \sqrt{\epsilon} \leq d_b(x) \leq 2\sqrt{\epsilon} \\ Z_b(x, d_b(x)/\epsilon), & |d_b(x)| < \sqrt{\epsilon} \\ [Z_b(x, -1/\sqrt{\epsilon}) - a(x)] \frac{(d_b(x) + 2\sqrt{\epsilon})}{\sqrt{\epsilon}} + a(x), & -2\sqrt{\epsilon} \leq d_b(x) \leq -\sqrt{\epsilon} \\ a(x), & d_b(x) < -2\sqrt{\epsilon} \end{cases}$$

Da mesma maneira,  $u_{\epsilon, b} \in H^1(\Omega_b)$  e novamente usando os resultados de [31, 32] temos que  $u_{\epsilon, b} \rightarrow v^b$  em  $L^1(\Omega_b)$  e

$$E_0^b(v^b) \geq \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} E_\epsilon^b(u_{\epsilon, b}).$$

Agora, de posse das famílias  $\{u_{\epsilon, a}\}$  e  $\{u_{\epsilon, b}\}$  e usando as propriedades (5.2.11) e (5.2.17) de  $Z_a$  e  $Z_b$ , respectivamente, concluímos que dado  $x_0 \in \gamma$  obtemos

$$\lim_{x \rightarrow x_0} u_{\epsilon, l}(x) = a(x_0), \quad l \in \{a, b\}.$$

Assim, temos que  $v_\epsilon$  (veja (5.2.5)) é contínua em  $\gamma$ . Segue que  $v_\epsilon$  é contínua em  $\Omega$ , e como  $u_{\epsilon, l} \in H^1(\Omega_l)$  ( $l \in \{a, b\}$ ) um cálculo simples usando integração por partes permite concluir que  $v_\epsilon \in H^1(\Omega)$ .

A afirmação está provada.

Resta-nos agora provar que não ocorre perda de generalidade ao assumirmos que  $\partial E$  e, conseqüentemente  $\Lambda_a$  e  $\Lambda_b$ , são de classe  $C^2$ , veja (5.2.8) e (5.2.14).

Temos que  $E \subset \Omega$  é de perímetro finito e satisfaz as condições do Lema 1.2.11 e assim existe uma sequência de abertos  $E_j$  satisfazendo (i) – (v).

Considere uma sequência  $\{v_j\}$  definida por

$$v_j(x) = \begin{cases} a(x) & x \in E_j \cap \Omega \\ b(x) & x \in \Omega \setminus E_j. \end{cases}$$

Pelo ítem (ii), dado  $m \in \mathbb{N}$ , existe  $j_1(m)$  tal que

$$|v_j - v|_{L^1(\Omega)} < \frac{1}{2m}$$



para todo  $j \geq j_1(m)$ . Por (iii) e como  $|h|_{L^\infty} < \infty$ , temos que existe  $j_2(m)$  tal que

$$|E_0(v_j) - E_0(v)| < \frac{1}{2m},$$

para todo  $j \geq j_2(m)$ . Seja

$$j(m) := \max \{j_1(m), j_2(m)\}.$$

Temos que  $\partial E_j$  é de classe  $C^2$  então, como provado acima, existe uma sequência  $\{v_{\epsilon,j}\}$  em  $H^1(\Omega)$  e  $\epsilon_1(m)$  tal que

$$|v_{\epsilon,j} - v_j|_{L^1(\Omega)} < \frac{1}{2m},$$

para todo  $\epsilon \leq \epsilon_1(m)$  e, pelo ítem (i) deste mesmo teorema, existe  $\epsilon_2(m)$  tal que

$$|E_\epsilon(v_{\epsilon,j}) - E_0(v_j)| < \frac{1}{2m},$$

para todo  $\epsilon \leq \epsilon_2(m)$ . Seja

$$\epsilon(m) := \min \{\epsilon_1(m), \epsilon_2(m)\}.$$

Tome a sequência  $\{v_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  tal que  $v_m = v_{\epsilon(m),j(m)}$ . Então

$$\begin{aligned} |v_m - v|_{L^1(\Omega)} &= |v_{\epsilon(m),j(m)} - v|_{L^1(\Omega)} \\ &\leq |v_{\epsilon(m),j(m)} - v_{j(m)}|_{L^1(\Omega)} + |v_{j(m)} - v|_{L^1(\Omega)} \\ &< \frac{1}{m} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} |E_{\epsilon(m)}(v_m) - E_0(v)| &= |E_{\epsilon(m)}(v_{\epsilon(m),j(m)}) - E_0(v)| \\ &\leq |E_{\epsilon(m)}(v_{\epsilon(m),j(m)}) - E_0(v_{j(m)})| + |E_0(v_{j(m)}) - E_0(v)| \\ &< \frac{1}{m}. \end{aligned}$$

As duas cadeias de desigualdades acima provam que não ocorre perda de generalidade na demonstração deste teorema se assumirmos  $\partial E$  de classe  $C^2$ .  $\square$

### 5.3 Mínimo Local Isolado

O resultado abaixo será útil na demonstração do principal resultado desta seção. Embora seja intuitivo e de fácil visualização, não foram encontradas referências para tal lema, por isso fazemos a demonstração aqui.

