UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Carolina de Miranda e Pereiro

Aspectos Homológicos e Homotópicos do Teorema de Borsuk-Ulam

São Carlos - SP
Fevereiro de 2011

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Aspectos Homológicos e Homotópicos do Teorema de Borsuk-Ulam

Carolina de Miranda e Pereiro
Orientador: Prof Dr. Fábio Gomes Figueira

Bolsista Fapesp
Processo 2008/57009-1

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFSCar como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática

São Carlos - SP
Fevereiro de 2011

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária da UFSCar**

P436ah

Pereiro, Carolina de Miranda e.
Aspectos homológicos e homotópicos do teorema de Borsuk-Ulam / Carolina de Miranda e Pereiro. -- São Carlos : UFSCar, 2011.
52 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2011.

1. Topologia algébrica. 2. Teoria de homologia. 3. Índices de Yang. I. Título.

CDD: 514.2 (20ª)

Banca Examinadora:

Fábio G. Figueira

Prof. Dr. Fábio Gomes Figueira
DM - UFSCar

Pedro Luiz Queiroz Pergher

Prof. Dr. Pedro Luiz Queiroz Pergher
DM - UFSCar

Profa. Dra. Denise de Mattos
ICMC - USP

Agradecimentos

Aos meus pais Dayse e Walter, por sempre me apoiarem e motivarem durante meus estudos e em todos os outros aspectos da minha vida, com certeza nada disso teria acontecido se eles não fossem pais tão atenciosos, alegres e por sempre acreditarem em meu sucesso. Agradeço também a todos da minha família, em especial aos meus irmãos queridos e aos meus avós, que fizeram tudo mais simples por serem pessoas tão amáveis.

Agradeço também aos professores de Matemática da UFSCar, que me ajudaram com minha formação durante a graduação e mestrado. Todos foram sempre muito atenciosos e exemplos de professores para mim. Entre todos estes, gostaria de agradecer em especial meu orientador Fábio, por me auxiliar neste trabalho e por toda ajuda a mim dedicada. Ao meu orientador de iniciação científica durante a graduação, prof. Tomas, por me apresentar à topologia algébrica e pelos anos de estudos juntos. E finalmente, ao prof. Pedro Pergher pelas inúmeras contribuições neste trabalho e por sempre estar disposto a ajudar, com sua simpatia e sabedoria.

Gostaria também de agradecer todos os meus amigos da pós-graduação que me ajudaram durante o mestrado, em especial aos meus colegas de sala por terem estudado comigo, me ajudado nas provas, compartilhado momentos divertidos, e por terem se tornado amigos tão queridos.

Agradeço também à Maria, Aline, Thaís, Livia e Victor por sempre estarem ao meu lado e, embora não conseguissem entender as minhas dúvidas sobre homologia, cohomologia, índice, Mayer-Viectoris e outros, me apoiavam e escutavam sempre.

E agradeço também a Fapesp pelo apoio financeiro.

Obrigado a todos!

Resumo

O objetivo deste trabalho é generalizar o Teorema de Borsuk-Ulam clássico. Estudamos generalizações feitas com respeito a um T-espaço compacto e de Hausdorff. E utilizamos o $\mathbb{Z}_2$-índice de Yang e o B-índice nas demonstrações. E com isso, conseguimos várias maneiras diferentes de generalizar o mesmo teorema.

Abstract

The objetive of this work is to generalize the classic Borsuk-Ulam's Theorem. We studied there generalizations with respect to any comapact and Hausdorff T-space. We used in the proofs the $\mathbb{Z}_2$-index of Yang and the B-index. In general lines, we obtained many different ways of generalizing the same theorem.

Sumário

Introdução

Este trabalho consiste em mostrar algumas generalizações do famoso Teorema de Borsuk-Ulam. O Teorema afirma o seguinte:

Teorema de Borsuk-Ulam: *Dada qualquer função contínua* $f : S^n \to \mathbb{R}^n$, *sempre existe um ponto* $x \in S^n$ *tal que* $f(x) = f(-x)$.

Tal teorema se tornou muito conhecido devido a sua fácil interpretação física, e também pelas suas várias versões equivalentes, são elas:

i) Para toda função antipodal $f : S^n \to \mathbb{R}^n$, ou seja $f(x) = f(-x)$ para todo $x \in S^n$, existe $x \in S^n$ tal que $f(x) = 0$.

ii) Não existe função antipodal $f : S^n \to S^{n-1}$.

iii) Não existe função contínua $f : B^n \to S^{n-1}$ que é antipodal restrita ao bordo.

iv) Para toda cobertura fechada $F_1, \cdots, F_{n+1}$ da esfera S^n, existe pelo menos um deles que contém um par de involução, ou seja, $F_i \cap (-F_i) \neq \emptyset$.

v) Para toda cobertura aberta $U_1, \cdots, U_{n+1}$ da esfera S^n, existe pelo menos um deles que contém um par de involução, ou seja, $U_i \cap (-U_i) \neq \emptyset$.

As generalizações desse trabalho abrangem uma maior quantidade de espaços, ou seja, ao invés de obtermos resultados somente para funções com o domínio S^n, conseguimos resultados para qualquer espaço X compacto e de Hausdorff. Neste caso, como estamos falando de espaços gerais não temos a função antipodal definida, ao invés disso, utilizamos qualquer involução sem pontos fixos.

Um dos principais resultados mostrado neste trabalho é que temos equivalências similar à citada acima no caso mais geral.

Os norteadores desta dissertação foram dois artigos de C. T. Yang [1] e [2], e em ambos estudamos generalizações do Teorema de Borsuk-Ulam.

No primeiro artigo utilizamos como principal ferramenta o $\mathbb{Z}_2$-índice, com isso conseguimos demostrar o seguinte teorema:

Teorema: *Seja* $(X;T)$ *um* T*-espaço de índice* n *e seja* $f : X \to \mathbb{R}^k$, $0 < k \leq n$ *uma aplicação contínua. Então* $W = \{x \in X,\ f(x) = f(T(x))\}$ *é* T*-invariante e compacto e* $H_{n-k}(W;T) \neq 0$.

O fato de $(W;T)$ ter homologia não nula nos garante que o conjunto W é não vazio. E, como S^n junto com a aplicação antipodal tem $\mathbb{Z}_2$-índice n, como veremos adiante, o teorema acima é uma generalização do famoso teorema.

No segundo artigo vemos uma generalização utilizando o B-índice de Yang. Tal conceito nos dá um número natural que nos indica quando existe ou não função equivariante de um conjunto X, munido de uma involução em uma S^n arbitrária, com a aplicação antipodal.

Ao estudarmos tais artigos, resolvemos modificar sutilmente a abordagem. Em ambos os artigos, Yang utiliza a homologia simplicial de Cech, suspeitamos que foi utilizada tal abordagem devido ao fato que na época do artigo a homologia singular ainda não existia, ou ainda não se possuía uma boa formalização. Resolvemos então, verificar se os mesmos resultados seriam válidos para a homologia singular.

Concluímos que sim, que tais resultados se mantém válidos modificando a homologia, mas em alguns casos as demonstrações ficam mais trabalhosas. Como no caso do teorema citado acima, que foi necessário uma teoria algébrica para nos auxiliar na demonstração.

Para finalizar esta dissertação estudamos o artigo [3] de P. L. Q. Pergher, D. Mattos e E. L. Santos, e vimos mais alguns resultados que utilizam o $\mathbb{Z}_2$-índice.

O trabalho está organizado do seguinte modo: No capítulo 1 relembramos algumas propriedades da homologia singular e definimos o conceito de homologia singular de um T-espaço, verificando quais as propriedades que continuam válidas neste caso mais específico. Tal capítulo serve de base para todo o trabalho, já que em todos os resultados foi necessário o uso da homologia de um T-espaço nas demonstrações.

No capítulo 2 desenvolvemos a teoria algébrica que nos dará suporte na demonstração do teorema citado acima, tal capítulo é meramente técnico, mas de suma importância.

No capítulo 3 definimos o homomorfismo índice e o $\mathbb{Z}_2$-índice de Yang. Verificamos suas propriedades e condições para o T-espaço ter índice não nulo. Tais propriedades serão extremamente utilizadas durante o trabalho. Neste capítulo mostramos também que o $\mathbb{Z}_2$-índice da S^n é n.

No capítulo 4 demonstramos algumas generalizações do Teorema de Borsuk-Ulam, entre elas estão as encontradas no artigo [3] e o Teorema citado acima.

Finalizamos no capítulo 5 com a definição do B-índice e sua utilização para mais uma generalização do Teorema de Borsuk-Ulam.

Capítulo 1

Homologia singular de um T-espaço

1.1 Caracterização da Homologia

Para generalizar o teorema de Borsuk-Ulam utilzaremos a conceito de T espaço:

Definição 1.1.1. *Seja X um espaço topológico compacto e de Hausdorff. E seja $T : X \to X$ uma involução livre, ou seja $T^2 = Id$ e T é contínua sem pontos fixos.*

Chamamos o par $(X;T)$ de T-espaço.

Neste trabalho utilizaremos a homologia singular associada a um T-espaço $(X;T)$, tal homologia é muito semelhante a homologia usual com a diferença que temos que relacionar as p-cadeias singulares existentes com a involução T.

A homologia singular usual, trata do seguinte:

Dado um conjunto X, consideramos $C_n(X) = \{f : \Delta_n \to X\}$ o conjunto de todas as funções do n-simplexo padrão Δ_n chegando em X. E dado um anel qualquer R, consideramos $S_n(X, R)$ o conjunto das combinações lineares formais

$$r_1.\phi_1 + ... + r_s.\phi_s,$$

onde $r_i \in R$ e $\phi_i \in C_n(X)$.

Para cada nível, temos definido o homomorfismo bordo

$$\partial : S_n(X, R) \to S_{n-1}(X, R),$$

para $n \geq 1$, que satisfaz $\partial\partial \equiv 0$.

Dada qualquer função contínua $f : X \to Y$, podemos induzir uma outra função $f : S_n(X, R) \to S_n(Y, R)$, que será uma aplicação de cadeias, definida como

$$f(r_1.\phi_1 + ... + r_s.\phi_s) = r_1.(f \circ \phi_1) + ... + r_s.(f \circ \phi_s)$$

Temos então um complexo de cadeias bem definido:

$$\begin{array}{ccccc}
S_{n+1}(X,R) & \xrightarrow{\partial} & S_n(X,R) & \xrightarrow{\partial} & S_{n-1}(X,R) \\
\downarrow f & & \downarrow f & & \downarrow f \\
S_{n+1}(Y,R) & \xrightarrow{\partial} & S_n(Y,R) & \xrightarrow{\partial} & S_{n-1}(Y,R)
\end{array}$$

Assim, todos os quadrados do diagrama acima comutam.

Com isso podemos definir:

$$Z_n(X, R) = \{x \in S_n(X, R) \,:\, \partial x = 0\};$$

$$B_n(X, R) = \partial(S_{n+1}(X, R));$$

$$H_n(X, R) = \frac{Z_n(X, R)}{B_n(X, R)}$$

que são os n-ciclos, n-bordos e n-ésimo grupo de homologia respectivamente.

A função f, induz também um homomorfismo em nível de homologia

$$f_* : H_n(X, R) \to H_n(Y, R).$$

Vamos considerar agora a homologia relacionada com uma involução.

Definição 1.1.2. *Dado dois T-espaços $(X; T)$ e $(Y; S)$, uma* ***aplicação equivariante*** *$f : (X; T) \to (Y; S)$ é simplesmente uma função $f : X \to Y$ contínua tal que $f(T(x)) = S(f(x))$, para todo $x \in X$. Essa condição nos diz que o diagrama abaixo comuta.*

$$\begin{array}{ccc}
X & \xrightarrow{f} & Y \\
\downarrow T & & \downarrow S \\
X & \xrightarrow{f} & Y
\end{array}$$

Sabemos que para cada espaço topológico X e um anel R fixado, temos associado a ele o módulo das n-cadeias singulares de X, denotado por $S_n(X, R)$. Agora se considerarmos o T-espaço $(X; T)$, como T é uma função contínua, T induz uma aplicação de cadeia entre as cadeias singulares de $S_p(X, R)$, que também será denotada por T:

$$T : S_p(X, R) \to S_p(X, R)$$

tal que para cada $r_1\phi_1 + ... + r_s\phi_s \in S_p(X, R)$, onde a soma é uma soma formal e cada $\phi_i : \Delta_p \to X$ é contínua, então:

$$T(r_1\phi_1 + ... + r_s\phi_s) = r_1 T \circ \phi_1 + ... + r_s T \circ \phi_s$$

Consideraremos então o seguinte subgrupo de $S_p(X, R)$;

$$C_p(X; T) = \{c \in S_p(X, R) \; : \; T \circ c = c\}$$

Um elemento desse grupo é chamado de **p-cadeia T-invariante**, ou simplesmente de **(T, p)-cadeia**.

Como T é um homomorfismo vemos que o conjunto acima não é vazio, pois sempre contém o elemento neutro (a função nula). E facilmente se verifica que é um subgrupo pois se $c, d \in C_p(X; T)$ então $T(c + d) = T(c) + T(d) = c + d$.

