

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Espectro do operador Laplaciano de Dirichlet em tubos deformados

Carlos Ronal Mamani Mamani

São Carlos
Fevereiro de 2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Espectro do operador Laplaciano de Dirichlet em tubos deformados

Carlos Ronal Mamani Mamani

Orientadora: *Prof.^a Dr.^a Alessandra Aparecida Verri*

Dissertação apresentada ao programa
de Pós-Graduação em Matemática da
UFSCar como parte dos requisitos
para a obtenção do Título de mestre
em matemática.

São Carlos
Fevereiro de 2014

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária da UFSCar**

M263eo Mamani Mamani, Carlos Ronal.
Espectro do operador Laplaciano de Dirichlet em tubos
deformados / Carlos Ronal Mamani Mamani. -- São Carlos :
UFSCar, 2014.
52 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São
Carlos, 2014.

1. Matemática. 2. Operador laplaciano. 3. Formas
quadráticas. 4. Espectro. 5. Tubos deformados. I. Título.

CDD: 510 (20^a)

Banca Examinadora:

Alessandra Ap Verri

Profa. Dra. Alessandra Aparecida Verri
DM- UFSCar

César Rogério de Oliveira

Prof. Dr. César Rogério de Oliveira
DM- UFSCar

Marciano Pereira

Prof. Dr. Marciano Pereira
UEPG

*Dedicado à
minha família*

Agradecimentos

Agradeço Primeiramente a Deus pela vida que me deu.

Aos meus pais Bernardo e Clara , a meu irmão Alan pelo apoio, incentivo e compreensão.

Aos professores do Departamento de Matemática da UFSCar, que me ajudaram com minha formação durante o mestrado. em especial a minha orientadora Professora Alessandra Aparecida Verri, pelo apoio e confiança que depositou em min para a execução deste trabalho.

Aos professores César Rogério de Oliveira e Marciano Pereira por aceitarem o convite de compor a banca examinadora, pelas criticas e sugestões ao trabalho.

A todos meus colegas da pós-graduação que me ajudaram e agradeço também a todos meus amigos e amigas que acreditaram em mim durante o mestrado.

Finalmente a CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Seja Ω um tubo deformado em \mathbb{R}^3 e $-\Delta_D^\Omega$ o operador Laplaciano de Dirichlet em Ω . Neste trabalho, vamos estudar o espectro $\sigma(-\Delta_D^\Omega)$ do operador $-\Delta_D^\Omega$. Mais precisamente, vamos analisar como as características geométricas de Ω podem influenciar no conjunto $\sigma(-\Delta_D^\Omega)$. Primeiramente, vamos mostrar que, sob certas condições, o espectro essencial $\sigma_{\text{ess}}(-\Delta_D^\Omega)$ de $-\Delta_D^\Omega$ é o mesmo, independente se o tubo é reto, curvado ou torcido. Com relação ao espectro discreto $\sigma_{\text{dis}}(-\Delta_D^\Omega)$ de $-\Delta_D^\Omega$, vamos mostrar que se Ω é um tubo apenas curvado, então o conjunto $\sigma_{\text{dis}}(-\Delta_D^\Omega)$ é não vazio. Por outro lado, se Ω é um tubo apenas torcido, então $\sigma_{\text{dis}}(-\Delta_D^\Omega)$ é vazio. No caso em que Ω é simultaneamente torcido e levemente curvado, veremos que o espectro discreto permanece vazio.

Palavras chaves: Operador Laplaciano, Formas Quadráticas, Espectro, Tubos Deformados.

Abstract

Let Ω be a deformed tube in \mathbb{R}^3 and $-\Delta_D^\Omega$ the Dirichlet Laplacian operator in Ω . In this work, we are going to study the spectrum $\sigma(-\Delta_D^\Omega)$ of the operator $-\Delta_D^\Omega$. More precisely, we are going to analyze how the geometrical characteristics of Ω can influence in the set $\sigma(-\Delta_D^\Omega)$. Firstly, we are going to show that, under certain conditions, the essential spectrum $\sigma_{\text{ess}}(-\Delta_D^\Omega)$ of $-\Delta_D^\Omega$ is the same, independent if the tube is straight, curved or twisted. In regard to the discrete spectrum $\sigma_{\text{dis}}(-\Delta_D^\Omega)$ of $-\Delta_D^\Omega$, we are going to show that if Ω is a curved tube, then $\sigma_{\text{dis}}(-\Delta_D^\Omega)$ is a non empty set. Furthermore, if Ω is a twisted tube, then $\sigma_{\text{dis}}(-\Delta_D^\Omega)$ is a empty set. In the case where Ω is lightly curved and twisted simultaneously, we are going to see that the discrete spectrum remains empty.

Key words: Laplacian Operator, Quadratic Forms, Spectrum, Deformed Tubes.

Sumário

Resumo	III
Abstract	IV
Introdução	1
1 Preliminares	5
1.1 Espectro de operadores autoadjuntos	5
1.2 Espectro de operadores compactos	7
1.3 Formas sesquilineares	8
1.4 Operadores associados à formas quadráticas	11
1.5 Princípio Minimax	14
1.6 Critério de Weyl para formas quadráticas	15
1.7 Desigualdades de Hardy	16
2 Laplaciano de Dirichlet em tubos deformados	19
2.1 Geometria do tubo	19
2.2 Mudança de variáveis	21
2.3 Um pouco sobre a seção transversal do tubo	24
3 Estudo do espectro	25
3.1 Estabilidade do espectro essencial	25
3.2 Efeito da curvatura sobre o espectro discreto	31
4 Desigualdades de Hardy	35
4.1 Desigualdade do tipo Poincaré	35

4.2	Desigualdades local e global de Hardy	39
4.3	Efeito de torção sobre o espectro	43
Apêndice		46
.1	Comportamento assintótico de autovalores	47
.2	Estimativas do Teorema 3.1	48

Introdução

Seja Ω um domínio tubular em \mathbb{R}^3 como, por exemplo, mostra a Figura 1. Neste trabalho, Ω também é chamado de tubo deformado, o qual pode ser curvado ou torcido.

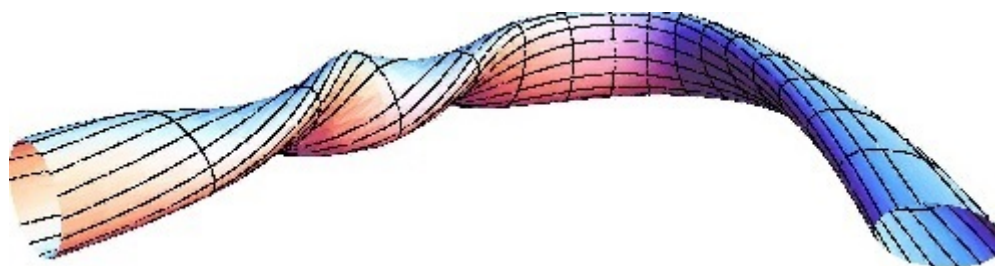


Figura 1: Exemplo de um tubo com seção transversal elíptica. O lado esquerdo da figura representa um tubo torcido e o lado direito um tubo curvado.

De uma forma mais simples, tubos curvados ou tubos torcidos podem ser vistos como deformações independentes de um tubo reto.

Uma situação de grande interesse nos últimos anos é o estudo do Hamiltoniano quântico de uma partícula livre confinada em Ω . O “Laplaciano de Dirichlet” em Ω é um dos modelos mais simples para este estudo [6].

O assunto começou a chamar a atenção no trabalho de Goldstone e Jaffe [7]. Os autores mostraram a existência de “estados limitados” do Laplaciano de Dirichlet em tubos curvados. A partir de então, uma das principais questões era saber se essa existência estaria relacionada com as características geométricas de Ω .

Do ponto de vista matemático, o problema pode ser tratado da seguinte forma. Seja ω um subconjunto aberto, limitado, simplesmente conexo e não vazio de \mathbb{R}^2 . Um tubo deformado pode ser obtido transladando-se ω ao longo de

uma curva parametrizada por comprimento de arco Γ em \mathbb{R}^3 . Este movimento é de acordo com um Frenet Frame apropriado e por razões técnicas exigimos que Γ seja de classe C^3 (veja Seção 2.1 do Capítulo 2 para mais detalhes). Denotamos por $k(s)$ e $\tau(s)$ a curvatura e a torção de Γ no ponto s , respectivamente. Se a curvatura é não nula, obtemos um tubo curvado e dizemos que Ω possui um efeito da curvatura. Por outro lado, a região ω pode se mover ao longo de Γ e ao mesmo tempo realizar uma rotação de ângulo $\theta(s)$ em cada ponto $\Gamma(s)$. Neste caso, se ω não é um disco centrado em Γ e $\tau + \dot{\theta} \neq 0$, obtemos um tubo torcido e dizemos que Ω possui um efeito de torção. Como um exemplo destas situações, podemos observar a Figura 1. Agora, consideremos a forma quadrática

$$q(\psi) := \int_{\Omega} |\nabla \psi|^2 dx, \quad \text{dom } q = \mathcal{H}_0^1(\Omega), \quad (1)$$

em que ∇ denota o gradiente de ψ nas coordenadas usuais de \mathbb{R}^3 e $\mathcal{H}_0^1(\Omega)$ denota o completamento de $C_0^\infty(\Omega)$ no espaço de Sobolev $\mathcal{H}^1(\Omega)$. Observemos que, se $\psi \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$, então $\psi|_{\partial\Omega} = 0$ no sentido do Teorema do traço [5].

A escolha do domínio da forma quadrática $q(\psi)$ surge de uma questão natural quando se restringe o Hamiltoniano de uma partícula livre em Ω . De fato, existe a necessidade de uma condição de contorno em $\partial\Omega$. Este assunto é discutido em [6] e os autores mostram que sob certo ponto de vista a condição de Dirichlet em $\partial\Omega$ é a mais natural a ser considerada.

É conhecido que $q(\psi)$ é uma forma quadrática fechada e limitada inferiormente [10]. Chamamos de operador Laplaciano de Dirichlet em Ω como sendo o operador autoadjunto associado à (1). Denotamos este operador por $-\Delta_D^\Omega$ e o seu espectro por $\sigma(-\Delta_D^\Omega)$. Os estados limitados mencionados no início desta introdução se referem aos valores do espectro discreto $\sigma_{\text{dis}}(-\Delta_D^\Omega)$ de $-\Delta_D^\Omega$.

Dentre os primeiros resultados espectrais relacionados a este assunto citamos o trabalho de Goldstone e Jaffe [7]. Os autores mostraram que se Ω é um tubo curvado, então o espectro discreto $\sigma_{\text{dis}}(-\Delta_D^\Omega)$ é não vazio. No entanto, eles assumem que a curvatura $k(s)$ da curva Γ tem suporte compacto e ω é um disco centrado em Γ . Mais tarde, Duclos e Exner [3] mostraram o mesmo resultado enfraquecendo a hipótese sobre $k(s)$. Por outro lado, os autores exigem condi-

ções para o comportamento de $k'(s)$ e $k''(s)$, quando $|s| \rightarrow \infty$. A generalização para tubos curvados com seção transversal ω geral foi realizada por Chenoud, Freitas e Krejčíř [1]. Neste trabalho, a condição que os autores exigem é que $k(s) \rightarrow 0$, quando $|s| \rightarrow \infty$, e que o tubo não possua efeito de torção. Esta última versão será apresentada neste trabalho (veja Seção 3.2 do Capítulo 3). Assim, dizemos que o efeito da curvatura $k(s)$ atua como uma iteração atrativa, no sentido de que o espectro discreto $\sigma_{\text{dis}}(-\Delta_D^\Omega)$ é não vazio.

O comportamento do espectro $\sigma(-\Delta_D^\Omega)$ também está relacionado com a existência de desigualdades do tipo Hardy para $-\Delta_D^\Omega$. Por exemplo, se Ω é um tubo reto e localmente torcido, então

$$\sigma_{\text{ess}}(-\Delta_D^\Omega) = [E_1, \infty), \quad (2)$$

em que E_1 é o primeiro autovalor do Laplaciano de Dirichlet em ω (veja Seção 3.1 do Capítulo 3). Neste caso, também vale a desigualdade do tipo Hardy

$$\int_{\Omega} (|\nabla\psi|^2 - E_1|\psi|^2) dx > \int_{\Omega} \rho(x)|\psi|^2 dx, \quad \forall \psi \in \mathcal{H}_0^1(\Omega),$$

em que $\rho(x)$ é uma função positiva satisfazendo determinadas propriedades (veja Seção 4.2 do Capítulo 4). Veremos ao longo do texto que esta desigualdade e as características de $\rho(x)$ implicam que

$$\inf \sigma(-\Delta_D^\Omega) \geq E_1. \quad (3)$$

Assim, (2) e (3) mostram que o espectro discreto $\sigma_{\text{dis}}(-\Delta_D^\Omega)$ é vazio. Por este motivo, dizemos que o efeito de torção atua como uma iteração repulsiva, no sentido de que $\sigma_{\text{dis}}(-\Delta_D^\Omega)$ é vazio.

O objetivo geral deste trabalho é estudar o espectro do operador Laplaciano de Dirichlet $-\Delta_D^\Omega$ em tubos deformados. Mais precisamente, vamos investigar como as características geométricas de Ω podem influenciar no conjunto $\sigma(-\Delta_D^\Omega)$. A principal referência usada ao longo do texto é o trabalho de Krejčíř [10]. No entanto, detalhes de algumas demonstrações são provenientes de [1, 4].

Este trabalho está dividido da seguinte forma. No Capítulo 1 apresentamos os conceitos e as ferramentas necessárias para a leitura do texto. O Capítulo 2 é dedicado a uma definição detalhada de tubo deformado e propriedades gerais. No Capítulo 3 fazemos um estudo do espectro essencial $\sigma_{\text{ess}}(-\Delta_D^\Omega)$ do operador $-\Delta_D^\Omega$. Vamos mostrar que sobre certas condições ele permanece o mesmo, independente se o tubo é reto, curvado ou torcido. Neste mesmo capítulo, veremos que se o tubo Ω é apenas curvado, então o espectro discreto $\sigma_{\text{dis}}(-\Delta_D^\Omega)$ é não vazio. No Capítulo 4 trabalhamos com tubos torcidos. Mostramos a existência de uma desigualdade do tipo Poincaré, uma desigualdade local e uma global de Hardy. Como uma aplicação, veremos que estas desigualdades implicam que o espectro discreto do operador $-\Delta_D^\Omega$ é vazio. Como uma outra consequência, também vamos mostrar que se Ω é simultaneamente torcido e “levemente” curvado, então o espectro discreto $\sigma_{\text{dis}}(-\Delta_D^\Omega)$ é vazio.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo reunimos definições, estabelecemos notações e apresentamos resultados que serão utilizados ao longo de todo o texto. Alguns deles são enunciados sem demonstrações, mas uma referência sempre é indicada. Começamos com alguns tópicos da teoria de operadores autoadjuntos, formas sesquilineares e operadores compactos. Em seguida, enunciamos alguns resultados relacionados ao espectro de operadores autoadjuntos. Finalmente, apresentamos algumas das desigualdades clássicas de Hardy.

Ao longo deste capítulo, \mathcal{H} sempre denota um espaço de Hilbert. O produto interno de dois elementos $\eta, \xi \in \mathcal{H}$ é denotado por (η, ξ) . Por convenção, este produto interno é linear na segunda variável e antilinear na primeira. Seja X um subespaço vetorial de \mathcal{H} , usamos a notação $X \sqsubseteq \mathcal{H}$ para indicar que X é denso em \mathcal{H} . O operador identidade é denotado por $\mathbf{1}$.

