

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS**

**CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA**

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA**

**Uma caracterização homotópica do espaço de laços da  
suspensão de um espaço topológico**

Juliano Damião Bittencourt de Godoi

**SÃO CARLOS**

**2008**

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Uma caracterização homotópica do espaço de laços da  
suspensão de um espaço topológico

Juliano Damião Bittencourt de Godoi

Orientador: Prof. Dr. Tomas Edson Barros.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

SÃO CARLOS

2008

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da  
Biblioteca Comunitária da UFSCar**

G588ch

Godoi, Juliano Damião Bittencourt de.

Uma caracterização homotópica do espaço de laços da suspensão de um espaço topológico / Juliano Damião Bittencourt de Godoi. -- São Carlos : UFSCar, 2011.  
126 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2008.

1. Topologia algébrica. 2. Teoria dos funtores. 3. Teoria da homotopia. 4. Teoria de homologia. I. Título.

CDD: 514.2 (20ª)

**Banca Examinadora:**



---

**Prof. Dr. Tomas Edson Barros  
DM - UFSCar**



---

**Prof. Dr. Pedro José Catuogno  
IMECC - UNICAMP**



---

**Prof. Dr. Pedro Luiz Queiroz Pergher  
DM - UFSCar**

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente à Deus por ter colocado em meu caminho tantas pessoas que me ajudaram e tornaram possível esse trabalho.

Agradeço especialmente à minha mãe Henriqueta, pelo apoio, pelo exemplo de vida, de superação e de força de vontade.

Às minhas sobrinhas Vanessa, Andressa e Karolayne, que sempre demonstraram muito carinho e apoio em tudo que eu fizesse.

Aos meus amigos do Departamento de Matemática: Rafael, Rômel, Liane, Taciana, Iris, Bruna, Patrícia, Tiago, Maicon, e tantos outros.

À todos os meus professores, em especial aos da UFSM e os da UFSCar. Agradeço também aos professores Peneireiro e Bidel, pelo incentivo e apoio.

Ao meu orientador Tomas Edson Barros, pela maneira responsável e sempre visando o meu melhor, com a qual conduziu esse trabalho. Sua paciência, dedicação e profissionalismo sempre me servirão como modelo ao longo de toda a minha vida.

Por último, agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro.

# Resumo

Nosso objetivo neste texto é mostrar que o espaço de laços da suspensão reduzida de um complexo CW conexo  $X$  tem o mesmo tipo de homotopia que o monóide topológico livre gerado por  $X$ .

# Abstract

Our main goal in this dissertation is to show that the loop space of reduced suspension of a connected CW complex  $X$  has the same type of homotopy that the free topological monoid generated by  $X$ .

# Sumário

<b>1</b>	<b>Pré-requisitos</b>	<b>9</b>
1.1	Produto Tensorial . . . . .	9
1.2	Álgebras . . . . .	11
1.3	Pré-requisitos Homotópicos . . . . .	16
1.4	Pré-requisitos Homológicos . . . . .	19
1.5	Espaços Compactamente Gerados . . . . .	23
1.6	Complexos CW . . . . .	27
1.7	Teoremas de Hurewicz . . . . .	30
<b>2</b>	<b>Espaço de Laços</b>	<b>35</b>
2.1	Espaço de Funções . . . . .	35
2.2	Categorias . . . . .	37
2.3	Funtores . . . . .	42
2.4	Funtores Adjuntos . . . . .	44
2.5	Espaço de Laços e Suspensão Reduzida . . . . .	45
2.6	Colimite . . . . .	52
2.7	H-espaço . . . . .	53
2.8	Espaço de Laços de Moore . . . . .	62
<b>3</b>	<b>Produto Reduzido de James</b>	<b>72</b>
3.1	Monóide Livre . . . . .	72
3.2	A topologia de $J(X)$ . . . . .	76



<b>4</b>	<b>Teorema de James</b>	<b>87</b>
4.1	Introdução . . . . .	87
4.2	Cálculo de $H_*(J(\widehat{X}))$ . . . . .	89
4.3	Fibrações . . . . .	100
4.4	Cálculo de $H_*(\Omega^M(\Sigma X, \bar{x}_0))$ . . . . .	104
4.5	Prova do Teorema de James . . . . .	112
<b>5</b>	<b>Apêndice</b>	<b>119</b>

# Introdução

O objetivo deste texto é apresentar uma equivalência de homotopia entre o espaço de laços de um complexo CW conexo  $X$  e o monóide topológico livre gerado por  $X$ , tal espaço é conhecido como produto reduzido de James, o qual foi inicialmente apresentado em [7].

Um dos pilares que nos permitirá alcançar o objetivo acima citado é a construção do espaço de laços de Moore apresentada no Capítulo 2. Em tal capítulo trataremos do espaço de funções, o qual possui uma topologia adequada para o nosso trabalho, a topologia compacto-aberta, posteriormente apresentaremos alguns conceitos, tais como categorias, funtores, suspensão, cones, colimite, H-espacos, e finalmente o conceito de Espaço de Laços. Mostraremos que este espaço é um H-grupo, porém a estrutura de H-grupo não é suficiente para chegarmos ao nosso objetivo. Para tanto, construiremos o espaço de laços de Moore e mostraremos que tal espaço é um monóide topológico que tem o mesmo tipo de homotopia que o espaço de laços. No terceiro capítulo mostraremos a existência de um monóide livre gerado por um conjunto qualquer, e mais, definiremos também o que vem a ser o produto reduzido de James, que na realidade é o monóide topológico livre gerado por um espaço topológico de Hausdorff, para colocarmos a topologia adequada em tal monóide, utilizaremos fortemente a topologia compactamente gerada.

Por fim, no quarto capítulo obteremos o resultado-objetivo que desejamos. Os principais textos utilizados para a atingir tais metas são [2], [5], e [7].

# Capítulo 1

## Pré-requisitos

Neste capítulo resumimos o material que utilizaremos nos capítulos seguintes. Omitiremos as provas dos resultados, e também supomos que os leitores deste trabalho tenham algum conhecimento sobre teoria de homologia e teoria de homotopia.

### 1.1 Produto Tensorial

Consideramos  $R$  um anel comutativo com elemento identidade.

**Definição 1.1** *Sejam  $M_1, M_2, \dots, M_k$   $R$ -módulos. O produto tensorial de  $M_1, M_2, \dots, M_k$  é um  $R$ -módulo  $M_1 \otimes M_2 \otimes \dots \otimes M_k$  que satisfaz as seguintes propriedades:*

(1) *Existe uma aplicação  $k$ -linear*

$$\phi : M_1 \times M_2 \times \dots \times M_k \longrightarrow M_1 \otimes M_2 \otimes \dots \otimes M_k$$

(2) *Dados um  $R$ -módulo  $N$  e uma aplicação  $k$ -linear*

$$f : M_1 \times M_2 \times \dots \times M_k \longrightarrow N,$$

*existe um único  $R$ -homomorfismo*

$$h : M_1 \otimes M_2 \otimes \dots \otimes M_k \longrightarrow N$$

*tal que  $f = h \circ \phi$ , de outra maneira, o diagrama*

$$\begin{array}{ccc}
M_1 \otimes M_2 \otimes \dots \otimes M_k & \xrightarrow{h} & N \\
\uparrow \phi & \nearrow f & \\
M_1 \times M_2 \times \dots \times M_k & & 
\end{array}$$

pode ser completado comutativamente, quaisquer que sejam  $N$  e  $f$ .

**Observação 1-** Dado  $(m_1, m_2, \dots, m_k) \in M_1 \times M_2 \times \dots \times M_k$ , denotamos  $\phi(m_1, m_2, \dots, m_k)$  por  $m_1 \otimes m_2 \otimes \dots \otimes m_k$ , e como  $\phi$  é  $k$ -linear temos que, para qualquer  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ , dados  $r \in R$  e  $m_i, n_i \in M_i$ ,

$$\begin{aligned}
m_1 \otimes \dots \otimes (m_i + n_i) \otimes \dots \otimes m_k &= m_1 \otimes \dots \otimes m_i \otimes \dots \otimes m_k + m_1 \otimes \dots \otimes n_i \otimes \dots \otimes m_k \\
m_1 \otimes \dots \otimes r m_i \otimes \dots \otimes m_k &= r(m_1 \otimes \dots \otimes m_i \otimes \dots \otimes m_k)
\end{aligned}$$

**Observação 2-** Dados  $R$ -módulos  $M_1, M_2, \dots, M_k$ , sempre existe o produto tensorial  $M_1 \otimes M_2 \otimes \dots \otimes M_k$  e quaisquer dois  $R$ -módulos satisfazendo (1) e (2) da definição anterior são isomorfos.

**Observação 3-** A imagem de  $\phi$  forma um conjunto gerador de  $M_1 \otimes M_2 \otimes \dots \otimes M_k$ , ou seja, todo elemento de  $M_1 \otimes M_2 \otimes \dots \otimes M_k$  é uma soma finita de elementos da forma  $m_1 \otimes m_2 \otimes \dots \otimes m_k$  com  $m_j \in M_j, j = 1, 2, \dots, k$ .

A seguir listamos uma série de propriedades do Produto Tensorial de  $R$ -módulos.

**T 1-** Sejam  $M_i$ , com  $i = 1, 2, \dots, k$ ,  $R$ -módulos livres com base  $B_i$ . Então  $M_1 \otimes M_2 \otimes \dots \otimes M_k$  também é um  $R$ -módulo livre e possui o conjunto  $\{b_1 \otimes b_2 \otimes \dots \otimes b_k : b_i \in B_i\}$  como uma base, logo,  $\dim M_1 \otimes M_2 \otimes \dots \otimes M_k = \prod_{i=1}^k \dim M_i$ .

**T 2-** Temos os seguintes isomorfismos entre  $R$ -módulos

- (1)  $(M_1 \otimes M_2) \otimes M_3 \cong M_1 \otimes (M_2 \otimes M_3)$ ;
- (2)  $M_1 \otimes M_2 \cong M_2 \otimes M_1$ ;
- (3)  $(M_1 \oplus M_2) \otimes N \cong (M_1 \otimes N) \oplus (M_2 \otimes N)$ ;
- (4)  $N \otimes (M_1 \oplus M_2) \cong (N \otimes M_1) \oplus (N \otimes M_2)$ ;
- (5)  $M \otimes R \cong M$ ;
- (6)  $R \otimes M \cong M$ .

**T 3-** Sejam  $M_1, M_2, M'_1, M'_2$   $R$ -módulos e  $f_i : M_i \rightarrow M'_i$   $R$ -homomorfismos, para  $i = 1, 2$ .

A aplicação  $g : M_1 \times M_2 \longrightarrow M'_1 \otimes M'_2$ , definida por  $g(m_1, m_2) = f_1(m_1) \otimes f_2(m_2)$ , é bilinear, logo dá origem a um único  $R$ -homomorfismo

$$f_1 \otimes f_2 : M_1 \otimes M_2 \longrightarrow M'_1 \otimes M'_2,$$

tal que  $(f_1 \otimes f_2)(m_1 \otimes m_2) = f_1(m_1) \otimes f_2(m_2)$ .

Observamos que, se  $f_i$  é sobrejetora, então  $f_1 \otimes f_2$  também é sobrejetora. Além disso, se cada  $f_i$  é isomorfismo, então  $f_1 \otimes f_2$  é isomorfismo, sendo

$$(f_1 \otimes f_2)^{-1} = f_1^{-1} \otimes f_2^{-1}.$$

**T 4-** Dados  $R$ -homomorfismos  $f_i : M_i \longrightarrow M'_i$  e  $g_i : M''_i \longrightarrow M_i$ , para  $i = 1, 2$ , tem-se que

$$(f_1 \otimes f_2) \circ (g_1 \otimes g_2) = (f_1 \circ g_1) \otimes (f_2 \circ g_2)$$

As demonstrações dos resultados acima, bem como uma exposição clara sobre produto tensorial e suas principais propriedades podem ser encontradas em [6].

## 1.2 Álgebras

Seja  $R$  um anel comutativo com elemento identidade  $1_R$ .

**Definição 1.2** *Uma  $R$ -álgebra é um  $R$ -módulo  $(A, +, \diamond)$  munido de uma multiplicação  $\cdot : A \times A \longrightarrow A$  que, para  $a, b, c \in A$  e  $r \in R$ , satisfaz:*

- (1)  $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$  (*associatividade*);
- (2)  $\exists 1_A \in A$  tal que  $a \cdot 1_A = 1_A \cdot a = a$ ;
- (3)  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$  e  $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ ;
- (4)  $r \diamond (a \cdot b) = (r \diamond a) \cdot b = a \cdot (r \diamond b)$ .

Representaremos a  $R$ -álgebra  $A$ , da definição anterior, por  $(A, \cdot, \diamond, +)$ . Ainda, se  $A$  for uma  $R$ -álgebra, e para quaisquer  $a, b \in A$ ,  $a \cdot b = b \cdot a$ , então diremos que  $A$  é uma  $R$ -álgebra comutativa.

Observamos que, (1), (2) e (3) na definição de  $R$ -álgebra nos garante que  $(A, +, \cdot)$  é um anel com elemento identidade.

Se  $(A, \cdot, \diamond, +)$  e  $(B, \cdot, \diamond, +)$  são  $R$ -álgebras, dizemos que a aplicação  $f : A \longrightarrow B$  é um homomorfismo de  $R$ -álgebras se  $f$  satisfaz:

- (1)  $f(a + b) = f(a) + f(b), \forall a, b \in A;$
- (2)  $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b), \forall a, b \in A;$
- (3)  $f(r \diamond a) = r \diamond f(a), \forall a \in A \text{ e } \forall r \in R.$

Dizemos que  $f$  é um isomorfismo de  $R$ -álgebras se  $f$  é um homomorfismo bijetor de  $R$ -álgebras .

Na definição de  $R$ -álgebra, a propriedade (3) nos garante que  $\cdot : A \times A \longrightarrow A$  é uma aplicação bilinear, e assim, existe uma aplicação  $R$ -linear  $\mu : A \otimes A \longrightarrow A$  que torna o diagrama abaixo comutativo.

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A & & \\ \phi \uparrow & \searrow \mu & \\ A \times A & \xrightarrow{\cdot} & A. \end{array}$$

A associatividade da multiplicação  $\cdot$  do anel  $A$  implica na comutatividade do diagrama

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A \otimes A & \xrightarrow{\mu \otimes 1_A} & A \otimes A \\ 1_A \otimes \mu \downarrow & & \downarrow \mu \\ A \otimes A & \xrightarrow{\mu} & A \end{array}$$

Se  $(A, \cdot, \diamond, +)$  é uma  $R$ -álgebra, podemos definir

$$\begin{aligned} \eta : R &\longrightarrow A \\ r &\longmapsto \eta(r) = r \diamond 1_A. \end{aligned}$$

A aplicação  $\eta$  é um homomorfismo de  $R$ -álgebras ( para maiores detalhes, veja [6] ), chamado homomorfismo estrutural de  $A$ .

Haja visto que  $A$  é um anel com elemento identidade, o diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 & & A & & \\
 & \cong \nearrow & \uparrow \mu & \nwarrow \cong & \\
 R \otimes A & \xrightarrow{\eta \otimes 1_A} & A \otimes A & \xleftarrow{1_A \otimes \eta} & A \otimes R
 \end{array}$$

comuta.

Os três últimos diagramas caracterizam completamente a estrutura da  $R$ -álgebra, ou seja, temos o seguinte Teorema:

**Teorema 1.1** *Sejam  $R$  um anel comutativo com elemento identidade  $1_R$  e  $A$  um  $R$ -módulo, então  $A$  tem estrutura de  $R$ -álgebra se, e somente se, existem aplicações lineares  $\mu : A \otimes A \rightarrow A$  e  $\eta : R \rightarrow A$  que tornam os últimos três diagramas comutativos.*

**Prova:** Ver [6].

■

**Definição 1.3** *Sejam  $(A, \cdot, +, \diamond)$  uma  $R$ -álgebra e  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  uma família de  $R$ -submódulos de  $A$  indexada pelos inteiros. A família  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  constitui uma graduação em  $A$  se*

- (i)  $A = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} A_n$ ;
- (ii)  $a_r \in A_r$  e  $a_s \in A_s$ , então  $a_r \cdot a_s \in A_{r+s}$ .

Uma  $R$ -álgebra com tal graduação é chamada uma  $R$ -álgebra graduada. O elemento  $x$  de  $A$  tem grau  $n$ ,  $gr(x) = n$ , se  $x \in A_n$ .

Se  $A$  é uma  $R$ -álgebra graduada, como acima, então (i) e (ii) implicam que  $1_A \in A_0$ .

Sejam  $A$  e  $B$   $R$ -álgebras graduadas; uma aplicação  $f : A \rightarrow B$  é um homomorfismo de  $R$ -álgebras graduadas se  $f$  é um homomorfismo de  $R$ -álgebras que preserva grau, ou seja,  $f(A_n) \subset B_n, \forall n$ . Se ainda  $f$  for bijetora, diremos que  $f$  é um isomorfismo de  $R$ -álgebras graduadas.