Observação 1.1.3. *$T(\phi(x)) \neq \phi(x)$; para cada $\phi \in S_p(X, R)$.*

Segue imediatamente do fato de T não ter pontos fixos.

De agora em diante, vamos assumir que o anel de coeficiente R será sempre o anel $\mathbb{Z}_2$ de inteiros módulo 2.

Note que, a partir de agora, um elemento qualquer de $S_p(X, \mathbb{Z}_2)$, será da forma $\phi_1 + ... + \phi_s$, pois agora os possíveis coeficientes são 0 ou 1.

Proposição 1.1.4. *Uma p-cadeia c é uma (T, p)-cadeia se, e somente se,*

$$c = d + T(d)$$

para alguma p-cadeia d.

Demonstração: Suponha que $c \in S_p(X, R)$ é da forma $c = d + T(d)$ para alguma $d \in S_p(X, R)$ então $T(c) = T(d + T(d)) = T(d) + d = c$, portanto $c \in C_p(X; T)$.

Suponha que c é uma (T, p) cadeia, ou seja $T(c) = c$. Podemos escrever $c = c_1 + ... + c_s$ onde cada $c_i : \Delta_p \to X$ contínua. A condição $T(c) = c$ nos dá que

$$Tc_1 + ... + Tc_s = c_1 + ... + c_s,$$

ou seja para cada i temos que existe j tal que $Tc_i = c_j$.

Pela observação anterior sabemos que $i \neq j$ e pelo fato de T ser uma involução segue que se $Tc_i = c_j$ então $Tc_j = c_i$. Assim, por uma possível renumeração podemos supor, sem perda de generalidade, que $j = i + s/2$, note que s terá que ser sempre par pois senão teríamos que $Tc_i = c_i$ para algum i, assim basta considerar $d = c_1 + ... + c_{s/2}$ e com isso $T(c_1 + ... + c_{s/2}) = c_j + ... + c_s$, portanto $c = d + T(d)$. ■

A restrição do operador bordo usual, $\partial : S_p(X, R) \to S_{p-1}(X, R)$, induz o operador bordo entre as (T, p)-cadeias

$$\partial : C_p(X; T) \to C_{p-1}(X; T)$$

do seguinte modo:

Note que, usando o fato que T induz uma aplicação de cadeias e portanto comuta com o operador bordo temos que se $c \in C_p(X; T) \Rightarrow T(c) = c$, assim

$$\partial(c) = \partial T(c) = T\partial(c) \Rightarrow \partial(c) \in C_{p-1}(X; T).$$

Então o operador bordo leva $C_p(X; T)$ em $C_{p-1}(X; T)$. Assim podemos definir:

$$Z_p(X; T) = \{c : c \in C_p(X; T), \partial c = 0\};$$

$$B_p(X; T) = \partial C_{p+1}(X; T);$$

$$H_p(X; T) = \frac{Z_p(X; T)}{B_p(X; T)}.$$

Os elementos de $Z_p(X;T)$, $B_p(X;T)$, $H_p(X;T)$ são respectivamente chamados de (T,p)-**ciclos**, (T,p)-**bordos** e p-**ésimo grupo** T-**classes de homologia de** X.

Uma aplicação equivariante $f : (X;T) \to (Y;T)$ de T-espaços, define por conceitos de homologia singular básica, uma aplicação de cadeias;

$$f : S_p(X,R) \to S_p(Y,R)$$

tal que $f(Z_p(X,R)) \subset Z_p(Y,R)$ e $f(B_p(X,R)) \subset B_p(Y,R)$.

Note que podemos restringir a $f : C_p(X;T) \to C_p(Y;T)$, pois temos que se $c \in C_p(X;T)$;

$$f(c) = f(d + T(d)) = f(d) + f(T(d)) = f(d) + T(f(d)) \in C_p(Y;T),$$

utilizamos que as induzidas de f e T comutam entre si em nível de p-cadeias, e isso se deve ao fato de f comutar com T, vistas como funções entre os espaços topológicos.

Dessa forma temos que f continua sendo uma aplicação de cadeias, já que a restrição também irá comutar com ∂.

Esta função induz homomorfismos entre as (T,p)-classes de homologia. Pois

$$c \in Z_p(X;T) \Rightarrow \partial f(c) = f\partial(c) = f(0) = 0$$

Portanto $f(Z_p(X;T)) \subset Z_p(Y;T)$ e

$$c \in B_p(X;T) \Rightarrow \exists x \in C_{p+1}(X;T) \text{ tal que } \partial x = c.$$
$$\text{Logo } f(c) = f\partial x = \partial f(x) \in B_p(Y;T)$$

Portanto $f(B_p(X;T)) \subset B_p(Y;T)$.

Assim temos bem definida a função:

$$f_* : H_p(X;T) \to H_p(Y;T)$$

Para saber calcular a (T,p)-homologia de um espaço qualquer precisamos do seguinte teorema, o qual só é válido para espaços topológicos de Hausdorff e localmente conexo por caminhos.

Denotamos por X/T o conjunto quociente, no qual cada classe de equivalência é $\{x, T(x)\}$.

Teorema 1.1.5. *Seja $(X;T)$ um T-espaço com X Hausdorff e localmente conexo por caminhos, então $H_n(X;T)$ é isomorfo a $H_n(X/T, \mathbb{Z}_2)$.*

Demonstração: Para demonstrar tal fato vamos considerar as seguinte funções:

$$p : X \to X/T$$
$$p(x) = \bar{x} = \{x, T(x)\}$$

e com isso temos a induzida:

$$p_{\#} : S_n(X) \to S_n(X/T)$$
$$p_{\#}(\phi) = p \circ \phi$$

Defina também a seguinte aplicação de cadeia:

$$P : C_n(X;T) \to S_n(X/T, \mathbb{Z}_2)$$
$$P(d + S(d)) = p_{\#}(d)$$

Afirmamos que P é uma bijeção.

Para mostrar que é injetora tomemos dois n-simplexos $\phi, \psi : \Delta_n \to X$ e supomos que $P(\phi + T(\phi)) = P(\psi + T(\psi))$. Queremos mostrar que $\phi = \psi$ ou $\phi = T(\psi)$.

Note que como $P(\phi + T(\phi)) = P(\psi + T(\psi)) \Rightarrow p_{\#}(\phi) = p_{\#}(\psi) \Rightarrow p \circ \phi = p \circ \psi$.

Suponhamos que $\phi \neq \psi$ e tomemos o conjunto:

$$A = \{x \in \Delta_n \, : \, \phi(x) = T(\psi(x))\}.$$

Mostraremos que A é aberto, fechado e não vazio. Como Δ_n é conexo, isto implicará que $A = \Delta_n$, como desejado.

i) $A \neq \emptyset$:

Como $\phi \neq \psi$, existe $x \in \Delta_n$ tal que $\phi(x) \neq \psi(x)$. Mas $p(\phi) = p(\psi)$, implicando que $p(\phi(x)) = \{\phi(x), T(\phi(x))\} = \{\psi(x), T(\psi(x))\} = p(\psi(x))$. Como $\phi(x) \neq \psi(x)$, necessariamente $\phi(x) = T(\psi(x))$.

ii) A é fechado;

Como ϕ e $T(\psi)$ são contínuas, segue que

$$F : \Delta_n \to X \times X; \qquad F(x) = (\phi(x), T(\psi(x)))$$

é contínua. Como $X \times X$ é Hausdorff segue que a diagonal é fechada, como A é a imagem inversa da diagonal, segue que A é um conjunto fechado.

iii) A é aberto;

Seja $x \in A$, ou seja $\phi(x) = T(\psi(x))$. Como a involução T não tem pontos fixos, segue que $\phi(x) \neq \psi(x)$. Utilizando que X é de Hausdorff, existem abertos disjuntos U e V de X contendo $\psi(x)$ e $\phi(x)$, respectivamente.

Sendo ϕ, ψ contínuas, existe aberto $W \subset \Delta_n$ tal que $x \in W$ e tal que simultaneamente $\psi(W) \subset U$ e $\phi(W) \subset V$.

Desse modo, qualquer $y \in W$ será tal que $\phi(y) \neq \psi(y)$. Mas

$$p\phi(y) = \{\phi(y), T(\phi(y))\} = \{\psi(y), T(\psi(y))\} = p\psi(y).$$

Então necessariamente, $\phi(y) = T(\psi(y))$ o que significa que $y \in A$ e consequentemente $W \subset A$. Portanto A é um conjunto aberto.

Agora para mostrarmos que P é sobrejetora, considere $\phi : \Delta_n \to X/T$ um n-simplexo singular arbitrário. Como $p : X \to X/T$ é um recobrimento a 2 folhas e do fato de X ser um espaço de Hausdorff e localmente conexo por caminhos e Δ_n é simplesmente conexo (pois é contrátil), podemos utilizar o *Teorema do levantamento* e garantir a existência de uma função $\phi' : \Delta_n \to X$ tal que $p\phi' = \phi$, mostrando que P é sobrejetora.

Assim a induzida $P_* : H_n(X;T) \to H_n(X/T, \mathbb{Z}_2)$ é um isomorfismo. ■

No seguinte exemplo, e em todo o restante do trabalho, sempre que nos referirmos ao T-par $(S^n;T)$ a involução T será a função antipodal da esfera, $T(x) = -x$.

Exemplo 1.1. $H_p(S^n;T) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & se \quad 0 \leq p \leq n \\ 0, & se \quad p > n \end{cases}$

Podemos concluir tais afirmações facilmente observando que $H_p(S^n;T)$ é isomorfo a $H_p(S^n/T, \mathbb{Z}_2)$, que é conhecida, pois S^n/T é o n-plano projetivo, e por conceitos da homologia singular, podemos afirmar que sua homologia é exatamente do modo descrito acima.

1.2 Subdivisão Baricentrica

Nosso próximo objetivo é desenvolver o homomorfismo conectante análogo ao conhecido em homologia singular usual.

Em homologia singular usual, dado um cobertura aberta $\Omega = \{A, B\}$ de X, temos as seguintes sequências exatas curtas:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & S_{n+1}(A\cap B,R) & \xrightarrow{(i,-j)} & S_{n+1}(A,R)\oplus S_{n+1}(B,R) & \xrightarrow{k} & S_{n+1}(X,R) & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & S_{n}(A\cap B,R) & \xrightarrow{(i,-j)} & S_{n}(A,R)\oplus S_{n}(B,R) & \xrightarrow{k} & S_{n}(X,R) & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & S_{n-1}(A\cap B,R) & \xrightarrow{(i,-j)} & S_{n-1}(A,R)\oplus S_{n-1}(B,R) & \xrightarrow{k} & S_{n-1}(X,R) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

onde $i : A \to X$ e $j : B \to X$ são as inclusões e $k : A \times B \to X$, $k(a, b) = a+b$.

Para garantir a existência do homomorfismo conectante que torna a sequência acima uma sequência exata longa, precisamos utilizar ao invés da homologia usual, o subconjunto $H_n^{\Omega}(X, R)$ no qual consideramos apenas as n-cadeias tais que a imagem está inteiramente contida em A ou em B.

Para finalizar, utilizamos o famoso *teorema da subdivisão baricêntrica* que nos garante que nessas condições $H_n(X, R)$ e $H_n^{\Omega}(X, R)$ são isomorfos. A demonstração de tal resultado pode ser visto com detalhes em [6].

No nosso caso, onde consideramos um T-espaço $(X;T)$, utilizaremos um caso análogo.

Neste caso, a cobertura aberta de X é da forma $\Omega = \{A, T(A)\}$. Note que se A é aberto, segue que $T(A)$ também é aberto, pois T é um homeomorfismo. Assim ao termos as sequências exata curta:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & C_{n+1}(A\cap T(A);T) & \longrightarrow & C_{n+1}(A;T)\oplus C_{n+1}(T(A);T) & \longrightarrow & C_{n+1}(X;T) & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow\partial & & \downarrow\partial & & \downarrow\partial & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & C_{n}(A\cap T(A);T) & \longrightarrow & C_{n}(A;T)\oplus C_{n}(T(A);T) & \longrightarrow & C_{n}(X;T) & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow\partial & & \downarrow\partial & & \downarrow\partial & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & C_{n-1}(A\cap T(A);T) & \longrightarrow & C_{n-1}(A;T)\oplus C_{n-1}(T(A);T) & \longrightarrow & C_{n-1}(X;T) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Teremos uma sequência exata longa em nível de homologia:

$$H_n(A;T)\oplus H_n(T(A);T) \to H_n(X;T) \xrightarrow{\Delta} H_{n-1}(A\cap T(A);T) \to$$
$$H_{n-1}(A;T)\oplus H_{n-1}(T(A);T)$$

e temos o seguinte teorema para finalizar a construção:

Teorema 1.2.1. ***(Subdivisão Baricêntrica para T-espaços)*** *$i_* : H_n^{\Omega}(X;T) \to H_n(X;T)$ é um isomorfismo, onde i é a inclusão.*

Tal teorema pode ser encontrado com mais detalhes em [7].