1.1 Espectro de operadores autoadjuntos

Seja $\text{dom } T$ um subespaço vetorial de \mathcal{H} . Um operador linear $T : \text{dom } T \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ é *simétrico* se

$$(T\xi, \eta) = (\xi, T\eta), \quad \forall \xi, \eta \in \text{dom } T.$$

Dizemos que T é *hermitiano* se T é simétrico e $\text{dom } T \sqsubseteq \mathcal{H}$.

A partir de um operador linear $T : \text{dom } T \subseteq \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, definimos $\text{dom } T^*$ como o espaço vetorial dos elementos $\eta \in \mathcal{H}$ de forma que o funcional linear

$$\xi \mapsto (\eta, T\xi), \quad \xi \in \text{dom } T,$$

pode ser representado por $\zeta \in \mathcal{H}$, ou seja,

$$(\eta, T\xi) = (\zeta, \xi), \quad \forall \xi \in \text{dom } T.$$

O *adjunto* de T é o operador linear T^* , com domínio $\text{dom } T^*$ definido acima, e, para $\eta \in \text{dom } T^*$, $T^*\eta := \zeta$. Assim,

$$(\eta, T\xi) = (T^*\eta, \xi), \quad \forall \xi \in \text{dom } T, \forall \eta \in \text{dom } T^*.$$

Dizemos que T é *autoadjunto* se $T = T^*$.

Dado um operador linear $T : \text{dom } T \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, o *conjunto resolvente* de T , denotado por $\rho(T)$, é o conjunto dos valores $\lambda \in \mathbb{C}$ para os quais o *operador resolvente* de T em λ ,

$$R_\lambda(T) : \mathcal{H} \rightarrow \text{dom } T, \quad R_\lambda(T) := (T - \lambda \mathbf{1})^{-1},$$

existe e é limitado. O *espectro* de T é o conjunto $\sigma(T) := \mathbb{C} \setminus \rho(T)$.

Teorema 1.1. $\rho(T)$ é um subconjunto aberto e $\sigma(T)$ é um subconjunto fechado de \mathbb{C} .

Uma das vantagens em se trabalhar com operadores autoadjuntos é o seguinte teorema.

Teorema 1.2. Se T é autoadjunto, então o espectro de T é um subconjunto não vazio de \mathbb{R} .

Outro resultado interessante é o teorema abaixo.

Teorema 1.3. Se T é autoadjunto e λ é um ponto isolado de $\sigma(T)$, então λ é um autovalor de T .

Este último teorema motiva a seguinte decomposição espectral. Seja T um operador autoadjunto. O *espectro essencial* de T é o conjunto $\sigma_{\text{ess}}(T)$ dos pontos de acumulação de $\sigma(T)$ junto com os autovalores de T de multiplicidade infinita. O *espectro discreto* de T é o conjunto $\sigma_{\text{dis}}(T) := \sigma(T) \setminus \sigma_{\text{ess}}(T)$, ou seja, o conjunto dos autovalores isolados de T (cada um com multiplicidade finita). Se $\sigma_{\text{ess}}(T) = \emptyset$, dizemos que T tem *espectro puramente discreto*; se $\sigma_{\text{dis}}(T) = \emptyset$, dizemos que T tem *espectro puramente essencial*.

Teorema 1.4. *Se T é autoadjunto, então $\sigma_{\text{ess}}(T)$ é um subconjunto fechado de \mathbb{R} .*

Dizemos que um operador linear $T : \text{dom } T \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ é *limitado inferiormente* se existe $\beta \in \mathbb{R}$ de forma que $T \geq \beta$, ou seja, $(T\xi, \xi) \geq \beta(\xi, \xi)$, $\forall \xi \in \text{dom } T$. Neste caso, β é chamado de *um limite inferior* para T .

Teorema 1.5. *Se T é autoadjunto e $T \geq \beta$, então $\sigma(T) \subset [\beta, \infty)$.*

Exemplo 1.6. Seja $\mathcal{H}^2(\mathbb{R}^n)$ o espaço vetorial de todas as funções $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tais que, para todos $i, j \in \{1, \dots, n\}$, as derivadas (no sentido das distribuições) $\partial\psi/\partial x_i, \partial^2\psi/\partial x_i\partial x_j$ pertencem a $L^2(\mathbb{R}^n)$. Definimos o operador linear, o qual também é chamado de operador Laplaciano,

$$(T\psi)(x) := -(\Delta\psi)(x) = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2\psi}{\partial x_i^2}, \quad \text{dom } T = \mathcal{H}^2(\mathbb{R}^n).$$

T é autoadjunto e o seu espectro é o conjunto $\sigma(T) = [0, \infty)$, ou seja, é puramente essencial.

As demonstrações dos resultados enunciados nesta seção, assim como os detalhes do Exemplo 1.6, podem ser encontrados em [2].

1.2 Espectro de operadores compactos

Um operador linear $T : \text{dom } T \subseteq \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ é *compacto* se a imagem $T(A)$, de cada subconjunto limitado $A \subset \text{dom } T$, tem fecho compacto.

O teorema abaixo mostra uma caracterização dos operadores autoadjuntos com espectro essencial vazio. Devido a essa caracterização, tais operadores são chamados de *operadores com resolvente compacto*.

Teorema 1.7. *Seja $T : \text{dom} T \subseteq \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ um operador autoadjunto e \mathcal{H} um espaço de Hilbert de dimensão infinita. Então, as seguintes condições são equivalentes:*

- (i) $\sigma_{\text{ess}}(T) = \emptyset$.
- (ii) *Existe uma base ortonormal $\{\xi_j\}_{j=0}^{\infty}$ de \mathcal{H} formada por autovetores de T , $T\xi_j = \lambda_j\xi_j$, com autovalores reais λ_j , contando a sua multiplicidade, satisfazendo $\lim_{j \rightarrow \infty} |\lambda_j| = \infty$ (e assim, cada um deles possui multiplicidade finita).*
- (iii) $R_z(T)$ é um operador compacto para algum $z \in \rho(T)$ (e, portanto, para todo $z \in \rho(T)$).

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [2].

1.3 Formas sesquilineares

Seja $\text{dom } b$ um subespaço denso de um espaço de Hilbert \mathcal{H} . Uma *forma sesquilinear* em \mathcal{H} é uma aplicação

$$b : \text{dom } b \times \text{dom } b \rightarrow \mathbb{C}$$

que é linear na segunda variável e antilinear na primeira. Em algumas situações denotamos $\text{dom } b \times \text{dom } b$ simplesmente por $\text{dom } b$. Dizemos que b é *hermitiana* se $b(\phi, \psi) = \overline{b(\psi, \phi)}$, $\forall \phi, \psi \in \text{dom } b$. A aplicação $\psi \mapsto b(\psi) := b(\psi, \psi)$ é chamada de *forma quadrática* associado à b .

Para cada $\phi, \psi \in \text{dom } b$, se verifica a equação

$$4b(\phi, \psi) = b(\phi + \psi) - b(\phi - \psi) - ib(\phi + i\psi) + ib(\phi - i\psi), \quad (1.1)$$

chamada de *identidade de polarização* para formas sesquilineares. Com esta identidade é possível mostrar que b é hermitiana se, e somente se, a sua forma quadrática associada é real.

Uma forma sesquilinear b é *limitada* se a sua norma

$$\|b\| := \sup_{\substack{0 \neq \phi \in \text{dom } b \\ 0 \neq \psi \in \text{dom } b}} \frac{|b(\phi, \psi)|}{\|\phi\| \|\psi\|}$$

é finita, ou seja, $\|b\| < \infty$.

Proposição 1.8. *Se $b : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ é uma forma sesquilinear limitada, então existe um único operador limitado $T_b : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ satisfazendo*

$$b(\phi, \psi) = (\phi, T_b \psi), \quad \forall \phi, \psi \in \mathcal{H}.$$

Ainda mais, $\|T_b\| = \|b\|$ e se b é hermitiana, então T_b é autoadjunto.

A demonstração desta proposição pode ser encontrada em [2].

Ao longo deste texto trabalhamos com formas sesquilineares não limitadas. No que segue, vamos adaptar a proposição acima para “formas sesquilineares fechadas”. Abaixo, algumas definições.

Seja b uma forma sesquilinear hermitiana. Dizemos que

- (1) b é *positiva* se a sua forma quadrática associada é positiva, ou seja, $b(\xi) \geq 0$, $\forall \xi \in \text{dom } b$.
- (2) b é *limitada inferiormente* se existe $\beta \in \mathbb{R}$ de forma que $b(\xi) \geq \beta \|\xi\|^2$, $\forall \xi \in \text{dom } b$. Neste caso, usamos a notação $b \geq \beta$ e β é chamado de *um limite inferior* para b . Observemos que $b - \beta$ define uma forma sesquilinear positiva dada por $(b - \beta)(\xi, \eta) := b(\xi, \eta) - \beta(\xi, \eta)$.

Novamente, seja b uma forma sesquilinear hermitiana e $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \text{dom } b$.

- (3) $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é chamada de *sequência de Cauchy com respeito à b* (ou em $(\text{dom } b, b)$) se $b(\psi_n - \psi_m) \rightarrow 0$, quando $m, n \rightarrow \infty$.

- (4) $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge à ψ com respeito à b (ou em $(\text{dom } b, b)$) se $\psi \in \text{dom } b$ e $b(\psi_n - \psi) \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$.

Dizemos que uma forma sesquilinear b é *fechada* se para cada sequência de Cauchy $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em $(\text{dom } b, b)$, com $\psi_n \rightarrow \psi$ em \mathcal{H} , tem-se $\psi \in \text{dom } b$ e $b(\psi_n - \psi) \rightarrow 0$.

Seja β um limite inferior da forma sesquilinear b ($b \geq \beta$). Definimos o seguinte produto interno $(\cdot, \cdot)_+$ em $\text{dom } b$:

$$(\phi, \psi)_+ := b(\phi, \psi) + (1 - \beta)(\phi, \psi).$$

Obtemos assim a norma $\|\psi\|_+ := \sqrt{(\psi, \psi)_+}$.

Lema 1.9. *Seja b uma forma sesquilinear hermitiana e limitada inferiormente. São equivalentes:*

- (i) $(\text{dom } b, \|\cdot\|_+)$ é um espaço de Hilbert.
- (ii) b é fechada.

Demonstração. (i) \Rightarrow (ii) Suponhamos que $(\text{dom } b, \|\cdot\|_+)$ é um espaço de Hilbert. Seja $\{\xi_n\} \subset \text{dom } b$, $\xi_n \rightarrow \xi$ em \mathcal{H} e $b(\xi_n - \xi_m) \rightarrow 0$. Nestas condições,

$$\|\xi_n - \xi_m\|_+^2 = b(\xi_n - \xi_m) + (1 - \beta)\|\xi_n - \xi_m\|^2 \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0.$$

Assim, $\{\xi_n\}$ é uma sequência de Cauchy em $(\text{dom } b, \|\cdot\|_+)$. Logo, $\xi \in \text{dom } b$ e $\|\xi_n - \xi\|_+^2 \rightarrow 0$. Consequentemente, $b(\xi_n - \xi) \rightarrow 0$.

(ii) \Rightarrow (i) Suponhamos que b é uma forma fechada. Seja $\{\xi_n\}$ uma sequência de Cauchy em $(\text{dom } b, \|\cdot\|_+)$. Assim, ξ_n é uma sequência de Cauchy em \mathcal{H} e em $(\text{dom } b, b)$. Seja $\xi := \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n$ em \mathcal{H} . Como b é fechada, segue que $\xi \in \text{dom } b$ e $b(\xi_n - \xi) \rightarrow 0$. Portanto, $\|\xi_n - \xi\|_+^2 \rightarrow 0$. \square

Exemplo 1.10. Seja $T : \text{dom } T \subseteq \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ um operador hermitiano. Definimos a forma sesquilinear b^T por

$$b^T(\xi, \eta) := (\xi, T\eta), \quad \text{dom } b^T = \text{dom } T.$$

Assim definida, b^T é hermitiana . Ainda mais, b^T é limitada inferiormente se, e somente se, T é limitado inferiormente.

A forma sesquilinear b^T definida no exemplo acima é chamada de *forma sesquilinear gerada por T* .

1.4 Operadores associados à formas quadráticas

Seja b uma forma sesquilinear hermitiana. O operador T_b associado à b é definido por

$$\begin{aligned} \text{dom } T_b &:= \{ \xi \in \text{dom } b : \exists \zeta \in \mathcal{H}, \text{ tal que } b(\eta, \xi) = (\eta, \zeta), \forall \eta \in \text{dom } b \}, \\ T_b \xi &:= \zeta, \quad \xi \in \text{dom } T_b. \end{aligned}$$

Nestas condições, $b(\eta, \xi) = (\eta, T_b \xi)$, $\forall \eta \in \text{dom } b, \forall \xi \in \text{dom } T_b$. Observemos que T_b está bem definido pois $\text{dom } b \subseteq \mathcal{H}$. Ainda mais, como b é hermitiana segue que T_b é simétrico.

O teorema abaixo pode ser visto como uma representação de formas sesquilineares.

Teorema 1.11. *Seja $\text{dom } b \subseteq \mathcal{H}$ e b uma forma sesquilinear fechada com limite inferior $\beta \in \mathbb{R}$ (ou seja, $b \geq \beta$). Então, o operador T_b associado à b é o único operador autoadjunto com $\text{dom } T_b \subseteq \text{dom } b$ e de forma que*

$$b(\eta, \xi) = (\eta, T_b \xi), \quad \forall \eta \in \text{dom } b, \forall \xi \in \text{dom } T_b. \quad (1.2)$$

Ainda mais, $T_b \geq \beta$ e $\text{dom } T_b$ é denso em $\text{dom } b$ com a norma $\| \cdot \|_+$.

Antes de apresentarmos a demonstração deste teorema, vamos ver uma de suas aplicações.

Exemplo 1.12. Seja $\text{dom } b = \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n) \subseteq L^2(\mathbb{R}^n)$. Definimos a forma sesquilinear b por

$$b(\phi, \psi) := \int_{\mathbb{R}^n} (\nabla \phi, \nabla \psi) dx, \quad \phi, \psi \in \text{dom } b.$$

Desde que $b(\phi) = \|\nabla\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2$, podemos observar que b é hermitiana e positiva. Seja $\{\phi_n\} \subset \text{dom } b$ uma sequência de Cauchy com respeito à b e $\phi_n \rightarrow \phi$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Como $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$ é um espaço de Hilbert (cuja norma induzida pelo correspondente produto interno é $\|\phi\|_{\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)}^2 = \|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + \|\nabla\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2$), segue que $\phi \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$ e $\phi_n \rightarrow \phi$ em $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$. Assim, b é fechada e $\text{dom } b$ é um espaço Hilbert com o produto interno $(\phi, \psi)_+ = b(\phi, \psi) + (\phi, \psi)$ (o qual coincide com o de $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$). Nestas condições, o Teorema 1.11 garante que existe um único operador autoadjunto T_b , associado à b , de forma que a relação (1.2) é satisfeita. Por outro lado, sabemos que o operador $T\psi = -\Delta\psi$, $\text{dom } T = \mathcal{H}^2(\mathbb{R}^n)$, é autoadjunto. Ainda mais, $\mathcal{H}^2(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$ e uma integração por partes mostra que

$$b(\phi, \psi) = \int_{\mathbb{R}^n} (\nabla\phi, \nabla\psi) dx = (\phi, -\Delta\psi)_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall \phi \in \text{dom } b, \forall \psi \in \text{dom } T.$$

A unicidade do Teorema 1.11 implica que $T_b = T$.

Demonstração do Teorema 1.11: Definimos $\mathcal{H}_b := (\text{dom } b, \|\cdot\|_+)$ o qual é um espaço de Hilbert pelo Lema 1.9. Como já observado, T_b é simétrico e

$$(\xi, T_b\xi) = b(\xi, \xi) \geq \beta\|\xi\|^2, \quad \forall \xi \in \text{dom } T_b \subset \text{dom } b,$$

ou seja, $T_b \geq \beta$.

