

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA**

**Estimativas de magnitudes da dinâmica quântica  
envolvendo dimensões de Hausdorff e de  
empacotamento**

Erick Andrés de la Barra Olivares

São Carlos - SP

2014



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA**

**Estimativas de magnitudes da dinâmica quântica  
envolvendo dimensões de Hausdorff e de  
empacotamento**

Erick Andrés de la Barra Olivares

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFSCar como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. César Rogério de Oliveira

**São Carlos - SP**

**Março de 2014**

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da  
Biblioteca Comunitária da UFSCar**

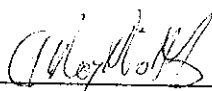
B268em Barra Olivares, Erick Andrés de la.  
Estimativas de magnitudes da dinâmica quântica  
envolvendo dimensões de Hausdorff e de empacotamento /  
Erick Andrés de La Barra Olivares. -- São Carlos : UFSCar,  
2014.  
46 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São  
Carlos, 2014.

1. Física matemática. 2. Espectro fractal. 3. Dimensão de  
empacotamento. 4. Dinâmica quântica. I. Título.

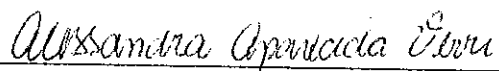
CDD: 530.15 (20ª)

## Banca Examinadora:



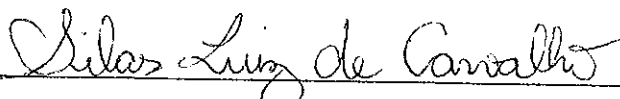
---

**Prof. Dr. César Rogério de Oliveira**  
DM- UFSCar



---

**Profa. Dra. Alessandra A. Verri**  
DM- UFSCar



---

**Prof. Dr. Silas L. Carvalho**  
DM- UFMG

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>7</b>
1.1 Medidas de Hausdorff e de empacotamento . . . . .	7
1.2 Dinâmica quântica unidimensional . . . . .	20
<b>2 Estimativas dos expoentes de crescimento</b>	<b>27</b>
2.1 Expoentes de crescimento . . . . .	27
2.2 Aplicação . . . . .	38
<b>3 Conclusão</b>	<b>43</b>
<b>A Alguns resultados de teoria da medida</b>	<b>45</b>



# Resumo

Na abordagem da mecânica quântica não-relativística e do ponto de vista da física matemática, neste trabalho apresentamos estimativas de quantidades que descrevem o crescimento de magnitudes físicas que caracterizam a evolução temporal de um sistema quântico, tal como o momento associado à probabilidade de retorno. Estas estimativas envolvem as dimensões de Hausdorff e de empacotamento da medida espectral associada ao grupo unitário que descreve a evolução temporal de um sistema.

Em primeiro lugar, introduzimos as medidas de Hausdorff e empacotamento de uma medida. À continuação, definimos as ferramentas que nos permitirão caracterizar matematicamente a dinâmica de uma partícula em uma dimensão. Em seguida apresentamos um resumo que inclui resultados da teoria de operadores auto-adjuntos e grupos unitários de evolução, tais como o teorema espectral e o teorema de Stone, os quais serão relevantes em nosso estudo. Após isso, apresentamos as quantidades que desejamos estimar e suas estimativas. Finalmente, o leitor encontrará uma aplicação destas estimativas, que consiste na estimativa de quantidades definidas a partir de conceitos da mecânica estatística.





# Abstract

In this work we approach the nonrelativistic quantum mechanics from the point of view of mathematical physics; we present estimates of some dynamical quantities that are used to describe the return probability to the initial state. Such estimates are related to Hausdorff and packing dimensions of the relevant spectral measures.

After defining such dimensions we discuss some tools to characterize the quantum dynamics of a particle in one dimension. Then we summarize some standard facts from the literature and the quantities we are interested in. Finally, as an application, estimates of some dynamical quantities based on concepts from statistical mechanics are presented.

# Algumas Notações

$\mathbf{1}$  o operador identidade

$\mathbb{F}$  o corpo dos reais ou dos complexos

$\sum_j A_j$  a união disjunta dos conjuntos  $\{A_j\}$

$\mathcal{A}$  a  $\sigma$ -álgebra de Borel sobre  $\mathbb{R}$

$\lambda(\cdot)$  a medida de Lebesgue sobre  $\mathcal{A}$

$\lambda_n(\cdot)$  a medida de Lebesgue sobre  $\mathbb{R}^n$  ( $n \leq 2$ )

$B(\mathcal{H})$  o espaço dos operadores limitados definidos sobre  $\mathcal{H}$



# Introdução

No fim do século XIX, os problemas do corpo negro, o comportamento ondulatório da matéria e o Efeito Compton não conseguiam ser explicados através das teorias físicas da época. Estes problemas motivaram a busca de respostas por meio de novas teorias. A resposta que tem mais aceitação até hoje foi fornecida pela mecânica quântica.

A mecânica quântica teve seus inícios com Max Planck, cientista que postulou em 1900 que a energia só podia assumir valores permitidos em certos sistemas, os quais estariam determinados por uma constante, a que depois seria chamada de constante de Planck. Logo após esse acontecimento, ocorreram muitas descobertas e em consequência a teoria quântica teve um grande crescimento. Além da quantização da energia proposta por Planck, outro princípio revolucionário da física quântica foi a natureza ondulatória da matéria proposta por de Broglie em 1924. Como consequência deste último princípio, deduz-se que o movimento das partículas não pode ser descrito por meio de uma trajetória. Assim, Erwin Schrödinger em 1925 apresentou uma equação que descreve a evolução temporal de uma partícula não relativista. Esta equação é dada por

$$i\hbar \frac{\partial \eta}{\partial t}(t) = T\eta(t), \quad \eta(0) = \xi,$$

em que  $\hbar$  é a constante de Planck,  $T$  é um operador auto-adjunto, e  $\xi$  um vetor num espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$ , o qual é chamado estado inicial do sistema. A solução desta equação é dada por  $\eta(t) = U(t)\xi$ , sendo  $U(t) = e^{-itH/\hbar}$ . Quando  $H$  é o operador Hamiltoniano, isto é,

$$H = -\frac{\hbar}{2m}\Delta + V(x),$$

em que  $\Delta$  é o Laplaciano em  $\mathbb{R}^n$ ,  $m$  é a massa da partícula e  $V(x)$  é a energia potencial do sistema, a solução da equação de Schrödinger é chamada função de onda, a qual é denotada por  $\psi(t)$ .

Mais tarde, no ano de 1926, Max Born afirma que a probabilidade de encontrar uma partícula em  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$  no tempo  $t$  é

$$Prob_{\psi(t)}(\Lambda) = \int_{\Lambda} |e^{-itH}\psi(x)|^2 dx.$$

Assim,  $|\psi(x)|^2$  é interpretada como sendo a densidade de probabilidade da posição da partícula no tempo  $t = 0$ . A contribuição de Born implica que em mecânica quântica não conseguimos falar da posição exata de uma partícula, senão falamos da probabilidade de encontrar uma partícula numa região.

Portanto a informação do comportamento de um sistema quântico está na função de onda  $\psi(t)$ . Uma magnitude muito útil para descrever o comportamento do sistema é a probabilidade de retorno ao estado inicial  $\xi$  no tempo  $t$ , a qual é dada por

$$p_{\xi}(t) = |\langle \xi, e^{-itH}\xi \rangle|^2.$$

Sabe-se por um resultado apresentado por Wiener em 1925 que se a medida espectral associada ao operador  $H$  for contínua em relação a medida de Lebesgue, então a probabilidade de retorno tende a zero em média quando o tempo tende ao infinito. Então surge a pergunta acerca da natureza dessa convergência. Para estudar esta convergência, introduzem-se os momentos associados à probabilidade de retorno,  $M_q(t)$ . Outra magnitude útil no estudo da probabilidade de retorno é o  $\epsilon$ -suporte minimal,  $n_{\epsilon}(t)$ .

Para o estudo da evolução temporal destas magnitudes, definem-se os expoentes  $\beta^{\pm}(M_q(t))$  e  $\beta^{\pm}(n_{\epsilon}(t))$ , amplamente estudados em [4] e [5]. É interessante notar que os expoentes

inferiores,  $\beta^-(M_q(t))$  e  $\beta_0^-$ , podem ser limitados inferiormente pela dimensão de Hausdorff superior da medida espectral, enquanto que o expoente superior  $\beta^+(M_q(t))$  admite a dimensão superior de empacotamento da medida espectral como cota inferior. Por outra parte o expoente  $\beta^-(n_\epsilon(t))$  é limitado inferiormente pela dimensão de Hausdorff inferior da medida espectral. Isto sugere que os expoentes  $\beta_0^+$  e  $\beta^+(n_\epsilon(t))$  são limitados inferiormente pela dimensão de empacotamento superior e inferior da medida respectivamente, o que se consegue demonstrar sob algumas hipóteses especiais.

Os primeiros expoentes estudados foram os superiores, talvez por estarem associados à dimensão de Hausdorff, introduzida aproximadamente em 1918. Por outro lado, os expoentes superiores estão relacionados com a dimensão de empacotamento, definida recentemente por Tricot em 1982 [7], o que talvez justifique que estes expoentes tenham sido menos explorados do que os inferiores.

No final desta dissertação, inclui-se uma aplicação dos resultados teóricos apresentados. Esta aplicação consiste na estimativa das dimensões dinâmicas, conceito introduzido em [2] e formalizado por Guarneri em [4], o qual tem sua origem na mecânica estatística. Em [4], são estimadas as dimensões dinâmicas inferiores enquanto este trabalho apresenta estimativas das dimensões dinâmicas superiores.

O trabalho estrutura-se da seguinte forma: o capítulo dos preliminares se subdivide em duas seções, a primeira introduz ao leitor nas dimensões de Hausdorff e empacotamento enquanto a segunda é um resumo de resultados da teoria de operadores auto-adjuntos. O segundo capítulo se subdivide em duas seções, na primeira delas, definem-se os expoentes de crescimento e são apresentadas estimativas destes e na segunda seção é apresentada uma aplicação das estimativas estudadas.

Em resumo, o objetivo deste trabalho é apresentar as estimativas de  $\beta^\pm(M_q(t))$ ,  $\beta^-(n_\epsilon(t))$ ,  $\beta_0^-$  e das dimensões dinâmicas inferiores, além de dizer alguma coisa acerca dos expoentes  $\beta_0^+$  e  $\beta^+(n_\epsilon(t))$  e das dimensões dinâmicas superiores.





# Capítulo 1

## Preliminares

### 1.1 Medidas de Hausdorff e de empacotamento

À continuação o leitor será introduzido no estudo das propriedades das medidas e das dimensões de Hausdorff e de empacotamento. Em [6], o leitor poderá encontrar mais resultados referentes às dimensões fractais dos que serão apresentados aqui.

Nesta seção consideraremos um espaço métrico  $(\Omega, \rho)$ . Tanto a medida de Hausdorff como a medida de empacotamento serão definidas como sendo medidas exteriores associadas à certas pré-medidas, razão pela qual descreveremos à continuação dois métodos de construção de uma medida dada uma pré-medida.

**Definição 1.1.** *Uma função  $\tau$  definida numa classe  $\mathcal{C}$  de subconjuntos de  $\Omega$  é uma pré-medida se:*

a)  $\emptyset \in \mathcal{C}$ ,

b)  $0 \leq \tau(C) \leq \infty \quad \forall C \in \mathcal{C}$ ,

c)  $\tau(\emptyset) = 0$ .

**Definição 1.2.** Uma função  $\mu$  definida sobre o conjunto potência de  $\Omega$ ,  $\mathcal{P}(\Omega)$ , a valores em  $\overline{\mathbb{R}}$ , é uma medida exterior se:

- a)  $\mu(E) \geq 0 \quad \forall E \in \mathcal{P}(\Omega)$ ,
- b)  $E_1 \subset E_2 \Rightarrow \mu(E_1) \leq \mu(E_2) \quad \forall E_1, E_2 \in \mathcal{P}(\Omega)$ ,
- c)  $\mu(\cup_{j=1}^{\infty} E_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu E_j \quad \forall \{E_j\}$  família em  $\mathcal{P}(\Omega)$ ,
- d)  $\mu(\emptyset) = 0$ .

Se existe uma família contável de subconjuntos de  $\Omega$ ,  $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ , tal que  $\Omega = \cup_{j=1}^{\infty} E_j$  e  $\mu(E_j) < \infty \quad \forall j$ , dizemos que  $\mu$  é  $\sigma$ -finita.

O seguinte teorema é um dos métodos que usaremos para construir medidas exteriores em  $\Omega$ .

**Teorema 1.3.** Se  $\tau : \mathcal{C} \rightarrow [0, \infty]$  é uma pré-medida em  $\Omega$ , então a função

$$\mu(E) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \tau(C_i) : C_i \in \mathcal{C} \quad \forall i \quad e \quad E \subset \cup_{i=1}^{\infty} C_i \right\}$$

é uma medida exterior em  $\Omega$ . Assume-se que  $\inf \emptyset = \infty$ .

O teorema anterior tem uma recíproca, isto é, dada uma medida exterior podemos encontrar uma pré-medida de modo que a medida obtida através do teorema anterior coincide com a medida considerada inicialmente.