**Lema 5.3.1.** *Seja  $\Omega$  um conjunto limitado aberto e conexo com fronteira Lipschitz, e considere  $E \subset \Omega$  um conjunto de perímetro finito tal que*

$$0 < \mathcal{H}^n(E) < \mathcal{H}^n(\Omega). \quad (5.3.1)$$

Então  $\text{Per}_\Omega(E) > 0$ .

*Demonstração.* Suponha por absurdo que

$$\text{Per}_\Omega(E) = 0, \quad (5.3.2)$$

então dado  $x_0 \in \Omega$  para qualquer  $r > 0$  tal que  $B(x_0, r) \subset \Omega$  temos que

$$\text{Per}_{B(x_0, r)}(E) = 0.$$

Com efeito, se existe  $x_0 \in \Omega$  e  $r > 0$  tal que  $B(x_0, r) \subset \Omega$  e  $\text{Per}_{B(x_0, r)}(E) > 0$ , então

$$\begin{aligned} \text{Per}_\Omega(E) &= \mathcal{H}^{n-1}(\partial_* E \cap \Omega) \\ &= \mathcal{H}^{n-1}(\partial_* E \cap (\Omega \setminus B(x_0, r) \cup B(x_0, r))) \\ &\geq \mathcal{H}^{n-1}(\partial_* E \cap B(x_0, r)) \\ &= \text{Per}_{B(x_0, r)} E > 0, \end{aligned}$$

o que contradiz (5.3.2).

Assim, pelo Lema 1.2.7 temos que

$$\mathcal{H}^n(B(x_0, r) \cap E) = 0$$

ou

$$\mathcal{H}^n(B(x_0, r) \setminus E) = 0.$$

Considere os conjuntos

$$A_1 = \{x \in \Omega : \mathcal{H}^n(B(x, r) \cap E) = 0 \text{ para alguma } B(x, r) \subset \Omega\}$$

e

$$A_2 = \{x \in \Omega : \mathcal{H}^n(B(x, r) \setminus E) = 0 \text{ para alguma } B(x, r) \subset \Omega\}.$$

Diante de nossas hipóteses, temos que

- $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ .

Se existe  $x_0 \in A_1 \cap A_2$  então é possível encontrar  $r_0 > 0$  tal que

$$\mathcal{H}^n(B(x_0, r_0) \cap E) = 0 \quad \text{e} \quad \mathcal{H}^n(B(x_0, r_0) \setminus E) = 0,$$

o que é um absurdo.

- $\Omega = A_1 \cup A_2$ .

Como já observado, esta é uma consequência de (5.3.2) e do Lema 1.2.7.

- $A_1$  e  $A_2$  são conjuntos abertos.

Tome  $x_0 \in A_1$ , então existe  $r_0 > 0$  tal que  $\mathcal{H}^n(B(x_0, r_0) \cap E) = 0$ . Agora, se  $x_1 \in B(x_0, r_0)$  e  $r_1 > 0$  é tal que  $B(x_1, r_1) \subset B(x_0, r_0)$ , temos

$$(B(x_1, r_1) \cap E) \subset (B(x_0, r_0) \cap E) \Rightarrow \mathcal{H}^n(B(x_1, r_1) \cap E) = 0,$$

ou seja,  $x_1 \in A_1$  e portanto  $A_1$  é aberto. De maneira análoga provamos que  $A_2$  é aberto também.

Agora, como  $\Omega$  é conexo temos que  $A_1 = \emptyset$  ou  $A_2 = \emptyset$ .

Se  $A_2 = \emptyset$ , então dado  $x \in \Omega$

$$\mathcal{H}^n(B(x, r) \cap E) = 0$$

para toda  $B(x, r) \subset \Omega$ , pois caso contrário  $x$  pertenceria a  $A_2$ . Pelo Teorema de Vitali existem bolas duas a duas disjuntas  $\{B(x_i, r_i)\} \subset \Omega$  tais que

$$\mathcal{H}^n(\Omega) = \mathcal{H}^n(\cup_{i=1}^{\infty} B(x_i, r_i)).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^n(E) &= \mathcal{H}^n(\Omega \cap E) \\ &= \mathcal{H}^n(\cup_{i=1}^{\infty} B(x_i, r_i) \cap E) \\ &= \mathcal{H}^n(\cup_{i=1}^{\infty} (E \cap B(x_i, r_i))) \\ &= 0. \end{aligned}$$

o que contraria nossas hipóteses (veja (5.3.1)). Se  $A_1 = \emptyset$ , de maneira análoga chegamos que  $\mathcal{H}^n(E) = \mathcal{H}^n(\Omega)$ , o que nos dá outro absurdo.