O homomorfismo conectante $\Delta : H_n(X;T) \to H_{n-1}(A\cap T(A);T)$ é definido do seguinte modo:

$$\Delta(\overline{c+T(c)}) = \overline{\partial c},$$

onde $\overline{\partial c}$ denota a classe de homologia de ∂c em $H_{n-1}(A\cap T(A);T)$.

Capítulo 2

Limites Algébricos

Este capítulo embora seja totalmente técnico, é de enorme importância para uma das generalizações de Borsuk-Ulam.

Vamos definir e verificar algumas propriedades de Limites Algébricos, todas as quais serão necessárias na demostração do teorema.

Tal processo será utilizado pelo fato de não estarmos considerando a homologia simplicial como no artigo original de Yang, por isso para compensar alguns resultados que não são válidos para a homologia simplicial, utilizamos os resultados deste capítulo.

2.1 Definições e Propriedades

Definição 2.1.1. *Chamamos de* ***conjunto direcionado****, um conjunto I junto com uma ordem-parcial $i \leq j$ para certos pares de elemento de I, tal que para quaisquer $i, j \in I$ existe $k \in I$ tal que $i \leq k$ e $j \leq k$.*

Lembre que uma ordem-parcial é uma relação reflexiva (ou seja, $i \leq i$ para todo $i \in I$) e transitiva (ou seja, se $i \leq j$ e $j \leq k$ temos que $i \leq k$). Observemos também que se $i \leq j$ e $j \leq i$ não implica que $i = j$.

Definição 2.1.2. *Suponha que $(M_i)_{i \in I}$ uma família de de grupos (ou de anéis, ou de R-módulos), indexado por um conjunto direcionado I, e que para cada $i \leq j$ temos homomorfismos*

$$\phi_{ij} : M_i \to M_j$$

Tais que

$$\phi_{jk}\phi_{ij} = \phi_{ik} \text{ se } i \leq j \leq k;$$
$$\phi_{ii} = Id.$$

Chamamos $\{M_i, \phi\}$ *de* ***Sistema Direto de Grupos*** *(ou de Anéis, ou de R-módulos).*

Definição 2.1.3. *O* ***limite direto*** *de um sistema direto é um grupo (ou um anel, ou um R-módulo) M junto com uma família de homomorfismos*

$$\phi_i : M_i \to M$$

indexado por I de modo que

$$\phi_j\phi_{ij} = \phi_i \text{ se } i \leq j$$

satifazendo a seguinte propriedade universal: Para qualquer grupo (ou anel, ou R-módulo) N e qualquer família de homomorfismos

$$\psi : M_i \to N$$

satisfazendo

$$\psi_j\phi_{ij} = \psi_i \text{ se } i \leq j$$

existe um único homomorfismo $\psi : M \to N$ *tal que*

$$\psi_i = \psi\phi_i \text{ para todo } i \in I. \ (*)$$

Fica claro, devido essa propriedade universal que quaisquer dois limites M e N são isomorfos por um único isomorfismo satisfazendo a condição $(*)$. Então podemos falar sobre "o" limite direto e denotá-lo por:

$$\varinjlim M_i$$

O único homomorfismo ψ será denotado por $\varinjlim \psi_i$.

Proposição 2.1.4. *O limite direto existe.*

Demonstração: Seja M^+ a soma direta de todos os M_i, com $\phi_i^+ : M_i \to M^+$ o homomorfismo que manda cada $x_i \in M_i$ no vetor que tem a i-ésima coordenada x_i e as outras coordenadas iguais a 0. Forme o grupo G (ou anel, ou R-módulo) gerado por todos os elementos da forma

$$\phi_j^+ \phi_{ij}(x_i) - \phi_i^+(x_i)$$

para todos os pares $i \leq j$ e todo $x_i \in M_i$, e seja Mo quociente de M^+ por G, e seja $\pi : M^+ \to M$ o homomorismo quociente. Então M junto com os homomorfismos $\phi_i = \pi\phi_i^+$ é o limite direto.

■

Proposição 2.1.5. *Seja $\{M_i, \phi\}$ um sistema direto onde cada M_i é um anel comutativo com unidade, todos não nulos. Então $M = \varinjlim M_i$ é não nulo.*

Demonstração: Seja 0_i e 1_i o elemento neutro e a unidade de cada M_i, e seja 0 e 1 o elemento neutro e a unidade de M, mostraremos que tais elementos são distintos, provando assim que M é não nulo.

Temos que existe j tal que $\phi_j(0_j) = 0$ e $\phi_j(1_j) = 1$. Se $0 = 1$, existiria $i \geq j$ tal que $\phi_{ji}(0_j) = \phi_{ji}(1_j)$, isto implica que $0_i = 1_i$ o que é uma contradição. ■

Capítulo 3

$\mathbb{Z}_2$-Índice de Yang

Neste capítulo vamos definir homomorfismo índice e o índice de um T-espaço $(X;T)$. Tal índice foi introduzido por C. T. Yang em [1], e é conhecido como $\mathbb{Z}_2$-índice de Yang. O qual será de enorme importância para concluirmos as generalizações do teorema de Borsuk-Ulam.

3.1 Homomorfismo Índice

Para um espaço topológico X arbitrário e um grupo G arbitrário, sempre podemos definir o seguinte homomorfismo:

$$In : S_0(X,G) \to G$$

tal que para cada $c = \sum g_i.x_i \in S_0(X,G)$, temos que $In(c) = \sum g_i$.

Podemos facilmente verificar que In é um homomorfismo, e adicionalmente note que $In(\partial x) = 0$ qualquer que seja $x \in S_1(X,G)$, pois escrevendo

$$x = a_1.x_1 + ... + a_r.x_r,$$

onde cada x_i é um caminho, segue que

$$\partial x = a_1(x_1(1) - x_1(0)) + ... + a_r(x_r(1) - x_r(0),$$

consequentemente:

$$In(\partial x) = \sum (a_i - a_i) = 0.$$

A partir dessa definição podemos para $(X;T)$ um T-espaço qualquer, definir a seguinte função por recorrência:

$$v : Z_p(X;T) \to \mathbb{Z}_2$$

Seja $z = c + T(c) \in Z_p(X;T)$. Então

$$v(z) = \begin{cases} In(c), & \text{se} \quad p = 0 \\ v(\partial c), & \text{se} \quad p > 0 \end{cases}$$

Note que, no nível zero, para $z \in Z_0(X;T)$, temos que $z = \phi_1 + ... + \phi_r + T(\phi_1) + ... + T(\phi_r)$, assim poderíamos definir tal função de modo equivalente da seguinte maneira:

$$v(z) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad r \text{ é par} \\ 1, & \text{se} \quad r \text{ é impar} \end{cases}$$

Tal função v é um homomorfismo em todo nível p.

Para verificar que de fato é um homomorfismo, procedemos por indução.

No nível zero, tal resultado é trivial pelo fato de In ser um homomorfismo. Poderíamos também observar esse fato de modo alternativo pelo fato de que

par+par = par;

impar+impar=par;

impar+par= impar.

Supondo por indução que v é um homomorfismo no nível n, e recordando que ∂ é um homomorfismo, segue que:

$$
\begin{aligned}
v(c+T(c)+d+T(d)) &= v(c+d+T(c+d)) \\
&= v(\partial(c+d)) \\
&= v(\partial(c)+\partial(d)) \\
&= v(\partial(c))+v(\partial(d)) \\
&= v(c+T(c))+v(d+T(d))
\end{aligned}
$$

Mostremos agora que tal função é bem definida e independe da escolha de c. Suponha $p=0$ e seja $z=c'+T(c')$ uma segunda representação de $z=c+T(c)$, então, depois de uma renumeração dos índices se necessário, se $c=\phi_1+...+\phi_s$ então $c'=\phi_1+...+\phi_i+T(\phi_{i+1})+...+T(\phi_s)$. Logo

$$
In(c)-In(c')=In(c-c')=In(\phi_{i+1}+...+\phi_s-T(\phi_{i+1})-...-T(\phi_s))= \\
(s-i-1)-(s-i-1)=0
$$

Outro modo de ver que o resultado acima é zero, é observar que temos uma quantidade par de elementos somados, pois para todo ϕ_j também somamos o $T(\phi_j)$, e portanto $v(c-c')=0$.

Assim temos provado que v está bem definido para $p=0$.

Temos que v anula $B_0(X;T)$, pois se $z=\partial(d+T(d))=\partial(d)+T(\partial d)$, assim $v(z)=In(\partial d)=0$.

Agora procedemos por indução e assumimos que v é bem definida em $Z_{p-1}(X;T)$ e anula $B_{p-1}(X;T)$ para $p>0$.

Para uma segunda representação $z=c'+T(c')$ de $z=c+T(c)\in Z_p(X;T)$ considerando que $c=c_1+c_2$ e $c'=c_1+T(c_2)$, podemos escrever $z=c_1+c_2+T(c_1)+T(c_2)$. Portanto $v(\partial c)-v(\partial c')=v(\partial(c-c'))=v(\partial(c_2+T(c_2)))=0$ pois $\partial(c_2+T(c_2))\in B_{p-1}(X;T)$ e estamos utilizando a hipótese de indução. Portanto v está bem definida em $Z_p(X;T)$.

Se $z\in B_p(X;T)$, digamos $z=\partial(d+T(d))$, então $v(z)=v(\partial\partial d)=0$ (ou $v(In(\partial d)=0$ se $p=1$).

Assim v está bem definido e $v(B_p(X;T))=0$.

Agora estamos em condições de definir o **homomorfismo índice**, do seguinte modo:

$$v : H_p(X;T) \rightarrow \mathbb{Z}_2$$

tal que, se $\zeta \in H_p(X;T)$ e z é um (T,p)-ciclo em ζ, então

$$v(\zeta) = v(z)$$

Tal homomorfismo está bem definido pois se z e z' são ambos (T,p)-ciclos em ζ a diferença será um bordo e portanto $v(z - z') = 0 \Rightarrow v(z) = v(z')$.

Observamos a importância de tal homomorfismo na proposição a seguir, que afirma a invariância do índice através de induzidas de aplicações equivariantes.

Proposição 3.1.1. *Se $f : (X;T) \rightarrow (Y;T)$ é uma aplicação equivariante, então para $\zeta \in H_p(X;T)$,*

$$v(f_*(\zeta)) = v(\zeta).$$

Demonstração: Pelo modo como foi definido v só precisamos mostrar que se $z \in Z_p(X;T)$, então $v(f(z)) = v(z)$.

Para $p = 0$ notemos que se $z = \phi_1 + ... + \phi_s + T(\phi_1 + ... + \phi_s)$ então

$$f(z) = f(\phi_1) + ... + f(\phi_s) + T(f(\phi_1) + ... + f(\phi_s)),$$

assim

$$v(z) = In(\phi_1 + ... + \phi_s) = s = In(f(\phi_1) + ... + f(\phi_s)) = In(f(z)) = v(f(z)),$$

e também é fácil perceber que ao aplicar a f não altera-se a quantidade de elementos na soma.

Agora vamos prosseguir por indução e assumir que para $z \in Z_{p-1}(X;T)$ com $p > 0$ a proposição é válida. Se $z = c + T(c) \in Z_p(X;T)$, então

$$v(z) = v(\partial c) \quad \text{e} \quad v(f_*(z)) = v(\partial f_*(c)) = v(f_*(\partial c)).$$

Como $\partial c \in Z_{p-1}(X;T)$, segue pela hipótese de indução que

$$v(f_*(\partial c)) = v(\partial c).$$

Consequentemente segue que $v(f_*(z)) = v(z)$ como desejado. ■

O seguinte lema é de enorme importância para demonstrar uma generalização do Teorema de Borsuk-Ulam. No artigo estudado de C. T. Yang, o mesmo lema era verdadeiro para um conjunto F fechado ao invés de aberto, mas isto só era possível pois era utilizada a homologia simplicial. No caso de homologia singular, que estamos trabalhando, o resultado nem sempre é válido para fechado, mas para abertos é sempre verdadeiro como enunciado a seguir:

Lema 3.1.2. *Seja $(X;T)$ um T-espaço, e seja F um subconjunto aberto de X tal que $F \cup T(F) = X$ e seja $A = F \cap F(T)$. Então existe um homomorfismo*

$$\Delta : H_p(X;T) \to H_{p-1}(A;T), \ (p > 0)$$

tal que para $\zeta \in H_p(X;T)$,

$$v(\zeta) = v(\Delta(\zeta))$$

Demonstração: Tal homomorfismo Δ será o homomorfismo conectante existente na sequência de Mayer-Vietoris. Ou seja, considere a sequência de Mayer-Vietoris para a cobertura $\Omega = \{F, T(F)\}$, então temos que a sequência abaixo é exata:

$$0 \to C_p(F \cap T(F);T) \to C_p(F;T) \oplus C_p(T(F);T) \to C_p(X;T) \to 0$$

Seja $\zeta \in H_p(X;T)$, e seja z um ciclo em ζ. Como a sequência é exata, segue que podemos considerar $z = c + T(c)$, onde c é um simplexo com a imagem inteiramente contida em F.