**Teorema 1.4.** Seja  $\mu$  uma medida exterior em  $\Omega$ . Então existe uma pré-medida  $\tau : \mathcal{C} \rightarrow [0, \infty]$  em  $\Omega$  de forma que  $\mu$  pode ser construída a partir de  $\tau$  pelo Teorema 1.3.

*Demonstração.* Tome  $\tau = \mu$  e seja  $\lambda$  a medida exterior dada pelo Teorema 1.3. Vamos verificar que  $\mu = \lambda$ . Seja  $E \subset \Omega$ . Assim,

$$\lambda(E) = \inf \left\{ \sum_i \tau(C_i) : C_i \in \mathcal{C}, \forall i \quad e \quad E \subset \cup_i C_i \right\} \leq \tau(E) = \mu(E).$$

Por outro lado, se  $E \subset \cup_i C_i$ , então

$$\begin{aligned} \sum_i \tau(C_i) &= \sum_i \mu(C_i) \geq \mu(\cup_i C_i) \geq \mu(E) \\ \Rightarrow \lambda &\geq \mu. \end{aligned}$$

$\therefore \lambda = \mu.$  □

Uma outra forma de construir uma medida exterior a partir de uma pré-medida é fornecida pelo seguinte teorema.

**Teorema 1.5.** *Sejam  $\Omega$  um espaço métrico e  $\tau$  uma pré-medida definida numa classe de conjuntos  $\mathcal{C}$  de subconjuntos de  $\Omega$ . Dado  $\delta > 0$  para cada  $E \subset \Omega$ , considere*

$$\mu_\delta(E) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \tau(C_i) : E \subset \cup_i C_i, \quad C_i \in \mathcal{C}, \quad \text{diam } C_i \leq \delta \right\}.$$

Então a função  $\Omega \supset E \mapsto \mu(E) = \lim_{\delta \downarrow 0} \mu_\delta(E)$  é uma medida exterior em  $\Omega$ .

Consideremos uma função  $h : [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$ , crescente e contínua à direita tal que  $h(0) = 0$  e definamos  $h(\emptyset) = 0$  e  $h(G) := h(\text{diam } G)$  para todo aberto  $G \subset \Omega$ . Então,  $h$  é uma pré-medida na classe dos conjuntos abertos de  $\Omega$ .

**Definição 1.6.** *A medida exterior  $\mu^h$  definida a partir de  $h$  pelo Teorema 1.5, é chamada de medida de Hausdorff correspondente a  $h$ .*

Daqui em diante, consideraremos o caso particular no qual  $\Omega = \mathbb{R}^n$  e  $h(t) = t^s$ . Neste caso a medida exterior  $\mu^h$  será chamada medida de Hausdorff  $s$ -dimensional e denotaremos  $\mu_\delta^h \equiv h_\delta^s$  e  $\mu^h \equiv h^s$ .

Exploremos algumas propriedades da medida  $h^s$ . Sejam  $E \subset \mathbb{R}^n$ ,  $t > s$  e  $\{U_i\}$  uma  $\delta$ -cobertura de  $E$ ,  $\delta > 0$ . Então,

$$\begin{aligned} \sum_i |U_i|^t &= \sum_i |U_i|^{t-s} |U_i|^s \leq \delta^{t-s} \sum_i |U_i|^s \\ \Rightarrow h_\delta^t(E) &\leq \delta^{t-s} h_\delta^s(E). \end{aligned}$$

Logo, se  $h^s(E) < \infty$  então  $h^t(E) = 0$ . Este fato motiva a seguinte definição.

**Definição 1.7.** *Se  $E \subset \mathbb{R}^n$  define-se a dimensão de Hausdorff do conjunto  $E$ ,  $\dim_H E$ , como sendo  $\dim_H E = \inf\{s : h^s(E) = 0\}$ .*

Agora definiremos a medida de empacotamento. Sejam  $E \subset \mathbb{R}^n$  e  $\mathcal{E}_\delta$  um  $\delta$ -empacotamento, isto é, uma coleção disjunta e contável de bolas fechadas centradas em pontos de  $E$  e de raio menor ou igual a  $\delta$ . Para  $s \geq 0$  definem-se

$$P_\delta^s(E) := \sup\left\{\sum_i |B_i|^s : B_i \in \mathcal{E}_\delta\right\} \quad \text{e} \quad P_0^s(E) := \lim_{\delta \downarrow 0} P_\delta^s(E).$$

Como  $P_0^s(\cdot)$  é uma pré-medida em  $\mathbb{R}^n$  podemos usar o Teorema 1.3 para definir uma medida exterior a qual será chamada de medida de empacotamento  $s$ -dimensional.

**Definição 1.8.** *Seja  $E \subset \mathbb{R}^n$ . A medida de empacotamento  $s$ -dimensional do conjunto  $E$ ,  $P^s(E)$ , é definida por*

$$P^s(E) = \inf\left\{\sum_i P_0^s(E_i) : E \subset \cup_i E_i\right\}.$$

**Observação 1.9.** *a) Note que  $P^s(E) \leq P_0^s(E)$ . Como no caso Hausdorff, verifica-se que se  $t > s$  e  $P_0^s(E) < \infty$ , então  $P^t(E) = 0$ .*

*b) Analogamente a Hausdorff, define-se a dimensão de empacotamento do conjunto  $E$ :*

$$\dim_P E := \inf\{s : P^s(E) = 0\}.$$

No que segue, serão definidas as dimensões de Hausdorff e de empacotamento de uma medida. Em particular, nosso interesse estará focado nas medidas de Radon.

**Definição 1.10.** *Seja  $\mu$  uma medida exterior em  $\Omega$ . Então  $\mu$  é de Radon se as seguintes condições são satisfeitas:*

- a)  $\mu(K) < \infty$  para todo compacto  $K \subset \Omega$ .
- b) Se  $U \subset \Omega$  for aberto, então  $\mu(U) = \sup\{\mu(K) : K \subset U \text{ compacto}\}$ .
- c) Se  $A \subset \Omega$ , então  $\mu(A) = \inf\{\mu(U) : A \subset U \text{ aberto}\}$ .

À continuação enunciamos dois lemas que serão utilizados nas demonstrações de alguns teoremas desta seção. As demonstrações destes resultados podem ser encontradas, por exemplo, em [3, 6].

**Lema 1.11** (Cobertura de Vitali). *Sejam  $E \subset \mathbb{R}^n$  e  $\beta$  uma família de bolas fechadas de modo que cada ponto de  $E$  pertença a um elemento de  $\beta$  com diâmetro arbitrariamente pequeno. Então existem bolas disjuntas  $B_1, B_2, \dots$  em  $\beta$  tais que*

$$\lambda_n(E - (\cup_i B_i)) = 0.$$

*Além disso, se  $\lambda_n(E) < \infty$ , dado  $\epsilon > 0$ , tais bolas podem ser escolhidas de modo que satisfaçam*

$$\sum_i \lambda_n(B_i) \leq \lambda_n(E) + \epsilon.$$

**Lema 1.12** (Vitali). *Se  $\mu$  for medida de Radon em  $\mathbb{R}^n$ ,  $E \subset \mathbb{R}^n$  e  $\beta$  uma família de bolas fechadas de forma que cada  $x \in E$  é centro de bolas em  $\beta$  de raios arbitrariamente pequenos, então existe uma subfamília contável  $B_i \in \beta$  com*

$$\mu(E - \cup_i B_i) = 0.$$

**Definição 1.13.** *Sejam  $0 \leq s < \infty$  e  $\mu$  uma medida exterior em  $\mathbb{R}^n$ . As densidades (ou  $s$ -derivadas) superior e inferior de  $\mu$  estão definidas respectivamente por*

$$(\overline{D}^s \mu)(x) = \limsup_{r \downarrow 0} \frac{\mu(\overline{B}(x, r))}{(2r)^s} \quad e \quad (\underline{D}^s \mu)(x) = \liminf_{r \downarrow 0} \frac{\mu(\overline{B}(x, r))}{(2r)^s}.$$

*Se os limites existirem, denota-se simplesmente  $(D^s \mu)(x)$ .*

**Observação 1.14.** *Demonstra-se que  $(\overline{D}^s \mu)$  e  $(\underline{D}^s \mu)$  são mensuráveis se  $\mu$  for de Radon.*

O seguinte teorema relaciona a derivada superior de uma medida com a medida de Hausdorff.

**Teorema 1.15.** *Sejam  $\mu$  de Radon em  $\mathbb{R}^n$  e  $E \subset \mathbb{R}^n$ . Então:*

a) *Se  $(\overline{D}^s \mu)(x) \leq t \quad \forall x \in E$ , então  $\mu(E) \leq t 2^s h^s(E)$ .*

b) *Se  $(\overline{D}^s \mu)(x) \geq t \quad \forall x \in E$ , então  $\mu(E) \geq t h^s(E)$ .*

*Demonstração.* a) Se  $x \in E$ ,  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta(x) > 0$  tal que  $\mu(\overline{B}(x, r)) \leq (t + \epsilon)(2r)^s$  se  $0 \leq r \leq \delta(x)$ .

Seja  $E_k = \{x \in E : \mu(\overline{B}(x, r)) \leq (t + \epsilon)(2r)^s \text{ se } 0 < r \leq 1/k\}$ . Então  $E = \cup_k E_k \Rightarrow \mu(E) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(E_k)$ .

Fixe  $k$ . Tome uma  $1/k$ -cobertura  $\{E_k^j\}$  de  $E_k$  de modo que  $E_k^j \cap E_k \neq \emptyset$  para todo  $j$  e escolha  $x_j \in E_k^j \cap E_k$ . Note que  $\overline{B}(x_j, |E_k^j|) \supset E_k^j \cap E_k$  e vale

$$\sum_j |E_k^j|^s \leq h^s(E_k) + \epsilon,$$

sendo  $k$  suficientemente grande.

Agora,  $\mu(E_k) = \sum_j \mu(E_k^j \cap E_k) \leq \sum_j \mu(\overline{B}(x_j, |E_k^j|)) \leq \sum_j (t + \epsilon)(2|E_k^j|)^s = 2^s(t + \epsilon) \sum_j |E_k^j|^s \Rightarrow \mu(E_k) \leq 2^s(t + \epsilon)(h^s(E_k) + \epsilon) \Rightarrow \mu(E_k) \leq t 2^s h^s(E)$ .

b) Sejam  $\epsilon > 0$ ,  $\delta > 0$  e  $U \supset E$  aberto. Se  $x \in E$ , existe uma sequência  $r_k \downarrow 0$  de modo que  $\mu(\overline{B}(x, r_k)) \geq (t - \epsilon)(2r_k)^s$ . Suponha que todo  $r_k \leq \delta$ , com  $\overline{B}(x, r_k) \subset U$ . Pelo

lema de Vitali, dessas bolas podemos extrair uma coleção disjunta  $B_j = \overline{B}(x_j, r_j)$  de modo que

$$\cup_j B_j \subset U \quad \text{e} \quad h^s(E - \cup_j B_j) = 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \mu(\cup_j B_j) &= \sum_j \mu(B_j) = \sum_j \mu(\overline{B}(x_j, r_j)) \\ &\geq \sum_j (t - \epsilon)(2r_j)^s = (t - \epsilon) \sum_j h_\delta^s(E \cap (\cup_j B_j)) \\ &= (t - \epsilon)h_\delta^s(E). \end{aligned}$$

Fazendo  $\delta \downarrow 0$  obtém-se  $\mu(\cup_j B_j) \geq (t - \epsilon)h^s(E)$ . Como  $h^s(E - \cup_j B_j) = 0$  e  $\epsilon > 0$  é arbitrário, o resultado se segue.  $\square$

O seguinte resultado relaciona a derivada superior de uma medida com a medida de empacotamento.

**Teorema 1.16.** *Sejam  $\mu$  de Radon em  $\mathbb{R}^n$  e  $E \subset \mathbb{R}^n$ . Então:*

a) *Se  $(\underline{D}^s \mu)(x) \leq t \quad \forall x \in E$ , então  $\mu(E) \leq tP^s(E)$ .*

b) *Se  $(\underline{D}^s \mu)(x) \geq t \quad \forall x \in E$ , então  $\mu(E) \geq tP^s(E)$ .*

*Demonstração.* a) Sejam  $\epsilon > 0$  e  $x \in E$ , então dado  $\delta > 0$  existe  $\{r_k\}$  com  $r_k \rightarrow 0$  e  $0 < r_k < \delta$  tal que

$$\mu(\overline{B}(x, r_k)) \leq (t + \epsilon)(2r_k)^s.$$

Consideremos  $E' \subset E$ . Note que a família das bolas acima forma uma "cobertura de Vitali" de  $E'$ . Podemos então selecionar uma subfamília disjunta contável  $\{B_i = \overline{B}(x_i, r_i)\}$  de modo que  $\mu(E' - \cup B_i) = 0$  e  $\{B_i\}$  é um  $\delta$ -empacotamento em  $E'$ .