Portanto  $\text{Per}_\Omega(E) > 0$ . □

Agora, enunciemos e demonstramos o principal resultado desta seção.

**Teorema 5.3.2.** *Cada uma das funções  $u_0^1, \dots, u_0^4 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  definidas por*

- $u_0^1 = a\chi_{\Omega_a} + b\chi_{\Omega_b}$
- $u_0^2 = b\chi_{\Omega_a} + a\chi_{\Omega_b}$
- $u_0^3 = a$
- $u_0^4 = b$

*é um mínimo local isolado de  $E_0$ .*

*Demonstração.* Faremos aqui as demonstrações para  $u_0^1$  e  $u_0^3$ , uma vez que os outros casos  $u_0^2$  e  $u_0^4$  são, respectivamente, análogos.

Considere  $\rho > 0$  tal que

$$\rho < \min \left\{ \int_{\Omega_a} (a - b) \, dx, \int_{\Omega_b} (b - a) \, dx \right\}. \quad (5.3.3)$$

Então, de acordo com a Definição 1.3.2, devo mostrar que se  $u \in L^1(\Omega)$  satisfaz

$$0 < |u - u_0^1|_{L^1(\Omega)} < \rho, \quad (5.3.4)$$

teremos

$$E_0(u) > E_0(u_0^1). \quad (5.3.5)$$

Note que,

$$\Omega \cap \partial_* \left\{ \chi_{\{u_0^1=a\}} > \xi \right\} = \begin{cases} \emptyset, & \xi \notin [0, 1) \\ \gamma, & \xi \in [0, 1) \end{cases}$$

assim, usando novamente fórmula da co-área vista na Proposição 1.2.10

$$\begin{aligned} E_0(u_0^1) &= \int_{\Omega} h(x) \left| D\chi_{\{u_0^1=a\}} \right| = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\Omega \cap \partial_* \left\{ \chi_{\{u_0^1=a\}} > \xi \right\}} h(x) \, d\mathcal{H}^{n-1} \, d\xi \\ &= \int_0^1 \int_{\gamma} h(x) \, d\mathcal{H}^{n-1} \, d\xi \\ &= 0 \end{aligned}$$

pois  $h(x) = 0, \forall x \in \gamma$ .

Se  $u \notin BV(\Omega, \{a, b\})$ , então  $E_0(u) = \infty$  e obviamente  $E_0(u) > E_0(u_0^1)$  uma vez que  $E_0(u_0^1) = 0$ .

Portanto, considere  $u \in BV(\Omega, \{a, b\})$  satisfazendo (5.3.4) e o seguinte conjunto

$$A = \{x \in \Omega : u(x) = a(x)\}.$$

Então  $A$  tem perímetro finito e temos duas possibilidades:

(i)  $\mathcal{H}^{n-1}((\partial_* A \cap \Omega) \setminus \gamma) = 0$  ou

(ii)  $\mathcal{H}^{n-1}((\partial_* A \cap \Omega) \setminus \gamma) > 0$

Se (i) ocorrer então afirmamos que

- $u = u_0^1$  q.t.p. em  $\Omega \Rightarrow |u - u_0^1|_{L^1(\Omega)} = 0$ , ou
- $u = b\chi_{\Omega_a} + a\chi_{\Omega_b}$  q.t.p. em  $\Omega \Rightarrow |u - u_0^1|_{L^1(\Omega)} > \rho$ , ou
- $u = a$  q.t.p. em  $\Omega \Rightarrow |u - u_0^1|_{L^1(\Omega)} > \rho$ , ou
- $u = b$  q.t.p. em  $\Omega \Rightarrow |u - u_0^1|_{L^1(\Omega)} > \rho$ .

Com efeito, suponha que nenhum dos quatro casos acima ocorram. Sem perda de generalidade, colocando

$$K = A \cap \Omega_a$$

podemos assumir que

$$0 < \mathcal{H}^n(K) < \mathcal{H}^n(\Omega_a).$$

Como  $\Omega_a$  é aberto, limitado, conexo, com fronteira Lipschitz e  $K \subset \Omega_a$  tem perímetro finito, estamos nas condições do Lema 5.1.1. Segue que

$$\text{Per}_{\Omega_a} K > 0.$$

Afirmamos que

$$(\partial_* K \cap \Omega_a) \subset [(\partial_* A \cap \Omega) \setminus \gamma]. \tag{5.3.6}$$

De fato, tome  $x \in (\partial_* K \cap \Omega_a)$ . Então, como  $x \in \Omega_a$  temos que  $x \in \Omega$  e  $x \notin \gamma$ , portanto basta mostrar que  $x \in \partial_* A$ . Agora, como  $K \subset A$  e  $x \in \partial_* K$ , temos

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}^n(B(x, r) \cap A)}{r^n} \geq \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}^n(B(x, r) \cap K)}{r^n} > 0.$$