Antes de continuar a demonstração, destacamos que, para cada $\eta \in \mathcal{H}_b$, temos a desigualdade $\|\eta\|_+^2 = (b(\eta) - \beta\|\eta\|^2) + \|\eta\|^2 \geq \|\eta\|^2$.

Para cada $\phi \in \mathcal{H}$, definimos a aplicação linear $f_\phi : \mathcal{H}_b \rightarrow \mathbb{C}$ por $f_\phi(\eta) := (\phi, \eta)$. Observemos que

$$|f_\phi(\eta)| = |(\phi, \eta)| \leq \|\phi\| \|\eta\| \leq \|\phi\| \|\eta\|_+, \quad \forall \eta \in \mathcal{H}_b.$$

Isto mostra que f_ϕ é limitada. Pelo Teorema de representação de Riesz, existe $\phi_b \in \mathcal{H}_b$ de forma que

$$f_\phi(\eta) = (\phi, \eta) = (\phi_b, \eta)_+, \quad \forall \eta \in \mathcal{H}_b,$$

e $\|f_\phi\| = \|\phi_b\|_+$.

Definimos a aplicação linear $M : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_b$ por $M\phi := \phi_b$. Inicialmente, observemos que

$$\|M\phi\|_+ = \|\phi_b\|_+ = \|f_\phi\| \leq \|\phi\|, \quad \forall \phi \in \mathcal{H},$$

mostrando que M é limitado.

Se $M\phi = 0$, então $(\phi, \eta) = 0, \forall \eta \in \mathcal{H}_b$. Como $\text{dom } b$ é denso em \mathcal{H} , segue que $\phi = 0$. Portanto, M é invertível e para $M^{-1} : \text{img } M \rightarrow \mathcal{H}$ escrevemos $M^{-1}\phi_b = \phi$ (observemos que $\text{img } M^{-1} = \mathcal{H}$).

Agora, vamos verificar que o subespaço $\text{img } M$ é denso em \mathcal{H} . De fato, como $\text{img } M \subset \text{dom } b$ e $\|\cdot\| \leq \|\cdot\|_+$, é suficiente mostrarmos que $\text{img } M$ é denso em \mathcal{H}_b . Tomemos $\eta \in \mathcal{H}_b$ de forma que $(M\xi, \eta)_+ = 0, \forall \xi \in \mathcal{H}$. Assim,

$$0 = (M\xi, \eta)_+ = (\xi_b, \eta)_+ = (\xi, \eta), \quad \forall \xi \in \mathcal{H},$$

o que implica que $\eta = 0$. Isto demonstra a densidade.

Por outro lado, M^{-1} esta diretamente relacionado com T_b . De fato, se $\xi_b \in \text{dom } M^{-1}$,

$$(\eta, M^{-1}\xi_b) = (\eta, \xi) = (\eta, \xi_b)_+ = b(\eta, \xi_b) + (1 - \beta)(\eta, \xi_b), \quad \forall \eta \in \text{dom } b,$$

ou seja,

$$b(\eta, \xi_b) = (\eta, M^{-1}\xi_b) - (1 - \beta)(\eta, \xi_b) = (\eta, Q\xi_b), \quad \forall \eta \in \text{dom } b,$$

em que $Q := M^{-1} - (1 - \beta)\mathbf{1}$, $\text{dom } Q = \text{dom } M^{-1}$. Assim, $\xi_b \in \text{dom } T_b$ e $T_b\xi_b = Q\xi_b$. Concluimos que $Q \subset T_b$. Esta relação também mostra que T_b é densamente definido ($\text{dom } Q = \text{img } M \sqsubseteq \mathcal{H}$). Portanto, T_b é hermitiano e, conseqüentemente, Q também é.

Notando que $M^{-1} = Q + (1 - \beta)\mathbf{1}$, conseguimos observar que M^{-1} é hermitiano. Agora, para $\eta, \phi \in \mathcal{H}$,

$$(M\phi, \eta) = (\phi_b, M^{-1}\eta_b) = (M^{-1}\phi_b, \eta_b) = (\phi, M\eta),$$

mostrando que M é autoadjunto. Logo, M^{-1} é autoadjunto e o mesmo vale para Q . Finalmente, como Q não possui extensões hermitianas próprias, segue que $Q = T_b$ e T_b é autoadjunto.

Para a unicidade, suponhamos que S seja um operador autoadjunto com $\text{dom } S \subset \text{dom } b$ e

$$b(\eta, \xi) = (\eta, S\xi) \quad \forall \eta \in \text{dom } b, \forall \xi \in \text{dom } S.$$

Pela definição de T_b , $\xi \in \text{dom } T_b$ e $T_b\xi = S\xi$. Assim, $S \subset T_b$. Como T e S são autoadjuntos segue que $S = T_b$.

□

1.5 Princípio Minimax

Se $n \in \mathbb{N}$, denotamos por \mathcal{P}_n um subespaço de \mathcal{H} gerado por n vetores (não necessariamente linearmente independentes). Usamos a notação \mathcal{P}_n^\perp para indicar o complemento ortogonal de \mathcal{P}_n em \mathcal{H} .

Teorema 1.13. (*Princípio Minimax*) *Seja T um operador autoadjunto e limitado inferiormente. Seja $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência não decrescente de números reais definida por*

$$\lambda_n := \sup_{\mathcal{P}_n} \left\{ \inf_{\substack{\xi \in \mathcal{P}_n \\ \xi \in \text{dom } b}} \frac{(\xi, T\xi)}{\|\xi\|^2}; \right\}.$$

Então, para cada $n \in \mathbb{N}$, ou

- (i) *existem n autovalores (contando, para autovalores degenerados, um número de vezes igual a sua multiplicidade) abaixo do ínfimo de espectro essencial e λ_n é o n -ésimo autovalor contando a multiplicidade,*

ou

- (ii) *λ_n é o ínfimo do espectro essencial, ou seja, $\lambda_n = \inf\{\lambda \in \sigma_{\text{ess}}(T)\}$. Neste caso, $\lambda_n = \lambda_{n+1} = \lambda_{n+2} = \dots$ e existe no máximo $n - 1$ autovalores (contando a multiplicidade) abaixo de λ_n .*

Corolário 1.14. (Rayleigh-Ritz) *Seja T um operador linear autoadjunto e limitado inferiormente. Então,*

$$\inf \sigma(T) = \inf_{0 \neq \xi \in \text{dom } T} \frac{(\xi, T\xi)}{\|\xi\|^2}.$$

O teorema abaixo permite uma reformulação do Princípio Minimax a partir de formas sesquilineares.

Teorema 1.15. *Seja b uma forma sesquilinear positiva, fechada e com $\text{dom } b \sqsubseteq \mathcal{H}$. Seja T o operador autoadjunto associado a ela. Então, a sequência $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ do Princípio Minimax pode ser substituída por*

$$\lambda_n = \sup_{\mathcal{P}_n} \left\{ \inf_{\substack{\xi \in \mathcal{P}_n \\ \xi \in \text{dom } b}} \frac{b(\xi)}{\|\xi\|^2} \right\}.$$

As demonstrações dos teoremas e do corolário acima podem ser encontradas em [12].

1.6 Critério de Weyl para formas quadráticas

Seja b uma forma sesquilinear positiva, fechada e com $\text{dom } b \sqsubseteq \mathcal{H}$. Denotamos por \mathcal{H}_+ o espaço de Hilbert $(\text{dom } b, \|\cdot\|_+)$. Seja \mathcal{H}_- o espaço dual de \mathcal{H}_+ . A aplicação

$$\begin{aligned} j : \mathcal{H} &\rightarrow \mathcal{H}_- \\ \eta &\mapsto j(\eta) \end{aligned}, \quad \text{em que} \quad \begin{aligned} j(\eta) : \text{dom } b &\rightarrow \mathbb{C} \\ \xi &\mapsto (\eta, \xi) \end{aligned}$$

é contínua. Essa continuidade motiva a seguinte noção de convergência em \mathcal{H}_- . Seja $\{\xi_n\} \subset \mathcal{H}$. Dizemos que $\xi_n \rightarrow 0$ em \mathcal{H}_- se

$$\|\xi_n\|_{\text{dom } b^*} := \sup_{\phi \in \text{dom } b \setminus \{0\}} \frac{|(\phi, \xi_n)|}{\|\phi\|_+} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Teorema 1.16. (Critério de Weyl para formas quadráticas) *Seja b uma forma*

sesquilinear positiva, fechada e com $\text{dom } b \sqsubseteq \mathcal{H}$. Seja T o operador autoadjunto associado a ela. Um ponto λ pertence ao espectro de T ($\lambda \in \sigma(T)$) se, e somente se, existe uma sequência $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ satisfazendo as seguintes propriedades:

- (i) $\|\xi_n\|_{\mathcal{H}} = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N};$
- (ii) $(T - \lambda \mathbf{1})\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ em \mathcal{H}_- .

Além disso, $\lambda \in \sigma_{ess}(T)$ se, e somente se, além das propriedades acima, a sequência $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ satisfaz

- (iii) $\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{w} 0$ em \mathcal{H} .

Uma sequência $\{\xi_n\}$ satisfazendo as condições (i), (ii) e (iii) do Teorema 1.16 é chamada de *sequência de Weyl para T em λ* .

A demonstração do Teorema 1.16 pode ser encontrada em [9].

1.7 Desigualdades de Hardy

Desigualdades de Hardy são um dos assuntos discutidos neste trabalho. Nesta seção, apresentamos algumas das desigualdades clássicas.

Seja Ω um subconjunto aberto, conexo e não vazio de \mathbb{R}^n . Consideremos o espaço de Hilbert $L^2(\Omega)$. Seja b uma forma quadrática positiva, fechada e com $\text{dom } b \sqsubseteq L^2(\Omega)$. Denotamos por T o operador autoadjunto associado a ela. Dizemos que b (ou T) *satisfaz uma desigualdade de Hardy* (ou do *tipo Hardy*) se

$$b(\psi) - \inf \sigma(T) \|\psi\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \int_{\Omega} \rho(x) |\psi|^2 dx, \quad \forall \psi \in \text{dom } b, \quad (1.3)$$

para alguma função mensurável $\rho \neq 0$, não negativa e de forma que $\int_M \rho(x) dx \neq 0$ em algum subconjunto mensurável $M \subset \Omega$. Neste caso, a função $\rho(x)$ é chamada de *peso de Hardy*.

Teorema 1.17. (*Desigualdade de Hardy em três dimensões*) Para toda função $\psi \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^3)$, tem-se

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \psi(x)|^2 dx \geq \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\psi(x)|^2}{|x|^2} dx. \quad (1.4)$$

Demonstração. Considerando as partes reais e imagiárias de uma função, podemos restringir a demonstração às funções ψ com valores reais.

Para $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ usamos a notação $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ e, lembrando coordenadas esféricas (r, θ, φ) , temos $dx = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$. Consideremos inicialmente $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ (ψ real). Seja $\phi = r^{1/2}\psi$. Assim,

$$|(\nabla\psi)(x)|^2 = \frac{1}{r}|\nabla\psi|^2 - \frac{1}{r^2} \frac{\partial(\phi^2)}{\partial r} + \frac{1}{4r^3}(\phi^2).$$

Desde que $\phi(0) = 0$ e existe $R > 0$ de forma que $\phi(x) = 0$ se $r \geq R$, segue que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{r^2} \frac{\partial(\phi^2)}{\partial r} dx &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta d\varphi \int_0^R \frac{\partial(\phi^2)}{\partial r} dr \\ &= \pi (\phi(R)^2 - \phi(0)^2) = 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla\psi|^2 dx \geq \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{r^3} \phi^2 dx = \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{r^2} \psi^2 dx$$

e a desigualdade (1.4) é válida para toda função $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. Agora, o resultado segue da densidade de $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ em $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^3)$. \square

O Teorema 1.17 se estende a dimensões maiores. Mais precisamente, para $n \geq 3$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\psi(x)|^2 dx \geq \frac{(n-2)^2}{4} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\psi(x)|^2}{|x|^2} dx, \quad \forall \psi \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n).$$

Para mais detalhes sobre esta generalização indicamos [8, 13].

Teorema 1.18. (*Desigualdade de Hardy em uma dimensão*) Para toda função $\psi \in \mathcal{H}_0^1(0, \infty)$, tem-se

$$\int_0^\infty |\psi'(x)|^2 dx \geq \frac{1}{4} \int_0^\infty \frac{|\psi|^2}{x^2} dx. \quad (1.5)$$

Demonstração. Novamente, vamos restringir a demonstração às funções ψ com valores reais. Consideremos inicialmente $\psi \in C_0^\infty(0, \infty)$ (ψ real). Uma integra-

ção por partes e a desigualdade de Hölder implicam que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{|\psi(x)|^2}{x^2} dx &= \int_0^\infty \left(-\frac{1}{x}\right)' |\psi(x)|^2 dx \\ &= 2 \int_0^\infty \frac{1}{x} \psi(x) \psi'(x) dx \\ &\leq 2 \sqrt{\int_0^\infty \frac{|\psi(x)|^2}{x^2} dx} \sqrt{\int_0^\infty |\psi'(x)|^2 dx}. \end{aligned}$$

Portanto, a desigualdade (1.5) vale para toda função $\psi \in C_0^\infty(0, \infty)$. Agora, o resultado segue da densidade de $C_0^\infty(0, \infty)$ em $\mathcal{H}_0^1(0, \infty)$. \square

De forma mais geral, é possível mostrar que o Teorema 1.18 vale para toda função $\psi \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R})$ satisfazendo $\psi(0) = 0$.

Observação 1.19. Uma desigualdade de Hardy pode dizer muito a respeito do espectro de um operador. Por exemplo, consideremos uma função mensurável $0 \leq V(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ e suponhamos que $V(x) \leq 1/4|x|^2$, $\forall x \in \mathbb{R}^3$. O operador

$$(T_V \psi)(x) := -(\Delta \psi)(x) - V(x)\psi(x), \quad \text{dom } T_V = \mathcal{H}^2(\mathbb{R}^3),$$

é autoadjunto e seu o espectro essencial é o conjunto $\sigma_{\text{ess}}(T_V) = [0, \infty)$ (veja [2] para mais detalhes). Agora, suponhamos que exista $\lambda \in \sigma_{\text{dis}}(T_V) \subset (-\infty, 0)$. Então, existe uma função $\psi_\lambda \in \text{dom } T_V$ de forma que $T_V \psi_\lambda = \lambda \psi_\lambda$, ou melhor,

$$\int_{\mathbb{R}^3} (|\nabla \psi_\lambda|^2 - V(x)|\psi_\lambda|^2) dx = (\psi_\lambda, T_V \psi_\lambda) = \lambda \|\psi_\lambda\|^2 < 0.$$

Por outro lado, o Teorema 1.17 garante que

$$\int_{\mathbb{R}^3} (|\nabla \psi|^2 - V(x)|\psi|^2) dx \geq \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{1}{4|x|^2} - V(x)\right) |\psi|^2 dx \geq 0, \quad \forall \psi \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^3).$$

Concluimos que tal λ não existe e o espectro discreto de T_λ é vazio.

Capítulo 2

Laplaciano de Dirichlet em tubos deformados

Na parte inicial deste capítulo, apresentamos a construção da região Ω na qual vamos restringir o operador Laplaciano $-\Delta$. Seja ω um subconjunto aberto, limitado, simplesmente conexo e não vazio de \mathbb{R}^2 . Inicialmente, podemos pensar em Ω como sendo $\mathbb{R} \times \omega$, ou seja, um tubo reto. De forma mais geral, vamos trabalhar com tubos curvados e tubos torcidos, os quais também são chamados de tubos deformados. Estas definições são apresentadas com detalhes nas duas primeiras seções.