Assim,

$$\begin{aligned} \sum_i |B_i|^s &= \sum_i (2r_i)^s \geq \sum_i \frac{\mu(B_i)}{t + \epsilon} = \frac{1}{t + \epsilon} \mu(E') \\ \Rightarrow \sum |B_i|^s &\geq \frac{1}{t + \epsilon} \mu(E') \\ \Rightarrow P_0^s(E') &\geq \frac{1}{t + \epsilon} \mu(E') \end{aligned}$$

Sejam  $\{E_j\}$  subconjuntos de  $E$  tais que  $E = \sum_j E_j$ . Aplicando a desigualdade acima para cada  $E_j$  obtemos

$$\frac{1}{t + \epsilon} \mu(E) = \sum_j \frac{1}{t + \epsilon} \mu(E_j) \leq \sum_j P_0^s(E_j)$$

e tomando o ínfimo sobre as coberturas de  $E$  conclui-se que

$$\frac{1}{t + \epsilon} \mu(E) \leq P^s(E).$$

Como  $\epsilon > 0$  é arbitrário, segue-se que  $\mu(E) \leq tP^s(E)$ .

b) A demonstração de b) é análoga à demonstração de a). □

Daqui em diante denotaremos  $(D^{H,\alpha}\mu)(x) = (\underline{D}^\alpha)(x)$  e  $(D^{P,\alpha}\mu)(x) = (\overline{D}^\alpha)(x)$ .

**Definição 1.17.** *Seja  $\mu$  medida de Radon em  $\mathbb{R}^n$ . Para  $0 \leq s \leq n$ , definem-se os seguintes conjuntos,*

$$\begin{aligned} T_0^s(\mu) &:= \{x : (D^{H,s}\mu)(x) = 0\}, \\ T_+^s(\mu) &:= \{x : 0 < (D^{H,s}\mu)(x) < \infty\}, \\ T_\infty^s(\mu) &:= \{x : (D^{H,s}\mu)(x) = \infty\}, \\ U_0^s(\mu) &:= \{x : (D^{P,s}\mu)(x) = 0\}, \\ U_+^s(\mu) &:= \{x : 0 < (D^{P,s}\mu)(x) < \infty\}, \\ U_\infty^s(\mu) &:= \{x : (D^{P,s}\mu)(x) = \infty\}. \end{aligned}$$



Seja  $K_*^s(\mu)$  uma notação para  $T_*^s(\mu)$  ou  $U_*^s(\mu)$  se  $K = H$  ou  $K = P$  respectivamente, sendo  $*$   $\in \{0, +, \infty\}$ .

**Teorema 1.18.** *Sejam  $\mu$  de Radon em  $\mathbb{R}^n$ ,  $0 \leq s \leq n$ ,  $K \in \{h, P\}$ . Então  $K_0^s(\mu)$ ,  $K_+^s(\mu)$  e  $K_\infty^s(\mu)$  são borelianos e valem:*

a)  $K^s(K_\infty^s(\mu)) = 0$ .

b)  $K_+^s(\mu)$  possui medida  $K^s$   $\sigma$ -finita.

c)  $\mu_{;K_+^s(\mu)}(E) := \mu(E \cap K_+^s(\mu)) = 0$  se  $K^s(E) = 0$ .

d)  $\mu_{;K_+^0(\mu)}(E) := \mu(E \cap K_+^0(\mu)) = 0$  se  $E$  possui medida  $K^s$   $\sigma$ -finita.

*Demonstração.* Faremos a demonstração do teorema no caso  $K = H$ . A demonstração do caso  $K = P$  é análoga.

Note que  $U^t := \{x : (\overline{D}^s \mu)(x) \geq t\}$  e  $l_t := \{x : (\overline{D}^s \mu)(x) \leq t\}$  são borelianos. Observemos que  $T_0^s(\mu) = \bigcap_{k=1}^{\infty} l_{1/k}$ ,  $T_\infty^s(\mu) = \bigcap_{k=1}^{\infty} U_k$  e  $T_+^s(\mu) = (\bigcup_{k=1}^{\infty} U_{1/k}) \cap (\bigcup_{k=1}^{\infty} l_k)$  são conjuntos borelianos.

a) Pelo Item b) do Teorema 1.15 temos  $h^s(T_\infty^s(\mu)) = h^s(\bigcap_k U_k) \leq h^s(U_j) \leq \mu(U_j)/j \forall j$ . Escrevamos  $\mathbb{R}^n = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$  com  $\mu(E_i) < \infty$ . Assim,

$$\begin{aligned} h^s(T_\infty^s(\mu) \cap E_i) &= h^s(\bigcap_k U_k \cap E_i) \leq h^s(U_j \cap E_i) \\ &\leq \frac{\mu(U_j \cap E_i)}{j} \\ &\leq \frac{\mu(E_i)}{j}, \end{aligned}$$

sendo  $j$  arbitrário, concluímos que  $h^s(T_\infty^s \cap E_i) = 0$ . Agora,

$$h^s(T_\infty^s) = h^s(T_\infty^s \cap \bigcup_i E_i) \leq \sum_i h^s(T_\infty^s \cap E_i) = 0.$$

b) Sejam  $E_i$  como na demonstração de a). Escreva  $T_+^s(\mu) = (\cup_{k=1}^{\infty} U_{1/k}) \cap (\cup_{k=1}^{\infty} l_k)$ . Então  $T_+^s(\mu) \subset \cup_i \cup_{k=1}^{\infty} (U_{1/k} \cap E_i)$ .

Agora, pelo Item b) do Teorema 1.15 temos  $h^s(U_{1/k} \cap E_i) \leq k\mu(E_i)$ . Portanto,  $T_+^s(\mu)$  possui medida  $h^s$   $\sigma$ -finita.

c) Seja  $E \subset \mathbb{R}^n$  com  $h^s(E) = 0$ . Do Item a) do Teorema 1.15 segue que  $0 = h^s(l_j \cap E) \geq \mu(l_j \cap E)/(2^s j) = 0$ . Assim,

$$\mu(E \cap T_+^s(\mu)) \leq \mu(E \cap \cup_k l_k) \leq \sum_k \mu(E \cap l_k) = 0.$$

d) Suponha inicialmente que  $h^s(E) < \infty$ . Assim,

$$\begin{aligned} \mu(T_0^s \cap E) &= \mu(\cap_{k=1}^{\infty} l_{1/k} \cap E) \leq \mu(l_{1/j} \cap E) \\ &\leq \frac{1}{j} 2^s h^s(l_{1/j} \cap E) \leq \frac{1}{j} 2^s h^s(E) \quad \forall j. \end{aligned}$$

Logo,  $\mu(T_0^s \cap E) = 0$ . Agora, se  $E = \cup_j E_j$  com  $h^s(E_j) < \infty \quad \forall j$ , tem-se que

$$\mu(T_0^s \cap E) = \mu(\cup_{j=1}^{\infty} (E_j \cap T_0^s(\mu))) \leq \sum_j \mu(E_j \cap T_0^s) = 0.$$

Isto completa a demonstração. □

**Definição 1.19.** *Seja  $\mu$  medida de Radon em  $\mathbb{R}^n$ . Os expoentes de escala pontual superior e inferior em  $x \in \mathbb{R}^n$  são definidos respectivamente por*

$$d_{\mu}^{+}(x) = \limsup_{\epsilon \downarrow 0} \frac{\ln \mu(\overline{B}(x, \epsilon))}{\ln(2\epsilon)} \quad e \quad d_{\mu}^{-}(x) = \liminf_{\epsilon \downarrow 0} \frac{\ln \mu(\overline{B}(x, \epsilon))}{\ln(2\epsilon)},$$

se  $\mu(\overline{B}(x, \epsilon)) > 0 \quad \forall \epsilon > 0$ , senão,  $d_{\mu}^{\pm}(x) := n$ .

No capítulo seguinte, usaremos a partição do eixo real em intervalos da forma  $I_j^N = (\frac{j-1}{2^N}, \frac{j}{2^N}]$ . Dado  $x \in \mathbb{R}$  denotamos por  $I_{j(x)}^N$  o intervalo do tipo  $I_j^N$  ( $j \in \mathbb{N}$ ) que contém  $x$ . Logo para  $x \in \mathbb{R}$  podemos rescrever os expoentes escalas na forma

$$d_{\mu}^{\pm}(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sup \frac{-\log_2(\mu(I_{j(x)}^N))}{N}.$$

**Lema 1.20.** *Seja  $\mu$  de Radon em  $\mathbb{R}^n$ . Então:*

$$a) d_{\mu}^{-}(x) < \alpha \Rightarrow (\overline{D}^{\alpha} \mu)(x) = \infty \Rightarrow d_{\mu}^{-}(x) \leq \alpha.$$

$$b) d_{\mu}^{-}(x) > \alpha \Rightarrow (\overline{D}^{\alpha} \mu)(x) = 0 \Rightarrow d_{\mu}^{-}(x) \geq \alpha.$$

$$c) d_{\mu}^{+}(x) < \alpha \Rightarrow (\underline{D}^{\alpha} \mu)(x) = \infty \Rightarrow d_{\mu}^{+}(x) \leq \alpha.$$

$$d) d_{\mu}^{+}(x) > \alpha \Rightarrow (\underline{D}^{\alpha} \mu)(x) = 0 \Rightarrow d_{\mu}^{+}(x) \geq \alpha.$$

$$e) d_{\mu}^{-}(x) = \inf\{\alpha : (\overline{D}^{\alpha} \mu)(x) = \infty\} = \sup\{\alpha : \overline{D}^{\alpha}(\mu)(x) = 0\}.$$

$$f) d_{\mu}^{+}(x) = \sup\{\alpha : (\underline{D}^{\alpha} \mu)(x) = \infty\} = \inf\{\alpha : \underline{D}^{\alpha}(\mu)(x) = 0\}.$$

*Demonstração.* a) Suponha que  $d_{\mu}^{-}(x) < \alpha$ . Então existe  $\epsilon_m \downarrow 0$  de modo que

$$\frac{\ln \mu(\overline{B}(x, \epsilon_m))}{\ln(2\epsilon_m)} < \alpha - \delta,$$

para algum  $\delta > 0$ . Assim,

$$\begin{aligned} \ln \mu(\overline{B}(x, \epsilon_m)) > \ln(2\epsilon_m)^{\alpha - \delta} &\Rightarrow \mu(\overline{B}(x, \epsilon_m)) > (2\epsilon_m)^{\alpha} (2\epsilon_m)^{-\delta} \\ &\Rightarrow \frac{\mu(\overline{B}(x, \epsilon_m))}{(2\epsilon_m)^{\alpha}} > \frac{1}{(2\epsilon_m)^{\delta}} \\ &\Rightarrow (\overline{D}^{\alpha} \mu)(x) = \infty. \end{aligned}$$

Agora, se  $(\overline{D}^{\alpha} \mu)(x) = \infty$ , dado  $M > 0$  existe uma sequência  $\epsilon_m \downarrow 0$  satisfazendo

$$\frac{\mu(\overline{B}(x, \epsilon_m))}{(2\epsilon_m)^{\alpha}} > M,$$

para  $m$  suficientemente grande.

Assim, se  $m$  é suficientemente grande temos

$$\begin{aligned} \mu(\overline{B}(x, \epsilon_m)) > M(2\epsilon_m)^{\alpha} &\Rightarrow \ln \mu(\overline{B}(x, \epsilon_m)) > \ln M + \alpha \ln(2\epsilon) \\ &\Rightarrow \frac{\ln \mu(\overline{B}(x, \epsilon_m))}{\ln(2\epsilon_m)} < \frac{\ln M}{\ln(2\epsilon_m)} + \alpha \\ &\Rightarrow d_{\mu}^{-}(x) \leq \alpha. \end{aligned}$$

As demonstrações de b), c) e d) são análogas à demonstração de a). A demonstração de e) segue dos Itens a) e b) enquanto a demonstração de f) segue dos Itens c) e d).  $\square$

**Observação 1.21.** Denotaremos  $d_\mu^-(x) = d_\mu^H(x)$  e  $d_\mu^+(x) = d_\mu^P(x)$ .

A versão dimensional dos Teoremas 1.15 e 1.16 é a seguinte:

**Teorema 1.22.** *Seja  $E \subset \mathbb{R}^n$  boreliano  $K \in \{H, P\}$  e  $\mu$  de Radon com  $0 < \mu(E) < \infty$ . Então valem:*

a) *Se  $d_\mu^K(x) \leq \alpha \quad \forall x \in E$  então  $\dim_K E \leq \alpha$ .*

b) *Se  $d_\mu^K(x) \geq \alpha \quad \forall x \in E$  então  $\dim_K E \geq \alpha$ .*

*Demonstração.* a) Considere  $K = H$ . O caso  $\alpha = n$  é óbvio. De  $d_\mu^-(x) < \alpha + \epsilon \quad \forall x \in E, \forall \epsilon > 0$ , segue-se  $(\overline{D}^{\alpha+\epsilon} \mu)(x) = \infty \quad \forall x \in E, \forall \epsilon > 0 \Rightarrow E \subset T_\infty^{\alpha+\epsilon}(\mu) \quad \forall \epsilon > 0 \Rightarrow h^{\alpha+\epsilon}(E) = 0 \quad \forall \epsilon > 0 \Rightarrow \dim_H(E) \leq \alpha + \epsilon \quad \forall \epsilon > 0 \Rightarrow \dim_H(E) \leq \alpha$ .