Sabemos que  $\Omega_a$  é aberto e  $x \in \Omega_a$ , então para  $r > 0$  suficientemente pequeno,  $B(x, r) \subset \Omega_a$ . Segue que  $B(x, r) \setminus A = B(x, r) \setminus (A \cap \Omega_a)$ , daí

$$\begin{aligned} \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}^n(B(x, r) \setminus A)}{r^n} &= \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}^n(B(x, r) \setminus (A \cap \Omega_a))}{r^n} \\ &= \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}^n(B(x, r) \setminus K)}{r^n} \\ &> 0. \end{aligned}$$

Logo  $x \in \partial_* A$  e isto prova (5.3.6). Assim, concluímos que

$$\mathcal{H}^{n-1}((\partial_* A \cap \Omega) \setminus \gamma) \geq \mathcal{H}^{n-1}((\partial_* K \cap \Omega_a)) = \text{Per}_{\Omega_a} K > 0,$$

contrariando (i).

Nos quatro casos acima temos um absurdo, pois por hipótese  $u$  satisfaz (5.3.4).

Portanto deve ocorrer (ii). Observe que

$$\Omega \cap \partial_* \{ \chi_{\{u=a\}} > \xi \} = \begin{cases} \emptyset, & \xi \notin [0, 1) \\ \Omega \cap \partial_* A, & \xi \in [0, 1) \end{cases}$$

Daí,

$$\begin{aligned} E_0(u) &= \int_{\Omega} h(x) |D\chi_{\{u=a\}}| = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\Omega \cap \partial_* \{ \chi_{\{u=a\}} > \xi \}} h(x) d\mathcal{H}^{n-1} d\xi \\ &= \int_0^1 \int_{\Omega \cap \partial_* A} h(x) d\mathcal{H}^{n-1} d\xi \\ &\geq \int_0^1 \int_{(\Omega \cap \partial_* A) \setminus \gamma} h(x) d\mathcal{H}^{n-1} d\xi \\ &> 0 \end{aligned}$$

pois  $h(x) > 0$  para todo  $x \in (\Omega \setminus \gamma)$  e por (ii),  $\mathcal{H}^{n-1}((\Omega \cap \partial_* A) \setminus \gamma) > 0$ . Segue que

$$E_0(u) > E_0(u_0^1).$$

Está provado que  $u_0^1$  é mínimo local isolado de  $E_0$ . Para  $u_0^3$  considere o mesmo  $\rho$  dado em (5.3.3) e note que,

$$\Omega \cap \partial_* \{ \chi_{\{u_0^3=a\}} > \xi \} = \emptyset.$$

Logo

$$\begin{aligned} E_0(u_0^3) &= \int_{\Omega} h(x) |D\chi_{\{u_0^3=a\}}| = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\Omega \cap \partial_* \{ \chi_{\{u_0^3=a\}} > \xi \}} h(x) d\mathcal{H}^{n-1} d\xi \\ &= 0 \end{aligned}$$

Dada  $u \in L^1(\Omega)$  podemos considerar que  $u \in BV(\Omega, \{a, b\})$ , pois caso contrário  $E_0(u) = \infty$ . Então, se  $u$  satisfaz

$$0 < |u - u_0^3|_{L^1(\Omega)} < \rho,$$

de maneira análoga ao caso anterior concluímos que  $E_0(u) > 0$ , ou seja,

$$E_0(u) > E_0(u_0^3).$$

Isto prova o Teorema 5.3.2. □

## 5.4 Demonstração do Teorema 5.1.1

Finalmente, com os resultados obtidos nas seções anteriores, podemos demonstrar o principal teorema deste capítulo:

*Demonstração do Teorema 5.1.1.* Após calcular o  $\Gamma$ -limite  $E_0$  da família de funcionais dada em (5.2.1), e provar que cada uma das funções  $u_0^1, \dots, u_0^4$  (veja Teorema 5.3.2) é um mínimo local isolado de  $E_0$ , resta-nos verificar a hipótese (i) do Teorema 1.3.3. No entanto, assim como discutido na Seção 2.3, esta hipótese é consequência da condição de crescimento (veja  $(f_4)$ ) imposta sobre  $f$ . Outros trabalhos utilizam o mesmo artifício [18, 30, 32, 33].