Com o tubo deformado Ω bem definido, o próximo passo é considerar o operador Laplaciano restrito a ele. Na sua fronteira $\partial\Omega$ vamos impor a condição de Dirichlet. Mais precisamente, vamos trabalhar com a forma quadrática associada a este problema. Este assunto também é abordado nas duas primeiras seções.

A terceira e última seção é dedicada a algumas particularidades que serão úteis ao longo do texto.

2.1 Geometria do tubo

Seja $\Gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva simples de classe C^3 em \mathbb{R}^3 e parametrizada pelo comprimento de arco s . A curvatura de Γ no ponto s é denotada por $\kappa(s)$.

Os vetores

$$T(s) = \dot{\Gamma}(s), \quad N(s) = \frac{1}{\kappa(s)}\dot{T}(s), \quad B(s) = T(s) \times N(s), \quad (2.1)$$

denotam, respectivamente, os vetores tangente, normal e binormal à curva no ponto $\Gamma(s)$.

Para justificar a construção (2.1), assumimos que $\kappa > 0$. Por outro lado, se uma parte de Γ é um pedaço de uma linha reta (ou seja, a curvatura κ é identicamente nula nesse pedaço), podemos escolher um Frenet frame constante. Assim, é possível combinar Frenet frames constantes com (2.1).

Em cada uma das situações acima, quando um Frenet frame global existe, dizemos que a curva possui um Frenet frame apropriado. Este, por sua vez, se desenvolve ao longo da curva satisfazendo as equações de Serret-Frenet:

$$\begin{pmatrix} \dot{T} \\ \dot{N} \\ \dot{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

em que τ denota a torção de Γ , a qual é definida por (2.2).

Ao longo deste trabalho, vamos assumir que a curva Γ possui um Frenet frame apropriado.

Seja ω um subconjunto aberto, limitado, simplesmente conexo e não vazio de \mathbb{R}^2 . Definimos a região

$$\Lambda = \{x \in \mathbb{R}^3 : x = \Gamma(s) + y_1 N(s) + y_2 B(s), s \in \mathbb{R}, (y_1, y_2) \in \omega\}.$$

Λ é obtida transladando-se ω ao longo de Γ (este movimento é com relação à (2.2)).

Agora, seja $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 e de forma que $\theta(0) = 0$. Em cada ponto $\Gamma(s)$ da curva permitimos uma rotação de ângulo $\theta(s)$ de ω . Assim, obtemos uma nova região

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 : x = \Gamma(s) + y_1 N_\theta(s) + y_2 B_\theta(s), s \in \mathbb{R}, (y_1, y_2) \in \omega\}, \quad (2.3)$$

em que

$$\begin{aligned} N_\theta(s) &:= \cos \theta(s) N(s) + \operatorname{sen} \theta(s) B(s), \\ B_\theta(s) &:= -\operatorname{sen} \theta(s) N(s) + \cos \theta(s) B(s). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Chamamos Ω de *tubo deformado*.

Consideremos agora a forma quadrática

$$q(\varphi) = \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 dx, \quad \operatorname{dom} q = \mathcal{H}_0^1(\Omega), \tag{2.5}$$

em que ∇ denota o gradiente de φ nas coordenadas usuais de \mathbb{R}^3 . A forma q é positiva e fechada [10]. Denotamos por $-\Delta_D^\Omega$ o operador autoadjunto associado a ela. Como já comentado na introdução deste trabalho, o nosso objetivo é analisar o espectro do operador $-\Delta_D^\Omega$.

2.2 Mudança de variáveis

Nesta seção, vamos fazer uma mudança de variáveis de forma que a região de integração em (2.5) seja mais simples.

Consideremos a aplicação

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R} \times \omega &\rightarrow \Omega \\ (s, y_1, y_2) &\mapsto \Gamma(s) + y_1 N_\theta(s) + y_2 B_\theta(s). \end{aligned}$$

Seja $\mathbf{a} := \sup_{y \in \omega} |y|$, em que $y := (y_1, y_2)$. Vamos supor que

$$\kappa \in L^\infty(\mathbb{R}) \quad \text{e} \quad \mathbf{a} \|\kappa\|_{L^\infty(\mathbb{R})} < 1. \tag{2.6}$$

Estas condições garantem que f é um difeomorfismo. De fato, a matriz jacobiana de f é

$$J = \begin{pmatrix} \beta & -(\tau + \dot{\theta}) \langle z_\theta^\perp, y \rangle & (\tau + \dot{\theta}) \langle z_\theta, y \rangle \\ 0 & \cos \theta & \operatorname{sen} \theta \\ 0 & -\operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \tag{2.7}$$

em que

$$\beta(s, y) = 1 - \kappa(s)(z_\theta, y), \quad z_\theta := (\cos \theta, -\sin \theta), \quad z_\theta^\perp := (\sin \theta, \cos \theta).$$

A matriz inversa de J é

$$J^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\beta & (\tau + \dot{\theta})y_2/\beta & -(\tau + \dot{\theta})y_1/\beta \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

e $\det J = \beta(s, y)$. Observemos também que

$$0 < 1 - \mathbf{a}\|\kappa\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \beta(s, y) \leq 1 + \mathbf{a}\|\kappa\|_{L^\infty(\mathbb{R})}, \quad \forall (s, y) \in \mathbb{R} \times \omega. \quad (2.9)$$

Desde que κ satisfaz a condição (2.6), podemos ver que β não se anula em $\mathbb{R} \times \omega$. Assim, $\beta > 0$ e f é um difeomorfismo local. Exigindo que f seja injetora (ou seja, que o tubo não se auto-intercepta), obtemos um difeomorfismo global.

A forma quadrática (2.5), após a mudança de variáveis acima, se torna

$$\begin{aligned} b(\psi) &:= \int_{\mathbb{R} \times \omega} |J^{-1} \nabla \psi(s, y)|^2 \beta(s, y) \, ds dy \\ &= \int_{\mathbb{R} \times \omega} \left(\frac{1}{\beta} |\dot{\psi} + (\tau + \dot{\theta})(\nabla_y \psi, Ry)|^2 + |\nabla_y \psi|^2 \beta \right) \, ds dy, \end{aligned} \quad (2.10)$$

em que $\text{dom } b = \mathcal{H}_0^1(\mathbb{R} \times \omega)$. Aqui, $\dot{\psi}$ denota a derivada de ψ em relação à s , $\nabla_y \psi$ o gradiente de ψ em relação à $y = (y_1, y_2)$ e R denota a matriz de rotação

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observemos que agora $\text{dom } b = \mathcal{H}_0^1(\mathbb{R} \times \omega)$ é um subespaço do espaço de Hilbert $\mathcal{H} := L^2(\mathbb{R} \times \omega, \beta)$, o qual é dotado com o produto interno

$$(\psi, \phi)_{\mathcal{H}} := \int_{\mathbb{R} \times \omega} \overline{\psi(s, y)} \phi(s, y) \beta(s, y) \, ds dy. \quad (2.11)$$

Consideremos o operador unitário

$$\begin{aligned} U : L^2(\Omega) &\rightarrow L^2(\mathbb{R} \times \omega, \beta) \\ \psi &\mapsto \psi \circ f \end{aligned}.$$

Denotamos por H o operador autoadjunto associada à forma quadrática b . Nestas condições, $H = U(-\Delta_D^\Omega)U^{-1}$, ou seja, H e $-\Delta_D^\Omega$ são unitariamente equivalentes e, portanto, possuem o mesmo espectro. Por este motivo, a partir de agora vamos estudar a forma quadrática (2.10).

Terminamos esta seção com definições que serão citadas ao longo de todo o texto.

Dizemos que ω é *invariante por rotação com respeito à origem* se

$$\omega_\vartheta := \{(y_1 \cos \vartheta - y_2 \sin \vartheta, y_1 \sin \vartheta + y_2 \cos \vartheta) : (y_1, y_2) \in \omega\} = \omega, \quad \forall \vartheta \in (0, 2\pi),$$

ou seja, se ω é um disco centrado na origem de \mathbb{R}^2 .

Dizemos que o tubo Ω é *curvado* (ou possui um efeito da curvatura) se a curva Γ não é uma reta, ou seja, $\kappa \neq 0$. Dizemos que o tubo Ω é *torcido* (ou possui um efeito de torção) se ω não é invariante por rotação com respeito à origem e $\tau + \dot{\theta} \neq 0$.

Observação 2.1. Pensando geometricamente, a definição de tubo curvado é clara: a curva Γ deve ter curvatura não nula para dar origem a um tubo curvado. Por outro lado, a exigência $\tau + \dot{\theta} \neq 0$, na definição de tubo torcido, é menos intuitiva. Neste caso, apontamos a equivalência das seguintes afirmações:

- (i) $\tau + \dot{\theta} = 0$. Considerando esta identidade como uma equação diferencial para θ , sua solução leva a uma escolha especial do movimento da seção transversal ω .
- (ii) **Ausência de rotações transversais.** Consideremos a curva paralela $s \mapsto \Gamma^\theta(s) := f(s, \mathbf{a}, 0)$ como o caminho de um viajante no espaço. Calculando o seu vetor tangente, obtemos

$$\dot{\Gamma}^\theta = (1 - \mathbf{a} \kappa \cos \theta)T + (\tau + \dot{\theta})B_\theta.$$

Podemos observar que o movimento é não inercial a menos que Γ seja uma linha reta e θ seja constante. Também podemos observar que a componente da velocidade angular de Γ^θ , que corresponde as rotações de Γ^θ sobre o vetor tangente T , é precisamente $\tau + \dot{\theta}$.

Uma discussão mais detalhada sobre a equivalência acima pode ser encontrada na Seção 2.6 de [10].

2.3 Um pouco sobre a seção transversal do tubo

Denotamos por $-\Delta_D^\omega$ o operador Laplaciano restrito à ω e com condições de Dirichlet na fronteira $\partial\omega$. Nesta seção, vamos apresentar algumas características deste operador que serão usadas ao longo do texto.

O espectro de $-\Delta_D^\omega$ é puramente discreto. Mais precisamente,

$$\begin{aligned}\sigma(-\Delta_D^\omega) &= \{E_n : n \in \mathbb{N}\}, \\ -\Delta_D^\omega \mathcal{J}_n &= E_n \mathcal{J}_n, \quad \mathcal{J}_n \in \mathcal{H}_0^1(\omega), \\ 0 &< E_1 < E_2 \leq E_3 \leq \dots.\end{aligned}$$

As características geométricas de ω garantem que o primeiro autovalor E_1 é simples. O Princípio Minimax também garante que

$$\|\nabla f\|_{L^2(\omega)}^2 \geq E_1 \|f\|_{L^2(\omega)}^2, \quad \forall f \in \mathcal{H}_0^1(\omega). \quad (2.12)$$

Os detalhes sobre estas afirmações podem ser encontrados em [5].

Definimos a constante

$$C(\omega) := \int_\omega |(\nabla_y \mathcal{J}_1, Ry)|^2 dy \geq 0, \quad (2.13)$$

em que \mathcal{J}_1 é a autofunção associada ao autovalor E_1 . Observemos que $C(\omega)$ depende somente das características geométricas de ω . Ainda mais, $C(\omega) = 0$ se, e somente se, ω é um disco (neste caso, \mathcal{J}_1 é radial).

Capítulo 3

Estudo do espectro

Neste capítulo, vamos iniciar o estudo a respeito do espectro do operador $-\Delta_D^\Omega$. A primeira seção é dedicada ao estudo do seu espectro essencial. Vamos mostrar que, sobre certas condições, ele é o mesmo, independentemente se o tubo é reto, curvado ou torcido. Na segunda seção, vamos discutir sobre quais condições o seu espectro discreto é não vazio. Veremos que este fato ocorre se o tubo possui um efeito apropriado da curvatura e $\tau + \dot{\theta} = 0$. Os resultados deste capítulo são provenientes de [1] e [10].

3.1 Estabilidade do espectro essencial

Se o tubo é reto, ou seja, $\kappa = 0 = \tau + \dot{\theta}$, o operador $-\Delta_D^{\mathbb{R} \times \omega}$ é unitariamente equivalente ao operador $-\Delta^{\mathbb{R}} \otimes I + I \otimes (-\Delta_D^\omega)$, o qual é densamente definido em $L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2(\omega)$. Aqui, $-\Delta^{\mathbb{R}}$ denota o operador Laplaciano em $L^2(\mathbb{R})$ e, como antes, $-\Delta_D^\omega$ denota o operador Laplaciano de Dirichlet na seção transversal ω . Sabemos que $\sigma(-\Delta^{\mathbb{R}}) = [0, \infty)$ e o espectro do operador $-\Delta_D^\omega$ é puramente discreto (veja Seção 2.3 do Capítulo 2). Assim,

$$\sigma(H) = \sigma(-\Delta_D^{\mathbb{R} \times \omega}) = \sigma_{\text{ess}}(-\Delta_D^{\mathbb{R} \times \omega}) = \overline{\sigma(-\Delta^{\mathbb{R}}) + \sigma(-\Delta_D^\omega)} = [E_1, \infty).$$

Lembremos que E_1 é o primeiro autovalor de $-\Delta_D^\omega$.

De forma mais geral, ao trabalharmos com tubos deformados, temos o se-

guinte resultado.

Teorema 3.1. *Suponhamos que*

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty} \kappa(s) = 0 \quad e \quad \lim_{|s| \rightarrow \infty} (\tau + \dot{\theta})(s) = 0. \quad (3.1)$$

Então, $\sigma_{\text{ess}}(-\Delta_D^\Omega) = [E_1, \infty)$.

O Teorema 3.1 mostra que independente se o tubo é curvado ou torcido, mas se “comporta” como um tubo reto, quando $|s| \rightarrow \infty$, o espectro essencial do operador $-\Delta_D^\Omega$ permanece sendo $[E_1, \infty)$.

Demonstração do Teorema 3.1. A demonstração consiste em duas etapas.

1. $\inf \sigma_{\text{ess}}(H) \geq E_1$.

Fixado $s_0 \in \mathbb{R}, s_0 > 0$, definimos $I_{\text{int}} := (-s_0, s_0)$ e $I_{\text{ext}} := (-\infty, -s_0) \cup (s_0, +\infty)$. Consideremos as formas quadráticas a seguir. Primeiro, definimos

$$b_{\text{int}}(\psi) := \int_{I_{\text{int}} \times \omega} \left(\frac{1}{\beta} |\dot{\psi} + (\tau + \dot{\theta})(\nabla_y \psi, Ry)|^2 + |\nabla_y \psi|^2 \right) ds dy,$$

em que $\text{dom } b_{\text{int}} := \{\psi \upharpoonright_{I_{\text{int}} \times \omega}; \psi \in \text{dom } b\}$. Similarmente, definimos b_{ext} em que $\text{dom } b_{\text{ext}} := \{\psi \upharpoonright_{I_{\text{ext}} \times \omega}; \psi \in \text{dom } b\}$ e $b_{\text{ext}}(\psi)$ tem mesma ação que b . Denotamos por H_{int} e H_{ext} os operadores autoadjuntos associados à b_{int} e b_{ext} , respectivamente. H_{int} é um operador com resolvente compacto [12] e, portanto, o seu espectro é puramente discreto. Assim, desde que

$$H_{\text{int}} \oplus H_{\text{ext}} \leq H,$$

o espectro essencial de H é estimado inferiormente pelo ínfimo do espectro essencial de H_{ext} (veja Apêndice .1).