A demonstração do caso  $K = P$  é análoga. Nesta demonstração usa-se o Item a) do Teorema 1.18 com  $K = P$ .

b) Considere  $K = H$ . O caso  $\alpha = 0$  é óbvio. Suponha que  $d_\mu^-(x) > \alpha > 0 \quad \forall x \in E \Rightarrow d_\mu^-(x) > \alpha - \epsilon \quad \forall x \in E \quad \forall \epsilon > 0 \Rightarrow (\overline{D}^{\alpha-\epsilon} \mu)(x) = 0 \quad \forall x \in E \quad \forall \epsilon > 0 \Rightarrow \mu(E) \leq 2^{\alpha-\epsilon} t h^{\alpha-\epsilon}(E) \quad \forall t > 0 \quad \forall \epsilon > 0 \Rightarrow h^{\alpha-\epsilon}(E) = \infty \quad \forall \epsilon > 0 \Rightarrow \dim_H(E) \geq \alpha - \epsilon \quad \forall \epsilon > 0 \Rightarrow \dim_H(E) \geq \alpha$ .

A demonstração do caso  $K = P$  é análoga. Neste caso usa-se o Item b) do Lema 1.20 e o Item a) do Teorema 1.16.  $\square$

**Definição 1.23.** *Seja  $\mu$  de Radon em  $\mathbb{R}^n$  e  $K \in \{H, P\}$ . A  $K$ -dimensão superior de  $\mu$  é definida por*

$$\dim_K^+(\mu) := \inf\{\dim_K(E) : E \text{ é boreliano e } \mu(E^c) = 0\}$$

*e a  $K$ -dimensão inferior de  $\mu$  é definida por*

$$\dim_K^-(\mu) := \sup\{\alpha : \mu(E) = 0 \text{ se } \dim_K(E) < \alpha\}.$$

O seguinte resultado é caracteriza as dimensões de Hausdorff e de empacotamento de uma medida mediante os expoentes escala inferior e superior respectivamente.

**Teorema 1.24.** *Seja  $\mu$  de Radon e finita em  $\mathbb{R}^n$  e  $K \in \{H, P\}$ . Então*

$$a) \dim_K^+(\mu) = \mu\text{-ess. sup } d_\mu^K,$$

$$b) \dim_K^-(\mu) = \mu\text{-ess. inf } d_\mu^K.$$

*Demonstração.* a) Escrevamos  $\mu\text{-ess. sup } d_\mu^K = \alpha$ . Da definição de  $\alpha$  segue-se que  $d_\mu^K(x) \leq \alpha$  para quase todo  $x$ , ou seja, existe  $E$  com  $\mu(E^c) = 0$  de modo que a desigualdade anterior vale para todo  $x \in E$ . Logo, pelo Item a) do Teorema 1.22 segue que  $\dim_K^+(\mu) \leq \alpha$ .

Agora demonstremos a desigualdade contrária. Se  $\alpha = 0$  então  $\dim_K^+(\mu) \leq 0 \Rightarrow \dim_K^+(\mu) = 0 = \alpha$ . Seja  $\alpha > 0$  e suponha por absurdo que  $\dim_K^+(\mu) < \alpha$ . Assim, para  $\delta > 0$  pequeno, existe um boreliano  $E \subset \mathbb{R}^n$  com  $\mu(E^c) = 0$  e  $\dim_K^+(E) < \alpha - \delta$ . Pelo Item b) do Teorema 1.22 concluímos que  $d_\mu^K(x) < \alpha - \delta \quad \forall x \in E$  contradizendo a definição de  $\alpha$ .

$$\therefore \dim_K^+ = \alpha.$$

b) Escrevamos  $\mu\text{-ess. inf } d_\mu^K = \alpha$ . Vamos mostrar que  $\dim_K^-(\mu) \geq \alpha$ . Claramente a desigualdade vale se  $\alpha = 0$ . Suponha que  $\alpha > 0$ . Se  $\dim_K^-(\mu) < \alpha$  escolha  $\beta$  de maneira que  $\dim_K^-(\mu) < \beta < \alpha$ .

Desejamos mostrar que se  $\dim_K(E) < \beta$  então  $\mu(E) = 0$ , o que implicaria que  $\dim_K^-(\mu) \geq \beta$ . Sendo que vale para todo  $\beta < \alpha$  concluiremos que  $\dim_K^-(\mu) \geq \alpha$ .

Sejam  $E$  com  $\dim_K(E) < \beta$  e

$$E_< := \{x \in E : (D^{K,\beta}\mu)(x) < \infty\},$$

$$E_\infty := \{x \in E : (D^{K,\beta}\mu)(x) = \infty\}.$$

Note que  $E = E_< + E_\infty$ . Como  $\dim_K(E) < \beta$  então  $K^\beta(E) = 0$ . Aplicando os Teoremas 1.15 e 1.16 obtemos  $\mu(E_<) = 0$ . Agora pelos Itens a) e c) do Lema 1.20 temos  $E_\infty \subset \{x \in E : d_\mu^K(x) \leq \beta\}$ , mas tal conjunto possui medida nula, pois  $\beta < \alpha$ .

$$\therefore \mu(E) = \mu(E_{<}) + \mu(E_{\infty}) = 0.$$

Agora mostremos a desigualdade contrária, ou seja,  $\dim_{\bar{K}}(\mu) \leq \alpha$ . Da definição de  $\alpha$  dado  $\delta > 0$  existe  $E$  com  $\mu(E) > 0$  e  $d_{\mu}^K(x) < \alpha + \delta$ ,  $\forall x \in E \Rightarrow \dim_K(E) \leq \alpha + \delta \Rightarrow \dim_{\bar{K}}(\mu) \leq \alpha + \delta$ . Como  $\delta > 0$  é arbitrário, segue que  $\dim_{\bar{K}}(\mu) \leq \alpha$ .

$$\therefore \dim_{\bar{K}}(\mu) = \alpha. \quad \square$$

## 1.2 Dinâmica quântica unidimensional

Nesta seção, será apresentada a linguagem básica da dinâmica quântica de uma partícula numa dimensão. Quanto às demonstrações, elas serão omitidas. O leitor poderá achá-las em [1]. Começamos considerando uma partícula movendo-se no eixo real. Na mecânica quântica, o estado do sistema é descrito mediante um vetor tomado num espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Este fato a diferencia da mecânica clássica, na qual o estado do sistema é descrito pela posição e pelo momento. Na mecânica quântica os observáveis são dados por um tipo especial de funções chamados operadores auto-adjuntos, os quais serão definidos em seguida.

**Definição 1.25.** *Um operador linear entre os espaços vetoriais  $X$  e  $Y$  é uma transformação  $T : \text{dom } T \subset X \rightarrow Y$  tal que  $\text{dom } T$  é um subespaço vetorial de  $X$  e  $T(\xi + \alpha\eta) = T(\xi) + \alpha T(\eta)$ , para todo  $\xi, \eta \in \text{dom } T$  e todo escalar  $\alpha \in \mathbb{F}$ . Se  $X = Y$ ,  $T$  é chamado operador linear definido sobre  $X$ , ou simplesmente operador sobre  $X$ .*

**Definição 1.26.** *Seja  $T : \text{dom } T \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  um operador linear cujo domínio está densamente definido em  $\mathcal{H}$ , ou seja,  $\text{dom } T$  é denso em  $\mathcal{H}$ , e seja  $\eta \in \mathcal{H}$ . Se para cada vetor  $\xi \in \text{dom } T$  existe um vetor  $\zeta \in \mathcal{H}$  tal que*

$$\langle \eta, T\xi \rangle = \langle \zeta, \xi \rangle,$$

*dizemos que  $\eta$  está no domínio do operador adjunto de  $T$ ,  $T^*$ , e que  $\zeta = T^*\eta$ .*

*Se  $T = T^*$ , dizemos que  $T$  é auto-adjunto.*

*Se  $T$  tem inversa e  $T^{-1} = T^*$ , dizemos que  $T$  é unitário.*

**Observação 1.27.** *O fato de  $T$  ser densamente definido em  $\mathcal{H}$  garante a boa definição de  $T^*$ .*

Para descrever os processos de evolução em um sistema quântico definimos os grupos unitários de evolução.

**Definição 1.28.** *Uma função  $G : \mathbb{R} \rightarrow B(\mathcal{H})$  é um grupo unitário de evolução sobre  $\mathcal{H}$  se  $G(t)$  é um operador unitário sobre  $\mathcal{H}$  e  $G(t+s) = G(t)G(s)$ ,  $\forall t, s \in \mathbb{R}$ . Diremos que  $G(t)$  é contínuo se  $\lim_{t \rightarrow t_0} G(t)\xi = G(t_0)\xi$ ,  $\forall t_0 \in \mathbb{R}$ ,  $\forall \xi \in \mathcal{H}$ .*

Os operadores auto-adjuntos e os grupos unitários de evolução estão intimamente relacionados, de fato podemos encontrar uma correspondência biunívoca entre estas duas classes de objetos.

**Definição 1.29.** *Se  $G(t)$  é um grupo unitário de evolução, o operador linear definido por*

$$\begin{aligned} \text{dom } T &:= \left\{ \xi \in \mathcal{H} : \exists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (G(h) - \mathbf{1})\xi \right\}, \\ T\xi &:= i \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (G(h) - \mathbf{1})\xi \quad \forall \xi \in \text{dom } T \end{aligned}$$

*é chamado gerador infinitesimal de  $G(t)$ .*

**Observação 1.30.** *1.  $\text{dom } T$  é um subespaço vetorial denso de  $\mathcal{H}$  e  $T$  está unicamente definido.*

*2. É possível demonstrar que se  $G(t)$  for contínuo então o gerador infinitesimal  $T$  é auto-adjunto. Este resultado é conhecido como Teorema de Stone.*

Da observação anterior, segue-se que a cada grupo unitário de evolução contínuo podemos associar um operador auto-adjunto. Pode-se demonstrar que esta relação é biunívoca, ou seja, dado um operador auto-adjunto  $T$ , existe um grupo unitário de evolução contínuo,  $G(t)$ , de modo que  $T$  é seu gerador infinitesimal. Para escrever esta relação, necessitamos

definir a exponencial de um operador. Para um operador linear limitado  $T$ , a exponencial  $e^{zT}$  pode ser definida através da série,

$$e^{zT} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j T^j}{j!},$$

em que é considerada a convergência em  $B(\mathcal{H})$ . Se o operador  $T$  não for limitado, podemos definir  $e^{zT}$  mediante o teorema espectral.

Para enunciar o teorema espectral, precisamos definir o conceito de resolução da identidade.

Denotemos por  $\text{Proj}(\mathcal{H})$  o conjunto das projeções ortogonais sobre  $\mathcal{H}$ , isto é,  $P_0 \in \text{Proj}(\mathcal{H})$  se e só se  $P_0 \in B(\mathcal{H})$ ,  $P_0$  é auto-adjunto e  $P_0^2 = P_0$ .

**Definição 1.31.** *Uma resolução da identidade sobre  $\mathcal{H}$  é uma função  $P : \mathcal{A} \rightarrow \text{Proj}(\mathcal{H})$  tal que*

a)  $P(\mathbb{R}) = \mathbf{1}$ ,

b) Se  $\Lambda = \sum_{j=1}^{\infty} \Lambda_j$ , com  $\Lambda_j \in \mathcal{A} \quad \forall j$ , então

$$P(\Lambda) = \sum_{j=1}^{\infty} P(\Lambda_j).$$

**Definição 1.32.** *Seja  $P$  uma resolução da identidade e  $\xi \in \mathcal{H}$ . A medida espectral de  $P$  associada à  $\xi$ ,  $\mu_{\xi}(\cdot)$ , é dada por:*

$$\Lambda \mapsto \mu_{\xi}(\Lambda) := \langle \xi, P(\Lambda)\xi \rangle \quad (\Lambda \in \mathcal{A}).$$

**Observação 1.33.** *Note que  $\mu_{\xi}(\mathbb{R}) = \langle \xi, P(\mathbb{R})P(\mathbb{R})\xi \rangle = \|P(\mathbb{R})\xi\|^2 = \|\xi\|^2$ . Logo, a medida  $\mu_{\xi}$  é finita.*

Seja  $P$  uma resolução da identidade. Define-se  $P(\chi_{\Lambda}) = P(\Lambda) \quad \forall \Lambda \in \mathcal{A}$ . Para uma função simples mensurável  $s = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{\Lambda_j}$  definimos  $P(s) := \sum_{j=1}^n a_j P(\Lambda_j)$ . Notemos que a função  $s \mapsto P(s)$  é linear e satisfaz

$$\langle \xi, P(s)\xi \rangle = \int_{\mathbb{R}} s(t) d\mu_{\xi}(t),$$



e

$$\|P(s)\xi\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |s(t)|^2 d\mu_{\xi}(t) \leq (\sup_{t \in \mathbb{R}} |s(t)|^2) \|\xi\|^2.$$

A última relação implica que a função linear  $P : \{\text{funções simples}\} \rightarrow B(\mathcal{H})$  é contínua (no espaço das funções simples é considerada a norma do supremo).