Assim, de posse dos Teoremas 5.2.2, 5.3.2 e 1.3.3, concluímos que a família de funcionais de energia dada em (5.2.1) admite quatro famílias de mínimos locais

$$\{u_\epsilon^1\}_{0 < \epsilon \leq \epsilon_0}, \dots, \{u_\epsilon^4\}_{0 < \epsilon \leq \epsilon_0} \quad \text{para algum } \epsilon_0 > 0,$$

tais que

- $|u_\epsilon^1 - u_0^1|_{L^1(\Omega)} \rightarrow 0$  quando  $\epsilon \rightarrow 0$ , sendo  $u_0^1(x) = a(x)\chi_{\Omega_a}(x) + b(x)\chi_{\Omega_b}(x)$ ;
- $|u_\epsilon^2 - u_0^2|_{L^1(\Omega)} \rightarrow 0$  quando  $\epsilon \rightarrow 0$ , sendo  $u_0^2(x) = b(x)\chi_{\Omega_a}(x) + a(x)\chi_{\Omega_b}(x)$ ;
- $|u_\epsilon^3 - u_0^3|_{L^1(\Omega)} \rightarrow 0$  quando  $\epsilon \rightarrow 0$ , sendo  $u_0^3(x) = a(x)$ ;
- $|u_\epsilon^4 - u_0^4|_{L^1(\Omega)} \rightarrow 0$  quando  $\epsilon \rightarrow 0$ , sendo  $u_0^4(x) = b(x)$ .

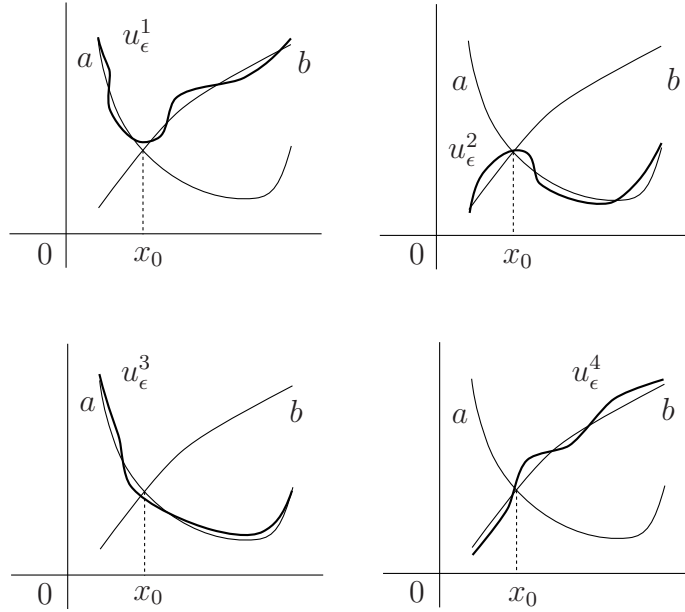


Figura 5.3: Comportamento das famílias  $\{u_\epsilon^1\}, \dots, \{u_\epsilon^4\}$  com  $\epsilon$  suficientemente pequeno e  $\gamma = \{x_0\}$

Portanto cada função  $u_\epsilon^l$  com  $0 < \epsilon < \epsilon_0$  e  $l \in \{1, 2, 3, 4\}$  é uma solução estacionária do problema (5.1.1), resta-nos verificar a estabilidade. Usamos aqui os mesmos argumentos usados na demonstração do Teorema 2.3.4. Com efeito, temos que a segunda variação do funcional de energia  $E_\epsilon$  em  $u_\epsilon^l$  é não-negativa. Sendo  $\lambda_1(u_\epsilon^l)$  o primeiro autovalor do problema (5.1.1) linearizado em torno de  $u_\epsilon^l$  temos que  $\lambda_1(u_\epsilon^l) \geq 0$  devido à sua caracterização variacional. Sabemos que se  $\lambda_1(u_\epsilon^l) > 0$  então  $u_\epsilon^l$  é estável.

Podemos concluir o mesmo se  $\lambda_1(u_\epsilon^l) = 0$ . De fato, neste caso  $\lambda_1(u_\epsilon^l)$  é autovalor simples, segue que existe uma variedade unidimensional crítica local invariante  $W(u_\epsilon^l)$  tangente à autofunção principal do autovalor  $\lambda_1(u_\epsilon^l) = 0$  tal que se  $u_\epsilon^l$  é estável em  $W(u_\epsilon^l)$  então também é estável em  $H^1(\Omega)$  (veja [4], Teorema 6.2.1, por exemplo). A estabilidade de  $u_\epsilon^l$  em  $W(u_\epsilon^l)$  segue da existência de um funcional de Lyapunov e do fato de  $W(u_\epsilon^l)$  ser unidimensional.

O teorema está provado. □

## 5.5 Exemplos

**Exemplo 5.5.1.** Considere o problema (5.1.1) no intervalo  $\Omega := (-1, 1)$  com a função  $f$  dada por

$$f(u, x) = -(u + x)(u - x^2) \left( u - \left( \frac{x^2 - x}{2} \right) \right). \tag{5.5.1}$$

Afirmção:  $f$  satisfaz  $(f_1) - (f_4)$ .



De fato, a equação degenerada

$$f(u, x) = 0$$

possui três soluções  $a(x) = -x$ ,  $b(x) = x^2$  e  $\theta(x) = \frac{x^2 - x}{2}$  tais que:

- em  $\Omega_a = (-1, 0)$  temos  $a > \theta > b$
- em  $\Omega_b = (0, 1)$  temos  $b > \theta > a$
- em  $\gamma = \{0\}$  temos  $a = \theta = b$ .