Temos que $0 = \partial(z) = \partial(c) + T(\partial(c)) \Rightarrow \partial(c) = T(\partial(c))$, ou seja $\partial(c)$ tem a imagem contida em $F \cap T(F) = A$. Logo $\partial(c) \in Z_{p-1}(A;T)$. Assim basta definir $\Delta(\zeta) = \overline{\partial(c)}$, ou seja, a classe de homologia de $\partial(c)$, a qual é exatamente como é definido o homomorfismo conectante.

Dessa forma, tal homomorfismo satisfaz a propriedade requerida, pois:

$$v(\zeta) = v(z) = v(\partial(c)) = v(\overline{\partial(c)}) = v(\Delta\zeta).$$

■

Corolário 3.1.3. *Seja A um aberto de X tal que $A \cup T(A) = X$, se $H_n(X;T)$ possui classes com índice não nulo então o mesmo ocorre com $H_{n-1}(A \cap T(A);T)$.*

Demonstração: É imediato pela utilização do homomorfismo Δ do lema anterior, pois se $\zeta \in H_n(X;T)$ é tal que $v(\zeta) \neq 0$, então para $\Delta\zeta \in H_{n-1}(A \cap T(A);T)$ temos que $v(\Delta\zeta) = v(\zeta) \neq 0$. ■

Outra consequência do lema é a seguinte:

Proposição 3.1.4. *Se $v(H_n(X;T)) = \mathbb{Z}_2$, então $v(H_p(X;T)) = \mathbb{Z}_2$ para $0 \leq p \leq n$.*

Demonstração: Pois, considerando $F = X$, temos que $A = X$, então existe $\zeta \in H_p(X;T)$, $\zeta \neq 0$ tal que $v(\zeta) = 1$, como $v(\zeta) = v(\Delta(\zeta))$, assim existe $\Delta\zeta \in H_{n-1}(X;T)$ tal que $v(\Delta\zeta) = 1$, portanto $v(H_{n-1}(X;T)) = \mathbb{Z}_2$. Seguindo por indução concluiremos o resultado para todo p, $0 \leq p \leq n$. ■

3.2 Índice

Com base na proposição acima, o $\mathbb{Z}_2$-índice de Yang é definido com o inteiro n tal que $v(H_n(X;T)) = \mathbb{Z}_2$ e $v(H_{n+1}(X;T)) = 0$.

Para garantir a existência de tal n temos que exigir que $H_p(X;T)$ seja nulo para algum p. Caso a homologia nunca se anule, pode ocorre da imagem do homomorfismo índice seja $\mathbb{Z}_2$ para todo n natural, mas isto não interfere os resultados, pois todos eles precisam da condição que $vH_p(X;T) \neq 0$ para $p \leq n$ para algum n, o fato de $vH_{n+1}(X;T) = 0$ não é utilizado.

A próxima proposição diz respeito de como se comporta o homomorfismo índice em relação ao T-par $(S^n;T)$:

Proposição 3.2.1. *$v : H_p(S^n;T) \to \mathbb{Z}_2$ é um isomorfismo, para $p = 0, 1, ..., n$.*

Demonstração: Sabemos que $H_p(S^n;T) = \mathbb{Z}_2$ para $0 \leq p \leq n$ pelo exemplo 1.1. Assim basta mostrarmos que a função acima é sobrejetora ou injetora, pois como v é um homomorfismo entre dois grupo de apenas 2 elementos, sabemos que ou é o homomorfismo nulo ou é um isomorfismo.

O fato que $v : H_p(S^n;T) \to \mathbb{Z}_2$ é isomorfismo só é necessário mostrar para $H_n(S^n;T)$, ou seja, temos que mostrar apenas que $v : H_n(S^n;T) \to \mathbb{Z}_2$ é um isomorfismo, os outros casos sairão diretamente da proposição 3.1.4.

No caso $n = 0$ mostraremos que não é o homomorfismo nulo mostrando que tem alguém na imagem diferente do elemento neutro.

Para $n = 0$, sabemos que $S^0 = \{-1, 1\}$, então se z é um ciclo em $Z_0(S^0;T)$, então $z = 1 + T(1)$, assim $v(z) = In(1) = 1$. Assim a classe de z, que denotaremos por ζ, satisfaz $v(\zeta) = v(1) = 1$, então $vH_0(S^0;T) = \mathbb{Z}_2$.

Tome $n \geq 1$. Vamos agora supor por indução que tal resultado é válido para todo $p \leq n-1$, ou seja, que $vH_p(S^p;T) = \mathbb{Z}_2$ para $p \leq n-1$.

Consideremos então S^n e T a aplicação antipodal. Fixe $\epsilon > 0$ bem pequeno, e tome $F = \{(x_0, ..., x_n) \in S^n : x_n > -\epsilon\}$, assim F é um conjunto aberto de S^n e temos que $T(F) = \{(x_0, ..., x_n) \in S^n : x_n < \epsilon\}$, e consequentemente

$$F \cap T(F) = \{(x_0, ..., x_{n-1}, x_n) \in S^n : -\epsilon < x_n < \epsilon\}$$

e tal conjunto tem o mesmo tipo de homotopia de S^{n-1}, portanto

$$H_r(F \cap T(F);T) = H_r(S^{n-1};T)$$

para todo r.

Pelo Teorema da Subdivisão Baricêntrica para T-espaços, temos que a sequência abaixo é exata:

$$H_n(F;T) \oplus H_n(T(F);T) \to H_n(S_n;T) \xrightarrow{\Delta} H_{n-1}(S^{n-1};T) \to$$
$$H_{n-1}(F;T) \oplus H_{n-1}(T(F);T)$$

Como F e $T(F)$ tem o mesmo tipo de homotopia do ponto, segue que suas homologias são nulas com exceção do nível 0. Se $n > 1$ teremos uma sequência exata do tipo:

$$0 \to H_n(S_n;T) \xrightarrow{\Delta} H_{n-1}(S^{n-1};T) \to 0$$

o que implica que Δ é um isomorfismo.

Caso $n = 1$, teremos a seguinte sequência exata:

$$0 \to H_n(S_n;T) \xrightarrow{\Delta} H_{n-1}(S^{n-1};T) \to \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$$

O que nos dá que Δ é injetora, por ser um homomorfismo injetor entre $\mathbb{Z}_2$ e $\mathbb{Z}_2$ segue será que também um isomorfismo.

Então tomando $\zeta \in H_n(S^n;T)$ não nulo, e $z = c + T(c)$ um ciclo de ζ, como Δ é um isomorfismo $\Delta(\zeta)$ é um elemento não nulo de $H_{n-1}(S^{n-1};T)$ e por hipótese de indução segue que $v(\Delta(\zeta))$, logo $v(\zeta) = v(\Delta(\zeta)) = 1$. Logo, $v(H_n(S^n;T)) = \mathbb{Z}_2$ e assim v é um isomorfismo como desejado. ■

Teorema 3.2.2. *$(S^n;T)$ tem índice n.*

Demonstração: Pela proposição acima vimos que

$$vH_p(S^n;T) = \mathbb{Z}_2 \text{ para } 0 \leq p \leq n$$

e como $H_p(S^n;T) = 0$ para $p > n$ segue que $vH_p(S^n;T) = 0$ para $p > n$. ■

Outra maneira de caracterizar o índice é a seguinte:

Proposição 3.2.3. *Seja $\zeta \in H_p(X;T)$. Então $v(\zeta) \neq 0$ se, e somente se, para qualquer função equivariante $f : (X;T) \to (Y;T)$, $f_*(\zeta) \neq 0$, onde $(Y;T)$ é arbitrário.*

Demonstração: Suponha inicialmente que $v(\zeta) \neq 0$. Para qualquer função $f : (X;T) \to (Y;T)$ temos que $v(f_*(\zeta)) = v(\zeta) \neq 0$, logo $f_*(\zeta) \neq 0$ pois v é um homomorfismo.

Suponha agora por contrapositiva que para $\zeta \in H_p(X;T)$ tal que $v(\zeta) = 0$. Nosso objetivo é construir uma função $f : (X;T) \to (Y;T)$ tal que $f_*(\zeta) = 0$, para algum T-espaço $(Y;T)$. Tome para cada $x \in X$ um aberto U tal que $U \cap T(U) = \emptyset$, tal construção é possível pois X é Hausdorff e pelo fato de T ser involução livre. Tais conjuntos formam uma cobertura aberta de X, que como é compacto existem

$U_0, ..., U_r$ que cobrem X, sem perde de generalidade podemos supor $r \geq p$, pois só necessitamos de uma cobertura finita.

Utilizando o teorema da partição da unidade, sabemos que existem funções contínuas, $i = 0, ..., r$:

$$\phi_i : X \to [0, 1]$$

tal que

$$suporte(\phi_i) \subset U_i$$
$$\sum \phi_i = 1$$

Definimos agora:

$$f_i : X \to [0, 1]$$
$$f_i = \frac{\sqrt{2\phi_i}}{2}$$

Assim temos que cada f_i é contínua, $f_i = 0$ em $X - U_i$ e satisfazem $\sum {f_i}^2 = 1/2$

Chame $g_i = f_i T : X \to [0, 1]$.

Dessa forma ${f_0}^2 + ... + {f_r}^2 + {g_0}^2 + ... + {g_r}^2 = 1$.

Vamos considerar a função:

$$f(x) = (f_0(x) - g_0(x), ..., f_r(x) - g_r(x))$$

Essa função satisfaz o nosso objetivo. Basta observar que é uma função equivariante de $(X; T)$ em $(S^r; T)$, e que

$$v(f_*(\zeta)) = v(\zeta) = 0$$

como $v : H_p(S^r; T) \to \mathbb{Z}_2$ é um isomorfismo, pela proposição 3.2.1 e porque $r \geq p$ e, em particular é injetora e portanto $f_*(\zeta) = 0$. ■

Observação 3.2.4. *Observando a demonstração da proposição acima vemos que para qualquer T-par $(X; T)$ existe uma função equivariante de $(X; T)$ em $(S^r; T)$ para algum r natural.*

Para sumarizar a definição equivalente de índice temos a proposição a seguir, que é consequência imediata da proposição anterior:

Proposição 3.2.5. *O índice de $(X;T)$ é o maior inteiro n tal que para qualquer função $f:(X;T)\to(Y;T)$ ($(Y;T)$ arbitrário) tal que $f_*(H_n(X;T))\neq 0$.*

Capítulo 4

Generalizações do Teorema de Borsuk-Ulam

Nesse capítulo mostraremos as generalizações de Borsuk-Ulam feitas com o auxílio do $\mathbb{Z}_2$-índice de Yang.

As duas primeiras generalizações foram retiradas do artigo [3] de Pergher, Mattos e Santos e a última generalização do artigo [1] de Yang.

4.1 Primeiras Generalizações

Para a primeira generalização, que apresentaremos, será necessário o seguinte lema:

Lema 4.1.1. *Seja $(X;T)$ um T-espaço com X conexo por caminhos. Para um número natural $n \geq 1$, suponha $H_r(X;\mathbb{Z}_2) = 0$, para $1 \leq r \leq n$. Então existe classes com o $\mathbb{Z}_2$-índice em $H_{n+1}(X;T)$ não nulo, em outras palavras o $\mathbb{Z}_2$-índice de $(X;T)$ é maior ou igual a $n+1$.*

Demonstração: Considere $\theta = Id_{\#} + T_{\#} : S_j(X,\mathbb{Z}_2) \to S_j(X,\mathbb{Z}_2)$, que satisfaz $\theta\theta = 0$, pois

$$\theta\theta = Id + T + T + T^2 = Id + Id = 0 \text{ (em } \mathbb{Z}_2).$$

A idéia dessa demonstração é construir j-cadeias $c_j \in S_j(X;\mathbb{Z}_2)$, $0 \leq j \leq n$ que satisfaçam $\partial(c_j) = \theta(c_{j-1})$.

Tais cadeias serão construídas indutivamente.

Primeiramente, escolhemos um ponto de X, e seja c_0 a 0-cadeia correspondente a esse ponto. É claro que $\theta(c_0) = c_0 + T(c_0)$ é um 0-ciclo, pois como estamos no nível zero, todos os pontos são ciclos, já que nesse nível o operador bordo ∂ é nulo.

Como X é conexo por caminhos, existe um caminho entre c_0 e $T(c_0)$, e vamos denotar esse caminho por c_1 a 1-cadeia referente a esse caminho.

Assim

$$\partial(c_1) = c_0 + T(c_0) = \theta(c_0),$$

e também

$$\partial\theta(c_1) = \theta\partial(c_1) = \theta\theta(c_0) = 0.$$

Concluímos então que $\theta(c_1)$ é um 1-ciclo, e como por hipótese $H_1(X; \mathbb{Z}_2) = 0$, $\theta(c_1)$ é também um 1-bordo. Assim, por definição, existe $c_2 \in S_2(X; \mathbb{Z}_2)$ tal que

$$\partial(c_2) = \theta(c_1).$$

Prosseguindo por indução suponha que para algum j, $1 \leq j \leq n$, temos construídas $c_0, ..., c_j$ tais que

$$\partial(c_i) = \theta(c_{i-1}),\ 0 \leq i \leq j.$$

Então teremos que $\partial\theta(c_j) = \theta\partial(c_j) = \theta\theta(c_{j-1}) = 0$.