**Exemplo 1-**  $R$  é uma  $R$ -álgebra graduada, onde  $R_0 = R$  e  $R_n = \{0\}$  para  $n \in \mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$ .

**Exemplo 2-** Se  $V$  é um espaço vetorial graduado, isto é,  $V = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} V_i$ , então

$T(V) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} T^{(n)}(V)$  é uma  $R$ -álgebra, sendo

$$T^{(n)}(V) = \begin{cases} \underbrace{V \otimes V \otimes \dots \otimes V}_{n \text{ vezes}}, & \text{se } n \geq 1 \\ R, & \text{se } n = 0 \\ \{0\}, & \text{se } n < 0, \end{cases}$$

e para  $u = u_1 \otimes u_2 \otimes \dots \otimes u_m$ ,  $v = v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_n \in T(V)$ ,  $u \diamond v = u_1 \otimes \dots \otimes u_m \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_n$ . Além disso, verifica-se que  $T(V)$  é uma  $R$ -álgebra graduada, com a seguinte estrutura graduada:

Se  $v = v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_n \in T(V)$ , então  $gr(v) = \sum_{i=1}^n gr(v_i)$ . A  $R$ -álgebra graduada  $T(V)$  é chamada Álgebra Tensorial.

**Teorema 1.2** Se  $V$  é um espaço vetorial e  $A$  é uma  $R$ -álgebra graduada, sendo  $\lambda : V \longrightarrow A$  uma aplicação linear graduada, então existe um único homomorfismo de  $R$ -álgebras graduadas  $\Lambda : T(V) \longrightarrow A$  tal que  $\Lambda|_V = \lambda$ .

**Prova:** Basta definirmos  $\Lambda : T(v) \longrightarrow A$  por

$$\Lambda \left( \sum_{i=1}^k v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_i \right) := \sum_{i=1}^k \lambda(v_1) \cdot \lambda(v_2) \cdot \dots \cdot \lambda(v_n) \text{ com } k \geq 1.$$

■

Consideremos  $V_*$  um espaço vetorial graduado sobre um corpo  $F$ , com  $V_0 = \{0\}$ , e  $A_* = \bigoplus_{i=0}^{\infty} A_i$  uma  $F$ -álgebra graduada, com  $A_0 = F$ . Suponhamos ainda, que

$$i : V_* \longrightarrow \bar{A}_* = \bigoplus_{i=1}^{\infty} A_i \subset A_*$$

seja uma aplicação entre espaços vetoriais graduados, então, pelo Teorema 1.2, existe um único homomorfismo de  $F$ -álgebras graduadas

$$\widehat{i} : T(V_*) \longrightarrow A_*,$$

tal que  $\widehat{i}|_{V_*} = i$ . Finalizamos esta seção com um Teorema que nos diz em que condições  $\widehat{i}$  é um  $F$ -isomorfismo.



**Teorema 1.3** *Sejam  $A_* = \bigoplus_{i=0}^{\infty} A_i$  uma  $F$ -álgebra graduada com  $A_0 = F$  sendo um corpo, e com multiplicação  $\cdot : A_* \times A_* \rightarrow A_*$ ,  $V_*$  um espaço vetorial graduado sobre  $F$  com  $V_0 = \{0\}$ , e  $\overline{A_*} = \bigoplus_{i=1}^{\infty} A_i$ . Seja ainda  $i : V_* \rightarrow \overline{A_*}$  um homomorfismo entre espaços vetoriais graduados. Se a aplicação multiplicação  $\mu : V_* \otimes A_* \rightarrow \overline{A_*}$ , definida por  $\mu\left(\sum_j v_j \otimes a_j\right) = \sum_j i(v_j) \cdot a_j$  é isomorfismo de espaços vetoriais graduados, então  $\widehat{i} : T(V_*) \rightarrow A_*$  é um isomorfismo de álgebras graduadas.*

**Prova:** Necessitamos apenas provar que  $\widehat{i}$  é bijeção.

Sabemos que  $\widehat{i}(T^{(n)}(V_*)) \subset A_n$ , denotemos então  $\widehat{i}_n = \widehat{i}|_{T^{(n)}(V_*)}$ , e provemos por indução que  $\widehat{i}_n$  é sobrejeção de  $T^{(n)}(V_*)$  em  $A_n$ .

Para  $n = 0$ , temos que  $\widehat{i} : T^{(0)}(V_*) = F \rightarrow A_0 = F$  é dada por  $\widehat{i}(r) = r$  e claramente segue que  $\widehat{i}$  é bijeção.

Suponhamos que para todo  $k < n$ ,  $\widehat{i}_k$  seja uma sobrejeção, e mostremos que, para  $n > 0$ ,  $\widehat{i}_n : T^{(n)}(V_*) \rightarrow A_n$  é sobrejeção.

Seja  $a \in A_n$ , como  $n > 0$ , ou seja,  $a \in \overline{A_*}$ . Mas por hipótese,  $\mu$  é um isomorfismo de espaços vetoriais graduados, logo existe  $\sum_j v_j \otimes a_j \in V_* \otimes A_*$  tal que

$$a = \mu\left(\sum_j v_j \otimes a_j\right) = \sum_j i(v_j) \cdot a_j,$$

com  $v_j \in V_*$  e  $a_j \in A_{n(j)}$ . Como  $gr\left(\sum_j i(v_j) \cdot a_j\right) = n$  e  $Im(i) \subset \overline{A_*}$ , segue que  $n(j) < n$ , logo pela nossa hipótese de indução, existe  $\alpha_j \in T^{(n(j))}(V)$  tal que  $i(\alpha_j) = a_j$ .

Deste modo,

$$a = \sum_j i(v_j) \cdot i(\alpha_j) = \widehat{i}\left(\sum_j v_j \otimes \alpha_j\right),$$

de onde segue a sobrejetividade de  $\widehat{i}_n$ .

Mostremos, agora, a injetividade de  $\widehat{i}$ .

Seja  $\{v_j\}_{j \in J}$  uma base de  $V_*$ , e  $x = \sum_{j=1}^l \alpha_j v_{i_1}^j \otimes \dots \otimes v_{i_k}^j \in T(V_*)$  tal que  $\widehat{i}(x) = 0$ .

Logo

$$\sum_{j=1}^l \alpha_j i(v_{i_1}^j) \cdot i(v_{i_2}^j) \cdot \dots \cdot i(v_{i_k}^j) = 0. \quad (1)$$

Pode ser mostrado (por indução sobre  $k$ ) que o conjunto

$$\{i(v_{i_1}) \cdot i(v_{i_2}) \cdot \dots \cdot i(v_{i_k}) \in A_* : v_{i_t} \in \{v_j\}_{j \in J}, \text{ para } t = 1, 2, \dots, k, \text{ e } k \in \mathbb{N}\}$$

é linearmente independente, de onde segue por (1) que  $\alpha_j = 0$ , para  $j = 1, 2, \dots, l$ , e assim  $x = 0$ . Portanto  $\widehat{i}$  é injetora. ■

### 1.3 Pré-requisitos Homotópicos

Neste trabalho estamos supondo que os leitores tenham um certo conhecimento sobre os grupos de homotopia, e de homotopia relativa, a saber,  $\pi_n(X)$ , e  $\pi_n(X, A)$ , respectivamente, bem como sobre suas propriedades, sendo  $X$  um espaço topológico e  $A$  um subespaço de  $X$ . Nesta seção definiremos algumas relações e propriedades dos grupos de homotopia. Para um melhor esclarecimento do que trataremos, veja [5] ou [13].

Lembremos que para um espaço  $X$  com ponto base  $x_0$ ,

$$\pi_n(X, x_0) = [(S^n, s_n), (X, x_0)]$$

denota o conjunto das classes de homotopia relativa de funções  $f : (S^n, s_n) \rightarrow (X, x_0)$ , onde  $s_n = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$  e  $n \geq 1$ .

Já para a terna  $(X, A, x_0)$ , sendo  $X$  um espaço topológico,  $A \subset X$  um subespaço, e  $x_0 \in A$ , temos que  $\pi_n(X, A, x_0) = [(D^n, S^{n-1}, s_{n-1}), (X, A, x_0)]$  denota o conjunto das classes de homotopia relativa de funções  $f : (D^n, S^{n-1}, s_n) \rightarrow (X, A, x_0)$ , para  $n \geq 2$ .

**Definição 1.4** *Seja  $A \subset X$ . Uma retração de  $X$  sobre  $A$  é uma aplicação contínua  $r : X \rightarrow A$  tal que a restrição  $r|_A : A \rightarrow A$  é a identidade em  $A$ . Se existir uma tal retração, diremos que  $A$  é um retrato de  $X$ .*

*$A$  é chamado retrato por deformação (no sentido fraco) de  $X$ , se  $A$  é retrato de  $X$  e  $i \circ r \simeq 1_X$ , onde  $r : X \rightarrow A$  é uma retração e  $i : A \rightarrow X$  é a inclusão.*

Definiremos agora, retrato por deformação no sentido forte.

**Definição 1.5** *Sejam  $X$  um espaço topológico,  $A$  um subespaço de  $X$ , e  $i : A \rightarrow X$  a inclusão natural. Dizemos que  $A$  é um retrato por deformação forte de  $X$ , se existe aplicação contínua  $r : X \rightarrow A$  tal que  $r \circ i = 1_A$  e  $i \circ r \simeq 1_X$  rel  $A$ , ou seja, existe uma aplicação contínua  $F : X \times I \rightarrow X$  satisfazendo,*

- (1)  $F(x, 0) = x, \forall x \in X$ ;
- (2)  $F(x, 1) \in A, \forall x \in X$ ;
- (3)  $F(a, t) = a, \forall a \in A$  e  $\forall t \in I$ .

É imediato verificar que, se  $A$  é retrato por deformação (no sentido forte ou fraco), então  $A \simeq X$ .

Um teorema na teoria de homotopia que vale à pena ressaltarmos é o da existência da sequência exata do par. Uma demonstração de tal teorema se encontra em [10].

**Teorema 1.4** *Se  $(X, A)$  é um par de espaços topológicos, então existe uma sequência exata*

$$\begin{aligned} \dots \pi_{n+1}(A) \longrightarrow \pi_{n+1}(X) \longrightarrow \pi_{n+1}(X, A) \xrightarrow{\pi^{(d)}_{n+1}} \pi_n(A) \longrightarrow \pi_n(X) \longrightarrow \dots \\ \dots \longrightarrow \pi_1(A) \longrightarrow \pi_1(X) \longrightarrow \pi_1(X, A) \xrightarrow{\pi^{(d)}_1} \pi_0(A) \longrightarrow \pi_0(X), \end{aligned}$$

sendo que  $\pi^{(d)}_{n+1} : \pi_{n+1}(X, A) \rightarrow \pi_n(A)$  é dada por  $\pi^{(d)}_{n+1}([\alpha]) = [\alpha|_{S^n}]$ , enquanto as outras aplicações são induzidas pelas inclusões.

Se  $X$  e  $Y$  são espaços topológicos, definimos a união disjunta de  $X$  e  $Y$  como sendo o conjunto  $X \sqcup Y := (X \times \{0\}) \cup (Y \times \{1\})$  munido da topologia

$$\tau = \{A \subset X \sqcup Y : A \cap (X \times \{0\}) \text{ e } A \cap (Y \times \{1\}) \text{ são abertos em } X \times \{0\} \text{ e } Y \times \{1\}, \text{ resp.}\}.$$

Observamos que  $X \times \{0\}$  e  $Y \times \{1\}$  são abertos e fechados em  $X \times Y$ .

**Definição 1.6** *Dados espaços topológicos com pontos bases,  $(X, x_0)$  e  $(Y, y_0)$ , definimos a soma wedge  $X \vee Y$  como sendo o quociente da união disjunta  $X \sqcup Y$  obtido pela identificação de  $x_0$  e  $y_0$  em um único ponto. Mais geralmente, podemos formar a soma wedge*

$\bigvee_{\alpha} X_{\alpha}$  para uma família de espaços topológicos com ponto base  $\{(X_{\alpha}, x_{\alpha}) : \alpha \in J\}$ , onde  $J$  é um conjunto de índices, como sendo o quociente da união disjunta  $\bigsqcup_{\alpha} X_{\alpha}$ , identificando os pontos  $x_{\alpha}$  em um único ponto.

**Exemplo 1-** O espaço  $S^1 \vee S^1$  é homeomorfo à figura oito.

**Definição 1.7** *Sejam  $X, Y$  espaços topológicos, e  $f : X \rightarrow Y$  uma aplicação contínua. Tomemos, agora, a união disjunta  $(X \times I) \sqcup Y$ . Neste espaço, consideremos a relação de equivalência  $\sim$  gerada pela identificação  $(x, t) \sim y$ , se  $y = f(x)$  e  $t = 1$ . O cilindro induzido por  $f$ , denotado por  $I_f$ , é o espaço quociente  $[(X \times I) \sqcup Y] / \sim$ .*

Denotaremos a classe de  $(x, t)$ , em  $I_f$  por  $[x, t]$ , e a classe de  $y$  por  $[y]$  (pela definição de  $\sim$ ,  $[x, 1] = [f(x)]$ ).

Notamos que  $Y$  é um retrato por deformação de  $I_f$ . De fato, basta definirmos  $F : I_f \times I \rightarrow I_f$  por

$$F([x, t], s) = [x, (1 - s)t + s], \text{ se } x \in X, t, s \in I;$$

$$F([y], s) = [y], \text{ se } y \in Y, s \in I.$$

**Definição 1.8** *No espaço  $X \times Y$ ,  $X \times \{y_0\}$ , e  $\{x_0\} \times Y$  são homeomorfos, respectivamente a  $X$  e  $Y$ , além disso,  $X \times \{y_0\} \cap \{x_0\} \times Y = \{(x_0, y_0)\}$ , sendo assim, podemos identificar  $X \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times Y$  com a soma wedge  $X \vee Y$ . O produto smash  $X \wedge Y$  é então definido como o espaço quociente  $X \times Y / (X \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times Y)$ .*

Finalizamos nossos pré-requisitos homotópicos com o conceito de equivalência de homotopia fraca. No transcorrer do trabalho, veremos uma série de resultados interessantes sobre equivalência de homotopia fraca.

**Definição 1.9** *Uma aplicação contínua  $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  é equivalência de homotopia fraca se  $\pi_n(f) : \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_0)$ , dada por  $\pi_n([f]) = [f \circ \gamma]$ , para  $[\gamma] \in \pi_n(X, x_0)$ , é um isomorfismo para todo  $n$ .*

## 1.4 Pré-requisitos Homológicos

Nesta seção pressupomos que o leitor tenha um certo conhecimento sobre homologia e suas propriedades. Os resultados e definições apresentados se encontram em [10].

Inicialmente, enunciaremos teoremas que dão a existência de sequências exatas em homologia singular.

**Teorema 1.5** *Sejam  $X$  um espaço topológico e  $A$  um subespaço de  $X$ , então existe um homomorfismo  $H(d)_n$ , de  $H_n(X, A)$  em  $H_{n-1}(A)$  tal que a sequência*

$$\dots \longrightarrow H_n(A) \xrightarrow{H_n(i)} H_n(X) \xrightarrow{H_n(j)} H_n(X, A) \xrightarrow{H(d)_n} H_{n-1}(A) \xrightarrow{H_{n-1}(i)} \dots \longrightarrow H_0(X, A) \longrightarrow 0$$

*é exata.*

**Prova:** Veja [10].

■

**Teorema 1.6** *Seja  $X$  um espaço topológico, tal que  $X = A \cup B$ , sendo  $A$  e  $B$  abertos de  $X$ , com a propriedade de que  $A \cap B \neq \emptyset$ . Então existe homomorfismo  $\partial_n : H_n(X) \longrightarrow H_{n-1}(A \cap B)$  tal que a sequência, chamada de Mayer-Vietoris,*

$$\dots H_n(A \cap B) \xrightarrow{a_n} H_n(A) \oplus H_n(B) \xrightarrow{b_n} H_n(X) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A \cap B) \longrightarrow \dots \longrightarrow H_0(X),$$

*é exata, onde  $a_n = (H_n(i_1), -H_n(i_2))$  e  $b_n = H_n(k_1) + H_n(k_2)$ , sendo  $i_1 : A \cap B \longrightarrow A$ ,  $i_2 : A \cap B \longrightarrow B$ ,  $k_1 : A \longrightarrow X$  e  $k_2 : B \longrightarrow X$  as inclusões apropriadas.*

**Prova:** Veja [5].

■

A partir de agora listaremos alguns conceitos preliminares com o intuito de enunciar e compreender o Teorema de Kunneth, bem como, descrever algumas consequências deste Teorema.