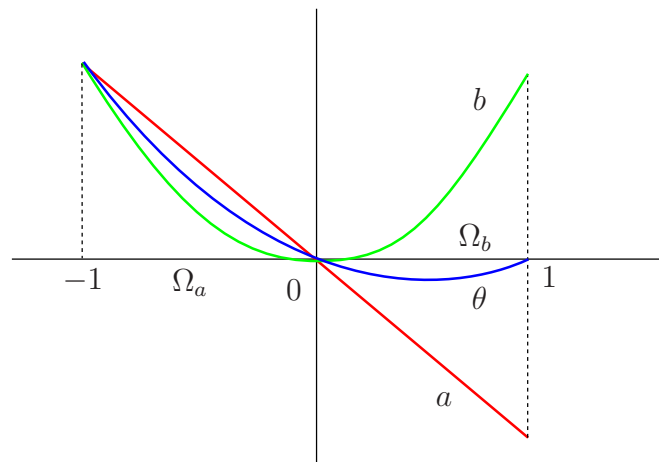


Figura 5.4: Funções  $a$ ,  $b$  e  $\theta$ .

Temos também que para todo  $x \in (-1, 1) \setminus \{0\}$ ,

$$f_u(a, x) = f_u(b, x) = -\frac{(x + x^2)^2}{2} < 0.$$

Ainda, um simples cálculo mostra que

$$F(u, x) = \frac{1}{4}(u - a(x))^2(u - b(x))^2,$$

ou seja,  $f$  satisfaz a condição de igualdade de área,  $F(u, x) \geq 0$  e suas únicas raízes são  $u(x) = a(x) = -x$  e  $u(x) = b(x) = x^2$ . A condição  $(f_4)$  que controla o crescimento de  $F$  também é satisfeita tomando, por exemplo,  $s_0 = 2$ ,  $p = 4$ ,  $c_1 = 0.1$  e  $c_2 = 2$ .

Portanto, o Teorema 5.1.1 pode ser aplicado, ou seja, existe  $\epsilon_0 > 0$  e quatro famílias de soluções estacionárias estáveis

$$\{u_\epsilon^1\}_{0 < \epsilon \leq \epsilon_0}, \dots, \{u_\epsilon^4\}_{0 < \epsilon \leq \epsilon_0}$$

de (5.1.1) em  $\Omega = (-1, 1)$  com  $f(u, x) = -(u + x)(u - x^2) \left( u - \left( \frac{x^2 - x}{2} \right) \right)$ , tais que

- $|u_\epsilon^1 - u_0^1|_{L^1(\Omega)} \rightarrow 0$  quando  $\epsilon \rightarrow 0$ , sendo  $u_0^1(x) = -x\chi_{\Omega_a}(x) + x^2\chi_{\Omega_b}(x)$ ;
- $|u_\epsilon^2 - u_0^2|_{L^1(\Omega)} \rightarrow 0$  quando  $\epsilon \rightarrow 0$ , sendo  $u_0^2(x) = x^2\chi_{\Omega_a}(x) - x\chi_{\Omega_b}(x)$ ;
- $|u_\epsilon^3 - u_0^3|_{L^1(\Omega)} \rightarrow 0$  quando  $\epsilon \rightarrow 0$ , sendo  $u_0^3(x) = -x$ ;
- $|u_\epsilon^4 - u_0^4|_{L^1(\Omega)} \rightarrow 0$  quando  $\epsilon \rightarrow 0$ , sendo  $u_0^4(x) = x^2$ .

**Exemplo 5.5.2.** Agora considere o problema (5.1.1) em

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 4\}$$

e a função  $f$  como sendo

$$f(u, x) = -u(u - x_1^2 - x_2^2 + 1)(u + x_1^2 + x_2^2 - 1).$$

A equação degenerada  $f(u, x) = 0$  possui três soluções  $a(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1$ ,  $b(x) = -x_1^2 - x_2^2 + 1$  e  $\theta(x) \equiv 0$ . Neste caso

$$\gamma = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$$

e, assim como no exemplo anterior, um cálculo simples mostra que  $f$  satisfaz  $(f_1) - (f_4)$ .

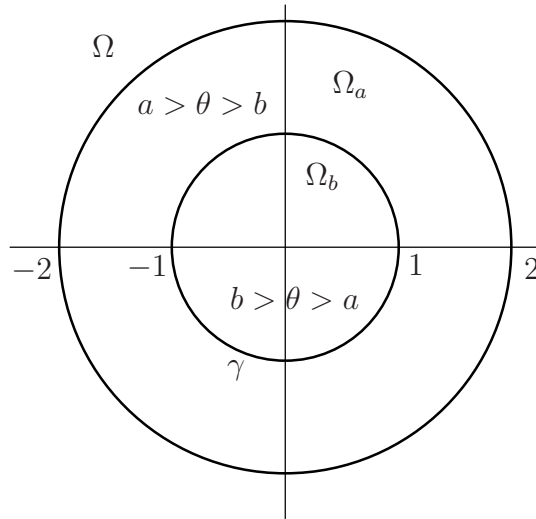


Figura 5.5: Domínio  $\Omega = \Omega_a \cup \Omega_b \cup \gamma$ .