Assim temos que $\theta(c_j)$ é um j-ciclo e como por hipótese $H_j(X; \mathbb{Z}_2) = 0$ segue que $\theta(c_j)$ é também um j-bordo, e portanto existe $c_{j+1} \in S_{j+1}(X; \mathbb{Z}_2)$ tal que

$$\partial(c_{j+1}) = \theta(c_j).$$

Adicionalmente temos que

$$\partial\theta(c_{j+1}) = \theta\partial(c_{j+1}) = \theta\theta(c_j) = 0$$

Então concluímos que $\theta(c_{j+1})$ é um $(j+1)$-ciclo.

Assim construímos indutivamente as cadeias $c_0, ..., c_{n+1}$.

Observemos que uma j-cadeia $c \in S_j(X; \mathbb{Z}_2)$ é uma (T, j)-cadeia se e somente se $\theta(c) = 0$. Como $\theta\theta = 0$, temos que cada $\theta(c_j)$ é um (T, j)-ciclo, consequentemente faz sentido calcularmos o índice de cada $\theta(c_j)$.

Afirmamos agora que $v(\theta(c_j)) = 1$ para todo $0 \leq j \leq n+1$.

Procederemos novamente por indução. Vemos que como c_0 é um único ponto, podemos calcular o índice pela definição, e $v(\theta(c_0)) = v(c_0 + T(c_0)) = 1$.

Suponhamos agora que $v(\theta(c_j)) = 1$ para $0 \leq j \leq n$. Assim

$$v(\theta(c_{n+1})) = v(c_{n+1} + T(c_{n+1})) = v(\partial(c_{n+1})) = v(\theta(c_n)) = 1.$$

Assim a demonstração está completa, pois $\theta(c_{n+1}) \in C_{n+1}(X;T)$ e como $v(\theta(c_{n+1})) = 1$, a classe ζ que tem $\theta(c_{n+1})$ como ciclo é o elemento não nulo de $H_{n+1}(X;T)$ com o $\mathbb{Z}_2$-indice não nulo. ■

O seguinte teorema generaliza o fato que não existe função equivariante de (S^{n+1}, T) em $(S^n; T)$, lembrando que $H_r(S^{n+1}, \mathbb{Z}_2) = 0$ para $1 \leq r \leq n$ e que $H_{n+1}(S^n/T, \mathbb{Z}_2) = 0$:

Teorema 4.1.2. *Sejam $(X;T)$, $(Y;S)$ espaços com involuções livres tal que X é conexo por caminhos e Y é de Hausdorff e localmente conexo por caminhos. Suponha que para algum número natural $n \geq 1$, $H_r(X;\mathbb{Z}_2) = 0$ para $1 \leq r \leq n$ e $H_{n+1}(Y/S;\mathbb{Z}_2) = 0$. Então não existe função equivariante $f : (X;T) \to (Y;S)$.*

Demonstração: Suponha por contradição que existe $f : (X;T) \to (Y;S)$. Assim temos o homomorfismo induzido

$$f_* : H_{n+1}(X;T) \to H_{n+1}(Y;S)$$

Pelo lema 4.1.1, existe $\zeta \in H_{n+1}(X;T)$ tal que $v(\zeta) = 1$.

Como $v(f_*(\zeta)) = v(\zeta) = 1$, concluímos que $H_{n+1}(Y;S) \neq 0$, pois $f_*(\zeta)$ é um elemento não nulo de $H_{n+1}(Y;S)$.

Mas pelo lema 1.1.5,

$$H_{n+1}(Y;S) \cong H_{n+1}(Y/S;\mathbb{Z}_2) = 0.$$

O que nos dá uma contradição. ■

Observação 4.1.3. *Observe que embora tenhamos colocado como hipótese que*

$$H_r(X;\mathbb{Z}_2) = 0$$

para $1 \leq r \leq n$, utilizamos apenas essa hipótese para enunciar o teorema de modo mais geral, mas pela demonstração observamos que a propriedade fundamental utilizada foi o fato de $H_{n+1}(X;T)$ ter algum elemento com índice não nulo.

Para um espaço dado Y, seja $\Delta = \{(x,y) \in Y \times Y \, : \, x = y\}$ a diagonal e seja $Y^* = Y \times Y - \Delta$, note que Y^* admite uma involução livre $T_Y : Y^* \to Y^*$, dada por

$$T_Y(x,y) = (y,x).$$

Teorema 4.1.4. *Seja $(X;T)$ um conexo por caminhos com uma involução livre, e Y um Hausdorff e localmente conexo por caminhos. Para um número natural $n \geq 1$, suponha que $H_r(X;\mathbb{Z}_2) = 0$ para $1 \leq r \leq n$ e que $H_{n+1}(Y^*/T_Y;\mathbb{Z}_2) = 0$. Então toda função contínua $f : X \to Y$ tem um T-ponto de coincidência, isto é, $\exists x \in X,\ f(x) = f(T(x))$.*

Demonstração: Suponha por absurdo que existe $f : X \to Y$ contínua tal que $f(x) \neq f(T(x))$, $\forall x \in X$.

Então a função:

$$F : X \to Y^*$$
$$F(x) = (f(x), f(T(x)))$$

define uma função equivariante $F : (X;T) \to (Y^*;T_Y)$, pois

$$\begin{aligned} F(T(x)) &= (f(T(x)), fT(T(x))) \\ &= (f(T(x)), f(x)) \\ &= T_Y(f(x), f(T(x))) \\ &= T_Y(F(x)) \end{aligned}$$

Tal função não deveria existir, pois como Y^* é Hasdorff e localmente conexo, isto contradiz o teorema anterior. ■

Do mesmo modo que o teorema anterior, vemos que tal resultado também só utilizou o fato de $H_{n+1}(X,T)$ ter algum elemento com índice não nulo, pois sendo verdadeiro no teorema anterior também será verdadeiro nesse pois só utilizamos a outra hipótese para ficar de acordo o teorema anterior pois precisamos do seu resultado. Assim o seguinte corolário é válido, com demonstração totalmente análoga ao teorema anterior, e o enunciaremos para facilitar futuras referências:

Corolário 4.1.5. *Seja $(X;T)$ um T-espaço de índice n conexo por caminhos com uma involução livre, e Y um Hausdorff e localmente conexo por caminhos com $H_n(Y^*/T_Y;\mathbb{Z}_2) = 0$. Então toda função contínua $f : X \to Y$ tem um T-ponto de coincidência, isto é, $\exists x \in X$, $f(x) = f(T(x))$.*

4.2 Outra Generalização

A próxima generalização não é muito direta, e por isso temos que desenvolver alguns resultados antes. Também utilizaremos a teoria de limites algébricos que vimos no capítulo 2.

O teorema de Borsuk-Ulam nos diz que para qualquer função contínua de S^n em $\mathbb{R}^n$ o conjunto dos pares de involução $\{x \in S^n : f(x) = f(-x)\}$ é não vazio. O objetivo dessa seção é provar um teorema que diz que dada uma função de X em $\mathbb{R}^k$, onde $(X;T)$ é um T-espaço de índice n, então não apenas o conjunto de pontos de involução $\{x \in X : f(x) = f(T(x))\}$ é não vazio mas a homologia, no nível $n-k$ é não nula, de certo modo nos dá uma ideia da dimensão do conjunto. Nosso objetivo é demonstrar o seguinte resultado:

Teorema 4.2.1. *Seja $(X;T)$ um T-espaço de índice n e seja $f : X \to \mathbb{R}^k$, $0 < k \leq n$ uma aplicação contínua. Então $W = \{x \in X,\ f(x) = f(T(x))\}$ é T-invariante e compacto e $H_{n-k}(W;T) \neq 0$.*

Para tanto precisaremos de alguns resultados prévios.

Nessa seção vamos considerar sempre que X é um espaço conexo e funções $f : X \to \mathbb{R}$ contínuas tais que $f(x) = f(T(x))$ para todo $x \in X$. Teremos então que $f(X) = J$ é um intervalo de $\mathbb{R}$.

Para cada $r \in J$, consideremos a curva de nível

$$f^{-1}(r) = \{x \in X : f(x) = r\}$$

Vamos introduzir uma noção de "estimativa homológica" para tais conjuntos.

Supondo inicialmente que $r \in intJ$. Observe que dado $\epsilon > 0$, cada conjunto $f^{-1}(r-\epsilon, r+\epsilon)$ é T-invariante, isto se deve ao fato que $f(x) = f(T(x))$ para todo x. Logo faz sentido considerar a T-homologia $H_n(f^{-1}(r-\epsilon, r+\epsilon); T)$, para qualquer $n \geq 0$. Visto isto, podemos definir:

Definição 4.2.2. *Dizemos que $f^{-1}(r)$ tem* ***estimativa homológica equivariante de grau*** *n, $n \in \mathbb{N}$, abreviadamente "e.h.e.g-n", se dado $\epsilon > 0$, existe $\delta \leq \epsilon$ tal que $H_n(f^{-1}(r-\delta, r+\delta); T) \neq 0$.*

Caso $r \in front(J)$, a definição "e.h.e.g-n" é exatamente igual trocando-se apenas o intervalo $(r-\epsilon, r+\epsilon)$ por $[r, r+\epsilon)$ ou por $(r-\epsilon, r]$, observando-se nesse caso que, por ser $f : X \to J$ contínua e $[r, r+\epsilon)$ (ou $(r-\epsilon, r]$) aberto em J, teremos que $f^{-1}[r, r+\epsilon)$ (ou $f^{-1}(r-\epsilon, r]$) é aberto em X.

Observação 4.2.3. *Fixado $r \in J$ e para cada $n \in \mathbb{N}$, sempre podemos questionar se $f^{-1}(r)$ tem ou não "e.h.e.g-n", ou seja, $f^{-1}(r)$ pode ter ou não "e.h.e.g-n" para cada $n \in \mathbb{N}$ fixado.*

Observação 4.2.4. *$f^{-1}(r)$ sempre tem "e.h.e.g-0".*

Considere agora $d : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ uma métrica qualquer compatível com a topologia usual de $\mathbb{R}^k$, e seja $g : X \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = d(f(x), fT(x))$. Observe que g é contínua e

$$g(T(x)) = d(f(T(x)), fT(T(x))) = d(fT(x), f(x)) = d(f(x), fT(x)) = g(x).$$

Assim o conjunto $W = \{x \in X,\ f(x) = f(T(x))\}$ que estamos interessados em descobrir a homologia é exatamente igual ao conjunto $g^{-1}(0)$.

Como $(X;T)$ tem índice n, sabemos que $H_p(X;T) \neq 0$ para $p \leq n$, e queremos mostrar que $H_{n-k}(g^{-1}(0);T) \neq 0$ para $p \leq n-k$. Inicialmente mostremos que $W = g^{-1}(0)$ tem estimativa homológica de grau $n-k$, conforme o lema a seguir:

Lema 4.2.5. *Na condições descritas acima W tem "e.h.e.g-$(n-k)$".*

Demonstração: Notemos inicialmente que W é não vazio, utilizaremos o corolário 4.1.5, note que (X,T) tem índice n e que $Y = \mathbb{R}^k$, assim $H_n(Y^*, \mathbb{Z}_2) = 0$, pois $n \geq k$.

Escrevemos f em suas funções coordenadas,

$$f(x) = (f_1(x), \ldots, f_k(x)), \quad \text{com } x \in X.$$

Claramente, se $x \in W$, significa que $f_i(x) = f_iT(x)$ para qualquer $i = 1, \ldots, k$. Defina para cada $i = 1, \ldots, k$ o conjunto $W_i = \{x \in X \,:\, f_i(x) = f_iT(x)\}$. Desse modo $W = W_1 \cap \cdots \cap W_k$. Como $W \neq \emptyset$, temos que $W_i \neq \emptyset$ para todo i.

Seja $\epsilon > 0$ dado, seja

$$A_1 = \{x \in X \,:\, f_1(x) - f_1T(x) < \epsilon\} \text{ e}$$
$$B_1 = \{x \in X \,:\, f_1(x) - f_1T(x) > -\epsilon\}.$$

Temos que $W_1 \subset A_1$ e $W_1 \subset B_1$, portanto $A_1 \neq \emptyset$ e $B_1 \neq \emptyset$. Além disso, como $f_1 - f_1T$ é contínua, e

$$A_1 = (f_1 - f_1T)^{-1}(-\infty, \epsilon) \quad \text{ e } \quad B_1 = (f_1 - f_1T)^{-1}(-\epsilon, +\infty)$$

são aberto de X, e $X = A_1 \cup B_1$.

Nosso próximo objetivo é aplicar o corolário 3.1.3 para a decomposição

$$X = A_1 \cup B_1,$$

e para tanto devemos mostrar que $T(A_1) = B_1$.