Relembrando a estimativa (2.12), para $\psi \in \text{dom } b_{\text{ext}}$,

$$\|\nabla_y \psi(s, \cdot)\|_{L^2(\omega)}^2 \geq E_1 \|\psi(s, \cdot)\|_{L^2(\omega)}^2, \quad \text{q.t.p.}[s]. \quad (3.2)$$

Logo,

$$\begin{aligned}
b_{ext}(\psi) &\geq \int_{I_{ext} \times \omega} |\nabla_y \psi|^2 \beta \, ds dy \\
&\geq \inf \beta \int_{I_{ext} \times \omega} |\nabla_y \psi|^2 \, ds dy \\
&\geq E_1 \inf \beta \int_{I_{ext} \times \omega} |\psi|^2 \, ds dy \\
&\geq E_1 \frac{\inf \beta}{\sup \beta} \int_{I_{ext} \times \omega} |\psi|^2 \beta \, ds dy \\
&= E_1 \frac{\inf \beta}{\sup \beta} \|\psi\|_{L^2(I_{ext} \times \omega)}^2,
\end{aligned}$$

$\forall \psi \in \text{dom } b_{ext}$. O ínfimo e o supremo acima são tomados em $I_{ext} \times \omega$. Com esta desigualdade, concluímos que $\inf \sigma_{\text{ess}}(H_{ext}) \geq E_1(\inf \beta / \sup \beta)$. Logo,

$$\inf \sigma_{\text{ess}}(H) \geq \inf \sigma_{\text{ess}}(H_{ext}) \geq E_1 \frac{\inf \beta}{\sup \beta}.$$

As condições em (3.1) garantem que $(\inf \beta / \sup \beta) \rightarrow 1$, quando $|s_0| \rightarrow \infty$. Desde que s_0 pode ser tomado suficientemente grande e $\sigma_{\text{ess}}(H)$ é um conjunto fechado, segue que $\inf \sigma_{\text{ess}}(H) \geq E_1$.

2. $\sigma_{\text{ess}}(H) \supseteq [E_1, \infty)$.

Dado $m \geq 0$, vamos mostrar que $m^2 + E_1 \in \sigma_{\text{ess}}(H)$. Para isso, aplicamos o critério de Weyl para formas quadráticas (veja Seção 1.6 do Capítulo 1).

Seja \mathcal{J}_1 a autofunção normalizada associada ao autovalor E_1 . Definimos

$$\psi_n(s, y) := \varphi_n(s) e^{ims} \mathcal{J}_1(y),$$

em que $\varphi_n(s) := \varphi(n^{-1}s - n)$ e φ é uma função não nula, de classe C^∞ e com suporte compacto no intervalo $(-1, 1)$. Seja $\xi_n := \psi_n \|\psi_n\|_{\mathcal{H}}^{-1}$. Vamos mostrar que $\{\xi_n\}$ satisfaz as condições (i), (ii) e (iii) do Teorema 1.16.

A condição (i) é claramente satisfeita. Agora, vamos mostrar (ii), ou seja, verificar que $\|(H - (m^2 + E_1))\xi_n\|_{\text{dom } b^*} \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$. Para isso,

utilizamos a seguinte estimativa:

$$\begin{aligned}
& \| (H - (m^2 - E_1)\xi_n) \|_{\text{dom } b^*} \\
= & \sup_{\phi \in \text{dom } b \setminus \{0\}} \frac{|(\phi, (H - (m^2 + E_1))\xi_n)_{\mathcal{H}}|}{\|\phi\|_+} \\
= & \sup_{\phi \in \text{dom } b \setminus \{0\}} \frac{|b(\phi, \xi_n) - (m^2 + E_1)(\phi, \xi_n)_{\mathcal{H}}|}{\|\phi\|_+} \\
\leq & \sup_{\phi \in \text{dom } b \setminus \{0\}} \frac{|b(\phi, \xi_n) - (\nabla\phi, \nabla\xi_n)_{L^2(\mathbb{R} \times \omega)}|}{\|\phi\|_+} \tag{3.3}
\end{aligned}$$

$$+ \sup_{\phi \in \text{dom } b \setminus \{0\}} \frac{|(\nabla\phi, \nabla\xi_n)_{L^2(\mathbb{R} \times \omega)} - (m^2 + E_1)(\phi, \xi_n)_{L^2(\mathbb{R} \times \omega)}|}{\|\phi\|_+} \tag{3.4}$$

$$+ (m^2 + E_1) \sup_{\phi \in \text{dom } b \setminus \{0\}} \frac{|(\phi, \xi_n)_{\mathcal{H}} - (\phi, \xi_n)_{L^2(\mathbb{R} \times \omega)}|}{\|\phi\|_+}. \tag{3.5}$$

Vamos analisar (3.3), (3.4) e (3.5) separadamente.

Seguem algumas observações que serão úteis. Fazendo uma mudança de variável, podemos observar que

$$\begin{aligned}
\|\varphi_n\|_{L^2(\mathbb{R})} &= \sqrt{n} \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R})}, \\
\|\dot{\varphi}_n\|_{L^2(\mathbb{R})} &= \frac{1}{\sqrt{n}} \|\dot{\varphi}\|_{L^2(\mathbb{R})}, \\
\|\ddot{\varphi}_n\|_{L^2(\mathbb{R})} &= \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \|\ddot{\varphi}\|_{L^2(\mathbb{R})}.
\end{aligned}$$

Também temos

$$\begin{aligned}
\|\psi_n\|_{\mathcal{H}}^2 &= \int_{\mathbb{R} \times \omega} |\psi_n(s, y)|^2 \beta(s, y) \, ds dy \\
&\geq \inf \beta \int_{\mathbb{R} \times \omega} |\psi_n(s, y)|^2 \, ds dy \\
&= \inf \beta \int_{\mathbb{R}} |\varphi_n(s)|^2 \, ds \\
&= \inf \beta \|\varphi_n\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \\
&= n(\inf \beta) \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2.
\end{aligned}$$

Seja $C := (\inf \beta)^{-1/2}$. Obtemos as seguintes estimativas:

$$\frac{\|\varphi_n\|_{L^2(\mathbb{R})}}{\|\psi_n\|_{\mathcal{H}}} \leq C, \quad (3.6)$$

$$\frac{\|\dot{\varphi}_n\|_{L^2(\mathbb{R})}}{\|\psi_n\|_{\mathcal{H}}} \leq \frac{C \|\dot{\varphi}\|_{L^2(\mathbb{R})}}{n \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R})}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad (3.7)$$

$$\frac{\|\ddot{\varphi}_n\|_{L^2(\mathbb{R})}}{\|\psi_n\|_{\mathcal{H}}} \leq \frac{C \|\ddot{\varphi}\|_{L^2(\mathbb{R})}}{n^2 \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R})}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (3.8)$$

Além disso, lembremos que, para $\phi \in \text{dom } b$, $\|\phi\|_+ = \sqrt{b(\phi) + \|\phi\|_{\mathcal{H}}^2}$ e então

$$\frac{\|\nabla \phi\|_{L^2(\mathbb{R} \times \omega)}}{\|\phi\|_+} \leq M, \quad (3.9)$$

em que $M := C(\sup |J|)^{1/2}$. Ainda temos

$$\frac{\|\phi\|_{L^2(\mathbb{R} \times \omega)}}{\|\phi\|_+} \leq C. \quad (3.10)$$

Análise de (3.5). Pelas estimativas acima,

$$\begin{aligned} |(\phi, \psi_n)_{\mathcal{H}} - (\phi, \psi_n)_{L^2(\mathbb{R} \times \omega)}| &= \left| \int_{\mathbb{R} \times \omega} (\beta - 1) \bar{\phi} \psi_n \, dsdy \right| \\ &\leq c_n \int_{\mathbb{R} \times \omega} |\bar{\phi}| |\psi_n| \, dsdy \\ &\leq c_n \|\phi\|_{L^2(\mathbb{R} \times \omega)} \|\psi_n\|_{L^2(\mathbb{R} \times \omega)} \\ &= c_n \|\phi\|_{L^2(\mathbb{R} \times \omega)} \|\varphi_n\|_{L^2(\mathbb{R})}, \end{aligned}$$

em que $c_n := \mathbf{a} \sup_{\text{supp} \varphi_n} |k| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Consequentemente, por (3.6) e (3.10),

$$\begin{aligned} \frac{|(\phi, \xi_n)_{\mathcal{H}} - (\phi, \xi_n)_{L^2(\mathbb{R} \times \omega)}|}{\|\phi\|_+} &= \frac{|(\phi, \psi_n)_{\mathcal{H}} - (\phi, \psi_n)_{L^2(\mathbb{R} \times \omega)}|}{\|\phi\|_+ \|\psi_n\|_{\mathcal{H}}} \\ &\leq c_n \frac{\|\phi\|_{L^2(\mathbb{R} \times \omega)}}{\|\phi\|_+} \frac{\|\varphi_n\|_{L^2(\mathbb{R})}}{\|\psi_n\|_{\mathcal{H}}} \\ &\leq C^2 c_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

$\forall \phi \in \text{dom } b$.

Análise de (3.4). Uma integração por partes e alguns cálculos mostram que

$$\begin{aligned} (\nabla\phi, \nabla\psi_n)_{L^2(\mathbb{R}\times\omega)} &= - \int_{\mathbb{R}\times\omega} \bar{\phi} \Delta\psi_n dsdy \quad e \\ \Delta\psi_n &= (m^2 + E_1)\psi_n - (2im\dot{\varphi}_n + \ddot{\varphi}_n)e^{ims} \mathcal{J}_1. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} &|(\nabla\phi, \nabla\psi_n)_{L^2(\mathbb{R}\times\omega)} - (m^2 + E_1)(\phi, \psi_n)_{L^2(\mathbb{R}\times\omega)}| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}\times\omega} \bar{\phi} (-\Delta\psi_n - (m^2 + E_1)\psi_n) dsdy \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}\times\omega} |\phi| (|2im\dot{\varphi}_n + \ddot{\varphi}_n| |\mathcal{J}_1|) dsdy \\ &\leq (2m\|\dot{\varphi}_n\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|\ddot{\varphi}_n\|_{L^2(\mathbb{R})}) \|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}\times\omega)}. \end{aligned}$$

Por (3.10), (3.7) e (3.8),

$$\begin{aligned} &\frac{|(\nabla\phi, \nabla\xi_n)_{L^2(\mathbb{R}\times\omega)} - (m^2 + E_1)(\phi, \xi_n)_{L^2(\mathbb{R}\times\omega)}|}{\|\phi\|_+} \\ &\leq \left(\frac{2m\|\dot{\varphi}_n\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|\ddot{\varphi}_n\|_{L^2(\mathbb{R})}}{\|\psi_n\|_{\mathcal{H}}} \right) \left(\frac{\|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}\times\omega)}}{\|\phi\|_+} \right) \\ &\leq C \left(2m \frac{\|\dot{\varphi}_n\|_{L^2(\mathbb{R})}}{\|\psi_n\|_{\mathcal{H}}} + \frac{\|\ddot{\varphi}_n\|_{L^2(\mathbb{R})}}{\|\psi_n\|_{\mathcal{H}}} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

$\forall \phi \in \text{dom } b$.

Análise de (3.3). Utilizando a identidade de polarização para formas sesquilineares (veja Seção 1.3 do Capítulo 1), podemos encontrar uma expressão para a forma sesquilinear $b(\phi, \psi)$ associada à forma quadrática b . De fato, temos

$$b(\phi, \psi) = \int_{\mathbb{R}\times\omega} (J^{-1}\nabla\phi(s, y), J^{-1}\nabla\psi(s, y)) \beta(s, y) dsdy.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
|b(\phi, \psi_n) - (\nabla\phi, \nabla\psi_n)_{L^2(\mathbb{R}\times\omega)}| &\leq \int_{\mathbb{R}\times\omega} \left| (J^{-1}\nabla\phi, J^{-1}\nabla\psi_n)\beta - (\nabla\phi, \nabla\psi_n) \right| dsdy \\
&\leq \int_{\mathbb{R}\times\omega} \left| \beta(J^{-1})^t J^{-1} - \mathbf{1} \right| |\nabla\phi| |\nabla\psi_n| dsdy \\
&\leq b_n \|\nabla\phi\|_{L^2(\mathbb{R}\times\omega)} \|\psi_n\|_{\mathcal{H}},
\end{aligned}$$

em que $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ (a definição exata de b_n aparece no Apêndice .2). Agora, por (3.9), temos

$$\begin{aligned}
\frac{|b(\phi, \xi_n) - (\nabla\phi, \nabla\xi_n)_{L^2(\mathbb{R}\times\omega)}|}{\|\phi\|_+} &\leq b_n \left(\frac{\|\nabla\phi\|_{L^2(\mathbb{R}\times\omega)}}{\|\phi\|_+} \right) \\
&\leq Mb_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,
\end{aligned}$$

$\forall \phi \in \text{dom } b$.

Com as estimativas acima, concluímos que $\|(H - (m^2 + E_1))\xi_n\|_{\text{dom } b^*} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Assim, a condição (ii) do Teorema 1.16 é satisfeita.

Finalmente, observando que

$$(\phi, \xi_n)_{\mathcal{H}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \omega),$$

e desde que $C_0^\infty(\mathbb{R} \times \omega)$ é denso em \mathcal{H} , a condição (iii) do Teorema 1.16 também é satisfeita.

□

3.2 Efeito da curvatura sobre o espectro discreto

Nesta seção, vamos mostrar como o efeito da curvatura pode influenciar no espectro discreto do operador $-\Delta_D^\Omega$. Começamos com o seguinte resultado.

Teorema 3.2. *Suponhamos que $\kappa \neq 0$ e $\tau + \theta = 0$. Então, $\inf \sigma(-\Delta_D^\Omega) < E_1$.*

Demonstração. Consideremos a forma quadrática

$$b_1(\psi) := b(\psi) - E_1 \|\psi\|_{\mathcal{H}}^2, \quad \text{dom } b_1 = \text{dom } b. \quad (3.11)$$

Vamos mostrar que existe uma função $\psi \in \text{dom } b$ de forma que $b_1(\psi) < 0$. Assim, pelo Princípio Minimax, $\inf \sigma(-\Delta_D^\Omega) < E_1$. Abaixo, segue a estratégia para obtermos ψ satisfazendo a condição desejada.

Seja $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções reais em $\text{dom } b$ e fixemos uma função real $\Phi \in \text{dom } b$. Definimos

$$\psi_{n,\varepsilon} := \psi_n + \varepsilon \Phi, \quad \text{para cada } (n, \varepsilon) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}. \quad (3.12)$$

Podemos escrever

$$b_1(\psi_{n,\varepsilon}) = b_1(\psi_n) + 2\varepsilon b_1(\Phi, \psi_n) + \varepsilon^2 b_1(\Phi). \quad (3.13)$$

O próximo passo é escolher $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e Φ de forma que as seguintes condições sejam satisfeitas:

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_1(\psi_n) = 0$;
- (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_1(\Phi, \psi_n) \neq 0$.

Se mostrarmos que essa construção é possível, basta escolhermos, de acordo com (3.13), $\psi = \psi_{n,\varepsilon}$, para algum n suficientemente grande e $\varepsilon \in \mathbb{R}$ adequado. Com isso, terminamos a demonstração. Abaixo, segue a construção de ψ_n de Φ satisfazendo (i) e (ii).

Lembrando que \mathcal{J}_1 denota a autofunção associada ao autovalor E_1 , definimos $\psi_n(s, y) := \varphi_n(s) \mathcal{J}_1(y)$, em que $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de funções em $\mathcal{H}^1(\mathbb{R})$ satisfazendo:

- (a) $0 \leq \varphi_n \leq 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$;
- (b) $\varphi_n(s) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1, \quad \text{para quase todo } s \in \mathbb{R}$;
- (c) $\|\dot{\varphi}_n\|_{L^2(\mathbb{R})} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Sob estas condições e que b é dada por (2.10),

$$\begin{aligned}
|b_1(\psi_n)| &= \left| \int_{\mathbb{R} \times \omega} \left(\frac{1}{\beta} |\dot{\psi}_n|^2 + \beta (|\nabla_y \psi_n|^2 - E_1 |\psi_n|^2) \right) ds dy \right| \\
&\leq \frac{1}{\inf \beta} \int_{\mathbb{R} \times \omega} |\dot{\varphi}_n|^2 |\mathcal{J}_1|^2 ds dy + \sup \beta \int_{\mathbb{R} \times \omega} |\varphi_n|^2 \left| |\nabla_y \mathcal{J}_1|^2 - E_1 |\mathcal{J}_1|^2 \right| ds dy \\
&\leq \frac{1}{\inf \beta} \|\dot{\varphi}_n\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \|\mathcal{J}_1\|_{L^2(\omega)}^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.
\end{aligned}$$

Assim, a condição (i) é satisfeita.