**Definição 1.10** *Uma resolução livre de um  $R$ -módulo  $M$  é uma sequência exata*

$$\dots \longrightarrow F_n \xrightarrow{\partial_n} F_{n-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0,$$

na qual cada  $F_n$  é um  $R$ -módulo livre.

Dado um conjunto arbitrário  $A$  e um anel comutativo com elemento identidade  $R$ , definimos  $F(A)$  como sendo o conjunto de todas as somas formais  $\sum_{a \in A} r_a a$ , onde  $r_a \in R$ , e  $r_a = 0$  exceto para um número finito de índices  $a \in A$ .

Considerando as operações de adição e multiplicação dadas em  $F(A)$  por

$$\left( \sum_{a \in A} r_a a \right) + \left( \sum_{a \in A} s_a a \right) := \sum_{a \in A} (r_a + s_a) a,$$

$$r \left( \sum_{a \in A} r_a a \right) := \sum_{a \in A} (r r_a) a,$$

$F(A)$  torna-se um  $R$ -módulo livre, com base  $A$ , chamado  $R$ -módulo livre gerado por  $A$ .

Observamos que qualquer  $R$ -módulo  $A$  possui uma resolução livre: basta tomarmos  $F_0 = F(A)$ ,  $\varepsilon : F(A) \longrightarrow A$  sendo o homomorfismo que restrito a  $A$  é a identidade,  $F_1 = F(\text{Ker } \varepsilon)$ ,  $\partial_1 : F_1 \longrightarrow F_0$  sendo o homomorfismo que restrito a  $\text{Ker } \varepsilon$  é a inclusão e, em geral,  $F_n = F(\text{Ker } \partial_{n-1})$ ,  $\partial_n : F_n \longrightarrow F_{n-1}$  sendo o homomorfismo que restrito a  $\text{Ker } \partial_{n-1}$  é a inclusão. A resolução assim construída é chamada resolução livre canônica de  $A$ .

Se  $R$  é um domínio principal, então todo submódulo de um módulo livre é livre e deste modo a sequência

$$0 \longrightarrow F_1 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0$$

é uma resolução livre de  $A$ , com  $F_0 = F(A)$  e  $F_1 = \text{Ker } \varepsilon$ .

Tensorizando a sequência acima por  $B$ , obtemos a sequência exata

$$F_1 \otimes B \xrightarrow{\partial_1 \otimes 1_B} F_0 \otimes B \longrightarrow A \otimes B \longrightarrow 0.$$

**Definição 1.11** *Se  $A$  e  $B$  são  $R$ -módulos, onde  $R$  é um domínio principal, então definimos  $\text{Tor}(A, B)$ , também denotado por  $A * B$ , como sendo  $\text{Ker } (\partial_1 \otimes 1_B)$ .*

**Teorema 1.7** *Sejam  $A$  e  $B$   $R$ -módulos. Se  $A$  ou  $B$  é livre, então  $A * B = 0$ .*

**Prova:** Ver [5].

■

O próximo teorema a ser enunciado é conhecido como Teorema dos Coeficientes Universais.

**Teorema 1.8** *Seja  $R$  um domínio de ideais principais. Sejam ainda  $X$  um espaço topológico e  $G$  um  $R$ -módulo. Então existe uma sequência exata*

$$0 \longrightarrow H_n(X; R) \otimes G \longrightarrow H_n(X; G) \longrightarrow H_{n-1}(X; R) * G \longrightarrow 0$$

que se fatora.

**Prova:** Ver [5].

■

**Corolário 1.1** *Uma aplicação contínua  $f : X \longrightarrow Y$  induz isomorfismos em homologia com coeficientes em  $\mathbb{Z}$  se, e somente se,  $f$  induz isomorfismos em homologia com coeficientes em  $\mathbb{Q}$  e  $\mathbb{Z}_p$ , para todo primo  $p$ .*

**Prova:** Ver [5].

■

**Teorema 1.9** *Seja  $R$  um domínio de ideais principais. Sejam ainda  $X$  e  $Y$  espaços topológicos,  $G$  e  $G'$   $R$ -módulos tais que  $G * G' = 0$ , então existe uma sequência exata*

$$0 \longrightarrow [H_*(X; G) \otimes H_*(Y; G')]_n \xrightarrow{\times} H_n(X \times Y; G \otimes G') \longrightarrow [H_*(X; G) * H_*(Y; G')]_{n-1} \longrightarrow 0$$

que se fatora, onde  $[H_*(X; G) \otimes H_*(Y; G')]_n = \bigoplus_{p+q=n} H_p(X; G) \otimes H_q(Y; G')$  e

$$[H_*(X; G) * H_*(Y; G')]_{n-1} = \bigoplus_{p+q=n-1} H_p(X; G) * H_q(Y; G').$$

**Prova:** Ver [5].

■

O monomorfismo  $\times$  é chamado produto cross em homologia, e o teorema acima é conhecido como Teorema de Kunnetth para homologia singular.

Se  $H_i(X) = H_i(X; R)$  e  $H_j(Y) = H_j(Y; R)$ , então denotamos:

$$H_*(X) = \bigoplus_{i \geq 0} H_i(X) \text{ e}$$

$$H_*(X) \otimes H_*(Y) = \bigoplus_{n \geq 0} [H_*(X) \otimes H_*(Y)]_n.$$

**Corolário 1.2** *Consideremos as hipóteses do Teorema anterior satisfeitas, porém sendo  $R$  um corpo. Então  $H_*(X) \otimes H_*(Y) \cong H_*(X \times Y)$ .*

**Prova:** Visto que  $R$  é um corpo, pelo Teorema 1.7,  $H_*(X; R) * H_*(Y; R) = \{0\}$ , agora, pela exatidão da sequência do Teorema acima, segue o resultado desejado.

■

**Definição 1.12** *Um monóide é um conjunto não vazio  $M$ , munido de uma operação binária  $\cdot : M \times M \rightarrow M$  associativa que admite elemento neutro bilateral, ou seja:*

$$(1) (m_1 \cdot m_2) \cdot m_3 = m_1 \cdot (m_2 \cdot m_3), \forall m_1, m_2, m_3 \in M;$$

$$(2) \exists e \in M \text{ tal que } m \cdot e = e \cdot m = m, \forall m \in M.$$

*Se  $M$  é um espaço topológico e  $(M, \cdot)$  é um monóide, dizemos que  $(M, \cdot)$  é um monóide topológico se a operação binária  $\cdot : M \times M \rightarrow M$  é contínua.*

*Um homomorfismo entre monóides topológicos  $M$  e  $N$  é uma função contínua  $f : M \rightarrow N$  que satisfaz  $f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(n)$ ,  $\forall m, n \in M$ . Nesta última igualdade, na primeira sentença,  $\cdot$  representa a multiplicação em  $M$ , e na segunda sentença,  $\cdot$  representa a multiplicação em  $N$ . Dizemos que um homomorfismo de monóides  $f$  é um isomorfismo se  $f$  é bijetora e sua inversa  $f^{-1}$  seja contínua.*



Seja  $F$  um corpo, e  $M$  um monóide topológico com multiplicação  $\mu : M \times M \longrightarrow M$ . Então,  $H_*(M) = H_*(M; F)$  é uma  $F$ -álgebra graduada (para maiores detalhes, veja [5]), sendo

$$P(\mu) : H_*(M) \otimes H_*(M) \cong H_*(M \times M) \xrightarrow{H_*(\mu)} H_*(M)$$

a aplicação conhecida como o produto de Pontryagin.

Definimos homologia reduzida de um espaço topológico  $X$  como sendo  $\tilde{H}_n(X) = H_n(X, x_0)$ , onde  $x_0$  é um ponto de  $X$ .

A seguir, citamos algumas propriedades de homologia reduzida que nos interessarão. As justificativas de tais propriedades se encontram em [5].

**HR 1-** Se  $X$  é conexo por caminhos, então  $\tilde{H}_0(X) \cong \{0\}$ .

**HR 2-**  $H_0(X) \cong \tilde{H}_0(X) \oplus R$  e  $\tilde{H}_n(X) \cong H_n(X)$ , para  $n \geq 1$ .

**HR 3-** Se  $X$  e  $Y$  são espaços conexos por caminhos, então

$$\tilde{H}_*(X \times Y) \cong [\tilde{H}_*(X) \otimes H_*(Y)] \oplus \tilde{H}_*(Y).$$

Mais ainda, em homologia reduzida, temos um Teorema de Kunnetth análogo ao anterior, a saber, se  $R$  é um anel comutativo com elemento identidade, então a sequência

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{i=0}^n [\tilde{H}_i(X; R) \otimes \tilde{H}_{n-i}(Y; R)] \longrightarrow \tilde{H}_n(X \wedge Y; R) \longrightarrow T_{n-1} \longrightarrow 0$$

é exata, sendo  $T_{n-1} = \bigoplus_{i=0}^{n-1} \text{Tor}(\tilde{H}_i(X; R), \tilde{H}_{n-i-1}(Y; R))$  e  $X \wedge Y$  o produto smash definido na seção anterior.

Como a sequência acima é exata, se  $R$  é um corpo, então, sabendo que  $\tilde{H}_*(X) = \bigoplus_{i \geq 0} \tilde{H}_i(X)$ , segue que  $\tilde{H}_*(X) \otimes \tilde{H}_*(Y) \cong \tilde{H}_*(X \wedge Y)$ , e utilizando indução,

vemos que  $\tilde{H}_*(\underbrace{X \wedge X \wedge \dots \wedge X}_n) \cong \bigotimes_{i=1}^n \tilde{H}_*(X)$ .

## 1.5 Espaços Compactamente Gerados

**Definição 1.13** *Um espaço topológico  $X$  é compactamente gerado se, e somente se,  $X$  é um espaço de Hausdorff, e cada subconjunto  $A$  de  $X$  com a propriedade de que  $A \cap C$  é fechado para qualquer subconjunto compacto  $C$  de  $X$ , é um fechado.*

Todo espaço de Hausdorff localmente compacto é compactamente gerado, bem como qualquer espaço metrizável.

Se  $X$  é um espaço de Hausdorff, o espaço compactamente gerado associado é o espaço  $k(X)$  definido da seguinte maneira:  $k(X)$  e  $X$  coincidem como conjuntos, e um subconjunto  $A$  de  $X$  é fechado em  $k(X)$  se, e somente se,  $A \cap C$  é fechado em  $X$ , para qualquer subconjunto compacto  $C$  de  $X$ .

A seguir, listaremos uma série de resultados e propriedades que envolvem espaços compactamente gerados (c.f. [12]).

**CG 1-** Se  $X$  é um espaço de Hausdorff, então  $k(X)$  é compactamente gerado.

**CG 2-** Se  $X$  é compactamente gerado, então  $k(X) = X$ .

**CG 3-** Se  $X$  é espaço de Hausdorff, então  $X$  e  $k(X)$  têm os mesmos subconjuntos compactos.

**CG 4-** Se  $f : X \rightarrow Y$  é uma função, sendo  $X$  e  $Y$  espaços de Hausdorff, então  $k(f) : k(X) \rightarrow k(Y)$  dada pela mesma expressão de  $f$ , porém considerando os conjuntos  $X$  e  $Y$  com a topologia compactamente gerada, é contínua se, e somente se,  $f|_C : C \rightarrow Y$  é contínua, para qualquer conjunto compacto  $C \subset X$ .

Sejam  $X$  um espaço compactamente gerado, e  $A$  um subconjunto de  $X$ . Em geral,  $A$  não é compactamente gerado, quando consideramos a topologia induzida de  $X$  em  $A$ . Sendo assim, definimos subespaço de  $X$  da seguinte maneira: Inicialmente induzimos a topologia de  $X$  em  $A$  e posteriormente consideramos  $k(A)$ . O espaço  $k(A)$  é chamado subespaço de  $X$ .

**Definição 1.14** *A aplicação  $f : X \rightarrow Y$  é uma proclusão (ou aplicação quociente) se, e somente se,  $f$  é sobrejetora, e um subconjunto  $U$  de  $Y$  é aberto se, e somente se,  $f^{-1}(U)$  é aberto em  $X$ .*

**CG 5-** Se  $X$  é compactamente gerado,  $Y$  é um espaço de Hausdorff, e  $p : X \rightarrow Y$  é uma proclusão, então  $Y$  é compactamente gerado.

**CG 6-** Se  $f : X \rightarrow X'$  e  $g : Y \rightarrow Y'$  são proclusões, sendo  $X, Y, X', Y'$  espaços compactamente gerados, então  $f \times g : X \times Y \rightarrow X' \times Y'$  também é proclusão.

**Definição 1.15** *Seja  $X$  um espaço compactamente gerado e seja  $A$  um subespaço de  $X$ . Então  $(X, A)$  é um par-NDR se, e somente se, existem aplicações contínuas  $u : X \rightarrow I$ ,  $h : I \times X \rightarrow X$ , tais que*

- (1)  $A = u^{-1}(0)$ ;
- (2)  $h(0, x) = x$  para todo  $x \in X$ ;
- (3)  $h(t, x) = x$  para todo  $t \in I$ ,  $x \in A$ ;
- (4)  $h(1, x) \in A$  para todo  $x \in X$  tal que  $u(x) < 1$ .

*Dizemos que o par  $(u, h)$  representa  $(X, A)$  como um par-NDR.*

**CG 7-** Se  $X$  é compactamente gerado e se  $A$  é fechado em  $X$ , as seguintes condições são equivalentes:

- (1)  $(X, A)$  é um par-NDR;
- (2)  $(X, A)$  tem a propriedade de extensão de homotopia, com relação a espaços arbitrários.

**CG 8-** Se  $(X, A)$  e  $(Y, B)$  são pares-NDR, então

$$(X, A) \times (Y, B) = (X \times Y, X \times B \cup A \times Y)$$

é um par-NDR.

**Definição 1.16** *Uma aplicação contínua  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  é um homeomorfismo relativo se, e somente se,  $f : X \rightarrow Y$  é proclusão, e  $f|_{X-A} : X - A \rightarrow Y - B$  é um homeomorfismo.*

**CG 9-** Sejam  $(X, A)$  um par-NDR e  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  um homeomorfismo relativo. Então  $(Y, B)$  é um par-NDR.

**CG 10-** Se  $f : X \rightarrow Y$  é contínua, sendo  $X$  e  $Y$  compactamente gerados, então, sendo  $I_f$  o cilindro induzido por  $f$ ,  $(I_f, X)$  é um par-NDR.

Finalizamos esta seção com o conceito de Espaços Filtrados e algumas de suas propriedades.

**Definição 1.17** *Seja  $X$  um conjunto coberto por subconjuntos  $A_j$ , com  $j \in J$ , sendo  $J$  uma família de índices, ou seja,  $X = \bigcup_{j \in J} A_j$ . Se*

(1) cada  $A_j$  é espaço topológico;

(2) para cada  $i, j \in J$ , a topologia de  $A_i \cap A_j$  como subconjunto de  $A_i$  e de  $A_j$  coincidem;

(3) para cada  $i, j \in J$ , a intersecção  $A_i \cap A_j$  é fechada em  $A_i$  e  $A_j$ .

Então a topologia fraca de  $X$  determinada por  $\{A_j : j \in J\}$  é a topologia cujos fechados são os subconjuntos  $F$  de  $X$  tais que  $F \cap A_j$  é fechado em  $A_j$ , para cada  $j \in J$ .

A família  $\{A_j : j \in J\}$  é chamada família coerente sobre  $X$ .

Quando  $X$  tem a topologia fraca determinada por  $\{A_j : j \in J\}$ , cada  $A_j$  é fechado em  $X$ , além disso, cada  $A_j$  visto como subespaço de  $X$  retém sua topologia original.

**Exemplo 1-** Dada uma família de espaços topológicos  $\{X_j : j \in J\}$ , então a união disjunta  $\bigsqcup_{j \in J} X_j$  tem a topologia fraca determinada pela família  $\{X_j : j \in J\}$ .

**Teorema 1.10** Se  $X$  tem a topologia fraca determinada por  $\{A_j : j \in J\}$ , então, para qualquer espaço topológico  $Y$ , uma função  $f : X \rightarrow Y$  é contínua se, e somente se,  $f|_{A_j}$  é contínua, para todo  $j \in J$ .

**Prova:** Veja [10].

■

Para uma família de espaços topológicos  $\{X_j : j \in J\}$ , um espaço topológico  $Y$  e uma família de funções contínuas  $\{f_j : X_j \rightarrow Y : j \in J\}$ , vemos, pelo teorema anterior, que a aplicação  $f := \bigsqcup_{j \in J} f_j : \bigsqcup_{j \in J} X_j \rightarrow Y$ , definida por  $f(x) = f_j(x)$ , se  $x \in X_j$ , é contínua.

Seja  $X$  um espaço de Hausdorff. Então  $X$  é compactamente gerado se, e somente se, ele tem a topologia fraca determinada pela coleção de todos subconjuntos compactos de  $X$ .