Nestas condições, temos que existe  $\epsilon_0 > 0$  e quatro famílias de soluções estacionárias estáveis

$$\{u_\epsilon^1\}_{0 < \epsilon \leq \epsilon_0}, \dots, \{u_\epsilon^4\}_{0 < \epsilon \leq \epsilon_0}$$

de (5.1.1) tais que

- $|u_\epsilon^1 - u_0^1|_{L^1(\Omega)} \rightarrow 0$  quando  $\epsilon \rightarrow 0$ , sendo  $u_0^1(x) = a(x)\chi_{\Omega_a}(x) + b(x)\chi_{\Omega_b}(x)$ ;

- $|u_\epsilon^2 - u_0^2|_{L^1(\Omega)} \rightarrow 0$  quando  $\epsilon \rightarrow 0$ , sendo  $u_0^2(x) = b(x)\chi_{\Omega_a}(x) + a(x)\chi_{\Omega_b}(x)$ ;
- $|u_\epsilon^3 - u_0^3|_{L^1(\Omega)} \rightarrow 0$  quando  $\epsilon \rightarrow 0$ , sendo  $u_0^3(x) = a(x)$ ;
- $|u_\epsilon^4 - u_0^4|_{L^1(\Omega)} \rightarrow 0$  quando  $\epsilon \rightarrow 0$ , sendo  $u_0^4(x) = b(x)$ .

# Referências Bibliográficas

- [1] Rubinstein, J. e Wolansky, G.; *Instability results for reaction diffusion equations over surfaces of revolutions*, J. Math. Anal. Appl. **187** (1994), 485-489.
- [2] Bandle, C., Punzo, F., Tesei, A.; *Existence and nonexistence of patterns on Riemannian manifolds*, J. Math. Anal. Appl. **387** (2012), 33-47.
- [3] Punzo, F.; *The existence of patterns on surfaces of revolution without boundary*, Nonlinear Anal.: Theory, Meth. and Appl. **77** (2013), 94-102.
- [4] Henry, D.; *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*, Springer Lecture Notes in Mathematics, Vol. 840 (1981).
- [5] Courant, R. e Hilbert, D.; *Methods of Mathematical Physics* , Wiley-Interscience, Vol. 1, New York (1989).
- [6] Besse, A. L.; *Manifolds all of whose geodesics are closed*, Springer (1978).
- [7] Matano, H.; *Asymptotic behavior and stability of solutions of semilinear diffusion equations*, Publ. RIMS, Kyoto Univ., **15** (1979), 401-454.
- [8] Casten, R. G. e Holland, C. J.; *Instability results for reaction diffusion equations with Neumann boundary conditions*, J. Diff. Eqns., **2** (1978), 266-273.
- [9] Vegas, J. e Hale, J. K.; *A nonlinear parabolic equation with varying domain*, Arch. Ration. Mech. Anal. , **86** (1984), 99-123.
- [10] Fusco, G. e Hale, J. K.; *Stable equilibria in a scalar parabolic equations with variable diffusion*, SIAM J. Math Anal., **16** (1985), 1154-1164.
- [11] Hale, J. K. e Rocha, C.; *Bifurcations in a parabolic equation with variable diffusion*, Nonlinear Anal., **9** No. 5 (1985), 479-494.
- [12] Chipot, M. e Hale, J. K.; *Stable equilibria with variable diffusion*, Contemp. Math., **17** (1983), 209-213.
- [13] Yanagida, E; *Stability of stationary distributions in a space-dependent population growth process*, J. Math. Biol., **15** (1982), 37-50.