Agora, definimos $\Phi(s, y) := \phi(s) y_\theta \mathcal{J}_1(y)$, em que $y_\theta = y_1 \cos \theta - y_2 \sin \theta$ e ϕ é uma função com suporte compacto contido num intervalo em que κ não muda de sinal. Utilizando a identidade de polarização para formas quadráticas, temos

$$b_1(\Phi, \psi_n) = \int_{\mathbb{R} \times \omega} \left(\frac{1}{\beta} \dot{\Phi} \psi_n + \beta (\nabla_y \Phi, \nabla_y \psi_n) - E_1 \Phi \psi_n \right) ds dy.$$

Vamos verificar que $\lim_{n \rightarrow \infty} b_1(\Phi, \psi_n) \neq 0$. De fato,

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbb{R} \times \omega} \frac{1}{\beta} \dot{\Phi} \dot{\varphi}_n ds dy \right| &= \left| \int_{\mathbb{R} \times \omega} \frac{1}{\beta} (y_\theta \dot{\phi} \dot{\varphi}_n + (z_\theta^\perp, y) \dot{\theta} \phi \dot{\varphi}_n) |\mathcal{J}_1|^2 ds dy \right| \\
&\leq \frac{\mathbf{a}}{\inf \beta} \left(\int_{\mathbb{R}} |\dot{\phi} \dot{\varphi}_n| ds + \sup |\dot{\theta}| \int_{\mathbb{R}} |\phi \dot{\varphi}_n| ds \right) \\
&\leq \frac{\mathbf{a}}{\inf \beta} \left(\|\dot{\phi}\|_{L^2(\mathbb{R})} + (\sup |\dot{\theta}|) \|\phi\|_{L^2(\mathbb{R})} \right) \|\dot{\varphi}_n\|_{L^2(\mathbb{R})}.
\end{aligned}$$

A condição (c) garante que esta última expressão converge a zero, quando $n \rightarrow \infty$. Assim,

$$\int_{\mathbb{R} \times \omega} \frac{1}{\beta} \dot{\phi} \dot{\varphi}_n ds dy \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R} \times \omega} \beta (\nabla_y \Phi, \nabla_y \psi_n) ds dy &= \int_{\mathbb{R} \times \omega} \left(\beta \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} \frac{\partial \psi_n}{\partial y_1} + \beta \frac{\partial \Phi}{\partial y_2} \frac{\partial \psi_n}{\partial y_2} \right) ds dy \\
&= \int_{\mathbb{R} \times \omega} \beta \phi \varphi_n \mathcal{J}_1 \left(\cos \theta \frac{\partial \mathcal{J}_1}{\partial y_1} - \sin \theta \frac{\partial \mathcal{J}_1}{\partial y_2} \right) ds dy \\
&\quad + \int_{\mathbb{R} \times \omega} \beta \phi y_\theta \varphi_n \left(\left(\frac{\partial \mathcal{J}_1}{\partial y_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{J}_1}{\partial y_2} \right)^2 \right) ds dy \\
&= \int_{\mathbb{R} \times \omega} \kappa \phi \varphi_n y_\theta \mathcal{J}_1 \left(\cos \theta \frac{\partial \mathcal{J}_1}{\partial y_1} - \sin \theta \frac{\partial \mathcal{J}_1}{\partial y_2} \right) ds dy \\
&\quad - \int_{\mathbb{R} \times \omega} \beta \phi \varphi_n y_\theta \mathcal{J}_1 \Delta_D^\omega(\mathcal{J}_1) ds dy \\
&= -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \kappa \phi \varphi_n ds + E_1 \int_{\mathbb{R} \times \omega} \beta \Phi \psi_n ds dy.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\int_{\mathbb{R} \times \omega} \beta (\nabla_y \Phi, \nabla_y \psi_n) ds dy - E_1 \int_{\mathbb{R} \times \omega} \beta \Phi \psi_n ds dy \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{2} \int_{\text{supp} \phi} \kappa \phi ds.$$

Finalmente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_1(\Phi, \psi_n) = -\frac{1}{2} \int_{\text{supp} \phi} \kappa \phi ds \neq 0$$

e a condição (ii) é satisfeita. \square

Em [10], o autor apresenta apenas uma ideia da demonstração do Teorema 3.2. Os detalhes apresentados acima podem ser encontrados em [1].

Como uma consequência do Teorema 3.2, segue o seguinte corolário.

Corolário 3.3. *Sobre as hipóteses dos Teoremas 3.1 e 3.2, temos*

$$\sigma_{\text{dis}}(-\Delta_D^\Omega) \neq \emptyset.$$

Demonstração. Do Teorema 3.1, segue que $\inf \sigma_{\text{ess}}(-\Delta_D^\Omega) = E_1$. O Teorema 3.2 garante que $\inf \sigma(-\Delta_D^\Omega) < E_1$. Agora, basta aplicarmos o Princípio Minimax. \square

Deste corolário, resulta que o efeito da curvatura atua como uma “interação atrativa”, no sentido de que o espectro discreto do operador $-\Delta_D^\Omega$ é não vazio.

Capítulo 4

Desigualdades de Hardy

Na parte inicial deste capítulo, vamos supor que Γ , a curva que dá origem ao tubo Ω , é uma linha reta. Vamos mostrar que esta condição, associada a um efeito de torção apropriado, dá origem a uma desigualdade de Hardy para a forma quadrática (2.10). Começamos o estudo provando algumas desigualdades locais: uma desigualdade do tipo Poincaré e uma desigualdade local de Hardy. Logo após, estendemos os resultados a uma desigualdade global de Hardy. Estes assuntos são tratados nas duas primeiras seções. Na terceira e última seção, vamos considerar um tubo Ω simultaneamente curvado e torcido e analisar o espectro do operador $-\Delta_D^\Omega$ neste caso. Os resultados deste capítulo podem ser encontrados em [10].

4.1 Desigualdade do tipo Poincaré

Relembrando a construção do tubo deformado Ω (veja Seção 2.1 do Capítulo 2), ao longo desta seção vamos supor que Γ é uma linha reta. Assim, a sua curvatura κ é nula e, conseqüentemente, a sua torção τ também é nula. Nestas condições, $\beta = 1 - \kappa(z_\theta, y) = 1$ e o espaço de Hilbert \mathcal{H} se reduz a $L^2(\mathbb{R} \times \omega)$. Agora, seja I um intervalo aberto de \mathbb{R} e $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real. Definimos

$$b_\alpha^I(\psi) := \int_{I \times \omega} \left(|\psi + \alpha(\nabla_y \psi, Ry)|^2 + |\nabla_y \psi|^2 \right) ds dy, \quad (4.1)$$

$$\text{dom } b_\alpha^I := \{ \psi \mid_{(I \times \omega)}; \psi \in \mathcal{H}_0^1(\mathbb{R} \times \omega) \}.$$

Denotamos por H_α^I o operador autoadjunto associado à b_α^I . Observemos que a forma quadrática (2.10) pode ser identificada com a de (4.1) tomando-se $\alpha = \theta$ e $I = \mathbb{R}$.

Definimos também

$$\lambda(\alpha, I) := \inf_{\psi \in \text{dom } b_\alpha^I \setminus \{0\}} \frac{b_\alpha^I(\psi) - E_1 \|\psi\|_{L^2(I \times \omega)}^2}{\|\psi\|_{L^2(I \times \omega)}^2}. \quad (4.2)$$

Supondo que I é um intervalo limitado, o espectro de H_α^I é puramente discreto e $\lambda(\alpha, I)$ é o primeiro autovalor de $H_\alpha^I - E_1$. Desde que

$$\|\nabla f\|_{L^2(\omega)}^2 \geq E_1 \|f\|_{L^2(\omega)}^2, \quad \forall f \in \mathcal{H}_0^1(\omega), \quad (4.3)$$

podemos concluir que $\lambda(\alpha, I) \geq 0$.

Lembrando que \mathcal{J}_1 denota a autofunção associada ao autovalor E_1 , definimos o conjunto $\mathcal{L}_0 := \{u\mathcal{J}_1 : u \in L^2(I)\}$. \mathcal{L}_0 é um espaço vetorial fechado de $L^2(I \times \omega)$ e, portanto, podemos considerar a decomposição

$$L^2(I \times \omega) = \mathcal{L}_0 \oplus \mathcal{L}_0^\perp. \quad (4.4)$$

Assim, se $\psi \in \text{dom } b_\alpha^I$, podemos reescrevê-la na forma $\psi(s, y) = u(s)\mathcal{J}_1(y) + \eta(s, y)$, em que $\eta \in \mathcal{L}_0^\perp \cap \text{dom } b_\alpha^I$. Esta última condição implica que

$$\int_\omega \eta(s, y) \mathcal{J}_1(y) dy = 0, \quad \text{q.t.p.}[s].$$

Uma integração por partes também mostra que

$$\int_\omega (\nabla_y \eta, \nabla_y \mathcal{J}_1) dy = 0, \quad \text{q.t.p.}[s].$$

A decomposição (4.4) é utilizada na demonstração do lema abaixo.

Lema 4.1. *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e limitado. Suponhamos que ω não é invariante por rotação com respeito à origem. Seja $\alpha \in L^\infty(I)$ uma função*

real e que não se anula em um subconjunto de I de medida positiva. Então,

$$\lambda(\alpha, I) \geq \lambda_0,$$

em que λ_0 é uma constante estritamente positiva dependendo somente de $\|\alpha\|_{L^2(I)}$ e da região ω .

Demonstração. A demonstração deste lema é por contradição. Suponhamos que $\lambda(\alpha, I) = 0$. Como o espectro de H_α^I é puramente discreto, o ínfimo em (4.2) é atingido por uma função $\psi \in \text{dom } b_\alpha^I$ satisfazendo:

$$(i) \quad \|\dot{\psi} + \alpha(\nabla_y \psi, Ry)\|_{L^2(I \times \omega)}^2 = 0;$$

$$(ii) \quad \|\nabla_y \psi\|_{L^2(I \times \omega)}^2 - E_1 \|\psi\|_{L^2(I \times \omega)}^2 = 0.$$

Podemos escrever $\psi(s, y) = \varphi(s)\mathcal{J}_1(y) + \phi(s, y)$, em que $\phi \in \mathcal{L}_0^\perp \cap \text{dom } b_\alpha^I$. Com essa caracterização, a condição (ii) fica da forma

$$\begin{aligned} & \|\varphi \nabla_y \mathcal{J}_1\|_{L^2(I \times \omega)}^2 + 2\text{Re}[(\varphi, (\nabla_y \mathcal{J}_1, \nabla_y \phi))_{L^2(I \times \omega)}] + \|\nabla_y \phi\|_{L^2(I \times \omega)}^2 \\ & - E_1 \|\varphi \mathcal{J}_1\|_{L^2(I \times \omega)}^2 - 2E_1 \text{Re}[(\varphi \mathcal{J}_1, \phi)_{L^2(I \times \omega)}] - E_1 \|\phi\|_{L^2(I \times \omega)}^2 = 0, \end{aligned}$$

ou melhor, se reduz à

$$\|\nabla_y \phi\|_{L^2(I \times \omega)}^2 - E_1 \|\phi\|_{L^2(I \times \omega)}^2 = 0. \quad (4.5)$$

Esta última igualdade segue do fato de que $\|\varphi \nabla_y \mathcal{J}_1\|_{L^2(I \times \omega)}^2 - E_1 \|\varphi \mathcal{J}_1\|_{L^2(I \times \omega)}^2 = 0$, $(\varphi \mathcal{J}_1, \phi)_{L^2(I \times \omega)} = 0$ e $(\varphi, (\nabla_y \mathcal{J}_1, \nabla_y \phi))_{L^2(I \times \omega)} = 0$.

Como E_1 é um autovalor simples do operador $-\Delta_D^\omega$, (4.5) implica que $\phi = 0$ q.t.p..

Por outro lado, a condição (i) implica

$$\begin{aligned} & \|\dot{\varphi}\|_{L^2(I)}^2 \|\mathcal{J}_1\|_{L^2(\omega)}^2 + 2(\dot{\varphi}, \alpha \varphi)_{L^2(I)} (\mathcal{J}_1, (\nabla_y \mathcal{J}_1, Ry))_{L^2(\omega)} + \\ & + \|\alpha \varphi\|_{L^2(I)}^2 \|(\nabla_y \mathcal{J}_1, Ry)\|_{L^2(\omega)}^2 = 0. \end{aligned}$$

Desde que $(\mathcal{J}_1, (\nabla_y \mathcal{J}_1, Ry))_{L^2(\omega)} = 0$, da igualdade acima, tem-se $\dot{\varphi} = 0$ q.t.p..

Assim, $\varphi = cte$ q.t.p.. Concluimos que

$$\|\alpha\|_{L^2(I)} = 0 \quad \text{ou} \quad \|(\nabla_y \mathcal{J}_1, Ry)\|_{L^2(\omega)} = 0. \quad (4.6)$$

Chegamos a uma contradição com as hipóteses. De fato, $\|\alpha\|_{L^2(I)} = 0$ se, e somente se, $\alpha = 0$ q.t.p. em I e $\|(\nabla_y \mathcal{J}, Ry)\|_{L^2(\omega)} = 0$ se, e somente se, ω é invariante por rotação com respeito à origem. \square

Observação 4.2. Desigualdades do tipo Poincaré são aquelas que permitem a majoração de uma função por uma estimativa de suas derivadas (no sentido fraco) e pela geometria do domínio em questão. Esse nome é em homenagem ao matemático francês Henri Poincaré (1854-1912). Por este motivo, a desigualdade do Lema 4.1 pode ser mencionada como uma desigualdade do tipo Poincaré.

Observação 4.3. Se I não é limitado, a conclusão do Lema 4.1 pode não ser verdade. De fato, consideremos $I = \mathbb{R}$, $\alpha = \dot{\theta}$ satisfazendo as hipóteses do lema e $\lim_{|s| \rightarrow \infty} \dot{\theta}(s) = 0$. O Teorema 3.1 implica que $\lambda(\alpha, \mathbb{R}) = 0$.

Observação 4.4. (Um limite superior para $\lambda(\alpha, I)$) Seja $\alpha_0 := \|\alpha\|_{L^\infty(I)}$. Consideremos o operador B_{α_0} , agindo em $L^2(\omega)$, associado à forma quadrática

$$b_{\alpha_0}(f) := \alpha_0^2 \|(\nabla_y f, Ry)\|_{L^2(\omega)}^2 + \|\nabla_y f\|_{L^2(\omega)}^2 - E_1 \|f\|_{L^2(\omega)}^2, \quad \text{dom } b_{\alpha_0} = \mathcal{H}_0^1(\omega).$$

Denotamos por $\lambda(\alpha_0)$ o seu primeiro autovalor e f_{α_0} a autofunção correspondente. Independente se o tubo é torcido ou não, vale a estimativa

$$\lambda(\alpha, I) \leq \lambda(\alpha_0). \quad (4.7)$$

De fato, seja $\psi_n(s, y) := \varphi_n(s) f_{\alpha_0}(y)$, em que φ_n é a restrição no intervalo I da função que aparece na demonstração do Teorema 3.2 (também denotada por φ_n). Substituindo ψ_n em (4.2) e fazendo $n \rightarrow \infty$, segue (4.7).