**CG 11-** Se a família  $\{A_\alpha : \alpha \in J\}$  é coerente sobre  $X$ , sendo cada  $A_\alpha$  um espaço compactamente gerado, e se  $X$  é um espaço de Hausdorff (na topologia fraca), então  $X$  é compactamente gerado.

**Definição 1.18** Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , seja  $X_n$  um espaço topológico. Dizemos que a sequência  $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$  é *expandida*, se  $X_n$  é um subespaço fechado de  $X_{n+1}$ , para todo natural  $n$ . Neste caso, a família  $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$  é *coerente* sobre  $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$ . Quando  $X$  for um espaço de Hausdorff munido com a topologia fraca determinada pela família acima, diremos que  $X$  é *filtrado* pela sequência  $\{X_n\}$ .

**CG 12-** Seja  $X$  um espaço tendo a topologia fraca determinada pela sequência expandida  $\{X_n\}$ . Então qualquer subconjunto compacto  $C$  de  $X$  está inteiramente contido em  $X_n$ , para algum  $n$ .

**CG 13-** Seja  $X$  um espaço tendo a topologia fraca determinada pela sequência expandida  $\{X_n\}$ . Se  $(X_{n+1}, X_n)$  é um par-NDR para todo  $n$ , então  $X$  é compactamente gerado, e  $(X, X_n)$  é um par-NDR, para todo  $n$ .

**CG 14-** Sejam  $X, Y$  espaços compactamente gerados, filtrados por  $\{X_n\}, \{Y_n\}$ , respectivamente. Então  $X \times Y$  é filtrado por  $\{Z_n\}$ , onde

$$Z_n = \bigcup_{i=0}^n X_i \times Y_{n-i}.$$

Dizemos que  $X$  é filtrado sob uma filtração NDR  $\{X_n\}$  se  $(X_{n+1}, X_n)$  é um par-NDR para todo  $n$ .

**CG 15-** Se  $\{X_n\}$  e  $\{Y_n\}$  são filtrações NDR de  $X$  e  $Y$ , respectivamente, e  $Z_n = \bigcup_{i=0}^n X_i \times Y_{n-i}$ , então  $\{Z_n\}$  é filtração NDR de  $X \times Y$ .

## 1.6 Complexos CW

**Definição 1.19** Uma  $n$ -célula  $e^n$  é uma cópia homeomórfica do  $n$ -disco aberto  $D^n - S^{n-1}$ . Já uma  $n$ -célula fechada é uma cópia homeomórfica do  $n$ -disco fechado  $D^n$ .

**Definição 1.20** Sejam  $X$  um espaço topológico, e  $E$  uma família de  $n$ -células (podendo  $n$  variar). Se  $X = \bigcup_{e \in E} \{e\}$ , então, para cada  $k \geq 0$ , o  $k$ -esqueleto  $X^{(k)}$  de  $X$  é definido como sendo

$$X^{(k)} = \bigcup \{e^n \in E : n \leq k\}$$

Observamos que  $X^{(0)} \subset X^{(1)} \subset \dots \subset \dots$  e  $X = \bigcup_{k \geq 0} X^{(k)}$ .

**Definição 1.21** *Um complexo CW é uma terna  $(X, E, \Phi)$ , onde  $X$  é um espaço de Hausdorff,  $E$  é uma família de células em  $X$ , e  $\Phi = \{\phi_e : e \in E\}$  é uma família de aplicações, tais que:*

(1)  $X = \bigcup \{e : e \in E\}$  (união disjunta);

(2) para cada  $n$ -célula  $e \in E$ , a aplicação  $\phi_e : (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (e \cup X^{(n-1)}, X^{(n-1)})$

é um homeomorfismo relativo;

(3) se  $e \in E$ , então seu fecho,  $\bar{e}$ , está contido numa união finita de células em  $E$ ;

(4)  $X$  tem a topologia fraca determinada por  $\{\bar{e} : e \in E\}$ .

Se  $(X, E, \Phi)$  é um complexo CW, então  $X$  é chamado de espaço CW,  $(E, \Phi)$  é chamada uma decomposição CW de  $X$ , e  $\phi_e \in \Phi$  é chamada aplicação característica de  $e$ .

A partir deste momento apresentaremos uma série de propriedades de complexos CW, e algumas consequências de tais propriedades, e na medida que listamos tais propriedades, daremos algumas definições que envolvem a teoria de complexos CW.

**CW 0-** Uma reunião (intersecção) qualquer de complexos CW, ainda é um complexo CW.

**CW 1-** Se  $X$  é um complexo CW, então  $X^{(n)}$  também é um complexo CW.

**CW 2-** Se  $X$  é um complexo CW, então  $X$  é compactamente gerado.

**CW 3-** Sejam  $X$  um complexo CW e  $Y$  um espaço topológico. Então a aplicação  $f : X \rightarrow Y$  é contínua se, e somente se,  $f|_{\bar{e}^n}$  é contínua, para cada  $n$ -célula  $e^n$ .

**CW 4-** Seja  $X$  um complexo CW. Então  $X$  é conexo se, e somente se,  $X$  é conexo por caminhos.

Um complexo CW  $(X, E, \Phi)$  é finito, se  $E$  é um conjunto finito. Temos que  $S^n$  é um exemplo de complexo CW finito.

**Definição 1.22** *Seja  $(X, E, \Phi)$  um complexo CW. Se  $E' \subset E$ , definimos*

$$|E'| = \bigcup \{e : e \in E'\} \subset X,$$

e  $\Phi' = \{\phi_e : e \in E'\}$ . Dizemos que  $(|E'|, E', \Phi')$  é um subcomplexo CW de  $(X, E, \Phi)$  se  $\text{Im } \phi_e \subset |E'|$ , para qualquer  $e \in E'$ .

Pela definição de  $k$ -esqueleto, segue que qualquer  $k$ -esqueleto de um complexo CW  $X$  é um subcomplexo CW de  $X$ . Dizemos que  $(X, A)$  é um par-CW se  $X$  é um complexo CW e  $A$  é um subcomplexo CW de  $X$ .

**CW 5-** Se  $X$  é um complexo CW e  $Y$  é um subcomplexo CW, então  $X/Y$  é um complexo CW.

Desta última propriedade, decorre que o produto smash de complexos CW é um complexo CW. Utilizando a propriedade **CW 0** e a última propriedade citada, verifica-se que a soma wedge de complexos CW ainda é um complexo CW.

**CW 6-** Sejam  $X$  um complexo CW e  $Y \subset X$  um subcomplexo CW. Então existe um subconjunto aberto  $U$  em  $X$  contendo  $Y$ , sendo  $Y$  um retrato por deformação forte de  $U$ .

**CW 7-** Sejam  $X$  um complexo CW, e  $Y$  um espaço conexo por caminhos. Se  $f : X \rightarrow Y$  é uma equivalência de homotopia fraca, então  $X$  é conexo por caminhos.

**CW 8-** Sejam  $Z$  e  $Z'$  complexos CW. Se  $f : Z \rightarrow X$  e  $f' : Z' \rightarrow X'$  são equivalências de homotopia fraca, e  $g : X \rightarrow X'$  é uma aplicação contínua, então existe uma única (a menos de homotopia) aplicação contínua  $h : Z \rightarrow Z'$  que satisfaz  $g \circ f \simeq f' \circ h$ .

**Definição 1.23** *Sejam  $X$  e  $Y$  complexos CW, com  $k$ -esqueletos  $X^{(k)}$  e  $Y^{(k)}$ , respectivamente. Dizemos que a aplicação contínua  $f : X \rightarrow Y$  é celular se  $f(X^{(k)}) \subset Y^{(k)}$ , para todo  $k$ .*

**CW 9-** Se  $f : X \rightarrow Y$  é aplicação celular, então o cilindro induzido por  $f$ ,  $I_f$ , é complexo CW, tendo como subcomplexos CW,  $X$  e  $Y$ .

**CW 10-** Se  $X$  e  $Y$  são complexos CW, e  $f : X \rightarrow Y$  é uma aplicação contínua, então existe uma aplicação celular  $g : X \rightarrow Y$  tal que  $f \simeq g$ . Este resultado é conhecido como o Teorema de Aproximação Celular.

Finalizamos esta seção enunciando o Teorema de Whitehead.

**Teorema 1.11** *Sejam  $X$  e  $Y$  complexos CW, e suponhamos que  $f : X \rightarrow Y$  seja uma equivalência de homotopia fraca. Então  $f$  é uma equivalência de homotopia.*

Para as devidas justificativas dos resultados listados, bem como, uma compreensão mais aprofundada do assunto em questão, veja [5], [10], e [13].

## 1.7 Teoremas de Hurewicz

Nesta seção, definiremos ação, ação trivial e daremos alguns resultados relacionados, posteriormente enunciaremos os Teoremas de Hurewicz (absoluto e relativo), e por fim, utilizando alguns resultados de ações triviais, e os Teoremas de Hurewicz, obteremos novos isomorfismos que nos interessarão.

**Definição 1.24** *Sejam  $G$  um grupo e  $Y$  um conjunto. Dizemos que  $G$  atua sobre  $Y$  se existe uma função  $\cdot : G \times Y \rightarrow Y$ , chamada ação de  $G$  em  $Y$ , que satisfaz:*

- (1)  $(g \cdot g') \cdot y = g \cdot (g' \cdot y)$ , para quaisquer  $g, g' \in G$  e  $y \in Y$ ;
- (2)  $1_G \cdot y = y$ ,  $\forall y \in Y$ , sendo  $1_G$  o elemento neutro de  $G$ .

*Dizemos que  $G$  atua trivialmente sobre  $Y$ , ou que a ação de  $G$  em  $Y$  é trivial, se  $g \cdot y = y$ , para quaisquer  $g \in G$  e  $y \in Y$ .*

Observamos que, se  $G$  atua sobre  $Y$ , então cada elemento  $g \in G$  determina uma bijeção  $\tau_g : Y \rightarrow Y$ , que em geral, não é isomorfismo, dada por  $\tau_g(y) = g \cdot y$ .

**Exemplo 1-** Se  $X$  é um espaço topológico,  $A \subset X$  é um subespaço de  $X$  e  $x_0 \in A$ , então o grupo fundamental  $\pi_1(A, x_0)$  atua sobre  $\pi_n(X, A, x_0)$  ( $n \geq 2$ ) da seguinte forma:

Dados  $[w] \in \pi_1(A, x_0)$  e  $[\alpha_0], [\alpha_1] \in \pi_n(X, A, x_0)$  temos que  $[w] \cdot [\alpha_1] = [\alpha_0]$  se, e somente se, existe uma  $w$ -homotopia de  $\alpha_0$  para  $\alpha_1$ , sendo que uma  $w$ -homotopia de  $\alpha_0$  para  $\alpha_1$  é uma aplicação contínua  $H : (D^n \times I, S^{n-1} \times I) \rightarrow (X, A)$  tal que:

$$H(q, 0) = \alpha_0(q), \quad \forall q \in D^n,$$

$$H(q, 1) = \alpha_1(q), \quad \forall q \in D^n \text{ e}$$

$$H(s_{n-1}, t) = w(t), \quad \forall t \in I \text{ e } s_{n-1} = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n.$$



Verifica-se que a relação  $w$ -homotopia independe das classes de homotopia de  $w$ ,  $\alpha_0$  e  $\alpha_1$  e que a operação  $[w] \cdot [\alpha_1] = [\alpha_0]$  definida acima é uma ação (c.f. [11]).

Analogamente podemos definir uma ação de  $\pi_1(X, x_0)$  sobre  $\pi_n(X, x_0)$  ( $n \geq 1$ ), sendo que uma  $w$ -homotopia de  $\alpha_0$  para  $\alpha_1$  ( $\alpha_0, \alpha_1 \in \pi_n(X, x_0)$ ) é uma homotopia  $F : S^n \times I \rightarrow X$  de  $\alpha_0$  para  $\alpha_1$  tal que  $F(s_n, t) = w(t)$ ,  $\forall t \in I$ , sendo  $s_n = (1, 0, \dots, 0)$  sendo o ponto base de  $S^n$ . Se  $n = 1$ , essa ação é a conjugação, ou seja,

$$\begin{aligned} \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(X, x_0) &\longrightarrow \pi_1(X, x_0) \\ ([w], [\alpha_1]) &\longmapsto [w] \cdot [\alpha_1] = [w] * [\alpha_1] * [w]^{-1}. \end{aligned}$$

Observamos que, se  $[w] \in \pi_1(A, x_0)$ , então a bijeção

$$\tau_{[w]} : \pi_n(X, A, x_0) \longrightarrow \pi_n(X, A, x_0)$$

é na realidade um isomorfismo de grupos (se  $n \geq 2$ ). Analogamente

$$\tau_{[w]} : \pi_n(X, x_0) \longrightarrow \pi_n(X, x_0)$$

é isomorfismo  $\forall [w] \in \pi_1(X, x_0)$  e  $\forall n \geq 1$ .

**Definição 1.25** *Um espaço  $X$  é  $n$ -simples, sendo  $n$  um inteiro positivo, se a ação de  $\pi_1(X, x_0)$  em  $\pi_n(X, x_0)$  é trivial. Definimos  $X$  como sendo simples se  $X$  é  $n$ -simples, para todo inteiro positivo  $n$ .*

**Definição 1.26** *Um espaço topológico com ponto base,  $(X, x_0)$ , é  $n$ -conexo se  $\pi_i(X, x_0) = \{0\}$  para todo  $0 \leq i \leq n$ . Deste modo, um espaço  $X$  é  $0$ -conexo se, e somente se,  $X$  é conexo por caminhos. Já o par  $(X, A)$  é dito ser  $n$ -conexo, quando  $\pi_i(X, A, x_0) = 0$  para todo  $i \leq n$ . Seja  $f : X \rightarrow Y$  uma aplicação contínua, sendo  $X$  e  $Y$  espaços topológicos. Dizemos que a aplicação  $f$  é  $n$ -conexa se, e somente se, o par  $(I_f, X)$  é  $n$ -conexo.*

Agora daremos algumas preliminares para enunciarmos os Teoremas de Hurewicz.

O homomorfismo de Hurewicz  $\rho_X : \pi_n(X, x_0) \rightarrow H_n(X)$  é dado por

$$\rho_X([f]) = H_n(f)(i_n),$$

onde  $i_n$  é o gerador básico de  $H_n(S^n)$ , e  $[f] \in \pi_n(X)$ . Temos também o homomorfismo relativo de Hurewicz, a saber,  $\rho_{A,B} : \pi_n(A, B) \longrightarrow H_n(A, B)$  definido por

$$\rho_{A,B}([\alpha]) = \alpha_*(e),$$

onde  $[\alpha] \in \pi_n(A, B)$ , sendo  $\alpha : (D^n, S^{n-1}) \longrightarrow (A, B)$ ,  $e$  um gerador de  $H_n(D^n, S^{n-1})$  e  $\alpha_*$  o homomorfismo em homologia relativa  $(H_n(X, A))$  induzido por  $\alpha$ .

Sejam  $X$  um espaço topológico com subespaço  $A$ ,  $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$  uma aplicação contínua, e  $H(d)_n : H_n(X, A) \longrightarrow H_{n-1}(A)$ ,  $\pi(d)_n : \pi_n(X, A) \longrightarrow \pi_{n-1}(A)$  os homomorfismos das sequências exatas do par  $(X, A)$  em homologia e homotopia, respectivamente. Então os seguintes diagramas comutam:

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(X, A) & \xrightarrow{\pi(d)_n} & \pi_{n-1}(A) \\ \rho_{X,A} \downarrow & & \downarrow \rho_A \\ H_n(X, A) & \xrightarrow{H(d)_n} & H_{n-1}(A) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \pi_n(X) & \xrightarrow{\pi_n(f)} & \pi_n(Y) \\ \rho_X \downarrow & & \downarrow \rho_Y \\ H_n(X) & \xrightarrow{H_n(f)} & H_n(Y). \end{array}$$

**Definição 1.27** *Sejam  $X$  um espaço topológico, e  $\xi \in \pi_1(X, x_0)$ . Seja*

$$\tau_\xi : \pi_n(X, x_0) \longrightarrow \pi_n(X, x_0)$$

*o isomorfismo dado pela ação de  $\pi_1(X, x_0)$  em  $\pi_n(X, x_0)$  ( $n \geq 1$ ). Consideremos então  $W_n(X)$  como sendo o subgrupo de  $\pi_n(X, x_0)$  gerado pelo conjunto*

$$L = \{\alpha * (\tau_\xi(\alpha))^{-1} : \xi \in \pi_1(X, x_0), \alpha \in \pi_n(X, x_0)\},$$

*ou seja,  $W_n(X) = \langle L \rangle$ . Definimos  $\pi_n^*(X, x_0)$  como sendo o grupo  $\pi_n(X, x_0)/W_n(X)$ .*

Notamos que se  $n = 1$ , então

$$\begin{aligned} L &= \{\alpha * (\tau_\xi(\alpha))^{-1} : \xi, \alpha \in \pi_1(X, x_0)\} \\ &= \{\alpha * (\xi * \alpha * \xi^{-1})^{-1} : \xi, \alpha \in \pi_1(X, x_0)\} \\ &= \{\alpha * \xi * \alpha^{-1} * \xi^{-1} : \xi, \alpha \in \pi_1(X, x_0)\}, \end{aligned}$$

onde  $W_1(X)$  é o subgrupo dos comutadores de  $\pi_1(X, x_0)$ .