Denotemos por  $B^{\infty}(\mathbb{R})$  o espaço das funções borelianas sobre  $\mathbb{R}$  com a norma  $\|f\|_{\infty} = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|$ . Como o espaço das funções simples é denso em  $B^{\infty}(\mathbb{R})$ , existe uma única extensão de  $P$  a um operador linear limitado (usando a mesma notação)  $P : B^{\infty}(\mathbb{R}) \rightarrow B(\mathcal{H})$ , tal que,

$$\langle \xi, P(f)\xi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t) d\mu_{\xi}(t)$$

e

$$\|P(f)\xi\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 d\mu_{\xi}(t) \leq (\sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|^2) \|\xi\|^2, \forall f \in B^{\infty}(\mathbb{R}).$$

Finalmente estenderemos a definição de  $P$  às funções de Borel sobre  $\mathbb{R}$ , não-limitadas e de valores complexos. Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  boreliana e não-limitada e definamos

$$\text{dom } f := \left\{ \xi \in \mathcal{H} : \int_{\mathbb{R}} |f|^2 d\mu_{\xi} < \infty \right\}.$$

É fácil ver que  $\text{dom } f$  é um subespaço vetorial de  $\mathcal{H}$ . Seja

$$\Lambda_n = \Lambda_n(f) = \{t \in \mathbb{R} : |f(t)| \leq n\}, \quad f_n := f \chi_{\Lambda_n} \in B^{\infty}(\mathbb{R}),$$

e  $\xi \in \text{dom } f$ . Demonstra-se que  $\{P(f_n)\xi\}_n$  converge em  $\mathcal{H}$  a um vetor, digamos,  $P(f)\xi$ . Observe que  $\text{dom } P(f) = \text{dom } f$ . Ainda, essa extensão  $f \mapsto P(f)$  é linear, contínua e satisfaz

$$\|P(f)\xi\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 d\mu_{\xi}(t) \leq (\sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|^2) \|\xi\|^2, \forall f \in B^{\infty}(\mathbb{R}).$$

Agora estamos prontos para enunciar o teorema espectral.

**Teorema 1.34** (Teorema Espectral). *Dado um operador auto-adjunto  $T$  sobre  $\mathcal{H}$  existe uma única resolução da identidade  $P^T$  sobre  $\mathcal{H}$  de modo que  $T = P^T(h)$ , sendo  $h(t) = t$ .*

**Observação 1.35.** a) Denotaremos por  $\mu_\xi^T$  a medida espectral associada à resolução da identidade  $P^T$  dada pelo teorema espectral.

b) Dado um conjunto  $\Lambda$ , a soma  $\mathcal{H} = P^T(\chi_\Lambda)\mathcal{H} + P^T(\chi_\Lambda^c)\mathcal{H}$  é direta e é chamada decomposição espectral com respeito a  $\Lambda$ .

**Definição 1.36.** Se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , define-se  $f(T) := P^T(f)$

Agora podemos enunciar o teorema que relaciona os grupos unitários de evolução contínuos com os operadores auto-adjuntos.

**Teorema 1.37.** Dado um operador auto-adjunto  $T$ ,  $U(t) = e^{-itT}$  é o único grupo unitário de evolução sobre  $\mathcal{H}$  contínuo de forma que  $T$  seja o gerador infinitesimal de  $U(t)$ .

**Observação 1.38.** Segue-se da observação 1.30 e do teorema acima que todo grupo unitário de evolução sobre  $\mathcal{H}$  contínuo,  $U(t)$ , tem a forma  $U(t) = e^{-itT}$ , sendo  $T$  o gerador infinitesimal de  $U(t)$  (lembremos que  $T$  é auto-adjunto).

Dado  $T$  auto-adjunto e  $\xi \in \mathcal{H}$ , consideremos a equação de Schrödinger definida por

$$i \frac{d\eta}{dt}(t) = T\eta(t), \quad \eta(0) = \xi.$$

Pode-se mostrar que  $e^{-itT}$  é a única solução da equação acima. Para estudar o comportamento da dinâmica do sistema, usam-se as seguintes magnitudes:

1. A probabilidade de retorno à condição inicial  $\xi \in \mathcal{H}$ , no tempo  $t$ ,

$$p_\xi(t) = |\langle \xi, e^{-itT}\xi \rangle|^2.$$

Podemos generalizar esta definição para  $\eta, \xi \in \mathcal{H}$  mediante a equação:

$$p_{\eta,\xi}(t) = |\langle \eta, e^{-itT}\xi \rangle|^2.$$

2. A média da probabilidade de retorno à condição inicial  $\xi$ , no tempo  $t \neq 0$ ,

$$\langle p_\xi \rangle_t := \frac{1}{t} \int_0^t p_\xi(s) ds. \quad (1.1)$$

A magnitude  $\langle p_{\eta,\xi} \rangle_t$  define-se analogamente.

3. A probabilidade  $\mathcal{P}_{t,\psi}(A) = \sum_{k \in A} p_k(t)$ , sendo  $A$  um subconjunto de  $\mathbb{Z}$  e  $p_k(t) = \langle p_{e_k,\psi} \rangle_t$  para todo  $k$  e para todo  $t$ . Note que  $F(x) = \sum_{k \leq x} p_k(t)$  é uma função de distribuição de probabilidade e  $f(x) = p_x(t)$  é sua função densidade associada (vide Apêndice).

Para estudar o comportamento das magnitudes acima definidas para tempos grandes, precisamos falar da parte contínua e pontual de uma medida.

Dadas duas medidas  $\mu$  e  $\nu$ , as notações  $\mu \perp \nu$  e  $\mu \ll \nu$  indicam que  $\mu$  e  $\nu$  são ortogonais e que  $\mu$  é absolutamente contínua com respeito a  $\nu$ .

Lembremos que o teorema de decomposição de Lebesgue estabelece que dada uma medida  $\sigma$ -finita  $\mu$  sobre  $\mathbb{R}$ , ela pode-se decompor na forma  $\mu = \mu_p + \mu_c$ , sendo  $\mu_c$  a parte contínua de  $\mu$ , isto é,  $\mu_c(\{t\}) = 0$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , e  $\mu_p$  a parte pontual, isto é existe um conjunto contável  $\Omega$  com  $\mu_p(\mathbb{R} - \Omega) = 0$ . Pela decomposição de Lebesgue, a parte contínua da medida pode-se decompor na forma  $\mu_c = \mu_{ac} + \mu_{sc}$ , com  $\mu_{ac} \ll \lambda$ , a que é chamada componente absolutamente contínua de  $\mu$ , e  $\mu_{sc} \perp \lambda$ , a que é chamada componente singular contínua de  $\mu$ .

À continuação, enunciamos dois resultados importantíssimos que descrevem o comportamento temporal da probabilidade de retorno. As demonstrações destes teoremas, as quais podem ser achadas em [1], usam fortemente os lemas de Wiener e Riemann-Lebesgue.

**Teorema 1.39.** *Se  $\mu_\xi^T \ll \lambda$  então  $p_\xi(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ .*

**Teorema 1.40** (Wiener).  *$\langle p_\xi \rangle_t \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$  se e só se  $\mu_\xi^T$  for medida contínua, ou seja,  $\mu_\xi^T$  não tem componente pontual.*

Suponhamos que  $\mu$  seja uma medida contínua. Pelo teorema acima, sabemos que  $\langle p_\xi \rangle_t \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ , mas o teorema não fala qual é a velocidade desta convergência. Para dar resposta a esta questão, define-se para  $q \in \mathbb{N}$  o momento  $q$ -ésimo,  $M_q(t)$ , o qual é definido por

$$M_q(t) = \sum_{j=1}^{\infty} j^q p_k(t).$$

Para estudar o comportamento desta magnitude no tempo, precisamos definir quantidades adequadas, as quais serão definidas e estudadas na seguinte seção.

# Capítulo 2

## Estimativas dos expoentes de crescimento

Neste capítulo estudaremos o crescimento de magnitudes associadas à probabilidade de retorno, tais como os momentos e o número de elementos do suporte da probabilidade associada à probabilidade de retorno. Os resultados que serão apresentados podem ser achados em [5]. Finalizaremos o capítulo com uma aplicação desses resultados a que é mencionada em [4].

### 2.1 Expoentes de crescimento

As definições e os resultados desta seção foram apresentados em [5].

Consideremos um operador auto-adjunto  $H$  num espaço de Hilbert separável  $\mathcal{H}$ , um vetor  $\psi \in \mathcal{H}$  com  $\|\psi\| = 1$ ,  $\mu \equiv \mu_\psi^H$  a medida espectral associada a  $H$  e  $B = \{e_n\}$  um conjunto ortonormal completo de  $\mathcal{H}$ . Lembremos que  $p_{\eta,\xi}(t) = |\langle \eta, e^{-itT}\xi \rangle|^2$  e que  $\mathcal{P}_{t,\psi}(A) = \sum_{k \in A} p_k(t)$  é a sua probabilidade associada, sendo  $A$  é um subconjunto de  $\mathbb{Z}$  e  $p_k(t) = \langle p_{e_k,\psi} \rangle_t$  para todo  $k$  e para todo  $t$ .

**Definição 2.1.** *Fixe  $\psi \in \mathcal{H}$ , um tempo  $t$  e  $\epsilon \in (0, 1)$ . Defina-se o  $\epsilon$ -suporte minimal de  $\mathcal{P}_{t,\psi}$*

como sendo uma subconjunto  $\mathcal{F}_\epsilon \subset \mathbb{N}$  de modo que

$$a) \mathcal{P}_{t,\psi}(\mathcal{F}_\epsilon) < (1 - \epsilon)\mathcal{P}_{t,\psi}(\mathbb{N})$$

$$b) \mathcal{P}_{t,\psi}(\mathcal{F}') \geq (1 - \epsilon)\mathcal{P}_{t,\psi}(\mathbb{N}) \text{ para toda família } \mathcal{F}' \text{ tal que } \#\mathcal{F}' < \#\mathcal{F}_\epsilon.$$

Fisicamente o  $\epsilon$ -suporte minimal de  $\mathcal{P}_{t,\psi}$  indica o menor diâmetro em que é possível encontrar a partícula com probabilidade  $1 - \epsilon$ . Note que a probabilidade  $\mathcal{P}_{t,\psi}$  pode ter diferentes  $\epsilon$ -suportes minimais, mas todos eles têm o mesmo número de elementos.

**Definição 2.2.** *Seja  $\mathcal{F}_\epsilon$  um  $\epsilon$ -suporte minimal de  $\mathcal{P}_{t,\psi}$ . Defina-se o portador minimal  $n_\epsilon(\psi, t, B)$  por*

$$n_\epsilon(\psi, t, B) = \#\mathcal{F}_\epsilon.$$

Da aqui em diante omitiremos os parâmetros  $\psi$  e  $B$  de  $n_\epsilon(\psi, t, B)$ , desde que a omissão não gere confusão.

Suponhamos que uma sequência  $\{c_t\}_{t \in \mathbb{N}}$  tenha um crescimento da forma  $c_t \sim t^\beta$ . Aqui são considerados os limites superior e inferior, já que o limite  $\lim_{t \rightarrow \infty} \ln(c_t)/\ln(t)$  pode não existir. Esta discussão motiva a seguinte definição.

**Definição 2.3.** *Dada uma sequência  $\{c_t\}$ , definem-se os expoentes de crescimento superior e inferior de  $\{c_t\}$ , denotados por  $\beta^+(\{c_t\})$  e  $\beta^-(\{c_t\})$  respectivamente, por*

$$\beta^\pm(\{c_t\}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \sup \frac{\ln(c_t)}{\ln(t)}.$$

Estes expoentes nos ajudarão a descrever o comportamento no infinito de grandezas físicas cujo crescimento pode ser aproximado por uma potência de  $t$ . Serão de nosso especial interesse os expoentes de crescimento de  $\{n_\epsilon(t)\}$  e dos momentos  $\{M_q(t)\}$ . Outra quantidade importante nesta seção será

$$\beta_0^\pm = \sup_{0 < \epsilon < 1} \beta^\pm(\{n_\epsilon(t)\}).$$

O objetivo desta seção será encontrar estimativas para esses expoentes.

**Proposição 2.4.** *Seja  $\epsilon > 0$  dado, e sejam  $t > 0$  e  $N \in \mathbb{N}$  tais que:*

$$2^{N-1} < \frac{t}{\sqrt{\epsilon}} \leq 2^N. \quad (2.1)$$

*Então para toda família de índices  $\mathcal{F} \in \mathbb{N}$ , a seguinte desigualdade vale:*

$$\sum_{n \in \mathcal{F}} \frac{1}{t} \int_0^t ds |\langle e_n, e^{-iHs} \psi \rangle|^2 \leq 2\epsilon + \frac{8\pi}{\sqrt{\epsilon}} \sum_{n \in \mathcal{F}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\langle e_n, \chi_{I_j^N} \psi \rangle|^2. \quad (2.2)$$

*Demonstração.* Usaremos a notação  $I_j^N = (\frac{j-1}{2^N}, \frac{j}{2^N}]$  introduzida no capítulo anterior. Para  $0 \leq s \leq t$ , definamos

$$\psi_t(s) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} e^{-isx_j^N} \chi_{I_j^N}(H)(\psi),$$

em que  $x_j^N = j2^{-N}$ .