De fato, se $x \in A_1$, então

$$\begin{aligned} f_1(x) - f_1T(x) < \epsilon &\Rightarrow -f_1(x) + f_1T(x) > -\epsilon \\ &\Rightarrow f_1(T(x)) - f_1(x) > -\epsilon \end{aligned}$$

portanto $T(x) \in B_1$, concluímos que $T(A_1) \subset B_1$.

Se $x \in B_1$, então

$$\begin{aligned} f_1(x) - f_1T(x) > -\epsilon &\Rightarrow -f_1(x) + f_1T(x) < \epsilon \\ &\Rightarrow f_1(T(x)) - f_1T(T(x)) < \epsilon \end{aligned}$$

portanto $T(x) \in A_1 \Rightarrow x \in T(A_1)$, concluímos que $B_1 \subset T(A_1)$.

Vamos agora utilizar o corolário 3.1.3, então chamemos de $X_1 = A_1 \cap B_1$.

Como $(X;T)$ tem índice n, segue que (X_1, T) tem no mínimo índice $n-1$, ou seja $H_{n-1}(X_1;T) \neq 0$.

Note que $X_1 = \{x \in X \,:\, -\epsilon < f_1(x) - f_1T(x) < \epsilon\}$.

Consideramos agora $f_2 : X \to \mathbb{R}$, restrita a X_1, e seja:

$$A_2 = \{x \in X_1 \,:\, f_2(x) - f_2T(x) < \epsilon\} \text{ e}$$
$$B_2 = \{x \in X_1 \,:\, f_2(x) - f_2T(x) > -\epsilon\}.$$

Temos que $A_2 \cup B_2 = X_1$, com A_2 e B_2 abertos em X_1 (portanto em X). Se $x \in W_1 \cap W_2$, então $f_1(x) - f_1T(x) = 0$ e $f_2(x) - f_2T(x) = 0$, portanto $-\epsilon < f_i(x) - f_iT(x) < \epsilon$, para $i = 1, 2$. Então $x \in A_2 \cap B_2$, assim $A_2 \neq \emptyset$ e $B_2 \neq \emptyset$.

Novamente usaremos o corolário 3.1.3, dessa vez para a decomposição

$$X_1 = A_2 \cup B_2.$$

De modo análogo para $i = 1$ podemos mostrar que $T(A_2) = B_2$, e então estamos aptos a usar o corolário. Logo , chamando $X_2 = A_2 \cap B_2$, segue que como $(X_1;T)$ tem índice no mínimo $(n-1)$, o T espaço $(X_2;T)$ tem índice no mínimo $(n-2)$, e portanto $H_{n-2}(X_2;T) \neq 0$. Observe que

$$X_2 = \{x \in X \,:\, -\epsilon < f_i(x) - f_iT(x) < \epsilon,\, i = 1, 2\}.$$

Procedemos indutivamente e, denotando

$$X_j = A_j \cap B_j = \{x \in X; -\epsilon < f_i(x) - f_iT(x) < \epsilon,\, i = 1, \dots, j\},$$

supomos que $(X_j;T)$ tem índice no mínimo $(n-j)$ para $1 < j < k$.

Consideramos então, a função $f_{j+1} : X \to \mathbb{R}$, restrita ao conjunto X_j, e seja

$$A_{j+1} = \{x \in X_j \,:\, f_{j+1}(x) - f_{j+1}T(x) < \epsilon\} \text{ e}$$
$$B_{j+1} = \{x \in X_j \,:\, f_{j+1}(x) - f_{j+1}T(x) > -\epsilon\}.$$

Certamente $A_{j+1} \cup B_{j+1} = X_j$, com A_{j+1} e B_{j+1} abertos em X_j (portanto em X). Se $x \in W_1 \cap ... \cap W_{j+1}$, tem-se $f_i(x) - f_iT(x) = 0$, para $i = 1, \dots, j+1$, portanto $x \in A_{j+1}$ e $x \in B_{j+1}$ o que implica que ambos conjuntos são não vazios.

Com o argumento similar a $i = 1$ sabemos que $T(A_{j+1}) = B_{j+1}$.

Pela hipótese de indução e pelo corolário 3.1.3, concluímos que $(X_{j+1}; T)$ tem índice no mínimo $(n - j - 1)$, e consequentemente $H_{n-j-1}(X_{j+1}; T) \neq 0$.

O argumento indutivo anterior é possível até $j = k - 1$, portanto concluímos que $H_{n-k}(X_k; T) \neq 0$, sendo

$$X_k = \{x \in X \,:\, -\epsilon < f_i(x) - f_iT(x) < \epsilon,\, i = 1, \dots, k\}.$$

Usando em $\mathbb{R}^k$ a métrica do máximo (que gera a topologia usual do $\mathbb{R}^k$),

$$d((x_1, \dots, x_k), (y_1, \dots, y_k)) = max\,\{|x_i - y_i|\,,\, i = 1, \dots, k\},$$

temos que,

$$\begin{aligned}
X_k &= \{x \in X \,:\, -\epsilon < f_i(x) - f_iT(x) < \epsilon,\, i = 1, \dots, k\} \\
&= \{x \in X \,:\, |f_i(x) - f_iT(x)| < \epsilon,\, i = 1, \dots, k\} \\
&= \{x \in X \,:\, max\,\{|f_i(x) - f_iT(x)|\,,\, i = 1, \dots, k\} < \epsilon\} \\
&= \{x \in X \,:\, d(f(x), fT(x)) < \epsilon\} \\
&= \{x \in X \,:\, g(x) < \epsilon\} \\
&= g^{-1}[0, \epsilon).
\end{aligned}$$

Em outras palavras, mostramos que para $\epsilon > 0$, tomando-se $\delta = \epsilon$ teremos que $H_{n-k}(g^{-1}([0, \delta)); T) = H_{n-k}(X_k; T) \neq 0$, o que significa que $g^{-1}(0) = W$ possui "e.h.e.g-$(n - k)$", encerando a demonstração ■

Temos demonstrado até agora que para todo $\epsilon > 0$ temos que:

$$H_{n-k}(g^{-1}[0, +\epsilon); T) \neq 0$$

Como estamos trabalhando com o anel $\mathbb{Z}_2$ todos os grupos de homologias não nulos são $\mathbb{Z}_2$ ou uma soma direta de $\mathbb{Z}_2$, assim sabemos que $H_{n-k}(g^{-1}[0,+\epsilon);T) \neq 0$ é sempre um anel comutativo com unidade.

Para provarmos o teorema 4.2.1, só falta mostrarmos que

$$H_{n-k}(g^{-1}(0);T) \neq 0.$$

Para mostrar tal fato, utilizaremos o lema a seguir, que consiste num processo de limite algébrico, e também utilizaremos para auxiliar na demonstração a cohomologia do espaço ao invés da homologia. Para definir a cohomologia de um T-espaço, para ficar de acordo com o lema 1.1.5, definimos o seguinte:

$$H^n(X;T) = H^n(X/T, \mathbb{Z}_2)$$

.

Usamos também o fato de que quando o anel dos coeficientes é $\mathbb{Z}_2$ a homologia e a cohomologia coincidem e assim a cohomologia ainda será um anel comutativo com unidade.

Outro fato importante de destacar nesta demonstração é que a proposição 2.1.5 continua válida para qualquer anel que tenha os homomorfismos que comutam com o sistema direto, não precisando ser necessariamente o limite direto, com a mesma demonstração.

Lema 4.2.6. *Seja $(X;T)$ um T-espaço e seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua, tal que $f^{-1}(0)$ tem e.h.e.g.-n-k, então $H_{n-k}(f^{-1}(0);T) \neq 0$.*

Demonstração: Como para cada $\epsilon > 0$, temos que $H_n(f^{-1}(-\epsilon,+\epsilon);T) \neq 0$ é uma soma de $\mathbb{Z}_2$ sabemos que $H^n(f^{-1}(-\epsilon,+\epsilon);T)$ também é uma soma direta de $\mathbb{Z}_2$. Queremos deduzir que $H^n(f^{-1}(0);T) \neq 0$ e com isso podemos concluir que $H_n(f^{-1}(0);T) \neq 0$

Inicialmente vamos considerar o conjunto direcionado $I = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ com a ordem $\leq$ usual e considere os conjuntos:

$$A_n = f^{-1}(-1/n, 1/n)$$

Temos que para $i \leq j$ segue que $A_j \subset A_i$, e temos portanto a inclusão natural $i : A_j \to A_i$. Tomando a induzida de cada inclusão teremos:

$$i_* = \phi_{ij} : H^n(A_i;T) \to H^n(A_j;T) \text{ para cada } i \leq j$$

Usando as propriedade de functor, podemos facilmente verificar que $\phi_{ii} = Id$ para todo i, e se $i \leq j \leq k$, temos que $\phi_{jk} \circ \phi_{ij} = \phi_{ik}$.

Assim $\{H^n(A_i;T), \phi\}$ é um sistema direto.

Claramente os conjuntos A_i convergem a $f^{-1}(0)$, quando $i \to \infty$. Queremos mostrar que

$$\varinjlim H^n(A_i;T) = H^n(f^{-1}(0);T).$$

Para isto, basta observarmos que também podemos utilizar a inclusão natural nesse caso, ou seja, existe $i_j : f^{-1}(0) \to A_j$ para cada j, e pegando a induzida em cada caso temos:

$$i_j* : H^n(A_j;T) \to H^n(f^{-1}(0);T) \text{ para todo } j.$$

por todas essas funções serem induzidas da inclusão, vale que, se $j \leq k$

$$i_k * \circ \phi_{jk} = i_j *$$

Portanto, embora não tenhamos provado que $H^n(f^{-1}(0);T)$ é o limite do sistema direto, pois não provamos se satisfaz a propriedade universal de limite, sabemos que tal anel possui uma família de homomorfismos que comuta o diagrama, portanto podemos aplicar a proposição 2.1.5 e verificar que $H^n(f^{-1}(0);T) \neq 0$.

Finalmente, como $H^n(f^{-1}(0);T) = H_n(f^{-1}(0);T)$, concluímos o desejado. ■

Note que no nosso caso como $g(x) = d(f(x), f(T(x)))$, a função g só atinge valores ≥ 0, substituiríamos os conjuntos A_i pelos intervalos $[0, 1/i)$, e a demonstração contínua totalmente análoga.

Assim para finalizar a demonstração do teorema 4.2.1 basta considerarmos o seguinte:

Pelo lema 4.2.5 temos que o conjunto

$$W = \{x \in X \,:\, f(x) = f(T(x))\} = g^{-1}(0)$$

tem "e. h. e. g-$(n-k)$". Ou seja, para todo $\epsilon > 0$,

$$H_{n-k}(g^{-1}[0,\epsilon);T) \neq 0.$$

Pelo lema 4.2.6 vimos que, nas mesmas condições, temos que

$$H_{n-k}(g^{-1}(0);T) \neq 0.$$

No artigo original do Yang a demonstração desse teorema é mais direta pois podemos utilizar o lema 3.1.2 para fechados. Poderíamos utilizar ao invés dos conjuntos abertos

$$A_1 = (f_1 - f_1T)^{-1}(-\infty,\epsilon) \quad \text{e} \quad B_1 = (f_1 - f_1T)^{-1}(-\epsilon,+\infty)$$

os conjuntos fechados

$$A_1' = (f_1 - f_1T)^{-1}(-\infty,0] \quad \text{e} \quad B_1' = (f_1 - f_1T)^{-1}[0,+\infty)$$

assim a interseção X_1' desses conjuntos já seria o conjunto tal que

$$f_1(x) = f_1(T(x)),$$

procederiamos indutivamente de modo análogo, mas sempre pegando conjuntos fechados, e terminaríamos mostrando que $vH_{n-k}(f^{-1}(0);T) \neq 0$, sem precisar do auxílio de limites algébricos, com isso concluíamos que $H_{n-k}(f^{-1}(0);T) \neq 0$.

Corolário 4.2.7. *Seja $(X;T)$ um T-espaço de índice n. Então dada qualquer função contínua $f : X \to \mathbb{R}^n$ leva algum par de involução em um único ponto.*

Demonstração: Temos que provar que $W = \{x \in X \,:\, f(x) = f(T(x))\}$ é não vazio. Utilizando o teorema 4.2.1 sabemos que $H_0(W;T) \neq 0$, consequentemente $W \neq \emptyset$. ■

Observação 4.2.8. *O corolário acima generaliza o Teorema de Borsuk-Ulam, basta substituir $(X;T)$ por $(S^n;T)$.*

O seguinte lema é um resultado análogo as equivalências clássicas do teorema de Borsuk-Ulam utilizando o contexto mais geral de T-espaço:

Lema 4.2.9. *Dado um T-espaço $(X;T)$, são equivalentes:*

(i) *Uma aplicação $f : X \to \mathbb{R}^n$ leva algum par de involução em um único ponto.*

(ii) *Não existe $f : (X;T) \to (S^{n-1};A)$.*

(iii) *Dados $n+1$ conjuntos fechados $F_1, \ldots, F_{n+1}$ tal que nenhum dos $n+1$ contém um par de involução e que*

$$\bigcup_{i=1}^{n+1}(F_i \cup T(F_i)) = X,$$

então $\bigcap F_i \neq \emptyset$.