**Teorema 1.12** *Se  $X$  é  $n$ -simples, e  $x_0 \in X$ , então  $\pi_n^*(X, x_0) \cong \pi_n(X, x_0)$ .*

**Prova:** Como  $X$  é  $n$ -simples,  $\pi_1(X, x_0)$  atua trivialmente em  $\pi_n(X, x_0)$ , logo  $W_n(X) = \{0\}$ , de onde segue o resultado. ■

O Teorema Absoluto de Hurewicz nos diz que

**Teorema 1.13** *Seja  $X$  um espaço  $(n-1)$ -conexo ( $n \geq 1$ ), com  $x_0 \in X$ . Então*

$$\bar{\rho} : \pi_n^*(X, x_0) \longrightarrow H_n(X)$$

*é um isomorfismo, sendo  $\bar{\rho}(\bar{x}) = \rho_X(x)$ , com  $\bar{x} \in \pi_n^*(X, x_0)$ .*

**Prova:** Veja [13]. ■

Utilizando 1.13 e 1.12, segue que o homomorfismo de Hurewicz

$$\rho_X : \pi_n(X, x_0) \longrightarrow H_n(X)$$

é um isomorfismo, desde que  $X$  seja  $(n-1)$ -conexo, sendo  $n$  um inteiro maior que 1. Se  $n = 1$ , o mesmo ocorre se  $X$  for 1-simples.

**Definição 1.28** *Sejam  $X$  um espaço topológico e  $A$  um subespaço de  $X$ , com  $x_0 \in X$  e  $\xi \in \pi_1(A, x_0)$ . Consideremos então  $W_n(X, A)$  como sendo o subgrupo de  $\pi_n(X, A, x_0)$  gerado pelo conjunto*

$$P = \{\alpha - \tau'_\xi(\alpha) : \xi \in \pi_1(A, x_0), \alpha \in \pi_n(X, A, x_0)\},$$

*sendo  $\tau'_\xi : \pi_{n+1}(X, A, x_0) \longrightarrow \pi_{n+1}(X, A, x_0)$  o isomorfismo determinado pela ação de  $\xi \in \pi_1(A, x_0)$  em  $\pi_n(X, A, x_0)$ , ou seja,  $W_n(X, A) = \langle P \rangle$ . Definimos  $\pi_n^\dagger(X, x_0)$  como sendo o grupo*

$$\pi_n(X, A, x_0)/W_n(X, A).$$

**Teorema 1.14** *Se  $\pi_1(A, x_0)$  atua trivialmente sobre  $\pi_n(X, A, x_0)$ , então*

$$\pi_n^\dagger(X, A, x_0) \cong \pi_n(X, A, x_0).$$

**Prova:** Segue imediatamente das definições de  $W_n(X, A)$  e  $\pi_n^\dagger(X, A, x_0)$ . ■

Agora, o Teorema Relativo de Hurewicz afirma que

**Teorema 1.15** *Seja  $(X, A)$  um par  $(n-1)$ -conexo ( $n \geq 2$ ) tal que  $A$  e  $X$  sejam  $0$ -conexos. Então  $\tilde{\rho} : \pi_n^\dagger(X, A, x_0) \longrightarrow H_n(X, A)$  é um isomorfismo, sendo  $\tilde{\rho}(\bar{x}) = \rho_{X,A}(x)$ , com  $x \in \pi_n(X, A, x_0)$  e  $\bar{x} \in \pi_n^\dagger(X, A, x_0)$ .*

**Prova:** Veja [13]. ■

Finalmente observamos, pelas combinações dos Teoremas 1.14 e 1.15, que

$$\rho_{X,A} : \pi_n(X, A) \longrightarrow H_n(X, A)$$

é um isomorfismo, desde que exista uma ação trivial de  $\pi_1(A, x_0)$  em  $\pi_n(X, A, x_0)$  e o par  $(X, A)$  seja  $(n - 1)$ -conexo.

# Capítulo 2

## Espaço de Laços

Neste capítulo definimos espaço de laços de um espaço topológico  $X$  com ponto base  $x_0$ , o qual é um H-espaço. Porém, para mostrarmos o Teorema de James, devemos ter uma estrutura melhor para o espaço de laços. Tendo isto em vista, mostraremos que o espaço de laços tem o mesmo tipo de homotopia de um monóide topológico. Também neste capítulo daremos alguns conceitos functoriais que nos auxiliarão nos próximos capítulos.

### 2.1 Espaço de Funções

Nesta seção definiremos o espaço de funções. Além disso, enunciaremos e provaremos alguns teoremas relacionados ao espaço de funções.

**Definição 2.1** *Se  $X$  e  $Y$  são espaços topológicos, então  $X^Y$  denota o conjunto de todas funções contínuas de  $Y$  em  $X$ . A topologia compacto-aberta sobre  $X^Y$  é a topologia tendo uma subbase consistindo de todos subconjuntos*

$$(K; U) = \{f \in X^Y / f(K) \subset U\},$$

*onde  $K$  é um subconjunto compacto de  $Y$ ,  $U$  é um subconjunto aberto de  $X$ .*

Deste modo, um aberto básico em  $X^Y$  é uma intersecção finita de subconjuntos da forma  $(K; U)$ .

A seguir, definiremos a aplicação avaliação e provaremos sua continuidade, mas para isso usaremos o seguinte lema, cuja demonstração pode ser encontrada em [10].

**Lema 2.1** *Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos, com  $Y$  compacto. Se  $x_0 \in X$  e  $U$  é um subconjunto aberto de  $X \times Y$  contendo  $\{x_0\} \times Y$ , então existe uma vizinhança aberta  $L$  de  $x_0$  em  $X$  com*

$$\{x_0\} \times Y \subset L \times Y \subset U.$$

**Definição 2.2** *Se  $X$  e  $Y$  são espaços topológicos, então a aplicação avaliação  $a : X^Y \times Y \rightarrow X$  é definida por  $a(f, y) = f(y)$ .*

**Teorema 2.1** *Sejam  $X$  e  $Z$  espaços topológicos, seja  $Y$  um espaço de Hausdorff localmente compacto, e seja  $X^Y$  munido da topologia compacto-aberta. Então:*

(1) *A aplicação avaliação  $a : X^Y \times Y \rightarrow X$  é contínua.*

(2) *Uma função  $F : Z \times Y \rightarrow X$  é contínua se, e somente se,  $\bar{F} : Z \rightarrow X^Y$  dada por  $\bar{F}(z)(y) = F(z, y)$  é contínua.*

**Prova:**(1) Seja  $(f, y)$  um elemento de  $X^Y \times Y$ , e seja  $V$  uma vizinhança aberta de  $f(y)$  em  $X$ . Visto que  $f$  é contínua, existe uma vizinhança aberta  $W$  de  $y$  com  $f(W) \subset V$ ; desde que  $Y$  é localmente compacto Hausdorff, existe um conjunto aberto  $U$ , com  $\bar{U}$  compacto tal que  $y \in U \subset \bar{U} \subset W$ . Agora,  $(\bar{U}; V) \times U$  é uma vizinhança aberta de  $(f, y)$ . Se  $(f', y') \in (\bar{U}; V) \times U$ , então  $a(f', y') = f'(y') \in f'(U) \subset f'(\bar{U}) \subset V$ . Portanto  $a$  é contínua.

(2) Suponhamos que  $\bar{F} : Z \rightarrow X^Y$  seja contínua. Temos que  $F$  é a composição  $Z \times Y \xrightarrow{\bar{F} \times 1} X^Y \times Y \xrightarrow{a} X$ ; visto que  $a$  e  $\bar{F} \times 1$  são contínuas segue que  $F$  também é contínua. Inversamente, suponhamos que  $F$  seja contínua, e mostremos que  $\bar{F}$  é contínua. Para tanto, é suficiente provarmos que se  $z \in Z$  e  $(K; U)$  é qualquer vizinhança aberta subbásica de  $\bar{F}(z)$ , então existe uma vizinhança aberta  $V$  de  $z$  com  $\bar{F}(V) \subset (K; U)$ . Agora,  $\bar{F}(z) \in (K; U)$  significa que  $F(z, y) \in U$  para todo  $y \in K$ ; equivalentemente,  $F(\{z\} \times K) \subset U$ ; continuidade de  $F$  diz que  $F^{-1}(U)$  é um subconjunto aberto de  $Z \times Y$ . Daí  $F^{-1}(U) \cap (Z \times K)$  é um subconjunto aberto de  $Z \times K$  contendo  $\{z\} \times K$  e o Lema 2.1 dá uma vizinhança aberta  $V$  de  $z$  com  $V \times K \subset F^{-1}(U)$ . E daí segue que  $\bar{F}(V) \subset (K; U)$ .

■

Existe um resultado mais geral, que afirma o seguinte: Se  $X$  e  $Y$  são compactamente gerados, então a aplicação avaliação  $a : X^Y \times Y \rightarrow X$  é contínua (ver [12]).

**Corolário 2.1** *Sejam  $X$  e  $Z$  espaços topológicos, e seja  $Y$  um espaço localmente compacto de Hausdorff. Uma função  $g : Z \rightarrow X^Y$  é contínua se, e somente se, a composição  $a \circ (g \times 1)$  é contínua.*

$$Z \times Y \xrightarrow{g \times 1} X^Y \times Y \xrightarrow{a} X$$

**Prova:** Imediata do Teorema anterior.

■

## 2.2 Categorias

Vários objetos matemáticos, tais como conjuntos, grupos, espaços topológicos, junto com as aplicações apropriadas entre estes objetos (funções para conjuntos, homomorfismos para grupos, funções contínuas para espaços topológicos) têm certas propriedades em comum. Por exemplo, em cada caso, a composição de aplicações (quando definida) é associativa, ou ainda, para cada objeto  $A$  existe uma aplicação identidade  $1_A : A \rightarrow A$  com certas propriedades. Estas noções mais gerais são formalizadas na definição de categoria.

**Definição 2.3** *Uma categoria é uma classe  $\mathcal{C}$  de objetos,  $\text{obj}(\mathcal{C})$ , denotados por  $A, B, \dots$ , junto com*

(1) *uma classe de conjuntos disjuntos, denotados por  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ , um para cada par  $(A, B)$  de objetos em  $\mathcal{C}$ . Um elemento  $f$  de  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$  é chamado um morfismo de  $A$  em  $B$  e é denotado por  $f : A \rightarrow B$ .*

(2) *uma função  $\circ : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$ , para cada tripla  $(A, B, C)$  de objetos de  $\mathcal{C}$ , sendo que cada par de morfismos  $f : A \rightarrow B$ ,  $g : B \rightarrow C$ ,*

é levado no morfismo  $g \circ f$ , chamado *composição de  $g$  com  $f$* . Tal função deve satisfazer os seguintes axiomas:

(I) *Associatividade.* Se  $f : A \rightarrow B$ ,  $g : B \rightarrow C$ ,  $h : C \rightarrow D$  são morfismos de  $\mathcal{C}$ , então  $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ .

(II) *Identidade.* Para cada objeto  $B$  de  $\mathcal{C}$  existe um morfismo  $1_B : B \rightarrow B$  tal que para quaisquer  $f : A \rightarrow B$ ,  $g : B \rightarrow C$ ,  $1_B \circ f = f$  e  $g \circ 1_B = g$ .

Em uma categoria  $\mathcal{C}$ , um morfismo  $f : A \rightarrow B$  é uma equivalência se existir em  $\mathcal{C}$  um morfismo  $g : B \rightarrow A$  tal que  $g \circ f = 1_A$  e  $f \circ g = 1_B$ . Se  $f : A \rightarrow B$  é uma equivalência, então  $A$  e  $B$  são ditos equivalentes.

**Exemplo 1-**  $\mathcal{A} = \text{Sets}$ . Seja  $\text{obj}(\mathcal{A})$  a classe de todos conjuntos, para  $A, B \in \text{obj}(\mathcal{A})$ ,  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B)$  é o conjunto de todas funções  $f : A \rightarrow B$ , e a composição é a composição usual de funções. Um morfismo  $f$  de  $\mathcal{C}$  é uma equivalência se, e somente se,  $f$  é uma bijeção.

**Exemplo 2-**  $\mathcal{B} = \text{Top}$ . Neste caso  $\text{obj}(\mathcal{B})$  é a classe de todos espaços topológicos, e para cada par  $(A, B)$  de objetos de  $\mathcal{B}$ ,  $\text{Hom}_{\mathcal{B}}(A, B)$  é o conjunto de todas funções contínuas  $f : A \rightarrow B$ , e a composição em  $\mathcal{B}$  é a composição usual de funções. Um morfismo  $f$  de  $\mathcal{B}$  é uma equivalência se, e somente se,  $f$  é um homeomorfismo.

**Exemplo 3-**  $\mathcal{C} = \text{Grupos}$ . Seja  $\text{obj}(\mathcal{C})$  a classe de todos grupos, para  $A, B \in \text{obj}(\mathcal{C})$ ,  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$  é o conjunto de todos homomorfismos  $f : A \rightarrow B$ , e a composição é a composição usual de funções. Um morfismo  $g$  de  $\mathcal{C}$  é uma equivalência se, e somente se,  $g$  é um isomorfismo de grupos.

**Exemplo 4-**  $\mathcal{D} = \text{Top}^2$ . Seja  $\text{obj}(\mathcal{D})$  a classe de todos pares ordenados  $(X, A)$ , onde  $X$  é um espaço topológico e  $A$  é um subespaço de  $X$ . Para  $(X, A), (Y, B) \in \text{obj}(\mathcal{D})$ ,  $\text{Hom}_{\mathcal{D}}((X, A), (Y, B))$  é o conjunto de todas funções contínuas  $f : X \rightarrow Y$ , tais que,  $f(A) \subset B$ , e a composição é a composição usual de funções.

**Exemplo 5-**  $\mathcal{E} = \text{TMon}$ . Seja  $\text{obj}(\mathcal{E})$  a classe de todos monóides topológicos. Para  $M, N \in \text{obj}(\mathcal{E})$ ,  $\text{Hom}_{\mathcal{E}}(M, N)$  é o conjunto de todos homomorfismos contínuos  $f : M \rightarrow N$ , e a composição é a composição usual de funções.



Agora definiremos subcategorias, e a seguir citaremos alguns exemplos de subcategorias de determinadas categorias.

**Definição 2.4** *Sejam  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{A}$  categorias com  $\text{obj}(\mathcal{C}) \subset \text{obj}(\mathcal{A})$ . Então  $\mathcal{C}$  é uma subcategoria de  $\mathcal{A}$  se  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \subset \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B)$ ,  $\forall A, B \in \text{obj}(\mathcal{C})$  e se a função*

$$\circ : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$$

*é a restrição da correspondente composição com subscrito  $\mathcal{A}$ .*

**Exemplo 6-**  $\mathcal{F} = \text{Ab}$ . Seja  $\text{obj}(\mathcal{F})$  a classe de todos grupos abelianos. Para  $A, B \in \text{obj}(\mathcal{F})$ ,  $\text{Hom}_{\mathcal{F}}(A, B)$  é o conjunto de todos homomorfismos  $f : A \longrightarrow B$ , e a composição é a composição usual de homomorfismos.  $\text{Ab}$  é uma subcategoria de *Grupos*.

**Exemplo 7-**  $\mathcal{C} = \text{Top}_*$ . Seja  $\text{obj}(\mathcal{C})$  a classe de todos pares ordenados  $(X, x_0)$ , onde  $X$  é um espaço topológico e  $x_0$  é um ponto de  $X$ . Para  $(X, x_0), (Y, y_0) \in \text{obj}(\mathcal{C})$ ,  $\text{Hom}((X, x_0), (Y, y_0))$  é o conjunto de todas funções contínuas  $f : X \longrightarrow Y$  com  $f(x_0) = y_0$ , estas funções serão denotadas por  $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ . A composição é a composição usual de funções.  $\text{Top}_*$  é uma subcategoria de  $\text{Top}^2$ .

A próxima construção será útil na definição de uma nova categoria.

**Definição 2.5** *Seja  $\mathcal{C}$  uma categoria, uma congruência sobre  $\mathcal{C}$  é uma relação de equivalência  $\sim$  sobre a classe  $\bigcup_{(A,B)} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$  de todos morfismos em  $\mathcal{C}$ , tais que:*

- (1)  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$  e  $f \sim f' \implies f' \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ ;
- (2)  $f \sim f', g \sim g',$  e a composição  $g \circ f$  existe  $\implies g \circ f \sim g' \circ f'$ .