Mostremos que  $\psi_t(s)$  aproxima  $e^{-iHs}$ . Mais precisamente,

$$\|\psi_t(s) - e^{-isH}(\psi)\|^2 \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_{I_j^N} d\mu(x) s^2 |x - x_j^N|^2$$

Note que  $|x - x_j^N| \leq 2^{-N}$  para  $x \in I_j^N$ . De fato,

$$\begin{aligned} x \in I_j^N &\Rightarrow \frac{j-1}{2^N} < x < \frac{j}{2^N} \\ &\Rightarrow \frac{-1}{2^N} < x - j2^{-N} < 0 \\ &\Rightarrow |x - x_j^N| \leq 2^{-N} \end{aligned}$$

Assim, se  $0 \leq s \leq t$  pela relação (2.1) obtém-se

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_{I_j^N} d\mu(x) s^2 |x - x_j^N|^2 &\leq \frac{1}{2^{2N}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_{I_j^N} s^2 d\mu(x) \\ &\leq \frac{1}{2^{2N}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_{I_j^N} \epsilon 2^{2N} = \epsilon. \end{aligned}$$

Por outra parte,

$$\begin{aligned} |\langle e_n, e^{-isH}\psi \rangle|^2 &= |\langle e_n, \psi_t(s) - \psi_t(s) + e^{-isH}\psi \rangle|^2 \\ &= |\langle e_n, \psi_t(s) \rangle - \langle e_n, \psi_t(s) - e^{-isH}\psi \rangle|^2 \\ &\leq 2(|\langle e_n, \psi_t(s) \rangle|^2 + |\langle e_n, \psi_t(s) - e^{-isH}\psi \rangle|^2). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathcal{F}} \frac{1}{t} \int_0^t ds |\langle e_n, e^{-iHs}\psi \rangle|^2 &\leq \frac{1}{t} \sum_{n \in \mathcal{F}} \int_0^t ds 2(|\langle e_n, \psi_t(s) \rangle|^2 + |\langle e_n, \psi_t(s) - e^{-isH}\psi \rangle|^2) \\ &\leq 2 \frac{1}{t} \int_0^t ds \left( \sum_{n \in \mathcal{F}} |\langle e_n, \psi_t(s) \rangle|^2 + \sum_{n \in \mathcal{F}} |\langle e_n, \psi_t(s) - e^{-isH}\psi \rangle|^2 \right) \\ &= \|\psi_t(s) - e^{-isH}\psi\|^2 + 2 \frac{1}{t} \sum_{n \in \mathcal{F}} \int_0^t ds |\langle e_n, \psi_t(s) \rangle|^2 \\ &\leq 2\epsilon + 2 \frac{1}{t} \sum_{n \in \mathcal{F}} \int_0^t ds |\langle e_n, \psi_t(s) \rangle|^2 \\ &\leq 2\epsilon + 2 \frac{1}{t} \sum_{n \in \mathcal{F}} \int_0^{\pi 2^{N+1}} ds |\langle e_n, \psi_t(s) \rangle|^2 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Mas

$$\begin{aligned} \langle e_n, \psi_t(s) \rangle &= \langle e_n, \sum_{j \in \mathbb{Z}} e^{-isx_j^N} \chi_{I_j^N}(H)(\psi) \rangle = \sum_{j \in \mathbb{Z}} e^{isx_j^N} \langle e_n, \chi_{I_j^N}(H) \rangle \\ \Rightarrow |\langle e_n, \psi_t(s) \rangle|^2 &= \langle e_n, \psi_t(s) \rangle \overline{\langle e_n, \psi_t(s) \rangle} = \left( \sum_{j \in \mathbb{Z}} e^{isx_j^N} \langle e_n, \chi_{I_j^N}(H) \rangle \right) \times \left( \sum_{l \in \mathbb{Z}} e^{-isx_l^N} \langle \chi_{I_l^N}(H), e_n \rangle \right) \end{aligned}$$

Assim, a desigualdade (2.3) fica

$$\sum_{n \in \mathcal{F}} \frac{1}{t} \int_0^t |\langle e_n, e^{-iHs}\psi \rangle|^2 \leq 2\epsilon + 2 \frac{1}{t} \sum_{j, l \in \mathbb{Z}} \langle e_n, \chi_{I_j^N}(H) \rangle \langle \chi_{I_l^N}(H), e_n \rangle \int_0^{\pi 2^{N+1}} ds e^{-i(x_l^N - x_j^N)s}$$

Integrando obtemos  $\int_0^{\pi 2^{N+1}} ds e^{-i(x_l^N - x_j^N)s} = 2^{N+1} \pi \delta_{j,l}$ . Substituindo o valor dessa integral na desigualdade acima, obtém-se (2.2)  $\square$



**Definição 2.5.** *Sejam  $N \in \mathbb{N}$  e  $\alpha > 0$ . Definem-se*

$$A_{N,\alpha} = \cup_j \{I_j^N : \mu(I_j^N) < 2^{-N\alpha}\} \quad e \quad b_N = \mu(A_{N,\alpha}).$$

**Proposição 2.6.** *Sejam  $N \in \mathbb{N}$  e  $\alpha > 0$ . Se  $b_N > 0$ , então para todo  $t$  que satisfaz a desigualdade  $b_N 2^{N-1} < 9t \leq b_N 2^N$  vale*

$$n_{b_N/2}(t) > C(\alpha) b_N^{3-\alpha} t^\alpha, \quad (2.4)$$

em que  $C(\alpha)$  depende apenas de  $\alpha$ .

*Demonstração.* Seja  $\psi = \psi_N + \psi'_N$  a decomposição espectral com respeito ao conjunto  $A_{N,\alpha}$ .

Observe que se  $\mu(I_j^N) \geq 2^{-N\alpha}$ , então

$$\langle e_n, \chi_{I_j^N}(H)\psi_N \rangle = \langle e_n, \chi_{I_j^N}(H)\chi_{A_{N,\alpha}}(H)(\psi) \rangle = \langle e_n, \chi_{I_j^N \cap A_{N,\alpha}}(H)(\psi) \rangle = 0.$$

Usando a observação anterior e a proposição (2.4) com  $\psi = \psi_N$ ,  $\mathcal{F} = \{n \in \mathbb{N} : n \leq m\}$ , sendo  $m = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{2b_N}{9}\right)^3 2^{N\alpha}$ , e  $\epsilon = \left(\frac{b_N}{9}\right)^2$  obtemos a desigualdade

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \int_0^t ds \|P_m(s)(\psi_N)\|^2 &= \frac{1}{t} \sum_{n < m} \int_0^t ds \|\langle e_n, e^{-iHs}\psi_N \rangle e^{iHs}(e_n)\|^2 \\ &= \frac{1}{t} \sum_{n < m} \int_0^t ds |\langle e_n, e^{-iHs}\psi_N \rangle|^2 \\ &\leq 2\epsilon + \frac{8\pi}{\sqrt{\epsilon}} \sum_{n < m} \sum_{j \in \mathcal{S}_{N,\alpha}} |\langle e_n, \chi_{I_j^N}(H)\psi_N \rangle|^2 \\ &= 2 \left(\frac{b_N}{9}\right)^2 + \frac{72\pi}{b_N} \sum_{n < m} \sum_{j \in \mathcal{S}_{N,\alpha}} |\langle e_n, \chi_{I_j^N}(H)\psi_N \rangle|^2 \end{aligned} \quad (2.5)$$

sendo  $P_m(s)(\psi) = \sum_{n < m} \langle e_n, e^{-iHs}\psi \rangle e^{iHs}(e_n)$  e  $\mathcal{S}_{N,\alpha} = \{j \in \mathbb{Z} : \mu(I_j^N) < 2^{-N\alpha}\}$ .

Agora estimaremos a soma do lado direito da desigualdade (2.5). Observemos que  $d\mu_N = \chi_{I_j^N} d\mu$ , sendo que  $\mu_N$  denota a medida espectral, e

$$\begin{aligned} \|\psi_N\|^2 &= \langle \chi_{A_{N,\alpha}}(H)(\psi), \chi_{A_{N,\alpha}}(H)(\psi) \rangle \\ &= \langle \psi, \chi_{A_{N,\alpha}}(H)(\psi) \rangle = \mu(A_{N,\alpha}) = b_N > 0 \end{aligned}$$

Logo, as observáveis acima implicam:

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathcal{F}} \sum_{j \in \mathcal{S}_{N,\alpha}} |\langle e_n, \chi_{I_j^N}(H)\psi_N \rangle|^2 &= \sum_{n \in \mathcal{F}} \sum_{j \in \mathcal{S}_{N,\alpha}} |\langle \chi_{I_j^N}(H)e_n, \chi_{I_j^N}(H)\psi_N \rangle|^2 \\ &\leq \sum_{n \in \mathcal{F}} \sum_{j \in \mathcal{S}_{N,\alpha}} \|\chi_{I_j^N}(H)e_n\|^2 \|\chi_{I_j^N}(H)\psi_N\|^2 \\ &\leq \sum_{n \in \mathcal{F}} \sum_{j \in \mathcal{S}_{N,\alpha}} \|\chi_{I_j^N}(H)\| \|e_n\| \langle \psi_N, \chi_{I_j^N}(H)\psi_N \rangle \\ &= m \sum_{j \in \mathcal{S}_{N,\alpha}} \mu_N(I_j^N) \\ &\leq m \sup_{j \in \mathcal{S}_{N,\alpha}} \mu_N(I_j^N) \\ &\leq m 2^{-N\alpha} = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{2b_N}{9} \right)^3 \end{aligned}$$

Assim (2.5) implica

$$\frac{1}{t} \int_0^t ds \|P_m(s)(\psi_N)\|^2 \leq \left( \frac{2b_N}{9} \right)^2$$

Finalmente, estimemos a integral  $\int_0^t ds \|P_m(s)\psi\|^2$  usando as relações  $\psi = \psi_N + \psi'_N$ ,  $\langle \psi_N, \psi'_N \rangle = 0$ ,  $\|\psi_N\|^2 + \|\psi'_N\|^2 = 1$  e a desigualdade acima.

$$\begin{aligned} \|P_m(s)\psi\|^2 &= \langle P_m(s)(\psi_N + \psi'_N), P_m(s)(\psi_N + \psi'_N) \rangle \\ &= \|P_m(s)(\psi_N)\|^2 + 2\operatorname{Re} \langle P_m(s)(\psi_N), P_m(s)(\psi'_N) \rangle + \|P_m(s)(\psi'_N)\|^2 \\ &\leq \|P_m(s)(\psi_N)\|^2 + 2\|P_m(s)(\psi_N)\| \|P_m(s)(\psi'_N)\| + \|P_m(s)(\psi'_N)\|^2 \\ &\leq \|P_m(s)(\psi_N)\|^2 + 2\|\psi'_N\| \|P_m(s)(\psi_N)\| + \|\psi'_N\|^2 \end{aligned} \tag{2.6}$$

A última desigualdade vale, pois

$$\begin{aligned} \|P_m(s)(\psi'_N)\|^2 &= \sum_{n < m} |\langle e_n, e^{-iHs}\psi'_N \rangle|^2 \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle e_n, e^{-iHs}\psi'_N \rangle|^2 = \|e^{-iHs}\psi'_N\|^2 \\ &\leq \|\psi'_N\|^2 \end{aligned}$$

Integrando e dividindo por  $t$  a desigualdade (2.6) obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \int_0^t ds \|P_m(s)\psi\|^2 &\leq \frac{1}{t} \int_0^t ds \|P_m(s)(\psi_N)\|^2 + \\ &\quad + \|\psi'_N\| \frac{1}{t} \int_0^t ds \|P_m(s)(\psi_N)\| + \frac{1}{t} \int_0^t ds \|\psi'_N\|^2 \\ &\leq \left(\frac{2b_N}{9}\right)^2 + \|\psi'_N\|^2 + \frac{4b_N}{9} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_{n < m} p_n(t) = \frac{1}{t} \int_0^t ds \|P_m(s)\psi\|^2 \leq \left(\frac{2b_N}{9}\right)^2 + \|\psi'_N\|^2 + \frac{4b_N}{9} \leq 1 - \frac{b_N}{2},$$

(a última desigualdade vale pois  $\|\psi_N\|^2 + \|\psi'_N\|^2 = 1$  e  $b_N = \|\psi_N\|^2 \leq \|\psi\|^2 = 1$ ). Logo, da definição de portador minimal e da relação entre  $b_N$  e  $t$  segue que

$$n_{b_N/2}(t) \geq m = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{b_N}{9}\right)^3 2^{N\alpha} \geq \frac{1}{4\pi} \left(\frac{b_N}{9}\right)^3 \frac{(9t)^\alpha}{b_N^\alpha} > C(\alpha) b_N^{3-\alpha} t^\alpha,$$

com  $C(\alpha) = \frac{9^{\alpha-3}}{8\pi}$ . □

Para encerrar a seção, será apresentado um resultado que fornece estimativas envolvendo dimensões de Hausdorff e de empacotamento para os expoentes  $\beta_0^+$  e  $\beta^\pm(M_q(t))$ . Para encontrar estimativas para os expoentes mencionados, devemos obter relações entre as dimensões espectrais e os expoentes de escala.