(iv) *Dado n conjuntos fechados $F_1, \ldots, F_n$, tais que $\bigcup_{i=1}^{n}(F_i \cup T(F_i)) = X$, então pelo menos um dos n conjuntos contém um par de involução.*

(v) *Se $f : X \to S^n$ tal que para todo $x \in X$, $f(x) \neq f(T(x))$, então f é sobrejetora.*

(vi) *Se X for coberto por $n+2$ conjuntos fechados $F_1, \ldots, F_{n+2}$, tais que $\bigcap F_i = \emptyset$ e nenhum desses conjuntos contém par de involução, então para qualquer $i = 1, \ldots, n+2$ temos que $\bigcap_{i \neq j} F_j \neq \emptyset$.*

(vii) *Se X for coberto por $n+1$ conjuntos fechado $F_1, \ldots, F_{n+1}$, então pelo menos um deles contém um par de involução.*

Estamos considerando A a aplicação antipodal da esfera.

Demonstração:

(i)$\Rightarrow$ (ii) Suponha por absurdo que existe $f : (X;T) \to (S^{n-1};A)$, assim

$$Af(x) = fT(X) \Rightarrow -f(x) = f(T(x)).$$

Como $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, considere $g : S^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ a inclusão. Assim a função $gf : X \to \mathbb{R}^n$ é contínua e por (i) temos que existe $x \in X$ tal que

$$gf(x) = gf(T(x)) = g(-f(x)) = -gf(x) \Rightarrow gf(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0$$

Absurdo pois $0 \notin S^{n-1}$.

(ii)$\Rightarrow$ **(iii)** Sejam $F_1, ..., F_{n+1}$, subconjuntos fechados de X, tais que $F_i \cap T(F_i) = \emptyset$, $i = 1, \ldots, n+1$ e $\bigcup_{i=1}^{n+1}(F_i \cup T(F_i)) = X$. Suponha por absurdo que $\bigcap F_i = \emptyset$. Segue pela normalidade de X que existem subconjuntos $U_1, ..., U_{n+1}$ abertos em X tais que

$$F_i \subset U_i \subset \overline{U_i} \subset X - T(F_i), \text{ para todo } i; \text{ e}$$

$$\bigcap \overline{U_i} = \emptyset.$$

Para verificar que esta afirmação é válida note que, como X é normal, e F_i e $T(F_i)$ são conjuntos fechados disjuntos existe aberto A_i tal que $F_i \subset A_i \subset \overline{A_i} \subset X - T(F_i)$, para todo i. Para satisfazer a segunda condição definimos por recorrência os seguintes conjuntos abertos:

Seja B_1 tal que $F_1 \subset B_1 \subset \overline{B_1} \subset X - \bigcap_{i>1} F_i$, assim $\overline{B_1} \cap (\bigcap_{i>1} F_i = \emptyset)$. Seja B_j tal que $F_j \subset B_j \subset \overline{B_j} \subset X - ((\bigcap_{i<j} \overline{B_i}) \cap (\bigcap_{i>j} F_i))$. Desse modo teremos que $\bigcap \overline{B_i} = \emptyset$. Basta considerarmos $U_i = A_i \cap B_i$, tal conjunto satisfaz as duas condições requeridas.

Agora para cada i existe função contínua $f_i : X \to [0, 1]$ tal que $f_i(x) = 1$ se $x \in F_i$ e $f_i(x) = 0$ se $x \in X - U_i$ (a existência de tais funções é garantida pelo Lema de Urysohn). Definimos agora:

$$g_i = \frac{(f_i - f_i T)}{(\sum_{j=1}^{n+1}(f_j - f_j T)^2)^{1/2}};$$

$$g = (g_1, ..., g_{n+1}).$$

Note que cada g_i está bem definida pois o denominador nunca se anula, já que como X é coberto por $F_i, T(F_i)$, então para cada $x \in X$ existe F_i(ou $T(F_i)$) tal que $x \in F_i$(ou $x \in T(F_i)$) assim $f_i(x) = 1$ e $f_i(T(x)) = 0$ (ou $f_i(x) = 0$ e $f_i(T(x)) = 1$).

Assim $g : (X;T) \to (S^n;A)$, é fácil verificar que $-g(x) = g(T(x))$ pelo modo como construímos a função.

Como $\bigcap_{i=1}^{n+1} \bar{U}_i = \emptyset$, então cada $x \in X$ está contido em algum $X - U_i$ e com isso $f_i(x) = 0 \Rightarrow g_i(x) \leq 0$ para algum i. Ou seja para um elemento de S^n estar na imagem da g, precisamos que no mínimo uma de suas coordenadas seja não positiva. Portanto, tomando em particular $a \in S^n$ tal que

$$a = (\alpha, ..., \alpha),\ \alpha = 1/\sqrt{n+1}$$

é um ponto de $S^n - g(X)$. Considere S^{n-1} a intersecção de S^n com o plano $x_{n+1} = 0$. Seja L a reta contendo a e a origem. Note que como $a \notin g(X)$ temos que $-a \notin g(X)$, pois se existisse $y \in X$, $g(y) = -a$ implicaria que $g(T(y)) = -g(y) = -(-a) = a$. Então a projeção central de L é uma função $h : (g(X);A) \to (S^{n-1};A)$. Assim hg é uma função de $(X;T)$ chegando em $(S^{n-1};T)$.

(iii)$\Rightarrow$ (iv) Suponha que X é coberto por n conjuntos fechados $F_1, \ldots, F_n$ junto com suas respectivas T-imagens. Supondo por absurdo que nenhum desses conjuntos possui um par de involução então $F_1, \ldots, F_n, T(F_n)$ satisfazem as hipóteses de (iii), concluímos que $F_1 \cap ... \cap F_n \cap T(F_n) \neq \emptyset$, absurdo pois estamos supondo que $F_n \cap T(F_n) = \emptyset$.

(iv)$\Rightarrow$ (i) Suponha que existe uma função contínua $f : X \to \mathbb{R}^n$ tal que para todo $x \in X$, $f(x) \neq f(T(x))$. Considere $f = (f_1, \ldots, f_n)$, segue da compacidade de X que

$$\alpha = inf_{x \in X} \{max_{1 \leq i \leq n} |f_i(x) - f_i(T(x))|\} > 0$$

Seja

$$F_i = \{x \in X \ : \ f_i(x) - f_i(T(x)) \geq \alpha/2\},\ i = 1, \ldots, n;$$

Assim cada F_i é um subconjunto fechado de X, e nenhum deles contém par de involução e $\bigcup_{i=1}^{n}(F_i \cup T(F_i)) = X$, contrariando (iv).

(i)⇒ (v) Seja $f : X \to S^n$ tal que $f(x) \neq f(T(x))$, suponha por absurdo que f não é sobrejetora, ou seja, existe $y \in S^n - f(X)$. Note que $S^n - \{y\}$ é homeomorfo a $\mathbb{R}^n$, pela projeção estereográfica h. Temos então

$$X \xrightarrow{f} S^n - \{y\} \xrightarrow{h} \mathbb{R}^n$$

e $h \circ f$ é uma função contínua, segue então por (i) que existe $x \in X$ tal que $hf(x) = hf(T(x))$, como h é um isomorfismo, e portanto injetor, segue que $f(x) = f(T(x))$, contrariando a hipótese.

(v)⇒ (ii) Suponha por absurdo que existe $f : (X;T) \to (S^{n-1};A)$, então

$$-f(x) = f(T(x)),\ \forall x \in X.$$

Considere a função contínua

$$i : S^{n-1} \to S^n$$

$$i(x_1, ..., x_n) = i(x_1, ..., x_n, 0)$$

Assim $i \circ f : X \to S^n$ satisfaz $if(x) \neq if(T(x)), \forall x \in X$, pois $f(x) \neq f(T(x))$ para todo $x \in X$ e i é injetora. Então satisfaz as hipóteses de (v) e portanto deveria ser sobrejetora, mas tal função claramente não é, pois para todo $(x_1, ..., x_n, x_{n+1}) \in S^n$ tal que $x_n \neq 0$ não pertence a imagem dessa função.

(iii)⇒ (vi) Suponha que X é coberto pelos conjuntos fechados $F_1, \ldots, F_{n+2}$ tal que $\bigcap F_i = \emptyset$, e nenhum F_i contém um par de involução. Suponha por absurdo que $\exists i$, $\bigcap_{j \neq i} F_j = \emptyset$. Segue pela contrapositiva de (iii) que $\bigcup_{i=1}^{n}(F_i \cup T(F_i)) \neq X$, então existe $x \in X$ tal que $x \notin \bigcup_{i=1}^{n}(F_i \cup T(F_i))$, consequentemente $T(x) \notin \bigcup_{i=1}^{n}(F_i \cup T(F_i))$, mas como os $n+2$ conjuntos cobrem X segue que $x, T(x) \in F_i$, contrariando a hipótese de F_i não ter um par de involução.

(vi)⇒ (vii) Suponha por absurdo que X é coberto por $n+1$ conjuntos fechados $F_1, ..., F_{n+1}$ tais que $F_i \cap T(F_i) = \emptyset$, $i = 1, \ldots, n+1$. Com isso, sabemos que os $n+2$ conjuntos fechados $F_1, \ldots, F_n, T(F_n)$ satisfazem que $F_1 \cap ... \cap F_n \cap T(F_n) = \emptyset$ e nenhum desses contém um par de involução, mas $F_2 \cap ... \cap F_n \cap T(F_n) = \emptyset$ contrariando (vi).

(vii)$\Rightarrow$ (iv) Tome, por contrapositiva de (iv), n fechados $F_1, \ldots, F_n$ tais que $X = \bigcup(F_i \cup T(F_i))$ tais que $F_i \cap T(F_i) = \emptyset$ para todo $i = 1, \ldots, n$.

Pelo fato de T ser involução sem pontos fixos e X ser Hausdorff e normal, existem abertos U_i tais que

$$F_i \subset U_i;$$

$$T(F_i) \subset T(U_i);$$

$$\bar{U_i} \cap T(\bar{U_i}) = \emptyset.$$

Considere os n fechados $\bar{U_1}, \ldots, \bar{U_n}$ e também o fechado

$$G = \bigcap_{1 \leq i \leq n} (X - U_i) = X - \bigcup_{1 \leq i \leq n} U_i.$$

Afirmamos agora que $\bar{U_1}, \ldots, \bar{U_n}, G$ cobrem X,pois se $x \in X$, então se $x \notin G$ significa que $x \in U_i$ para algum i.

Já sabemos que $\bar{U_i}$ não contém nenhum par de involução. Para terminarmos a demonstração, temos que mostrar apenas que G também não contém nenhum par de involução. Daí temos a negação de (vii).

Note que

$$T(\bigcap_{1 \leq i \leq n} (X - U_i)) = \bigcap_{1 \leq i \leq n} T(X - U_i) = \bigcap_{1 \leq i \leq n} (X - T(U_i)) = X - \bigcup_{1 \leq i \leq n} T(U_i)$$

daí

$$(X - \bigcup_{1 \leq i \leq n} U_i) \cap (X - \bigcup_{1 \leq i \leq n} T(U_i)) = X - (\bigcup_{1 \leq i \leq n} (U_i \cup T(U_i))) = X - X = \emptyset$$

■

Teorema 4.2.10. *Para que um T-espaço $(X; T)$ satisfaça as propriedades (i)-(vii), é suficiente que $(X; T)$ tenha índice n.*

Demonstração: É uma consequência imediata do lema 4.2.9 acima com o corolário 4.2.7. ■

A seguir mais uma generalização, a qual é imediata dos resultados vistos acima:

Teorema 4.2.11. *Seja* $(X;T)$ *um* T*-espaço com* X *conexo por caminhos e seja* $f: X \to \mathbb{R}^k$ *uma função contínua. Suponha que* $H_r(X;\mathbb{Z}_2) = 0$ *para* $0 \leq r \leq n-1$. *Então se* $n \geq k$ *existe um ponto* $x \in X$ *tal que* $f(x) = f(T(x))$.

Demonstração: Utilizando o Lema 4.1.1, vemos que o índice de $(X;T)$ é $\geq n$. Seja $i : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ a seguinte função $i(x_1, \ldots, x_k) = (x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)$.

Segue do corolário 4.2.7 que a função $i \circ f$ leva um par de involução em um único ponto, mas se $i \circ f(x) = i \circ f(T(x))$ segue que

$$f(x) = f(T(x)),$$

como desejado. ∎

Capítulo 5

Generalização usando o B-índice

Neste capítulo mostraremos mais uma generalização do Teorema de Borsuk-Ulam, mas desta vez utilizaremos como ferramenta o B-índice, a qual foi definida no artigo [2] de C. T. Yang.