Observação 4.5. Seja $\alpha \in L^\infty(\mathbb{R})$ e suponhamos que $\lim_{|s| \rightarrow \infty} \alpha(s) = 0$. Consideremos uma sequência $\{I_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ de intervalos abertos, disjuntos, limitados e de

forma que $\mathbb{R} = \text{int} \left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} \bar{I}_j \right)$. Por exemplo, podemos tomar

$$I_j := \begin{cases} (j, j+2) & \text{se } j \in \{0, 2, 4, \dots\} \\ (-j-1, -j+1) & \text{se } j \in \{1, 3, 5, \dots\} \end{cases}.$$

Com a mesma notação da observação anterior, alguns cálculos mostram que

$$0 \leq \lambda(\alpha, I_j) \leq \lambda(\|\alpha\|_{L^\infty(I_j)}) \rightarrow 0, \quad \text{quando } j \rightarrow \infty. \quad (4.8)$$

4.2 Desigualdades local e global de Hardy

O Lema 4.1 é o que motiva o método para estabelecer a existência de desigualdades de Hardy em tubos torcidos. Por exemplo, seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e não necessariamente limitado. O teorema abaixo mostra uma desigualdade não trivial, uma vez que o Lema 4.1 pode ser aplicado em subintervalos limitados de I .

Teorema 4.6. *Seja $\alpha \in L^\infty(I)$ uma função real e $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo aberto. Seja $\{I_j\}_{j \in K}$, $K \subseteq \mathbb{N}$, uma coleção qualquer de subintervalos disjuntos de I . Então,*

$$b_\alpha^I - E_1 \geq \sum_{j \in K} \lambda(\alpha, I_j) 1_{I_j}, \quad (4.9)$$

em que 1_{I_j} denota o operador multiplicação pela função característica do conjunto $I_j \times \omega$.

Demonstração. Para cada $\psi \in \text{dom } b_\alpha^I$, temos

$$\begin{aligned} b_\alpha^I(\psi) - E_1 \|\psi\|_{L^2(I \times \omega)}^2 &= \int_{I \times \omega} \left(|\dot{\psi} + \alpha(\nabla_y \psi, Ry)|^2 + |\nabla_y \psi|^2 - E_1 |\psi|^2 \right) ds dy \\ &\geq \sum_{j \in K} \int_{I_j \times \omega} \left(|\dot{\psi} + \alpha(\nabla_y \psi, Ry)|^2 + |\nabla_y \psi|^2 - E_1 |\psi|^2 \right) ds dy \\ &= \sum_{j \in K} \left(b_\alpha^{I_j}(\psi) - E_1 \|\psi\|_{L^2(I_j \times \omega)}^2 \right) \\ &\geq \sum_{j \in K} \lambda(\alpha, I_j) \|\psi\|_{L^2(I_j \times \omega)}^2. \end{aligned}$$

A primeira desigualdade segue do Teorema de Fubini e da inclusão $\bigcup_{j \in K} I_j \subseteq I$. A segunda segue de (4.2) e do fato de que a restrição de uma função em $\text{dom } b_\alpha^I$ pertence à $\text{dom } b_\alpha^{I_j}$. \square

Consideremos o caso particular em que $I = \mathbb{R}$. Seja $\{I_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ uma sequência de intervalos abertos, disjuntos, limitados e de forma que $\mathbb{R} = \text{int}(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} \bar{I}_j)$ (como, por exemplo, àquela da Observação 4.5). Suponhamos que $\alpha(s)$ se anula quando $|s| \rightarrow \infty$. Então, E_1 é o ínfimo do espectro essencial de $H_\alpha^{\mathbb{R}}$ (veja Teorema 3.1). Suponhamos também que α não muda de sinal em \mathbb{R} e que ω não é invariante por rotação com respeito à origem. Assim, (4.9) pode ser vista como uma desigualdade de Hardy para $b_\alpha^{\mathbb{R}}$. Mais precisamente, dizemos que (4.9) é *global*, no sentido de que o seu lado direito representa um peso de Hardy positivo se anulando somente no infinito (veja Observação 4.5). Por outro lado, se α se anula fora de um intervalo limitado, então (4.9) é *local*, uma vez que o peso de Hardy também se anula fora desse intervalo.

O teorema abaixo também pode ser visto como uma desigualdade global de Hardy.

Teorema 4.7. *Seja $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo aberto. Suponhamos que ω não é invariante por rotação com respeito à origem. Seja $\alpha \in L^\infty(I)$ uma função real, não nula e com suporte compacto em I . Então,*

$$b_\alpha^I(\psi) - E_1 \|\psi\|_{L^2(I \times \omega)}^2 \geq \tilde{C} \int_{I \times \omega} \frac{|\psi(s, y)|^2}{1 + |s - s_0|^2} ds dy, \quad \forall \psi \in \text{dom } b_\alpha^I, \quad (4.10)$$

em que s_0 é o ponto médio do intervalo $J = (\inf \{\text{supp } \alpha\}, \sup \{\text{supp } \alpha\})$ e \tilde{C} é uma constante positiva que depende de α e de ω .

Demonstração. Sem perda de generalidade, vamos assumir que $s_0 = 0$, $J = (-c, c) \subset I$ (em que $c > 0$) e mostrar que

$$b_\alpha^I(\psi) - E_1 \|\psi\|_{L^2(I \times \omega)}^2 \geq \tilde{C} \int_{I \times \omega} \frac{|\psi(s, y)|^2}{1 + s^2} ds dy, \quad \forall \psi \in \text{dom } b_\alpha^I. \quad (4.11)$$

Inicialmente, consideremos a função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(s) = \begin{cases} 1 & \text{se } |s| > c \\ c^{-1}|s| & \text{se } |s| \leq c \end{cases}.$$

Para cada $y \in \omega$ fixado e cada $\psi \in \text{dom } b_\alpha^I$, temos $f(\cdot)\psi(\cdot, y) \in \mathcal{H}^1(I)$ e $f(0)\psi(0, y) = 0$. Pela desigualdade de Hardy em uma dimensão,

$$\begin{aligned} \int_{I \times \omega} \frac{|f(s)\psi(s, y)|^2}{s^2} ds dy &\leq 4 \int_{I \times \omega} |\dot{f}(s)\psi(s, y) + f(s)\dot{\psi}(s, y)|^2 ds dy \\ &\leq 8 \left(\frac{1}{c^2} \int_{J \times \omega} |\psi(s, y)|^2 ds dy + \int_{I \times \omega} |\dot{\psi}(s, y)|^2 ds dy \right). \end{aligned}$$

Agora, escrevendo $\psi = f\psi + (1 - f)\psi$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{I \times \omega} \frac{|\psi(s, y)|^2}{1 + s^2} ds dy &\leq 2 \int_{I \times \omega} \frac{|f(s)\psi(s, y)|^2}{s^2} ds dy \\ &\quad + 2 \int_{I \times \omega} |(1 - f(s))\psi(s, y)|^2 ds dy \\ &\leq \frac{16}{c^2} \int_{J \times \omega} |\psi(s, y)|^2 ds dy + 16 \int_{I \times \omega} |\dot{\psi}(s, y)|^2 ds dy \\ &\quad + 2 \int_{J \times \omega} |\psi(s, y)|^2 ds dy \\ &= \left(\frac{16}{c^2} + 2 \right) \|\psi\|_{L^2(J \times \omega)}^2 + 16 \|\dot{\psi}\|_{L^2(I \times \omega)}^2 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{1}{16} \int_{I \times \omega} \frac{|\psi(s, y)|^2}{1 + s^2} ds dy - \left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{8} \right) \|\psi\|_{L^2(J \times \omega)}^2 \leq \|\dot{\psi}\|_{L^2(I \times \omega)}^2. \quad (4.12)$$

Por outro lado, para $\epsilon \in (0, 1)$,

$$\begin{aligned} \|\dot{\psi} + \alpha(\nabla_y \psi, Ry)\|_{L^2(I \times \omega)}^2 &\geq \left(\|\dot{\psi}\|_{L^2(I \times \omega)} - \|\alpha(\nabla_y \psi, Ry)\|_{L^2(I \times \omega)} \right)^2 \\ &\geq \epsilon \|\dot{\psi}\|_{L^2(I \times \omega)}^2 - \frac{\epsilon}{1 - \epsilon} \|\alpha(\nabla_y \psi, Ry)\|_{L^2(I \times \omega)}^2 \\ &\geq \epsilon \|\dot{\psi}\|_{L^2(I \times \omega)}^2 - \frac{\epsilon}{1 - \epsilon} \mathbf{a}^2 \|\alpha\|_{L^\infty(I)}^2 \|\nabla_y \psi\|_{L^2(I \times \omega)}^2. \end{aligned}$$

Tomando $\epsilon \leq (1 + \mathbf{a}^2 \|\alpha\|_{L^\infty(I)}^2)^{-1}$, segue que

$$\begin{aligned}
b_\alpha^I(\psi) - E_1 \|\psi\|_{L^2(I \times \omega)}^2 &\geq \epsilon \|\dot{\psi}\|_{L^2(I \times \omega)}^2 - \frac{\epsilon}{1 - \epsilon} \mathbf{a}^2 \|\alpha\|_{L^\infty(I)}^2 \|\nabla_y \psi\|_{L^2(I \times \omega)}^2 \\
&+ \|\nabla_y \psi\|_{L^2(I \times \omega)}^2 - E_1 \|\psi\|_{L^2(I \times \omega)}^2 \\
&= \epsilon \|\dot{\psi}\|_{L^2(I \times \omega)}^2 + \left(1 - \frac{\epsilon}{1 - \epsilon} \mathbf{a}^2 \|\alpha\|_{L^\infty(I)}^2\right) \|\nabla_y \psi\|_{L^2(I \times \omega)}^2 \\
&- E_1 \|\psi\|_{L^2(I \times \omega)}^2 \\
&\geq \epsilon \|\dot{\psi}\|_{L^2(I \times \omega)}^2 - \frac{\epsilon}{1 - \epsilon} \mathbf{a}^2 E_1 \|\alpha\|_{L^\infty(I)}^2 \|\psi\|_{L^2(I \times \omega)}^2 \\
&= \epsilon \|\dot{\psi}\|_{L^2(I \times \omega)}^2 - \frac{\epsilon}{1 - \epsilon} \mathbf{a}^2 E_1 \|\alpha\|_{L^\infty(I)}^2 \|\psi\|_{L^2(J \times \omega)}^2. \quad (4.13)
\end{aligned}$$

Além disso, pelo Teorema 4.6, temos

$$b_\alpha^I(\psi) - E_1 \|\psi\|_{L^2(I \times \omega)}^2 \geq \lambda(\alpha, J) \|\psi\|_{L^2(J \times \omega)}^2, \quad \forall \psi \in \text{dom } b_\alpha^I, \quad (4.14)$$

e o Lema 4.1 garante que $\lambda(\alpha, J) > 0$.

Finalmente, por (4.13) e (4.14), temos

$$\begin{aligned}
b_\alpha^I(\psi) - E_1 \|\psi\|_{L^2(I \times \omega)}^2 &\geq \frac{1}{2} \left(\lambda(\alpha, J) - \frac{\epsilon}{1 - \epsilon} \mathbf{a}^2 E_1 \|\alpha\|_{L^\infty(I)}^2 \right) \|\psi\|_{L^2(J \times \omega)}^2 \\
&+ \frac{\epsilon}{2} \|\dot{\psi}\|_{L^2(I \times \omega)}^2.
\end{aligned}$$

Esta desigualdade e (4.12) implicam que

$$\begin{aligned}
b_\alpha^I(\psi) - E_1 \|\psi\|_{L^2(I \times \omega)}^2 &\geq \frac{\epsilon}{32} \int_{I \times \omega} \frac{|\psi(s, y)|^2}{1 + s^2} ds dy \\
&+ \frac{1}{2} \left(\lambda(\alpha, J) - \frac{\epsilon}{c^2} - \frac{\epsilon}{16} - \frac{\epsilon}{1 - \epsilon} \mathbf{a}^2 E_1 \|\alpha\|_{L^\infty(I)}^2 \right) \|\psi\|_{L^2(J \times \omega)}^2,
\end{aligned}$$

$\forall \psi \in \text{dom } b_\alpha^I$.

Agora, escolhendo ϵ suficientemente pequeno, a expressão entre parênteses acima é um valor positivo, pois $\lambda(\alpha, J) > 0$. Tomando $\tilde{C} = \epsilon/32$, temos

$$b_\alpha^I(\psi) - E_1 \|\psi\|_{L^2(I \times \omega)}^2 \geq \tilde{C} \int_{I \times \omega} \frac{|\psi(s, y)|^2}{1 + s^2} ds dy,$$

$\forall \psi \in \text{dom } b_\alpha^I$. Observemos que \tilde{C} depende de ϵ o qual também depende de α e

de ω . □

Em [10] os autores apresentam os principais passos da demonstração do Teorema 4.7. Alguns dos detalhes apresentados acima foram obtidos do Teorema 3 de [4]. Na seção que segue, veremos as consequências do Teorema 4.7.

4.3 Efeito de torção sobre o espectro

Se o tubo Ω não é torcido, segue do Teorema 3.2 que qualquer efeito da curvatura, não importa o quão pequeno seja, implica que o espectro do operador $-\Delta_D^\Omega$ possui valores menores do que E_1 . Como uma aplicação do Teorema 4.7, vamos mostrar que se Ω é simultaneamente torcido e “suavemente” curvado, o espectro $\sigma(-\Delta_D^\Omega)$ não possui valores menores do que E_1 .

Teorema 4.8. *Suponhamos que ω não é invariante por rotação com respeito à origem. Suponhamos também que $\tau + \dot{\theta}$ é uma função não nula e com suporte compacto. Assumimos que, para todo $s \in \mathbb{R}$,*

$$|\kappa(s)| \leq \epsilon(s) := \frac{\epsilon_0}{1 + s^2}, \quad \text{com } \epsilon_0 \geq 0.$$

Então, existe um número positivo ϵ_0^ de forma que $\epsilon_0 \leq \epsilon_0^*$ implica*

$$\inf \sigma(-\Delta_D^\Omega) \geq E_1.$$

Aqui, ϵ_0^ depende de $\tau + \dot{\theta}$ e de ω .*

Demonstração. A demonstração deste teorema é baseada em uma comparação entre as formas $b(\psi) - E_1 \|\psi\|_{\mathcal{H}}^2$ e $b_{\tau+\dot{\theta}}^\mathbb{R}(\psi) - E_1 \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R} \times \omega)}^2$ e também uma consequência do Teorema 4.7.

Começamos notando que

$$h_-(s) := 1 - \mathbf{a}|\kappa(s)| \leq \beta(s, y) \leq 1 + \mathbf{a}|\kappa(s)| =: h_+(s), \quad \forall (s, y) \in \mathbb{R} \times \omega. \quad (4.15)$$

Agora, para todo $\epsilon_0 > 0$ suficientemente pequeno, temos algumas propriedades enunciadas a seguir. Primeiramente, a desigualdade do lado direito em (4.15) e

alguns cálculos mostram que $1/\beta \geq h_-/h_+^2$. Temos também que

$$h_-(s) - \frac{h_-(s)}{h_+^2(s)} = \frac{\mathbf{a}|\kappa(s)|(1 - \mathbf{a}|\kappa(s)|)(2 + \mathbf{a}|\kappa(s)|)}{h_+^2(s)} \geq 0, \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Para $s \in \mathbb{R}$, definimos

$$g(s) := \frac{h_-(s)}{h_+^2(s)} - h_+(s).$$

Podemos ver que $g(s) \leq 0, \forall s \in \mathbb{R}$.