Sejam  $\mathcal{C}$  uma categoria,  $\sim$  uma congruência sobre  $\mathcal{C}$ , e seja  $[f]$  a classe de equivalência de um morfismo  $f$  de  $\mathcal{C}$ . Consideremos  $\mathcal{C}'$  como segue:

$$\text{obj}(\mathcal{C}') = \text{obj}(\mathcal{C});$$

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}'}(A, B) = \{[f]/f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)\};$$

$$[g] \circ [f] = [g \circ f].$$

Então, sem muitas dificuldades, verifica-se que  $\mathcal{C}'$  é uma categoria. Esta categoria é chamada uma categoria quociente de  $\mathcal{C}$ , e denotaremos  $Hom_{\mathcal{C}'}(A, B)$  por  $[A, B]$ .

A categoria quociente mais importante para nós é a categoria de homotopia, a qual definiremos a seguir. Lembremos antes da definição de homotopia.

**Definição 2.6** *Se  $X$  e  $Y$  são espaços topológicos e se  $f, g$  são aplicações contínuas de  $X$  em  $Y$ , então  $f$  é homotópica a  $g$ , denotado por  $f \simeq g$ , se existe uma aplicação contínua  $F : X \times I \rightarrow Y$  com  $F(x, 0) = f(x)$  e  $F(x, 1) = g(x)$  para todo  $x \in X$ . A aplicação  $F$  é chamada uma homotopia.*

Sabemos que homotopia é uma relação de equivalência sobre o conjunto de todas aplicações contínuas  $X \rightarrow Y$ . A partir disso, se  $f \in X^Y$ , então sua classe de homotopia é a classe de equivalência  $[f] = \{g \in X^Y / g \simeq f\}$ . A família de todas classes de homotopia é denotada por  $[X, Y]$ .

Ainda, temos que, se  $f_i \in Y^X$ ,  $g_i \in Z^Y$ , para  $i = 0, 1$ ,  $f_0 \simeq f_1$ , e  $g_0 \simeq g_1$ , então  $g_0 \circ f_0 \simeq g_1 \circ f_1$ , ou seja,  $[g_0 \circ f_0] = [g_1 \circ f_1]$ .

Deste modo, pelo que vimos acima, Homotopia é uma congruência sobre a categoria  $Top$ . Assim, existe a categoria quociente sobre  $Top$ , denotada por  $hTop$ . Em  $hTop$  temos que,

$$obj(hTop) = obj(Top)$$

$$Hom_{hTop}(X, Y) = \{[f] : f \in Hom_{Top}(X, Y)\}$$

$$[g] \circ [f] = [g \circ f]$$

Esta categoria será útil para justificarmos a relação entre o espaço de laços e a suspensão reduzida de um espaço topológico. Tais noções serão introduzidas em seções posteriores.

Em muitas categorias (por exemplo, *Grupos*), qualquer objeto na categoria é de fato um conjunto (geralmente com alguma estrutura adicional) e qualquer morfismo  $f : A \rightarrow B$  na categoria é uma função entre os “conjuntos fundamentais” (geralmente com alguma estrutura). Entendemos conjuntos fundamentais, no sentido usual, como sendo conjuntos sem estrutura alguma. Formalizamos esta idéia na definição a seguir.

**Definição 2.7** *Uma categoria concreta é uma categoria  $\mathcal{C}$  junto com uma função  $\sigma$  que leva cada objeto  $A$  de  $\mathcal{C}$  no conjunto  $\sigma(A)$  (chamado o conjunto fundamental de  $A$ ) de tal modo que:*

(1) *Todo morfismo  $A \rightarrow B$  de  $\mathcal{C}$  é uma função entre os conjuntos fundamentais  $\sigma(A) \rightarrow \sigma(B)$ ;*

(2) *O morfismo identidade de cada objeto  $A$  de  $\mathcal{C}$  é a função identidade sobre o conjunto fundamental  $\sigma(A)$ ;*

(3) *Composição de morfismos em  $\mathcal{C}$  funciona como composição usual de funções entre os conjuntos fundamentais.*

**Exemplo 1-** A categoria  $TMon$ , equipada com a função que leva cada monóide topológico em seu conjunto fundamental, no sentido usual, é uma categoria concreta. De maneira semelhante as categorias *Grupos*, *Sets*, *Top* e *Ab* são categorias concretas.

**Exemplo 2-** Seja  $X$  um espaço topológico e consideremos a categoria  $\mathcal{C} = \Pi(X)$ , definida da seguinte forma:

$$obj(\mathcal{C}) = X.$$

Dados  $x, y \in obj(\mathcal{C}) = X$ , então  $f \in Hom_{\mathcal{C}}(x, y)$  se, e somente se,  $f = [\alpha]$ , sendo  $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$  um caminho contínuo tal que  $\alpha(0) = y$  e  $\alpha(1) = x$ , e  $[\alpha]$  é a classe de homotopia de caminhos de  $\alpha$ . Se  $x \xrightarrow{[\alpha]} y \xrightarrow{[\beta]} z$ , então  $[\beta] \circ [\alpha] = [\beta * \alpha]$ , sendo

$$(\beta * \alpha)(t) = \begin{cases} \beta(2t), & \text{se } 0 \leq t \leq 1/2 \\ \alpha(2t - 1), & \text{se } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$\Pi(X)$  é uma categoria não concreta, chamada grupóide fundamental de  $X$ . Além disso, verifica-se que todo morfismo de  $\Pi(X)$  é uma equivalência.

**Exemplo 3-** Temos que, se  $\mathcal{C}$  é uma categoria tal que  $obj(\mathcal{C}) = \{x\}$  (conjunto unitário) então  $\mathcal{C}$  é chamada monóide. Notemos que, se  $M = Hom_{\mathcal{C}}(x, x)$ , então  $(M, \circ)$  é um monóide algébrico, ou seja,  $\circ : M \times M \rightarrow M$  é uma operação em  $M$  que é associativa e possui elemento neutro, como na Definição 1.12. Verifica-se que  $\mathcal{C}$  é uma categoria não concreta.

**Exemplo 4-** Seja  $\mathcal{C} = \Pi(x)$ , sendo  $\text{obj}(\Pi(x)) = \{x\} \subset X$  (onde  $X$  é um espaço topológico) e  $\text{Hom}_{\Pi(x)}(x, x) = \text{Hom}_{\Pi(X)}(x, x)$ . Então  $\Pi(x)$  é uma subcategoria de  $\Pi(X)$ .

Pelo exemplo anterior vemos que  $\Pi(x)$  é um monóide, e portanto é uma categoria não concreta. Observamos que  $(\text{Hom}_{\Pi(x)}(x, x), \circ)$  é igual ao grupo fundamental  $\pi_1(X, x)$ .

Quando trabalhamos com grupos e módulos, se soubermos que um determinado grupo, ou módulo é livre, o conhecimento e as propriedades de tais estruturas tornam-se, muitas vezes, mais simples de serem trabalhadas. Levando-se em consideração isto, definimos objeto livre em uma categoria concreta.

**Definição 2.8** *Seja  $F$  um objeto em uma categoria concreta  $\mathcal{C}$ ,  $X$  um conjunto não vazio, e  $i : X \rightarrow F$  uma aplicação (entre conjuntos).  $F$  é livre sobre o conjunto  $X$  se, para qualquer objeto  $A$  de  $\mathcal{C}$  e qualquer aplicação  $f : X \rightarrow A$  (entre conjuntos), existe um único morfismo de  $\mathcal{C}$ ,  $\bar{f} : F \rightarrow A$ , tal que  $\bar{f} \circ i = f$ .*

Objetos livres existem em diversas categorias. Veremos um exemplo no capítulo seguinte, a saber, a existência de objetos livres na categoria dos monóides, e na categoria dos monóides topológicos. Claro que existem objetos que não são livres em determinadas categorias, por exemplo, na categoria dos  $\mathbb{Z}$ -módulos,  $\mathbb{Q}$  não é um objeto livre (ver [6]).

Geralmente, no estudo de qualquer objeto matemático fazemos considerações sobre as aplicações entre tais objetos, para conhecermos melhor a estrutura de tal objeto matemático. Na próxima seção estudaremos as aplicações entre categorias.

## 2.3 Funtores

Um functor pode ser pensado como uma “aplicação” entre categorias, que preserva a estrutura. A idéia fundamental em Topologia Algébrica é converter problemas sobre espaços topológicos e funções contínuas em problemas sobre objetos algébricos (por exemplo, grupos, módulos, anéis, etc.) e seus homomorfismos. Os funtores desempenham um papel fundamental em tais conversões. Iniciaremos esta seção com a definição de funtores covariantes e contravariantes, e a seguir listaremos alguns exemplos.

**Definição 2.9** *Sejam  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{C}$  categorias. Um funtor covariante  $T : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$  é uma função que satisfaz:*

$$(1) A \in \text{obj}(\mathcal{A}) \implies TA \in \text{obj}(\mathcal{C}),$$

(2) se  $f : A \rightarrow A'$  é um morfismo em  $\mathcal{A}$ , então  $Tf : TA \rightarrow TA'$  é um morfismo em  $\mathcal{C}$ , tal que:

$$(I) \text{ se } f, g \text{ são morfismos em } \mathcal{A} \text{ e } g \circ f \text{ está definida, então } T(g \circ f) = (Tg) \circ (Tf);$$

$$(II) T(1_A) = 1_{TA} \text{ para todo } A \in \text{obj}\mathcal{A}.$$

**Exemplo 1-** Seja  $F : Top \rightarrow Sets$  tal que, para cada espaço topológico  $X$ ,  $F(X)$  é o conjunto  $X$ , e se  $f : X \rightarrow Y$  é função contínua, então  $F(f) : F(X) \rightarrow F(X)$  é a função  $f$ .  $F$  é chamado funtor esquecimento.

**Exemplo 2-** Se  $\mathcal{C}$  é uma categoria, o funtor identidade  $I : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  é definido por  $I(A) = A$  para todo  $A \in \text{obj}(\mathcal{C})$ , e  $I(f) = f$  para todo morfismo  $f$  de  $\mathcal{C}$ .

**Exemplo 3-** Fixemos um objeto  $A$  em uma categoria  $\mathcal{C}$ . Então  $Hom(A, ) : \mathcal{C} \rightarrow Sets$  é um funtor levando cada objeto  $B$  de  $\mathcal{C}$  no conjunto  $Hom(A, B)$  e cada morfismo  $f : B \rightarrow B'$  na aplicação induzida

$$Hom(A, f) : Hom(A, B) \rightarrow Hom(A, B'),$$

definida por  $Hom(A, f)(g) = f \circ g$ . Denotaremos  $Hom(A, f)$  por  $f_*$ .

**Definição 2.10** *Sejam  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{C}$  duas categorias. Um funtor contravariante  $S : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$  é uma função que satisfaz:*

$$(1) A \in \text{obj}(\mathcal{A}) \implies SA \in \text{obj}(\mathcal{C}),$$

(2) se  $f : A \rightarrow A'$  é um morfismo em  $\mathcal{A}$ , então  $Sf : SA' \rightarrow SA$  é um morfismo em  $\mathcal{C}$ , tal que:

$$(I) \text{ se } f, g \text{ são morfismos em } \mathcal{A} \text{ e } g \circ f \text{ está definida, então } S(g \circ f) = (Sf) \circ (Sg);$$

$$(II) S(1_A) = 1_{SA} \text{ para todo } A \in \text{obj}\mathcal{A}.$$

**Exemplo 4-** Fixemos um objeto  $B$  em uma categoria  $\mathcal{C}$ . Então  $Hom( , B) : \mathcal{C} \rightarrow Sets$  é um funtor contravariante, levando cada objeto  $A$  em  $\mathcal{C}$  no

conjunto  $\text{Hom}(A, B)$  e cada morfismo  $g : A \rightarrow A'$  na aplicação induzida

$$\text{Hom}(g, B) : \text{Hom}(A', B) \rightarrow \text{Hom}(A, B),$$

definida por  $\text{Hom}(g, B)(h) = h \circ g$ . Denotaremos a aplicação induzida de  $g$ ,  $\text{Hom}(g, B)$ , por  $g^*$ .

Finalizamos esta seção com um teorema interessante.

**Teorema 2.2** *Sejam  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  categorias e  $T : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  um funtor (covariante ou contravariante). Se  $f$  é uma equivalência em  $\mathcal{A}$  então  $T(f)$  é uma equivalência em  $\mathcal{B}$ .*

*Prova:* Como  $f$  é uma equivalência, existe  $g$ , tal que,  $f \circ g = 1_B$  e  $g \circ f = 1_A$ . Aplicando  $T$ , nestas últimas expressões, e usando a hipótese de que  $T$  é um funtor, seguirá o resultado desejado. ■

## 2.4 Funtores Adjuntos

Pares de funtores adjuntos ocorrem em muitos ramos da Matemática. Iniciaremos esta seção definindo transformação natural, que grosso modo, é uma aplicação entre dois funtores. Logo a seguir definiremos quando dois funtores são adjuntos. Adiante daremos um exemplo de pares de funtores adjuntos, em forma de teorema.

**Definição 2.11** *Sejam  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{C}$  categorias e  $S, T : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$  funtores covariantes. Uma transformação natural  $\alpha : S \rightarrow T$  é uma função que leva cada objeto  $A$  de  $\mathcal{A}$  em um morfismo  $\alpha_A : S(A) \rightarrow T(A)$  em  $\mathcal{C}$  de tal modo que, para todo morfismo em  $\mathcal{A}$   $f : A \rightarrow A'$  o diagrama abaixo é comutativo.*

$$\begin{array}{ccc} S(A) & \xrightarrow{\alpha_A} & T(A) \\ S(f) \downarrow & & \downarrow T(f) \\ S(A') & \xrightarrow{\alpha_{A'}} & T(A') \end{array}$$

*Se  $\alpha_A$  é uma equivalência para todo  $A$  em  $\mathcal{A}$ , então  $\alpha$  é um isomorfismo natural dos funtores  $S$  e  $T$ .*

Agora definimos quando dois funtores são adjuntos.

**Definição 2.12** *Sejam  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$  e  $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$  funtores. O par ordenado  $(F, G)$  é um par adjunto se, para cada objeto  $A$  em  $\mathcal{A}$  e cada objeto  $C$  em  $\mathcal{C}$ , existe uma bijeção*

$$\tau = \tau_{AC} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(FA, C) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, GC),$$

que é natural em cada variável ( $A$  e  $C$  no caso, são as variáveis). Ou seja, os seguintes diagramas comutam para todas  $f : A' \rightarrow A$  e  $g : C \rightarrow C'$  em  $\mathcal{C}$ :

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(FA, C) & \xrightarrow{(Ff)^*} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(FA', C) & & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(FA, C) & \xrightarrow{g^*} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(FA, C') \\ \downarrow \tau & & \downarrow \tau & & \downarrow \tau & & \downarrow \tau \\ \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, GC) & \xrightarrow{f^*} & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A', GC) & & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, GC) & \xrightarrow{(Gg)^*} & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, GC') \end{array}$$

Neste caso,  $(Ff)^*(h) = h \circ Ff$ ,  $f^*(k) = k \circ f$ ,  $g_*(m) = g \circ m$ , e  $(Gg)_*(n) = Gg \circ n$ .

## 2.5 Espaço de Laços e Suspensão Reduzida

**Definição 2.13** *Sejam  $(X, x_0)$  um espaço com ponto base, e  $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ . Definimos*

$$PX = \{\gamma : I \rightarrow X : \gamma \text{ é contínua e } \gamma(0) = x_0\}.$$

Visto que  $PX \subset X^I$ , podemos considerar a topologia de  $PX$  como sendo a topologia compacto-aberta induzida do espaço  $X^I$ .

Uma propriedade interessante do espaço  $PX$  é dada pelo próximo Teorema.

**Teorema 2.3** *Se  $(X, x_0)$  é um espaço com ponto base, então  $PX$  é contrátil.*

**Prova:** Devemos mostrar que  $PX$  tem o mesmo tipo de homotopia de um ponto  $\{c\}$ .

Seja  $c : I \rightarrow X \in PX$  definida por  $c(t) = x_0$ , para todo  $t \in I$ .

Consideremos então,  $f : \{c\} \rightarrow PX$  e  $g : PX \rightarrow \{c\}$  dadas por  $f(c) = c$  e  $g(\gamma) = c$ . Temos que  $g \circ f = 1_{\{c\}}$  e  $(f \circ g)(\gamma) = c$ .

Mostremos que  $f \circ g \simeq 1_{PX}$ . Para tanto, definimos  $F : PX \times I \longrightarrow PX$  por  $F(\gamma, t) = \gamma_t$ , onde  $\gamma_t(s) = \gamma(ts)$ .