Lembrando que  $I_{j(x)}^N$  denota o intervalo da forma  $(\frac{j-1}{2^N}, \frac{j}{2^N}]$  que contém  $x$ , podemos escrever

$$\begin{aligned} \limsup_{N \rightarrow \infty} A_{N,\alpha} &= \limsup_{N \rightarrow \infty} \{x \in \mathbb{R} : \mu(I_{j(x)}^N) < 2^{-N\alpha}\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R} : \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{-\log_2 \mu(I_{j(x)}^N)}{N} > \alpha \right\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : d_\mu^+(x) > \alpha\}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Similarmente, obtém-se

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} A_{N,\alpha} = \{x \in \mathbb{R} : d_\mu^-(x) > \alpha\}. \quad (2.8)$$

As relações (2.7) e (2.8) serão fundamentais na demonstração do seguinte teorema.

**Teorema 2.7.** *Seja  $q > 0$ . Então valem as seguintes desigualdades:*

- a)  $\beta_0^- \geq \dim_H^+(\mu)$
- b)  $\beta^-(M_q(t)) \geq q \dim_H^+(\mu)$
- c)  $\beta^+(M_q(t)) \geq q \dim_P^+(\mu)$

*Demonstração.* Se  $\dim_H^+(\mu) = 0$  os Itens a) e b) são imediatos. Se  $\dim_P^-(\mu) = 0$ , então c) segue-se.

a) Suponha que  $\dim_H^+(\mu) > 0$ . Seja  $\alpha > 0$  com  $\dim_H^+(\mu) > \alpha$ . Do Item a) do Teorema 1.24 e de (2.8) decorre  $\liminf \mu(A_{N,\alpha}) \geq \mu(\liminf A_{N,\alpha}) > 0$ , o que implica a existência de uma constante  $b > 0$  de forma que  $b_N > b$  para todo  $N \in \mathbb{N}$ . Note que os intervalos da forma  $(b_N 2^{N-1}, b_N 2^N]$  cobrem  $\mathbb{N}$ . Assim, dado  $t$  existe  $N$  de modo que  $t \in (b_N 2^{N-1}, b_N 2^N]$ . Da Proposição 2.6 se segue que  $n_{b_N/2}(t) > At^\alpha$ , com  $A$  constante. Como  $b_N > b$ , temos  $n_{b/2}(t) > n_{b_N/2}(t) > At^\alpha$ .

Assim,

$$\beta_0^- = \sup_{0 < \epsilon < 1} \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln n_\epsilon(t)}{\ln t} \geq \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln n_{b/2}(t)}{\ln t} \geq \alpha.$$

Como  $\alpha < \dim_H^+(\mu)$  é arbitrário o resultado segue.

b) Suponha que  $\dim_H^+(\mu) > 0$ . Seja  $\alpha > 0$  com  $\dim_H^+(\mu) > \alpha$ . Pela demonstração do Item a) sabemos que existe  $b > 0$  de modo que  $n_{b/2}(t) > At^\alpha$ , sendo  $A$  uma constante. Pela definição de suporte minimal segue-se que

$$\sum_{n \leq C} p_n(t) \leq 1 - \frac{b}{2} \Rightarrow \sum_{n > C} p_n(t) \geq \frac{b}{2},$$

em que  $C = At^\alpha$ . Logo, a desigualdade de Chebyshev (vide Apêndice) implica

$$M_q(t) \geq \frac{b}{2}(At^\alpha)^q \Rightarrow \beta^-(\{M_q(t)\}) \geq q\alpha.$$

Como  $\alpha < \dim_H^+(\mu)$  é arbitrário o resultado segue.

c) Suponha que  $\dim_P^+(\mu) > 0$ . Seja  $0 < \alpha < \dim_P^+(\mu)$ . Do Item a) do Teorema 1.24 e de (2.7) obtemos  $\mu(\limsup A_{N,\alpha}) > 0$ . Do lema de Borel Cantelli (vide Apêndice) segue-se que

$$\sum_N \mu(A_{N,\alpha}) = \infty.$$

Logo, existe uma sequência  $N_k \rightarrow \infty$  de forma que  $b_{N_k} = \mu(A_{N_k,\alpha}) > N_k^{-2}$ . De fato, se essa sequência não existisse, pelo critério de comparação, teríamos que a série acima seria convergente, o que é uma contradição. A Proposição 2.6 implica que existe uma constante  $C(\alpha)$  tal que

$$n_{b_{N_k}/2}(t_k) > C(\alpha)b_{N_k}^{3-\alpha}t_k^\alpha > \frac{C(\alpha)}{N_k^{6-2\alpha}}t_k^\alpha \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

sendo  $t_k$  é uma sequência que satisfaz  $b_{N_k}2^{N_k-1} < 9t_k \leq b_{N_k}2^{N_k} \quad \forall k$ . Como  $9t_k > b_{N_k}2^{N_k-1} > 2^{N_k-1}/N_k^2$  temos que  $t_k \rightarrow \infty$  quando  $k \rightarrow \infty$  e  $N_k < f^{-1}(t_k)$ , com  $f(x) = 2^x/(18x^2)$ .

Portanto,

$$n_{b_{N_k}/2}(t_k) > C(\alpha)b_{N_k}^{3-\alpha}t_k^\alpha > \frac{C(\alpha)}{f^{-1}(t_k)^{6-2\alpha}}t_k^\alpha \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Denotemos por  $C_k$  o lado direito da desigualdade acima. Da definição de suporte minimal, obtém-se,

$$\sum_{n \leq C_k} p_n(t_k) \leq 1 - \frac{b_{N_k}}{2} \Rightarrow \sum_{n > C_k} p_n(t_k) \geq \frac{b_{N_k}}{2} \quad \forall k.$$

Logo, a desigualdade de Chebyshev implica

$$M_q(t_k) > \frac{b_{N_k}}{2} C_k^q \quad \forall k.$$

Assim,

$$\begin{aligned} M_q(t_k) &> \frac{1}{2(f^{-1}(t_k))^2} \left( \frac{C(\alpha)}{f^{-1}(t_k)^{6-2\alpha}} t_k^\alpha \right)^q \quad \forall k \\ \Rightarrow \frac{\ln M_q(t_k)}{\ln t_k} &> -\frac{\ln 2}{\ln t_k} - 2 \frac{\ln f^{-1}(t_k)}{\ln t_k} + q \frac{1}{\ln t_k} \ln \left( \frac{C(\alpha)}{f^{-1}(t_k)^{6-2\alpha}} t_k^\alpha \right) \quad \forall k \\ \Rightarrow \beta^+(\{M_q(t)\}) &\geq q \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln t_k} \ln \left( \frac{C(\alpha)}{f^{-1}(t_k)^{6-2\alpha}} t_k^\alpha \right) \\ \Rightarrow \beta^+(\{M_q(t)\}) &\geq q\alpha - \liminf_{k \rightarrow \infty} (6 - 2\alpha) \frac{\ln f^{-1}(t_k)}{\ln t_k} = q\alpha, \end{aligned}$$

(a última implicação se obtém usando  $\lim_{t \rightarrow \infty} \ln(f^{-1}(t))/\ln(t) = 0$ ). Como  $\alpha < \dim_H^+(\mu)$  é arbitrário, segue-se o resultado.  $\square$

É natural perguntarmos se podemos encontrar uma desigualdade análoga a a) do Teorema 2.7, envolvendo a medida de empacotamento, usando argumentos similares aos usados na demonstração do Teorema 2.7. Em geral, a demonstração apresentada não é aplicável para estimar  $\beta_0^+$  por meio de  $\dim_P^+(\mu)$ , embora em [5] seja feita a seguinte observação: se dados  $N \in \mathbb{N}$  e  $\alpha < \dim_P^+(\mu)$  supomos a condição  $\limsup \mu(A_{N,\alpha}) > 0$  (a qual não decorre de  $\dim_P^+(\mu) > \alpha$ ) podemos obter a desigualdade desejada. Com efeito, existe uma constante  $b > 0$  de modo que  $b_{N_k} > b$  para todo  $k$ . Logo, podemos aplicar um argumento similar ao utilizado em a) de (2.7) para obter  $\beta_0^+ > \alpha$ , donde concluímos  $\beta_0^+ > \dim_P^+(\mu)$ .

Para finalizar, enunciaremos um corolário do teorema anterior e do comentário acima. O Item a) do corolário foi apresentado em [4] na versão discreta, o qual foi demonstrado com argumentos diferentes dos usados aqui. O Item b) foi deduzido facilmente do comentário acima.

**Corolário 2.8.** *Para  $\epsilon$  suficientemente pequeno valem:*

a)  $\beta^-(n_\epsilon(t)) \geq \dim_H^-(\mu)$ .

b) Se  $\limsup_{N \rightarrow \infty} \mu(A_{N,\alpha}) > 0$  para cada  $\alpha < \dim_P^+(\mu)$  então  $\beta^+(n_\epsilon(t)) \geq \dim_P^-(\mu)$ .

*Demonstração.* a) Suponhamos que  $\dim_H^+(\mu) \neq \dim_H^-(\mu)$ . Seja  $\eta = \dim_H^+(\mu) - \dim_H^-(\mu) > 0$ . Pelo Item a) do Teorema 2.7 e pela definição de supremo, existe  $\epsilon_0$  suficientemente pequeno de forma que

$$\beta^-(n_{\epsilon_0}(t)) + \eta \geq \dim_H^+(\mu) \Rightarrow \beta^-(n_{\epsilon_0}(t)) \geq \dim_H^+(\mu) - \eta = \dim_H^-(\mu).$$

Como  $n_\epsilon(t)$  é decrescente em  $\epsilon$ , temos que  $\beta^-(n_\epsilon(t)) \geq \dim_H^-(\mu)$  para todo  $\epsilon < \epsilon_0$ .

Agora suponhamos que  $\dim_H(\mu) = \dim_H^+(\mu) = \dim_H^-(\mu)$  e seja  $\alpha < \dim_H(\mu)$  positivo. Da demonstração do Item a) Teorema 2.7 sabemos que existe  $b > 0$  tal que  $n_{b/2}(t) > At^\alpha$ , sendo  $A$  uma constante. Logo,  $\beta^-(n_{b/2}(t)) > \alpha$ . Já que  $\alpha < \dim_H(\mu)$  é arbitrário, temos que  $\beta^-(n_{b/2}(t)) > \dim_H(\mu) = \dim_H^-(\mu)$ . Dado que  $n_\epsilon(t)$  é decrescente em  $t$ , conclui-se que  $\beta^-(n_\epsilon(t)) \geq \dim_H^-(\mu)$  para todo  $\epsilon < b/2$ .

b) O caso  $\dim_P^+(\mu) \neq \dim_P^-(\mu)$  é completamente análogo ao caso Hausdorff. Neste caso, usa-se o comentário anterior ao corolário.

Suponhamos que  $\dim_P(\mu) = \dim_P^+(\mu) = \dim_P^-(\mu)$  e seja  $\alpha < \dim_P(\mu)$  arbitrário. Por hipótese, sabemos que  $\limsup_{N \rightarrow \infty} \mu(A_{N,\alpha}) > 0$ . Logo existem uma subsequência  $\{N_k\}$  e  $b > 0$  constante tais que  $b_{N_k} > b \quad \forall k$ . Escolhamos  $t_{N_k} \in (b_{N_k}2^{N_k-1}, b_{N_k}2^{N_k}]$ . A Proposição 2.6 implica que  $n_{b_{N_k}/2}(t_{N_k}) > At_{N_k}^\alpha \quad \forall k$ , para todo  $k$  e para alguma constante  $A$ . Portanto,  $\beta^+(n_{b/2}(t)) > \beta^+(n_{b_{N_k}/2}(t)) > \alpha \quad \forall k$ . Como  $\alpha < \dim_P(\mu)$  é arbitrário, segue-se que  $\beta^+(n_{b/2}(t)) \geq \dim_P(\mu) = \dim_P^-(\mu)$ . Finalmente, como  $n_\epsilon(t)$  é decrescente em  $\epsilon$ , concluímos que  $\beta^+(n_\epsilon(t)) \geq \dim_P^-(\mu)$  para todo  $\epsilon < b$ .  $\square$

Na seção seguinte, apresentaremos uma aplicação destes resultados no caso discreto.

## 2.2 Aplicação

À continuação, introduziremos alguns conceitos tirados da mecânica estatística que foram utilizados em [2, 4] e formalizados e estudados por Guarneri em [4]. As dimensões dinâmicas serão uns dos conceitos mais importantes desta seção. Nosso objetivo será encontrar estimativas para essas dimensões envolvendo dimensões de Hausdorff e de empacotamento. Para tal fim usaremos os resultados da seção anterior.

**Definição 2.9.** *Define-se a família de funções de partição  $Z_q(\psi, t)$  por*

$$Z_q(\psi, t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k^q(t),$$

para todos  $q > 0$  (se a série acima diverge, então  $Z_q(\psi, t) = \infty$ ).

**Observação 2.10.** *a) A definição acima é motivada pela definição de função de partição da mecânica estatística. Dado um sistema cuja temperatura e cujo número de partículas são constantes, define-se a função de partição como sendo  $Z = \sum_j e^{-\beta E_j}$ , em que  $E_j$  é a energia do estado  $j$  do sistema.*

*b) Note que para  $q > 1$ , a série acima converge. Com efeito  $Z_q(\psi, t) < Z_1(\psi, t) = \mathcal{P}_{\psi, t}(\mathbb{Z}) = 1$ .*

*c) O caso de nosso interesse é  $q \geq q_0$  para algum  $0 < q_0 < 1$ .*

**Definição 2.11.** *Definem-se as entropias generalizadas como sendo*

$$S_q = \frac{1}{1-q} \ln Z_q \quad \text{se } q \neq 1,$$

$$S_1 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \theta(p_k(t)),$$

com  $\theta(x) = -x \ln x$  quando  $0 < x \leq 1$  e  $\theta(x) = 0$  quando  $x = 0$ .  $S_1$  é a chamada entropia de Shannon da distribuição  $p_k(t)$ .