- [14] do Nascimento, A. S., Crema, J. e Sonego, M.; *Necessary and sufficient conditions on diffusivity for existence of patterns with nonlinear flux on the boundary*, *Electr. J. Diff. Eqns.*, **62** (2012), 1-14.
- [15] do Nascimento, A. S. e Sonego, M.; *The roles of diffusivity and curvature on patterns over surfaces of revolution.*, submetido.
- [16] do Nascimento, A. S.; *On the role of diffusivity in some stable equilibria of a diffusion equation*, *J. Diff. Eqns.*, **155** No. 2 (1999), 231-244.
- [17] do Nascimento, A. S. e Gonçalves, A. C.; *Instability of elliptic equations on compact Riemannian manifolds with non-negative Ricci curvature*, *Electr. J. Diff. Eqns.*, **67** (2010), 1-18.
- [18] do Nascimento, A. S.; *Stable stationary solutions induced by spatial inhomogeneity via  $\Gamma$ -convergence*, *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society*, **29** No.1 (1998), 75-97.
- [19] do Nascimento, A. S. e Crema, J.; *On the role of the equal-area condition in internal layer stationary solutions to a class of reaction-diffusion systems*, *Electronic J. Diff. Eqns.*, **99** (2004), 1-13.
- [20] do Nascimento, A. S. e de Moura, R. J.; *The Role of the Equal-Area Condition in Internal and Superficial Layered Solutions to Some Nonlinear Boundary Value Elliptic Problems*, *Prog. Nonl. Diff. Eqns.*, Vol. 66 (2005), 415-427.
- [21] Cònsul, N. e Solá-Morales, J.; *Stability of Local Minima and Stable Nonconstant equilibria*, *J. Diff. Eqns.*, **157** (1999), 61-81.
- [22] Evans, L. e Gariepy, R.; *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, *Studies in Advanced Mathematics*, CRC Press, (1992).
- [23] Federer, H.; *Geometric Measure Theory*, Springer Verlag, N. York, (1969).
- [24] Protter, M. H. e Weinberger, H. F.; *Maximum principles in differential equations*, Prentice Hall, (1967).
- [25] Giusti, E.; *Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation*, Birkhauser, (1984).
- [26] Do Carmo, M. P.; *Riemannian Geometry*, Birkhauser, (1992).
- [27] Ziemer, W. P.; *Weakly Differentiable Functions*, Springer-Verlag, (1989).
- [28] Sotomayor, J. M.; *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, Rio de Janeiro: IMPA (1979).

- [29] Gallot, S., Hulin, D., Lafontaine, J.; *Riemannian Geometry*, Springer, (1993).
- [30] Kohn, R. V. e Sternberg, P.; *Local minimizers and singular perturbations*, Proceedings of the R. Soc. of Edinburg, **111** (A): (1989), 69-84.
- [31] Sternberg, P.; *The effect of a singular Perturbation on nonconvex variational problems*, Arch. Rat. Mech. Anal., **101** (1988), 209-260.
- [32] Biesdorf, J.; *Mínimos locais de funcionais com dependência espacial via  $\Gamma$ -convergência: com e sem vínculo*, UFSCar, Tese de doutorado (2011).
- [33] Modica, L.; *The Gradient theory of phase transitions and the minimal interface criterion*, Arch. Rat. Mech. Anal., **98** (1987), 123-142.
- [34] Gilbard, D. e Trudinger, N. S.; *Elliptic partial difeferential equations of second order* Springer - Verlag New York, 1983.
- [35] Smoller, L.; *Shock waves end reaction-diffusion equation*, New York - Springer-Verlag, 1992.
- [36] Pao, C. V.; *Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations*, Plenum Press, New YorkLondon, 1992.
- [37] Butuzov V. F., Nefedov N. N., e Schneider K. R.; *Singularly perturbed problems in case of exchange of stabilities*, Journal of Mathematical Sciences, Vol. 121, No. 1 (2004).
- [38] Karali, G. e Sourdis, C.; *Radial and bifurcating non-radial solutions for a singular perturbation problem in the case of exchange of stabilities*, Ann. I. H. Poincaré, AN 29 (2012), 131-170.
- [39] Lebovitz, N. R. e Schaar, R. J.; *Exchange of stabilities in autonomous systems*, Stud. Appl. Math., **54** (1975), 229-260.
- [40] Butuzov V. F. e Smurov, I.; *Initial boundary value problem for a singularly perturbed parabolic equation in case of exchange of stability*, J. Math. Anal. Appl., **234** (1999), 183-192.
- [41] Butuzov, V. F. e Nefedov, N. N.; *Singularly perturbed boundary value problems in case of exchange of stabilities*, J. Math. Anal. Appl., **229** (1999), 543-562.
- [42] Butuzov, V. F., Nefedov, N. N. e Schneider, K. R.; *Singularly perturbed elliptic problems in the case of exchange of stabilities*, J. Differ. Equations, **169** (2001), 373-395.

- [43] Butuzov, V. F., Nefedov, N. N., Recke, L. e Schneider, K.R.; *Region of attraction of a periodic solution to a singularly perturbed parabolic problem*, *Applicable Analysis*, Vol. 91, No. 7, 1265-1277.
- [44] Butuzov, V. F. e Nefedov, N. N.; *Singularly perturbed boundary-value problems for a second-order equation in case of exchange of stability*, *Mat. Zametki*, **63** (1998), 354-362.
- [45] Butuzov, V. F.; *On the stability and domain of attraction of asymptotically nonsmooth stationary solutions to a singularly perturbed parabolic equation*, *Comput. Math. and Math. Physics*, Vol 46, No 3, (2006), 413-424.
- [46] Tikhonov, A. N.; *On the dependence of solutions of differential equations on a small parameter*, *Mat. Sb.*, **64** (1948), 193-204.
- [47] Tikhonov, A. N.; *Systems of differential equations containing small parameters*, *Mat. Sb.*, **73** (1952), 575-586.