5.1 B-índice

Nesta seção definimos o que é o B-índice, e o comparamos com o $\mathbb{Z}_2$-índice de Yang. O B-índice será útil para demonstrarmos uma outra generalização do Teorema de Borsuk-Ulam:

Definição 5.1.1. *Para um T-espaço $(X;T)$, com $X \neq \emptyset$, existe um único número inteiro não negativo n tal que existe uma função equivariante $f : (X;T) \to (S^q;T)$ para $q = n$ e não existe para $q = n-1$. Tal inteiro n é chamado de* ***B-índice de*** *$(X;T)$ e denotado por $B(X;T)$. Por conveniência denotamos que $B(\emptyset;T) = -1$.*

Observe que tal número n não depende apenas do espaço X, mas também da involução T do espaço.

Exemplo 5.1. *Seja $X = S^1 \cup S^1$, podemos considerar duas involuções distintas neste espaço $T_1(x) = -x$ e T_2 a involução que permuta os dois círculos, temos então que $B(X;T_1) = 1$ e $B(X;T_2) = 0$.*

Observação 5.1.2. *Utilizando o item (ii) do lema 4.2.9 e o teorema 4.2.10, vemos que para todo T-espaço $(X;T)$ com índice n, temos que $B(X;T) \geq n$.*

Observação 5.1.3. *Para qualquer T-espaço $(X;T)$, sempre existe um número natural k tal que existe $f:(X;T)\to(S^k;T)$ equivariante.*

Para a verificação desse fato, utilizamos a negação do item (iii) do lema 4.2.9, como todas as afirmações são equivalentes, suas negações também são equivalentes e se provarmos a negação de (iii) concluímos automaticamente a negação de (ii), que é a existência da função f descrita acima.

Nosso objetivo é construir uma quantidade finita de fechados que não contenham nenhum ponto de involução, tais que juntos com suas T-imagem cobrem o X e de forma que a intersecção destes fechados seja nula.

Como X é compacto e de Hausdorff (e portanto Normal) são válidas:

(1) Fixado $x_0\in X$, para todo $x\in X-\{x_0\}$ existe um aberto V_x tal que $x\in V_x$ e $x_0\notin\overline{V_x}$.

De fato, existem abertos A e B disjuntos contendo x e x_0 respectivamente. Como $\{x\}$ é fechado, segue pela normalidade de X que existe um aberto V_x de modo que $\{x\}\subset V_x\subset\overline{V_x}\subset A$.

(2) Para todo $x\in X$ existe aberto U_x tal que $x\in U_x$ e $\overline{U_x}\cap T(\overline{U_x})=\emptyset$.

De fato, existem aberto A e B disjuntos contendo x e $T(x)$ respectivamente, segue pela normalidade que existem conjuntos aberto C e D de modo que $\{x\}\subset C\subset\overline{C}\subset A$ e $\{T(x)\}\subset D\subset\overline{D}\subset B$. Assim $U_x=C\cap T(D)$ contém x e $\overline{U_x}\subset\overline{C}\subset A$ e $T(\overline{U_x})\subset\overline{T(U_x)}\subset\overline{D}\subset B$, portanto $\overline{U_x}\cap T(\overline{U_x})=\emptyset$.

Assim para cada $x\in X-\{x_0\}$, consideramos baseados em (1) e (2) o conjunto:

$$A_x=U_x\cap V_x$$

A_x é um aberto contendo x que satifaz:

i) $x_0\notin\overline{A_x}$.

ii) $\overline{A_x}\cap T(\overline{A_x})=\emptyset$.

Depois disso consideramos a seguinte cobertura de X:

$$\mathcal{A} = \{A_x\}_{x \neq x_0} \cup \{U_{x_0}\}$$

Como X é compacto existe uma subcobertura finita de $\mathcal{A}$ que ainda cobre o X.

Suponha $A_{x_1}, \ldots, A_{x_m}, U_{x_0}$ os elementos dessa subcobertura.

Tomemos os seguinte conjuntos fechados:

$$F_i = \overline{A_{x_i}},\ 1 \leq i \leq m$$

$$F_{m+1} = \overline{U_{x_0}}$$

$$F_{m+2} = \{x_0\}$$

Note que tais conjuntos fechados satisfazem a negação de (iii) como desejado.

Então concluímos que todo T-espaço $(X;T)$ tem um B-índice que é sempre maior ou igual ao $\mathbb{Z}_2$-índice de Yang. E no artigo [2] Yang mostra um exemplo onde o B-índice é estritamente maior que o $\mathbb{Z}_2$-índice.

Note que já tínhamos visto que sempre existe uma aplicação equivariante de um T-espaço $(X;T)$ em alguma esfera $(S^m;T)$ na demonstração da proposição 3.2.3 de acordo com a observação 3.2.4.

O famoso teorema que nos diz que não existe aplicação de S^n em S^{n-1} que preserva pontos antipodais, pode ser considerado como:

Lema 5.1.4. *$(S^n;T)$ tem B-índice n.*

E se deve ao fato da função identidade ser uma função equivariante de $(S^n;T)$ em si próprio.

5.2 Generalização do Teorema de Borsuk-Ulam

Nessa seção vamos novamente apresentar uma generalização do Teorema de Borsuk-Ulam, mas dessa vez utilizaremos o B-índice.

Para tanto precisamos do lema a seguir:

Lema 5.2.1. *Seja $(X;T)$ um T-espaço tal que $B(X;T) \geq n$ e seja F um subconjunto fechado de X tal que $F \cup T(F) = X$. Então $(F \cap T(F);T)$ é um T-espaço tal que $B(F \cap T(F);T) \geq n-1$.*

Demonstração: Podemos supor que $n \neq -1$ e assim $X \neq \emptyset$. Como F é fechado, segue que $F \cap T(F)$ é um subconjunto fechado dentro do compacto de Hausdorff X, então ele é também compacto e de Hausdorff e então junto com T forma um T-espaço.

Denotemos seu B-índice por $B(F \cap T(F); T) = m$.

Se $m = -1$ então $F \cap T(F) = \emptyset$ e portanto X tem duas componentes e então existe uma função

$$f : (X; T) \to (S^0; T),$$

basta levar

$$f(F) = \{1\} \quad \text{e} \quad f(T(F)) = \{-1\}.$$

Assim

$$B(X; T) = 0 \geq n \Rightarrow m + 1 = 0 \geq n \Rightarrow m \geq n - 1$$

Então no caso $m = -1$ já temos o lema demonstrado.

Se $m > -1$, existe por definição uma função

$$h : (F \cap T(F); T) \to (S^m; T).$$

Vamos enxergar S^m como sendo a intersecção da calota superior

$$E = \{(x_0, \ldots, x_m, x_{m+1} \in S^{m+1} \; : \; x_{m+1} \geq 0\}$$

e da calota inferior $T(E)$ de S^{m+1}.

Assim

$$h : F \cap T(F) \to E \cap T(E),$$

escrevendo em suas funções coordenadas

$$h = (h_0, \ldots, h_m, h_{m+1})$$

onde,

$$h_i : F \cap T(F) \to [-1, 1], \; 0 \leq i \leq m$$

$$h_{m+1} : F \cap T(F) \to \{0\} \text{ é a função nula.}$$

Como F é fechado e X é normal, segue que F também é normal. Pelo fato de $F \cap T(F)$ ser fechado em F, pela teorema de extensão de Tietze, existem funções contínuas:

$$\widetilde{h}_i : F \to [-1,1],\ 0 \leq i \leq m$$
$$\text{tal que } \widetilde{h}_i|_{F\cap T(F)} \equiv h_i$$

Notemos que para cada $x \in F \cap T(F)$, como $h(x) \in S^m$, $\exists i$, $0 \leq i \leq m$ tal que $h_i(x) \neq 0 \Rightarrow \widetilde{h}_i(x) \neq 0$, segue pela continuidade que existe um aberto U_x de F tal que $\widetilde{h}_i(y) \neq 0$ para todo $y \in U_x$.

Seja $A = \bigcup_{x\in F\cap T(F)} U_x$. A é um aberto de F contendo $F \cap T(F)$ tal que para todo $x \in A$ existe I, $0 \leq i \leq m$ tal que $\widetilde{h}_i(x) \neq 0$.

Consideramos agora os fechados (de F) disjuntos $F \cap T(F)$ e $F - A$, e pelo lema de Urysohn existe uma função contínua:

$$\widetilde{h}_{m+1} : F \to [0,1],$$
$$\widetilde{h}_{m+1}(F \cap T(F)) = \{0\} \quad \text{e} \quad \widetilde{h}_{m+1}(F - A) = \{1\}$$

Note que $\widetilde{h}_{m+1}$ é uma extensão de h_{m+1}.

Agora concluímos que existe uma função contínua que estende a função h, a seguinte:

$$g : F \to E$$

$$g(x) = \frac{(\widetilde{h}_0, \ldots, \widetilde{h}_m, \widetilde{h}_{m+1})}{\left|(\widetilde{h}_0, \ldots, \widetilde{h}_m, \widetilde{h}_{m+1})\right|}$$

Então definimos

$$f : (X;T) \to (S^{m+1};T)$$
$$f(x) = g(x),\ \text{se } x \in F$$
$$f(x) = T(g(T(x))),\ \text{se } x \in X - F.$$

tal função é contínua pois se x estiver no bordo de $X - F$, então $x \in F \cap T(F)$, assim

$$g(T(x)) = h(T(x)) = T(h(x)) \Rightarrow T(g(T(x))) = TT(h(x)) = h(x) = g(x).$$

Assim $n \leq B(X;T) \leq m + 1$, concluímos que $m \geq n - 1$. ■

Teorema 5.2.2. *Seja $(X;T)$ um T-espaço, tal que $B(X;T) \geq n$ e seja*

$$f : X \to \mathbb{R}^m.$$

Seja $A = \{x \in X : f(x) = f(T(x))\}$. Então $(A;T)$ é um T-espaço, $B(A;T) \geq n - m$.

Demonstração: Podemos assumir que $n \geq m > 0$. Para $m = 1$, temos que $f : X \to \mathbb{R}$, logo basta considerar o fechado

$$F = \{x \in X \, : \, f(x) \geq f(T(x))\},$$

assim teremos que

$$T(F) = \{x \in X \, : \, f(x) \leq f(T(x))\}$$

e portanto $X = F \cup T(F)$ e $A = F \cap T(F)$, daí o resultado é uma consequência imediata do lema anterior, e temos que $(A;T)$ é um T-espaço, $B(A;T) \geq n - 1$.

Portanto podemos seguir por indução e assumir que o resultado é verdadeiro para $m - 1$, $m > 1$.

Como $f : X \to \mathbb{R}^m$, consideremos suas funções coordenadas

$$f = (f_1, ..., f_{m-1}, f_m),$$

assim $g = (f_1, ..., f_{m-1})$ é uma função de X em $\mathbb{R}^{m-1}$.

Utilizando a hipótese de indução concluímos que

$$X' = \{x \in X, \; g(x) = g(T(x))\}$$

junto com T é um T-espaço tal que $B(X';T) \geq n - m + 1$. Considerando a restrição de f_m em X', temos $f_m : X' \to \mathbb{R}$ está nas hipóteses da nossa hipótese de indução, então A consiste dos pontos de X' tais que $f_m(x) = f_m(T(x))$, assim temos que $B(A;T) \geq n - m$. ■

Observação 5.2.3. *Se* $(X;T) = (S^n;T)$ *e* $m = n$, *então o teorema acima é o teorema de Borsuk-Ulam.*

Referências Bibliográficas

[1] YANG, C. T.; *On the theorems of Borsuk-Ulam, Kakutani-Yamabe-Yuojobô and Dyson I*, Annals of Math. 60, N. 2, 1953.

[2] YANG, C. T.; *On the theorems of Borsuk-Ulam, Kakutani-Yamabe-Yuojobô and Dyson II*, Annals of Math. 60, N. 2, 1954.

[3] PERGHER, P. L. Q.; MATTOS, D.; SANTOS, E. L.; *The Borsuk-Ulam Theorem for General Spaces*, Arch. Math., 2003.

[4] MUNKRES, J. R.; *Elements of Algebraic Topology.* Addison-Wesley Publish Company, Inc., New York, 1984.

[5] MUNKRES, J. R.; *Topology, a first course.* Second Edition, Pretince Hall, Upper Saddle Rives, New Jersey, 2000.

[6] VICK, J.W.; *Homology Theory - An Introduction to Algebraic Topology.* Second Edition. New York: Springer-Verlag, 1994.

[7] BERNARDI, T.; *Estimativas Homológicas para o conjunto de* $\mathbb{Z}_2$*-coincidências.* Dissertação de Mestrado, PPGM, UFSCAR, 2002.

[8] EILENBERG, S., STEENROD, N.; *Foundations of Algebraic Topology.* Princeton, New Jersey, 1952.

[9] LIMA, E. L.; *Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento.* Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1977.

[10] BOURBAKI, N.; *Algebra I.* Elements of Mathematics, Paris, 1973.

[11] GREENBERG, M. J.; HARPER, J. R., *Algebraic Topology - a first course.* Mathematics Lecture Note Series, Cambridge, Massachusetts, 1941.

[12] MATOUSEK, J., *Using the Borsuk-Ulam Theorem.* Lectures on Topological Methods in Combinatorics and Geometry, Springer, Prague, 2002.