Sem dificuldades, vemos que  $F(\gamma, 0) = \gamma_0$ , com  $\gamma_0(s) = \gamma(0) = x_0$  e  $F(\gamma, 1) = \gamma_1$ , com  $\gamma_1(s) = \gamma(s)$ , logo  $F(\gamma, 0) = c$ , e  $F(\gamma, 1) = \gamma$ , para todo  $\gamma \in PX$ . Além do mais, afirmamos que  $F$  é contínua.

De fato,  $F$  é contínua, desde que a composição

$$PX \times I \xrightarrow{F} PX \xrightarrow{i} X^I$$

seja contínua. Mas como  $I$  é localmente compacto, segue do Teorema 2.1 que a composição acima é contínua se, e somente se,  $\tilde{F} : PX \times I \times I \longrightarrow X$  dada por  $\tilde{F}(\gamma, s, t) = \gamma(st)$  for contínua.

Agora,  $\tilde{F}$  é a composição

$$PX \times I \times I \xrightarrow{\varphi} PX \times I \xrightarrow{a|_{PX \times I}} X,$$

onde  $\varphi(\gamma, s, t) = (\gamma, st)$  e  $a$  é a aplicação avaliação. Haja visto que  $\varphi$  e  $a$  são contínuas, segue que  $\tilde{F}$  também é. E assim, pelo que comentamos acima,  $F$  é contínua. Portanto  $PX$  é contrátil.

■

Em  $PX$ , temos um subespaço especial, o Espaço de Laços, definido como segue.

**Definição 2.14** *Seja  $(X, x_0)$  um espaço com ponto base. Então seu espaço de laços, denotado por  $\Omega(X, x_0)$ , é o espaço de funções*

$$\Omega(X, x_0) = (X, x_0)^{(I, \partial I)},$$

*visto como subespaço de  $X^I$  (este último munido da topologia compacto-aberta). Escolhemos  $l_{x_0} : I \longrightarrow X$ , definida por  $l_{x_0}(t) = x_0 \forall t \in I$ , como ponto base de  $\Omega(X, x_0)$ .*

**Observação 1:** Se  $(X, x_0) \in \text{obj}(hTop_*)$ , então pela definição acima temos que o espaço de laços de  $(X, x_0)$ , denotado por  $\Omega(X, x_0)$ , tem como ponto base  $l_{x_0}$ . Logo  $\Omega(X, x_0) \in \text{obj}(hTop_*)$ . Ainda, se  $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$  é função contínua, então existe



$\Omega f : \Omega(X, x_0) \longrightarrow \Omega(Y, y_0)$  definida por  $\Omega f(\gamma) = f \circ \gamma$ , e mais,  $\Omega f(l_{x_0}) = l_{y_0}$  (para mais detalhes, ver [10]). Sem muitos problemas, verifica-se que  $\Omega : hTop_* \longrightarrow hTop_*$  é um funtor.

**Definição 2.15** *Se  $(Z, z_0)$  é um espaço com ponto base, então a suspensão reduzida de  $Z$ , denotada por  $\Sigma Z$ , é o espaço quociente*

$$\Sigma Z = (Z \times I) / ((Z \times \partial I) \cup (\{z_0\} \times I)).$$

**Observação 2:** Se  $(z, t) \in Z \times I$ , denotamos o correspondente elemento de  $\Sigma Z$  por  $[z, t]$ . Abusaremos da notação, e escreveremos  $\bar{z}_0 = [z, 0] = [z, 1] = [z_0, t] \forall z \in Z$  e  $t \in I$ .

**Observação 3:** Dado um espaço com ponto base  $(Z, z_0)$ , existe  $\Sigma Z$  definida como acima, logo  $(\Sigma Z, \bar{z}_0) \in obj(hTop_*)$ . Além disso, se  $f : (Z, z_0) \longrightarrow (W, w_0)$  é contínua, então existe  $\Sigma f : (\Sigma Z, \bar{z}_0) \longrightarrow (\Sigma W, \bar{w}_0)$  contínua dada por  $\Sigma f([z, t]) = [f(z), t]$  (para mais detalhes, ver [10]). Sem muitas dificuldades, mostra-se que  $\Sigma : hTop_* \longrightarrow hTop_*$  é um funtor. Além disso, notamos que, se  $(X, x_0) \simeq (Y, y_0)$ , então  $\Omega(\Sigma X, l_{x_0}) \simeq \Omega(\Sigma Y, l_{y_0})$ .

**Observação 4:** Sendo  $q : X \times I \longrightarrow (X \times I) / ((X \times \partial I) \cup (\{x_0\} \times I))$  a aplicação quociente natural, podemos pensar no subespaço  $C_+(X) = q(X \times [1/2, 1])$  de  $\Sigma X$ . Sem muitas dificuldades, verifica-se que  $C_+(X) = (X \times [1/2, 1]) / (X \times \{1\}) \cup (\{x_0\} \times [1/2, 1])$ . De maneira análoga, temos o subespaço  $C_-(X) = q(X \times [0, 1/2])$ . Os espaços  $C_+(X)$  e  $C_-(X)$  são chamados cones reduzidos.

**Teorema 2.4** *Os cones reduzidos  $C_+(X)$  e  $C_-(X)$ , definidos na última observação, são contráteis. Além disso,  $C_+(X) \cap C_-(X)$  e  $X$  são homeomorfos.*

**Prova:** Lembremos que um espaço  $X$  é contrátil se  $X$  tem o mesmo tipo de homotopia de um ponto, o que é equivalente a dizer que existe uma retração por deformação entre  $X$  e o ponto em questão. Sendo assim, consideremos

$$H_+ : C_+(X) \times I \longrightarrow C_+(X) \text{ e } H_- : C_-(X) \times I \longrightarrow C_-(X)$$

definidas por

$$H_+([x, t], s) = [x, (1-s)t + s] \text{ e } H_-([x, t], s) = [x, t(1-s)].$$

Verifica-se que tanto  $H_+$ , quanto  $H_-$  são contínuas, além disso, satisfazem:

$$(1) H_+([x, t], 0) = [x, t], H_+([x, t], 1) = [x, 1] = \bar{x}_0, \text{ e } H_+(\bar{x}_0, t) = \bar{x}_0;$$

$$(2) H_-([x, t], 0) = [x, t], H_-([x, t], 1) = [x, 0] = \bar{0} \text{ e } H_-(\bar{x}_0, s) = \bar{x}_0.$$

Portanto  $C_+(X)$  e  $C_-(X)$  são contráteis. Agora, que  $C_+(X) \cap C_-(X)$  e  $X$  são homeomorfos é imediato, basta definirmos  $G : C_+(X) \cap C_-(X)$  por  $G([x, 1/2]) = x$ .

■

Um Teorema que relaciona o espaço de laços de um espaço topológico  $X$  e a teoria de complexos CW, é o Teorema de Milnor, o qual enunciaremos a seguir.

**Teorema 2.5** *Qualquer espaço de laços de um complexo CW tem o mesmo tipo de homotopia de um complexo CW.*

**Prova:** Veja [9].

■

**Observação 5:** Suponhamos que  $X$  seja um complexo CW, sendo  $x_0$  uma 0-célula de  $X$ , então, como  $I$  é complexo CW, e  $(X \times \partial I) \cup (\{x_0\} \times I)$  é subcomplexo de  $X \times I$  (notemos aqui, a utilização da propriedade **CW 1**), pela propriedade **CW 5**,  $\Sigma X$  também é um complexo CW. Naturalmente, por um argumento análogo ao feito acima, cones reduzidos também são complexos CW, quando  $X$  for complexo CW. E mais,  $C_+(X)$  e  $C_-(X)$  são na realidade, subcomplexos CW de  $\Sigma X$ .

Suspensão Reduzida e Espaço de Laços de um espaço  $(X, x_0)$  se relacionam através do próximo teorema.

**Teorema 2.6**  $(\Sigma, \Omega)$  é um par adjunto de funtores sobre  $hTop_*$ .

Para demonstrarmos o Teorema acima, necessitaremos de dois resultados, que serão dados através de lemas.

**Lema 2.2** *Se  $F : (\Sigma X, \overline{x_0}) \longrightarrow (Y, y_0)$  é contínua, então  $F^\# : X \longrightarrow \Omega(Y, y_0)$  definida por  $F^\#(x)(t) = F([x, t])$  é contínua.*

*Prova:* Se mostrarmos que  $i \circ F^\# : X \longrightarrow Y^I$  é contínua, onde  $i : \Omega(Y, y_0) \longrightarrow Y^I$  é a inclusão, seguirá que  $F^\#$  é contínua.

Visto que  $I$  é localmente compacto, pelo Teorema 2.1, temos que  $i \circ F^\# : X \longrightarrow Y^I$  é contínua se, e somente se,  $\overline{i \circ F^\#} : X \times I \longrightarrow Y$  definida por  $\overline{i \circ F^\#}(x, t) = F([x, t])$ , é contínua.

Agora,  $\overline{i \circ F^\#}$  é a composição

$$X \times I \xrightarrow{q} \Sigma X \xrightarrow{F} Y,$$

onde  $q(x, t) = [x, t]$ . E como  $q$  e  $F$  são contínuas, segue que  $\overline{i \circ F^\#}$  é contínua. Portanto  $F^\#$  é contínua. ■

**Lema 2.3** *Se  $G : (X, x_0) \longrightarrow (\Omega(Y, y_0), l_{y_0})$  é contínua, então  $G^b : (\Sigma X, \overline{x_0}) \longrightarrow (Y, y_0)$  definida por  $G^b([x, t]) = G(x)(t)$  é contínua.*

*Prova:* Notemos inicialmente que  $G(x_0) = l_{y_0}$ , logo  $G(x_0)(t) = l_{y_0}(t) = y_0$ . Também notamos que  $G^b([x, 0]) = G^b([x, 1]) = y_0$ . Como  $G$  é contínua, segue que

$$i \circ G : X \longrightarrow Y^I$$

também é contínua. Sendo  $I$  é localmente compacto, segue do Teorema 2.1 que  $\widetilde{i \circ G} : X \times I \longrightarrow Y$ , dada por  $\widetilde{i \circ G}(x, t) = G(x)(t)$ , é contínua. Temos ainda que

$$\widetilde{i \circ G}(x, 0) = G(x)(0) = y_0,$$

$$\widetilde{i \circ G}(x, 1) = G(x)(1) = y_0 \text{ e}$$

$$\widetilde{i \circ G}(x_0, t) = G(x_0)(t) = y_0.$$

Deste modo, existe aplicação contínua  $\overline{i \circ G} : \Sigma X \longrightarrow Y$ , tal que  $\overline{i \circ G}([x, t]) = \widetilde{i \circ G}(x, t) = G(x)(t) = G^b([x, t])$ . Portanto  $G^b$  é contínua.

■

**Prova do Teorema 2.6:** Sejam  $(X, x_0), (Y, y_0)$  espaços com ponto base. Pelo Lema 2.2, podemos considerar  $\tau_{XY} : [\Sigma X, Y] \longrightarrow [X, \Omega Y]$  definida por  $\tau_{XY}([F]) = [F^\#]$ .

Afirmamos que  $\tau_{XY}$  está bem definida.

De fato, sejam  $F_0, F_1 : (\Sigma X, \bar{x}_0) \longrightarrow (Y, y_0)$  contínuas, tais que  $F_0 \simeq F_1$  rel  $\bar{x}_0$  via homotopia  $H : \Sigma X \times I \longrightarrow Y$ .

Seja  $H^\# : X \times I \longrightarrow \Omega Y$  dada por  $H^\#(x, s)(t) = H([x, t], s)$ .

$H^\#$  é contínua, pois  $\overline{H^\#} : X \times I \times I \longrightarrow Y$ , definida por  $\overline{H^\#}(x, s, t) = H([x, t], s)$  é contínua. Para tanto, basta notarmos que  $\overline{H^\#}$  é a composição

$$X \times I \times I \xrightarrow{T} X \times I \times I \xrightarrow{q \times 1_I} \Sigma X \times I \xrightarrow{H} Y,$$

onde  $T(x, s, t) = (x, t, s)$ , e  $q(x, t) = [x, t]$ .

Temos que,

$$H^\#(x, 0)(s) = H([x, s], 0) = F_0([x, s]) = F_0^\#(x)(s) \implies H^\#(x, 0) = F_0^\#(x),$$

$$H^\#(x, 1)(s) = H([x, s], 1) = F_1([x, s]) = F_1^\#(x)(s) \implies H^\#(x, 1) = F_1^\#(x),$$

$$H^\#(x_0, t)(s) = H([x_0, s], t) = y_0 = l_{y_0}(s) \implies H^\#(x_0, t) = l_{y_0}.$$

Portanto  $F_0^\# \simeq F_1^\#$  rel  $x_0$  via homotopia  $H^\#$ . Logo  $\tau_{XY}$  está bem definida.

Pelo Lema 2.3, podemos definir  $\gamma_{XY} : [X, \Omega Y] \longrightarrow [\Sigma X, Y]$  por  $\gamma_{XY}([G]) = [G^\flat]$ .

De maneira semelhante à que fizemos anteriormente, verifica-se que  $\gamma_{XY}$  está bem definida.

Além do mais, vê-se que  $\gamma_{XY} = \tau_{XY}^{-1}$ . Logo  $\tau_{XY}$  é uma bijeção.

Finalmente, para  $f : X' \longrightarrow X$  e  $g : Y \longrightarrow Y'$  em  $hTop_*$ , temos:

$$\begin{aligned} (1) (F^\# \circ f)(x')(t) &= F^\#(f(x'))(t) \\ &= F([f(x'), t]) \\ &= F(\Sigma f([x', t])) \\ &= (F \circ \Sigma f)[x', t] \\ &= (F \circ \Sigma f)^\#(x')(t), \quad \forall x' \in X', \quad \forall t \in I. \end{aligned}$$

Logo  $F^\# \circ f = (F \circ \Sigma f)^\#$ , e assim, para  $[F] \in [\Sigma X, Y]$ , segue que

$$\begin{aligned}
[\tau_{X'Y} \circ (\Sigma f)^*]([F]) &= \tau_{X'Y}((\Sigma f)^*([F])) \\
&= \tau_{X'Y}([F \circ \Sigma f]) \\
&= [(F \circ \Sigma f)^\#] \\
&= [F^\# \circ f] \\
&= f^*([F^\#]) \\
&= f^*(\tau_{XY}([F])).
\end{aligned}$$

Deste modo, o diagrama

$$\begin{array}{ccc}
[\Sigma X, Y] & \xrightarrow{(\Sigma f)^*} & [\Sigma X', Y] \\
\tau_{XY} \downarrow & & \downarrow \tau_{X'Y} \\
[X, \Omega Y] & \xrightarrow{f^*} & [X', \Omega Y]
\end{array}$$

é comutativo.

$$\begin{aligned}
(2) \quad (g \circ F)^\#(x)(t) &= (g \circ F)([x, t]) \\
&= g(F([x, t])) \\
&= g(F^\#(x)(t)) \\
&= [g \circ F^\#(x)](t) \\
&= \Omega g(F^\#(x))(t) \\
&= [\Omega g \circ F^\#](x)(t), \quad \forall x \in X, \text{ e } \forall t \in I.
\end{aligned}$$

Logo  $(g \circ F)^\# = \Omega g \circ F^\#$ , e assim, para  $[F] \in [\Sigma X, Y]$ , segue que

$$\begin{aligned}
[\tau_{X'Y} \circ g_*]([F]) &= \tau_{X'Y}(g_*([F])) \\
&= \tau_{X'Y}([g \circ F]) \\
&= [(g \circ F)^\#] \\
&= [\Omega g \circ F^\#] \\
&= (\Omega g)_*([F^\#]) \\
&= (\Omega g)_*(\tau_{XY}([F])) \\
&= [(\Omega g)_* \circ \tau_{XY}]([F]).
\end{aligned}$$

Portanto o diagrama

$$\begin{array}{ccc} [\Sigma X, Y] & \xrightarrow{g^*} & [\Sigma X, Y'] \\ \tau_{XY} \downarrow & & \downarrow \tau_{X'Y} \\ [X, \Omega Y] & \xrightarrow{(\Omega g)^*} & [X, \Omega Y'] \end{array}$$

é comutativo.

De (1), (2), e pela bijeção de  $\tau_{XY}$  segue que  $(\Sigma, \Omega)$  é um par de funtores adjuntos. ■

## 2.6 Colimite

Sejam  $\mathcal{A}$ , e  $\mathcal{I}$  categorias.