Com as estimativas acima, temos a seguinte sequência de desigualdades:

$$\begin{aligned} & b(\psi) - E_1 \|\psi\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &= \int_{\mathbb{R} \times \omega} \left(\frac{1}{\beta} |\dot{\psi} + (\tau + \dot{\theta})(\nabla_y \psi, Ry)|^2 + \beta |\nabla_y \psi|^2 - E_1 \beta |\psi|^2 \right) ds dy \\ &\geq \int_{\mathbb{R} \times \omega} \left(\frac{h_-}{h_+^2} |\dot{\psi} + (\tau + \dot{\theta})(\nabla_y \psi, Ry)|^2 + h_- |\nabla_y \psi|^2 - E_1 h_+ |\psi|^2 \right) ds dy \\ &\geq \int_{\mathbb{R} \times \omega} \frac{h_-}{h_+^2} \left(|\dot{\psi} + (\tau + \dot{\theta})(\nabla_y \psi, Ry)|^2 + |\nabla_y \psi|^2 - E_1 |\psi|^2 \right) ds dy \\ &+ \int_{\mathbb{R} \times \omega} \left(h_- - \frac{h_-}{h_+^2} \right) |\nabla_y \psi|^2 ds dy + E_1 \int_{\mathbb{R} \times \omega} \left(\frac{h_-}{h_+^2} - h_+ \right) |\psi|^2 ds dy \\ &\geq \frac{1 - \mathbf{a} \|\kappa\|_{L^\infty(R)}}{(1 + \mathbf{a} \|\kappa\|_{L^\infty(R)})^2} \left(b_{\tau + \dot{\theta}}^{\mathbb{R}}(\psi) - E_1 \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R} \times \omega)} \right) + E_1 \int_{\mathbb{R} \times \omega} g(s) |\psi|^2 ds dy \\ &\geq \int_{\mathbb{R} \times \omega} \left(\frac{1 - \mathbf{a} \|\kappa\|_{L^\infty(\mathbb{R})}}{(1 + \mathbf{a} \|\kappa\|_{L^\infty(\mathbb{R})})^2} \frac{\tilde{C}}{1 + (s - s_0)^2} + E_1 g(s) \right) |\psi|^2 ds dy. \end{aligned}$$

A última desigualdade é uma consequência do Teorema 4.7 (o valor s_0 é o ponto médio do intervalo $(\inf\{\text{supp}(\tau + \dot{\theta})\}, \sup\{\text{supp}(\tau + \dot{\theta})\})$).

Agora, basta observarmos que a última expressão acima é não negativa para todo ϵ_0 suficientemente pequeno. De fato, alguns cálculos mostram que

$$\begin{aligned} g(s) &\geq \frac{1 - \mathbf{a}\epsilon(s)}{(1 + \mathbf{a}\epsilon(s))^2} - (1 + \mathbf{a}\epsilon(s)) \\ &= -\mathbf{a}\epsilon(s) \left[\frac{4 + 3\epsilon(s) + \mathbf{a}^2\epsilon^2(s)}{(1 + \mathbf{a}\epsilon(s))^2} \right] \\ &\geq -\mathbf{a} \left[\frac{4 + 3\epsilon_0 + \mathbf{a}^2\epsilon_0^2}{(1 + \mathbf{a}\epsilon_0)^2} \right] \frac{\epsilon_0}{1 + s^2}. \end{aligned}$$

Da condição sobre $\kappa(s)$ e tomando ϵ_0^* adequado (o qual também depende de $\tau + \dot{\theta}$ e de ω), segue o resultado. \square

Como uma consequência direta dos Teoremas 3.1 e 4.8, enunciamos o seguinte resultado.

Corolário 4.9. *Assumindo as hipóteses do Teorema 4.8, para todo $\epsilon_0 \leq \epsilon_0^*$,*

$$\sigma(-\Delta_D^\Omega) = [E_1, \infty).$$

Deste corolário, resulta que o efeito de torção atua como uma “iteração repulsiva”, no sentido de que o espectro discreto do operador $-\Delta_D^\Omega$ é vazio.

Apêndice

Apêndice

.1 Comportamento assintótico de autovalores

Sejam \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 espaços de Hilbert e $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$. Lembremos que $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 = \{(\varphi, \psi) : \varphi \in \mathcal{H}_1 \text{ e } \psi \in \mathcal{H}_2\}$ é um espaço de Hilbert em que o produto interno é dado por $\langle (\varphi, \psi), (\phi, \zeta) \rangle_{\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2} = \langle \varphi, \phi \rangle_{\mathcal{H}_1} + \langle \psi, \zeta \rangle_{\mathcal{H}_2}$. Sejam b_1 e b_2 formas sesquilineares com domínios $\text{dom } b_1 \subseteq \mathcal{H}_1$ e $\text{dom } b_2 \subseteq \mathcal{H}_2$, respectivamente. Definimos a forma quadrática $b_1 \oplus b_2$, em que $\text{dom } (b_1 \oplus b_2) = \text{dom } b_1 \oplus \text{dom } b_2$ e

$$(b_1 \oplus b_2)((\varphi, \psi)) = b_1(\varphi) + b_2(\psi), \quad (\varphi, \psi) \in \text{dom } b_1 \oplus \text{dom } b_2.$$

Exemplo .10. Sejam Ω_1 e Ω_2 subconjuntos abertos e disjuntos de \mathbb{R}^n de forma que $L^2(\Omega_1 \cup \Omega_2) = L^2(\Omega_1) \oplus L^2(\Omega_2)$. Consideremos as formas quadráticas $b_i(\psi) = \|\nabla \psi\|_{L^2(\Omega_i)}^2$, $\text{dom } b_i = \mathcal{H}_0^1(\Omega_i)$, $i = 1, 2$, e $b(\psi) = \|\nabla \psi\|_{L^2(\Omega_1 \cup \Omega_2)}^2$, $\text{dom } b = \mathcal{H}_0^1(\Omega_1 \cup \Omega_2)$. Temos a seguinte decomposição

$$b = b_1 \oplus b_2.$$

De fato, para $f \in C_0^\infty(\Omega_1 \cup \Omega_2)$, seja $f_i = f \upharpoonright_{\Omega_i}$, $i = 1, 2$. Assim, $f_i \in C_0^\infty(\Omega_i)$, $i = 1, 2$, e

$$\int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} (\nabla f, \nabla g) dx = \int_{\Omega_1} (\nabla f, \nabla g) dx + \int_{\Omega_2} (\nabla f, \nabla g) dx.$$

Desde que esta relação se estende aos espaços $\mathcal{H}_0^1(\Omega_i)$, $i = 1, 2$, e $\mathcal{H}_0^1(\Omega_1 \cup \Omega_2)$, segue o resultado. A mesma decomposição vale se considerarmos $\text{dom } b_i = \mathcal{H}^1(\Omega_i)$, $i = 1, 2$, e $\text{dom } b = \mathcal{H}^1(\Omega_1 \cup \Omega_2)$.

Agora, sejam b e \tilde{b} formas sesquilineares fechadas, positivas e com domínios densos no espaço de Hilbert \mathcal{H} . Sejam B e \tilde{B} os operadores auto-adjuntos associados à b e \tilde{b} , respectivamente. Dizemos que $0 \leq B \leq \tilde{B}$ se

- (i) $\text{dom } \tilde{b} \subset \text{dom } b$;
- (ii) para cada $\psi \in \text{dom } \tilde{b}$, tem-se

$$0 \leq b(\psi) \leq \tilde{b}(\psi).$$

Lema .11. *Se $0 \leq B \leq \tilde{B}$, então $\lambda_n(B) \leq \lambda_n(\tilde{B})$, para todo $n \in \mathbb{N}$, em que cada λ_n é dado pelo Princípio Minimax.*

A demonstração deste lema e mais detalhes sobre as decomposições apresentadas acima podem ser encontradas em [12].

.2 Estimativas do Teorema 3.1

Primeiro vamos mostrar que existem constantes $C_1, C_2 > 0$ de forma que

$$\|\beta(J^{-1})^t J^{-1} - \mathbf{1}\| \leq C_1 \|\kappa\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + C_2 \|\tau + \dot{\theta}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}. \quad (16)$$

De fato, alguns cálculos mostram que

$$\begin{aligned} \beta(J^{-1})^t J^{-1} - \mathbf{1} &= \frac{(\tau + \dot{\theta})}{\beta} \begin{pmatrix} 0 & y_2 & -y_1 \\ y_2 & (\tau + \dot{\theta}) y_2 & -(\tau + \dot{\theta}) y_1 y_2 \\ -y_1 & -(\tau + \dot{\theta}) y_1 y_2 & (\tau + \dot{\theta}) y_1 \end{pmatrix} \\ &+ (\beta - 1) \begin{pmatrix} -1/\beta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (17)$$

Desde que κ e $\tau + \dot{\theta}$ são funções limitadas, existem constantes $C_1, C_2 > 0$ tais que

$$\mathbf{a} \left\| \begin{pmatrix} -1/\beta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\| \leq C_1$$

e

$$\frac{1}{\inf \beta} \left\| \begin{pmatrix} 0 & y_2 & -y_1 \\ y_2 & (\tau + \dot{\theta}) y_2 & -(\tau + \dot{\theta}) y_1 y_2 \\ -y_1 & -(\tau + \dot{\theta}) y_1 y_2 & (\tau + \dot{\theta}) y_1 \end{pmatrix} \right\| \leq C_2.$$

Consequentemente, aplicando a desigualdade triangular em (17), obtemos (16).

Agora, seja $\{\psi_n(s, y)\}$ a sequência de funções que aparece na demonstração do Teorema 3.1. Alguns cálculos mostram que

$$|\nabla \psi_n(t, y)|^2 = (|\dot{\varphi}_n(t) + im\varphi_n(t)|^2 + E_1|\varphi_n(t)|^2) |\mathcal{J}_1(y)|^2.$$

Assim, de (16),

$$\begin{aligned} & \|\beta((J^{-1})^t J^{-1} - \mathbf{1}) \nabla \psi_n\|_{L^2(\mathbb{R} \times \omega)} \\ & \leq \int_{\mathbb{R} \times \omega} |\beta(J^{-1})^t J^{-1} - \mathbf{1}|^2 |\nabla \psi_n|^2 ds dy \\ & \leq \int_{\mathbb{R} \times \omega} (C_1|\kappa| + C_2|\tau + \dot{\theta}|)^2 (|\dot{\varphi}_n(s) + im\varphi_n(s)|^2 + E_1|\varphi_n(s)|^2) |\mathcal{J}_1|^2 ds dy \\ & = \int_{\mathbb{R}} (C_1|\kappa| + C_2|\tau + \dot{\theta}|)^2 (|\dot{\varphi}_n(s) + im\varphi_n(s)|^2 + E_1|\varphi_n(s)|^2) ds \\ & \leq \int_{\mathbb{R}} (C_1|\kappa| + C_2|\tau + \dot{\theta}|)^2 (|\dot{\varphi}_n(s)|^2 + 2m|\dot{\varphi}_n(s)||\varphi_n(s)| + (m^2 + E_1)|\varphi_n(s)|^2) ds \\ & \leq C_3^2 (\|\dot{\varphi}_n\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + 2m\|\dot{\varphi}_n\|_{L^2(\mathbb{R})}\|\varphi_n\|_{L^2(\mathbb{R})}) + d_n\|\varphi_n\|_{L^2(\mathbb{R})}^2, \end{aligned}$$

em que

$$C_3 := \sup_{\mathbb{R}} (C_1|\kappa| + C_2|\tau + \dot{\theta}|)$$

e

$$d_n := (m^2 + E_1) \sup_{\text{supp } \varphi_n} (C_1|\kappa| + C_2|\tau + \dot{\theta}|) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (18)$$

Por outro lado, de (3.6),

$$\begin{aligned}
& \|\beta((J^{-1})^t J^{-1} - \mathbf{1})\nabla\psi_n\|_{L^2(\mathbb{R}\times\omega)} \\
& \leq \left[C_3^2 \left(\frac{\|\dot{\varphi}_n\|_{L^2(\mathbb{R})}^2}{\|\psi_n\|_{\mathcal{H}}^2} + 2m \frac{\|\dot{\varphi}_n\|_{L^2(\mathbb{R})}}{\|\psi_n\|_{\mathcal{H}}} \frac{\|\varphi_n\|_{L^2(\mathbb{R}\times\omega)}}{\|\psi_n\|_{\mathcal{H}}} \right) + d_n \frac{\|\varphi_n\|_{L^2(\mathbb{R}\times\omega)}^2}{\|\psi_n\|_{\mathcal{H}}^2} \right] \|\psi_n\|_{\mathcal{H}}^2 \\
& \leq \left[C_3^2 \left(\frac{\|\dot{\varphi}_n\|_{L^2(\mathbb{R})}^2}{\|\psi_n\|_{\mathcal{H}}^2} + 2mC \frac{\|\dot{\varphi}_n\|_{L^2(\mathbb{R})}}{\|\psi_n\|_{\mathcal{H}}} \right) + C^2 d_n \right] \|\psi_n\|_{\mathcal{H}}^2.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|\beta((J^{-1})^t J^{-1} - \mathbf{1})\nabla\psi_n\|_{L^2(\mathbb{R}\times\omega)} \leq b_n \|\psi_n\|_{\mathcal{H}},$$

em que

$$b_n = \left[C_3^2 \left(\frac{\|\dot{\varphi}_n\|_{L^2(\mathbb{R})}^2}{\|\psi_n\|_{\mathcal{H}}^2} + 2mC \frac{\|\dot{\varphi}_n\|_{L^2(\mathbb{R})}}{\|\psi_n\|_{\mathcal{H}}} \right) + C^2 d_n \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Agora, de (3.7) e (18), podemos observar que $b_n \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$.

Referências Bibliográficas

- [1] Chenaud, B., Freitas, P. e KrejčířÁk, D.: Geometrically induced discrete spectrum in curved tubes. *Differential Geom. Appl.* **23**, n. 2, 95-105 (2005).
- [2] de Oliveira, C. R.: *Intermediate Spectral Theory and Quantum Dynamics*. Basel: Birkhäuser, 2008.
- [3] Duclos P. e Exner P.: Curvature-induced bound states in quantum waveguides in two and three dimensions. *Rev. Math. Phys.* **7**, 73-102 (1995).
- [4] Ekholm, T., Kovařík, H. e KrejčířÁk, D.: A Hardy inequality in twisted waveguides. *Archive for Rational Mechanics and Analysis* **188**, Issue 2, 245-264 (2008).
- [5] Evans, L. C.: *Partial Differential Equations*. AMS, Providence, 1998.
- [6] Froese, R. e Herbst, I.: Realizing holonomic constraints in classical and quantum mechanics. *Communications in Mathematical Physics* **220**, Issue 3, 489-535 (2001).
- [7] Goldstone, J. e Jaffe, R. L.: Bound states in twisting tubes. *Phys. Rev. B* **45**, 14100-14107 (1992).
- [8] Kalf, H., Schmincke, U. W., Walter, J. e Wüst, R.: On the spectral theory of Schrödinger and Dirac operators with strongly singular potentials. In *LNМ* **448**, 182-226. Springer-Verlang, Berlin (1975).
- [9] KrejčířÁk, D. e Lu, Z.: Location of the essential spectrum in curved quantum layers. arXiv:1211.2541 [math.DG].

- [10] Krejčíř, D.: Twisting versus bending in quantum waveguides. Proc. Sympos. Pure Math. **77**, 617-636, Amer. Math. Soc., Providence, RI (2008).
- [11] Reed, M. e Simon, B.: Methods of Modern Mathematical Physics I: Functional Analysis. Academic Press, New York, 1972.
- [12] Reed, M. e Simon B.: Methods of Modern Mathematical Physics IV: Analysis of Operators. Academic Press, New York, 1978.
- [13] Shortley, G. F.: The inverse cube-central force field in quantum mechanics. Phys. Rev. **28**, 120-127 (1931).