Em mecânica estatística, a entropia indica o nível de "desordem" de um sistema de partículas, mais precisamente a entropia é proporcional ao número de micro-estados do sistema.

**Definição 2.12.** *Definimos o número de estados  $\mathcal{N}_q(t)$  por*

$$\mathcal{N}_q(t) = e^{S_q(t)}.$$

**Observação 2.13.** *Se  $q \neq 1$  então  $\mathcal{N}_q(t) = Z_q^{1/(1-q)}(t)$ .*

**Definição 2.14.** *Os expoentes de crescimento de  $\mathcal{N}_q(t)$ , ou seja  $\beta^\pm(\mathcal{N}_q(t)) = \mathcal{D}_q^\pm$ , são chamados dimensões dinâmicas superior (+) e inferior (-).*

A seguinte proposição é uma aplicação do Teorema 2.7 e do Corolário 2.8. O Item a) é uma estimativa da dimensão dinâmica mediante a dimensão de Hausdorff, a qual foi apresentada em [4], enquanto o Item b) é uma versão análoga do Item a) para o caso de medida de empacotamento, a que foi deduzida do Item c) do Teorema 2.7 e do Item b) do Corolário 2.8.

**Proposição 2.15.** *a)  $\mathcal{D}_q^- \geq \dim_H^+(\mu)$  para  $q < 1$  e  $\mathcal{D}_1^- \geq \dim_H^-(\mu)$ .*

*b) Se  $\limsup_{N \rightarrow \infty} \mu(A_{N,\alpha}) > 0$  para cada  $\alpha < \dim_P^+(\mu)$  então  $\mathcal{D}_q^+ \geq \dim_P^+(\mu)$  para  $q < 1$  e  $\mathcal{D}_1^+ \geq \dim_P^-(\mu)$ .*

*Demonstração.* a) Sejam  $\epsilon > 0$  e  $q < 1$ . Definamos,

$$\mathcal{A}_{\epsilon,q,t} = \{k \in \mathbb{Z} : p_k(t) < \epsilon^{1/(1-q)} \mathcal{N}_q^{-1}(t)\},$$

e denotemos por  $\mathcal{B}_{\epsilon,q,t}$  o seu complementar em  $\mathbb{Z}$ . Então se  $k \in \mathcal{A}_{\epsilon,q,t} \Rightarrow p_k(t) < \epsilon^{1/(1-q)} [\mathcal{N}_q(t)]^{-1} \Rightarrow p_k^{q-1}(t) > \epsilon^{-1} [\mathcal{N}_q(t)]^{1-q} = \epsilon^{-1} Z_q(t)$ .

Logo,

$$\begin{aligned}
Z_q(t) &\geq \sum_{k \in \mathcal{A}_{\epsilon, q, t}} p_k(t) p_k^{q-1}(t) \\
&\geq \sum_{k \in \mathcal{A}_{\epsilon, q, t}} p_k(t) \epsilon^{-1} Z_q(t) \\
&= \epsilon^{-1} Z_q(t) \sum_{k \in \mathcal{A}_{\epsilon, q, t}} p_k(t) \\
&= \epsilon^{-1} Z_q(t) \mathcal{P}_{\psi, t}(\mathcal{A}_{\epsilon, q, t})
\end{aligned}$$

ou seja,  $\mathcal{P}_{\psi, t}(\mathcal{B}_{\epsilon, q, t}) > 1 - \epsilon$ . Da definição de suporte minimal segue que  $\#(\mathcal{B}_{\epsilon, q, t}) \geq n_\epsilon(t)$ .

Portanto,

$$\begin{aligned}
Z_q(t) &\geq \sum_{k \in \mathcal{B}_{\epsilon, q, t}} p_k^q(t) \geq n_\epsilon(t) \epsilon^{q/(1-q)} \mathcal{N}_q(t)^{-q} = n_\epsilon(t) \epsilon^{q/(1-q)} Z_q(t)^{-q/(1-q)} \\
&\Rightarrow \mathcal{N}_q(t) = Z_q(t)^{1/(1-q)} \geq \epsilon^{q/(1-q)} n_\epsilon(t) \\
&\Rightarrow \mathcal{D}_q \geq \beta^-(\{n_\epsilon\})
\end{aligned}$$

Como a desigualdade acima vale para  $\epsilon > 0$  arbitrário, temos que  $\mathcal{D}_q \geq \beta_0^-$ . Assim, a) do Teorema 2.7 implica  $\mathcal{D}_q \geq \beta_0^- \geq \dim_H^+(\mu)$

Agora consideremos o caso  $q = 1$ . Definamos  $\mathcal{A}_{\epsilon, t} = \{k \in \mathbb{Z} : p_k(t) < e^{-S_1(t)/\epsilon}\}$  e  $\mathcal{B}_{\epsilon, t}$  como sendo seu complementar em  $\mathbb{Z}$ . Se  $k \in \mathcal{A}_{\epsilon, t} \Rightarrow \ln \frac{1}{p_k(t)} > \frac{S_1(t)}{\epsilon} \Rightarrow \mathcal{P}_{t, \psi}(\mathcal{B}_{\epsilon, t}) \geq 1 - \epsilon \Rightarrow \#(\mathcal{B}_{\epsilon, t}) \geq n_\epsilon(t)$ . Agora definamos  $\overline{\mathcal{B}_{\epsilon, t}} = \mathcal{B}_{\epsilon, t} \cap \{k \in \mathbb{Z} : p_k(t) < e^{-1}\}$ . Então  $\#(\overline{\mathcal{B}_{\epsilon, t}}) \geq n_\epsilon(t) - 3$ . Seja  $\epsilon_1 > 0$  suficientemente grande de modo que  $n_\epsilon(t) > 3$  para todo  $\epsilon > \epsilon_1$ . Observando que a função  $f(x) = -x \ln x$  é crescente no intervalo  $(0, e^{-1})$  e usando a desigualdade anterior, obtemos

$$\begin{aligned}
S_1(t) &\geq \sum_{k \in \overline{\mathcal{B}_{\epsilon, t}}} \theta(p_k(t)) \geq (n_\epsilon(t) - 3) \epsilon^{-1} S_1(t) e^{-S_1(t)/\epsilon} \\
&\Rightarrow e^{S_1(t)/\epsilon} \geq (n_\epsilon - 3) \epsilon^{-1}.
\end{aligned}$$

Suponha que  $\beta^-(\{n_\epsilon(t)\}) = 0$ . Então pela desigualdade a) do Corolário 2.8 obtém-se  $\dim_{\bar{H}}(\mu) = 0$ . Assim,  $\mathcal{D}_1^- = \beta^-(\{\mathcal{N}_1(t)\}) \geq 0 = \dim_{\bar{H}}(\mu)$ . Agora suponhamos  $\beta(\{n_\epsilon(t)\}) > 0$ . Então  $\mathcal{N}_1(t) \geq \epsilon^{-\epsilon}(n_\epsilon(t)-3)^\epsilon \Rightarrow \mathcal{D}_1^- = \beta^-(\{\mathcal{N}_1(t)\}) \geq \beta^-(\epsilon^{-\epsilon}(n_\epsilon(t)-3)^\epsilon) = \epsilon\beta^-(\{n_\epsilon(t)\}) \geq \epsilon \dim_{\bar{H}}(\mu)$ . Dado que  $\epsilon < 1$  é arbitrário segue que  $\mathcal{D}_1^- \geq \dim_{\bar{H}}(\mu)$ .

b) A demonstração é análoga à demonstração de a). Na demonstração, usa-se o comentário que está ao final da subseção anterior e o Item b) do Corolário 2.8.  $\square$



# Capítulo 3

## Conclusão

Aqui apresentaremos rapidamente o que se procurou fazer neste trabalho e seus resultados, bem como algumas palavras sobre possíveis perspectivas futuras.

Neste trabalho, introduziu-se ao leitor nas dimensões de Hausdorff e empacotamento e na linguagem básica da mecânica quântica na perspectiva da física matemática.

As principais magnitudes estudadas foram os momentos associados à probabilidade de retorno,  $M_q(t)$ , e o  $\epsilon$ -suporte minimal,  $n_\epsilon(t)$ . Para estudar o crescimento destas magnitudes, definimos os expoentes de crescimento superior e inferior e logo após isso foram apresentadas estimativas desses expoentes para as magnitudes mencionadas.

No caso de  $\beta^+(n_\epsilon(t))$  e  $\beta_0^+$  fomos capazes de demonstrar, sob algumas condições, resultados análogos aos que já haviam sido demonstrados para os expoentes  $\beta^-(n_\epsilon(t))$  e  $\beta_0^-$ .

No final do trabalho, foram definidas as dimensões dinâmicas, as quais foram limitadas inferiormente com ajuda da versão discreta das estimativas apresentadas.

Finalizamos dizendo que seria interessante tentar enfraquecer a condição que foi imposta para estimar  $\beta^+(n_\epsilon(t))$  e  $\beta_0^+$ . Mesmo que se consiga enfraquecer esta condição só para o caso discreto, isto permitiria melhorar o resultado que estima as dimensões  $\mathcal{D}_q^+$ .



# Apêndice A

## Alguns resultados de teoria da medida

Neste apêndice enunciaremos o lema de Borel-Cantelli e a desigualdade de Chebyshev.

**Lema A.1** (Borel-Cantelli). *Seja  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  um espaço de medida finita e seja  $\{A_j\}$  uma sequência em  $\mathcal{A}$ . Se  $\sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) < \infty$  então  $\limsup_{j \rightarrow \infty} \mu(A_j) = 0$ .*

Antes de enunciar a desigualdade de Chebyshev, recordemos alguns conceitos de teoria da probabilidade. Seja  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  um espaço de probabilidade.

1. Uma variável aleatória é uma função  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  Borel-mensurável e não negativa.
2. A distribuição de probabilidade,  $F_X(x)$  é definida por

$$F_X(x) = F(x) := P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}).$$

3. A função densidade de probabilidade,  $f_X(x)$ , é definida como sendo

$$f_X(x) = f(x) := \lim_{y \rightarrow x^+} \frac{F(y) - F(x)}{y - x}.$$

Este limite existe pois demonstra-se que  $F(x)$  é contínua à direita.

4. A esperança da variável  $X$ ,  $E(X)$ , é definida mediante a equação

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} xf(x).$$

No caso em que a imagem de  $X$  é um conjunto contável, digamos  $X(\Omega) = \{x_j\}$ , a igualdade acima fica  $E(X) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j f(x_j)$ . A esperança da variável  $|X|^m$  é chamada momento  $m$ -ésimo de  $X$ . Pode-se demonstrar que  $E(|X|^m) = \int_{\mathbb{R}} x^m f(x)$  e no caso que  $X(\Omega) = \{x_j\}$  a fórmula anterior fica  $E(X^m) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j^m f(x_j)$ .

**Observação A.2.** *A função distribuição de probabilidade,  $F_X(x)$  tem as seguintes propriedades:*

- a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$ .
- b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ .
- c)  $F(x)$  é não decrescente.
- d)  $F(x)$  é contínua à direita.

*Reciprocamente podemos demonstrar que se uma função  $F(x)$  satisfaz as quatro condições acima, então existem um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  e uma variável aleatória  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tais que  $F(x)$  é a distribuição de probabilidade de  $X$ .*

**Teorema A.3** (Desigualdade de Chebyshev). *Seja  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  um espaço de probabilidade e seja  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mensurável e não negativa. Então  $\forall \epsilon > 0, \forall m$  inteiro vale:*

$$P(|X| > \epsilon) \leq \frac{E(|X|^m)}{\epsilon^m}.$$

**Observação A.4.** *Considere uma distribuição de probabilidade  $F(x)$ . A desigualdade de Chebyshev pode-se rescrever na forma*

$$\sum_{j > \epsilon} f(x_j) \leq \frac{\sum_{j=1}^{\infty} x_j^m f(x_j)}{\epsilon^m}.$$



# Referências Bibliográficas

- [1] C. R. de Oliveira: *Intermediate Spectral Theory and Quantum Dynamics*, Birkhäuser, Basel, 2009.
- [2] S. N. Evangelou and D. E. Katsanos, Multifractal quantum evolution at a mobility edge, *J. Phys. A: Math. Gen.* **26** (1993), L1243–L1250.
- [3] K. J. Falconer: *The geometry of fractal sets*. Cambridge Tracts in Mathematics 85. Cambridge: Cambridge University Press, 1986.
- [4] I. Guarneri, Singular continuous spectra and discrete wave packet dynamics, *J. Math. Phys.* **37** (1996), 5191–5206.
- [5] I. Guarneri, H. Schulz-Baldes, Lower bounds on wave-packet propagation by packing dimensions of spectral measures, *Math. Phys. Elect. J.* **5** (1999), 1–16.
- [6] P. Mattila, *Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces: Fractals and Rectifiability*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [7] C. Tricot, Two definitions of fractional dimension, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **91** (1982), 57–74.