O colimite de um funtor (covariante)  $F : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{A}$  (se existir) é um objeto de  $\mathcal{A}$

$$\text{colim} F = C \in \text{obj}(\mathcal{A}),$$

junto com morfismos  $q_i : F(i) \rightarrow C$  em  $\mathcal{A}$ , para cada  $i \in \text{obj}(\mathcal{I})$  tais que se  $\alpha_{ji} : j \rightarrow i$  é um morfismo de  $\mathcal{I}$ , então  $q_i \circ F(\alpha_{ji}) = q_j$ . E se  $A \in \text{obj}(\mathcal{A})$  e  $f_i : F(i) \rightarrow A$  ( $i \in \mathcal{I}$ ) são morfismos de  $\mathcal{A}$  tais que, para cada morfismo  $\alpha_{ji} : j \rightarrow i$  em  $\mathcal{I}$  tem-se  $f_i \circ F(\alpha_{ji}) = f_j$ , então existe um único morfismo  $f : C \rightarrow A$  tal que  $f \circ q_j = f_j, \forall j \in \text{obj} \mathcal{I}$ .

O seguinte diagrama ilustra a propriedade definidora de  $\text{colim} F$ .

$$\begin{array}{ccc} \text{colim} F & \xrightarrow{\quad f \quad} & A \\ & \swarrow q_j \quad \searrow f_j & \\ & F(j) & \\ & \downarrow F(\alpha_{ji}) & \\ & F(i) & \end{array}$$

**Exemplo 1-** Consideremos a mesma notação anterior. Se  $\mathcal{I}$  é uma categoria discreta (isto é, os únicos morfismos são as identidades), então

$$\text{colim}_{i \in \mathcal{I}} F = \bigoplus_{i \in \mathcal{I}} F(i)$$

Existe um conceito de limite, que é um conceito dual de colimite, porém para o que seguiremos, utilizaremos apenas as noções de colimite.

Finalizamos esta seção com o conceito de limite direto.

Dizemos que um conjunto parcialmente ordenado  $\mathcal{I}$  é filtrado, ou dirigido, se quaisquer dois elementos  $i, j \in \mathcal{I}$  têm um limitante superior  $k \in \mathcal{I}$  ( $i \leq k$ , e  $j \leq k$ ). Mais geralmente, uma categoria pequena  $\mathcal{I}$  (categoria na qual a classe dos objetos é um conjunto) é filtrada se:

(1) Para quaisquer  $i, j \in \mathcal{I}$ , existem  $k \in \mathcal{I}$  e morfismos  $i \rightarrow k, j \rightarrow k$ ;

(2) Para quaisquer morfismos  $u, v : i \rightarrow j$  existe um morfismo  $w : j \rightarrow k$  tal que  $w \circ u = w \circ v$  em  $\text{Hom}(i, k)$ .

Um colimite filtrado em uma categoria  $\mathcal{A}$  é o colimite de um funtor  $A : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{A}$ , no qual  $\mathcal{I}$  é uma categoria filtrada. Tal colimite chamaremos de limite direto e denotaremos por  $\varinjlim A_i$ .

Observamos que se  $\mathcal{I}$  é uma categoria pequena filtrada, e  $\mathcal{A}$  é a categoria dos conjuntos, ou a categoria dos espaços topológicos, ou a categoria dos R-módulos, então qualquer funtor  $F : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{A}$  possui limite direto (para maiores informações veja [3]).

No capítulo 4 provaremos a existência do limite direto na categoria dos R-módulos.

## 2.7 H-espaço

Nesta seção, todos espaços são espaços com ponto base, e o símbolo  $\simeq$  denota a relação de homotopia relativa ao ponto base entre funções.

**Definição 2.16** *Um espaço topológico  $X$  com ponto base  $x_0$  é um H-espaço se existe uma multiplicação contínua  $\mu : X \times X \rightarrow X$  tal que*

$$\mu \circ i_1 \simeq 1_X \simeq \mu \circ i_2,$$

sendo  $i_1, i_2 : X \rightarrow X \times X$  as inclusões definidas por

$$i_1(x) = (x, x_0), \quad i_2(x) = (x_0, x) \quad \forall x \in X$$

Observamos que, se  $B$  é um H-espço, e  $A \simeq B$ , então, naturalmente,  $A$  herda uma estrutura de H-espço de  $B$ .

**Exemplo 1-** Todo monóide topológico é um H-espço.

**Exemplo 2-** Todo grupo topológico é um H-espço.

**Definição 2.17** *Sejam  $X$  e  $Y$  H-espços, com multiplicações  $\mu_X$  e  $\mu_Y$ . Uma aplicação contínua  $f : X \rightarrow Y$  é uma H-aplicação se o seguinte diagrama comuta homotópicamente,*

$$\begin{array}{ccc} X \times X & \xrightarrow{f \times f} & Y \times Y \\ \mu_X \downarrow & & \downarrow \mu_Y \\ X & \xrightarrow{f} & Y, \end{array}$$

ou seja,  $\mu_Y \circ f \times f \simeq f \circ \mu_X$ .

**Exemplo 3-** Todo homomorfismo de monóides topológicos é uma H-aplicação.

**Teorema 2.7** *Se  $Y$  é um H-espço, com ponto base  $y_0$ , então para cada espaço topológico  $X$ , o conjunto  $[X, Y]$  das classes de homotopia (relativas a um ponto base) de aplicações de  $X$  em  $Y$  pode ser munido de um produto natural de tal maneira que a classe de homotopia da aplicação constante igual a  $y_0$  seja um elemento neutro bilateral.*

*Prova:* Suponhamos que  $Y$  seja um H-espço, então dadas  $f_1, f_2 : X \rightarrow Y$ , podemos definir

$$f_1 \cdot f_2 = \mu \circ (f_1 \times f_2) \circ \Delta_X,$$

sendo  $\Delta_X : X \rightarrow X \times X$  a aplicação diagonal.

O produto assim definido é compatível com homotopia, pois sejam as aplicações  $g_1, g_2 : X \rightarrow Y$  tais que  $f_1 \simeq g_1$  através da homotopia  $H_1 : X \times I \rightarrow Y$ , e seja  $H_2 : X \times I \rightarrow Y$  a homotopia entre  $f_2$  e  $g_2$ , então basta tomarmos

$$H = H_1 \cdot H_2 = \mu \circ (H_1 \times H_2) \circ \Delta_{X \times I},$$

que teremos uma homotopia entre  $f_1 \cdot f_2$  e  $g_1 \cdot g_2$ . Portanto, o produto acima definido, induz um produto em  $[X, Y]$  da seguinte forma:

$$[f_1] \cdot [f_2] := [f_1 \cdot f_2] = [\mu \circ (f_1 \times f_2) \circ \Delta],$$



onde  $[f_1], [f_2] \in [X, Y]$ .

Dizemos que um produto  $\cdot$  em  $[X, Y]$  é natural, se dados quaisquer espaços  $X'$  e  $X$ , e uma função contínua  $\phi : X' \rightarrow X$ , então  $\phi^* : [X, Y] \rightarrow [X', Y]$ , definida por  $\phi^*([f]) = [f \circ \phi]$ , é um homomorfismo, ou seja,

$$\phi^*([f_1] \cdot [f_2]) = \phi^*([f_1]) \cdot \phi^*([f_2]), \forall [f_1], [f_2] \in [X, Y].$$

Afirmamos que o produto acima definido é natural, pois seja  $\phi : X' \rightarrow X$  tal que  $\phi^* : [X, Y] \rightarrow [X', Y]$ , e notemos que

$$\phi^*[f_1 \cdot f_2] = \phi^*[\mu \circ (f_1 \times f_2) \circ \Delta_X] = [\mu \circ (f_1 \times f_2) \circ \Delta_X \circ \phi]$$

$$\phi^*[f_1] \cdot \phi^*[f_2] = [f_1 \circ \phi] \cdot [f_2 \circ \phi] = [(f_1 \circ \phi) \cdot (f_2 \circ \phi)] = [\mu \circ ((f_1 \circ \phi) \times (f_2 \circ \phi)) \circ \Delta_{X'}],$$

e como  $(f_1 \times f_2) \circ \Delta_X \circ \phi = ((f_1 \circ \phi) \times (f_2 \circ \phi)) \circ \Delta_{X'}$  segue que o produto é natural. Finalmente, verifiquemos que  $[l_{y_0}]$ , a classe da aplicação constante igual a  $y_0$ , é o elemento neutro. Para tanto, seja  $[f] \in [X, Y]$ , temos que  $[f_1] \cdot [l_{y_0}] := [\mu \circ (f \times l_{y_0}) \circ \Delta_X]$ , mas  $[\mu \circ (f \times l_{y_0}) \circ \Delta_X](x) = \mu(f(x), y_0) = (\mu \circ i_1)(f(x))$ , e como  $\mu \circ i_1 \simeq id$  segue que  $\mu \circ (f \times l_{y_0}) \circ \Delta_X \simeq f$ , portanto  $[f] \cdot [l_{y_0}] = [f]$ . De modo semelhante vemos que  $[l_{y_0}] \cdot [f] = [f]$ .

■

**Definição 2.18** Dizemos que um  $H$ -espaço  $X$  é homotopicamente associativo quando

$$\mu \circ (\mu \times 1_X) \simeq \mu \circ (1_X \times \mu).$$

**Definição 2.19** Dada uma função contínua  $f : X \rightarrow Y$  de um espaço topológico  $X$  para um  $H$ -espaço  $Y$ , dizemos que  $f$  é homotopicamente inversível se existe  $g : X \rightarrow Y$  contínua, que satisfaz

$$f \cdot g = \mu \circ (f \times g) \circ \Delta_X \simeq \mu \circ (g \times f) \circ \Delta_X \simeq L_{y_0},$$

onde  $L_{y_0} : X \rightarrow Y$  é definida por  $L_{y_0}(x) = y_0 \forall x \in X$ .

**Definição 2.20** Um  $H$ -grupo (group like space) é um  $H$ -espaço  $Y$  homotopicamente associativo tal que a aplicação identidade  $1_Y : Y \longrightarrow Y$  é homotopicamente inversível.

**Teorema 2.8** Se  $Y$  é um  $H$ -grupo, então  $[X, Y]$  é um grupo com a operação induzida de  $Y$ , para todo espaço topológico  $X$ .

**Prova:** A condição  $\mu \circ (\mu \times 1_Y) \simeq \mu \circ (1_Y \times \mu)$  é equivalente a associatividade em  $[X, Y]$ , e para cada  $[f] \in [X, Y]$ , seu inverso homotópico é  $[j \circ f]$ , sendo  $j : Y \longrightarrow Y$  a inversa homotópica de  $1_Y$ , ou seja,  $\mu \circ (j \times 1_Y) \circ \Delta_X \simeq L_{y_0} \simeq \mu \circ (1_Y \times j) \circ \Delta_X$ .

■

Um exemplo de  $H$ -grupo, é o espaço de laços.

**Teorema 2.9** Se  $(X, x_0)$  é um espaço com ponto base, então  $\Omega(X, x_0)$  é um  $H$ -grupo.

**Prova:** Seja  $\mu : \Omega(X, x_0) \times \Omega(X, x_0) \longrightarrow \Omega(X, x_0)$  definida por  $\mu(w, w') = w * w'$ , onde

$$(w * w')(t) = \begin{cases} w(2t), & \text{se } 0 \leq t \leq 1/2 \\ w'(2t - 1), & \text{se } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Para mostrarmos que  $\mu$  é contínua, basta verificarmos a continuidade de  $i \circ \mu : \Omega(X, x_0) \times \Omega(X, x_0) \longrightarrow X^I$ , onde  $i : \Omega(X, x_0) \hookrightarrow X^I$  é a inclusão.

Agora, como  $I$  é localmente compacto, pelo 2.1,  $i \circ \mu$  é contínua se, e somente se,  $\bar{\mu} = \widetilde{i \circ \mu} : \Omega(X, x_0) \times \Omega(X, x_0) \times I \longrightarrow X$ , definida por  $\bar{\mu}(w, w', t) = (w * w')(t)$ , é contínua.

Observamos que

$$\Omega(X, x_0) \times \Omega(X, x_0) \times [0, 1] = F_1 \cup F_2,$$

sendo  $F_1 = \Omega(X, x_0) \times \Omega(X, x_0) \times [0, 1/2]$  e  $F_2 = \Omega(X, x_0) \times \Omega(X, x_0) \times [1/2, 1]$  fechados em  $\Omega(X, x_0) \times \Omega(X, x_0) \times I$ . Ainda, em  $F_1 \cap F_2 = \Omega(X, x_0) \times \Omega(X, x_0) \times \{1/2\}$ ,  $\bar{\mu}|_{F_1} = \bar{\mu}|_{F_2}$  (pois  $\bar{\mu}|_{F_1}(w, w', 1/2) = w(1) = x_0 = w'(0) = \bar{\mu}|_{F_2}(w, w', 1/2)$ ).

Em  $F_1$ ,  $\widetilde{i \circ \mu}$  é igual a composição

$$F_1 = \Omega(X, x_0) \times \Omega(X, x_0) \xrightarrow{p_1 \times q} \Omega(X, x_0) \times I \xrightarrow{a} X,$$

onde  $p_1 : \Omega(X, x_0) \times \Omega(X, x_0) \longrightarrow \Omega(X, x_0)$  é a projeção sobre o primeiro fator,  $q : [0, 1/2] \longrightarrow I$  é definida por  $q(t) = 2t$  e  $a$  é a aplicação avaliação. Logo  $\bar{\mu}|_{F_1}$  é contínua.

Um argumento análogo mostra que  $\bar{\mu}|_{F_2}$  é contínua. Portanto, pelo Lema da colagem,  $\mu$  é contínua.

Para mostrarmos que  $\Omega(X, x_0)$  é um H-grupo falta-nos verificar que:

- (1)  $\mu \circ i_1 \simeq 1_{\Omega(X, x_0)} \simeq \mu \circ i_2$ , sendo  $i_1, i_2 : \Omega(X, x_0) \longrightarrow \Omega(X, x_0) \times \Omega(X, x_0)$  definidas por  $i_1(w) = (w, l_{x_0})$ , e  $i_2(w) = (l_{x_0}, w)$ , para  $w \in \Omega(X, x_0)$ ;
- (2)  $\mu \circ (\mu \times 1_{\Omega(X, x_0)}) \simeq \mu \circ (1_{\Omega(X, x_0)} \times \mu)$ ;
- (3)  $1_{\Omega(X, x_0)} : \Omega(X, x_0) \longrightarrow \Omega(X, x_0)$  é homotopicamente inversível, isto é, existe  $g : \Omega(X, x_0) \longrightarrow \Omega(X, x_0)$  tal que

$$\mu \circ (1_{\Omega(X, x_0)} \times g) \circ \Delta_{\Omega(X, x_0)} \simeq \mu \circ (g \times 1_{\Omega(X, x_0)}) \circ \Delta_{\Omega(X, x_0)} \simeq L_{y_0}.$$

Prova de (1):

$$\begin{array}{ccc} \mu \circ i_1 : \Omega(X, x_0) & \longrightarrow & \Omega(X, x_0), \text{ e} & \mu \circ i_2 : \Omega(X, x_0) & \longrightarrow & \Omega(X, x_0) \\ w & \longmapsto & w * l_{x_0} & w & \longmapsto & l_{x_0} * w \end{array}$$

são homotópicas à

$$\begin{array}{ccc} 1_{\Omega(X, x_0)} : \Omega(X, x_0) & \longrightarrow & \Omega(X, x_0) \\ w & \longmapsto & w \end{array}$$

De fato, seja  $F : \Omega(X, x_0) \times I \longrightarrow \Omega(X, x_0)$  definida por  $F(w, t) = \bar{w}_t$ , onde

$$\bar{w}_t(s) = \begin{cases} w(2s/(t+1)), & \text{se } 0 \leq s \leq (t+1)/2 \\ x_0, & \text{se } (t+1)/2 \leq s \leq 1 \end{cases}.$$

$F$  é contínua se, e somente se,  $\tilde{F} : \Omega(X, x_0) \times I \xrightarrow{F} \Omega(X, x_0) \xrightarrow{i} X^I$  é contínua, e isto equivale a mostrar que  $\overline{F} : \Omega(X, x_0) \times I \times I \longrightarrow X$ , definida por

$$\overline{F}(w, t, s) = \overline{w}_t(s) = \begin{cases} w(2s/(t+1)), & \text{se } (w, t, s) \in G_1 \\ x_0, & \text{se } (w, t, s) \in G_2 \end{cases},$$

onde

$$G_1 = \{(w, t, s) \in \Omega(X, x_0) \times I \times I : 0 \leq s \leq (t+1)/2\}, \text{ e}$$

$$G_2 = \{(w, t, s) \in \Omega(X, x_0) \times I \times I : (t+1)/2 \leq s \leq 1\}$$

são fechados em  $\Omega(X, x_0) \times I \times I$ . Ainda, notemos que  $\Omega(X, x_0) \times I \times I = G_1 \cup G_2$ .

Vemos ainda que, em  $G_1 \cap G_2 = \{(w, t, s) \in \Omega(X, x_0) \times I \times I : s = (t+1)/2\}$ ,  $\overline{F}|_{G_1} = l_{x_0} = \overline{F}|_{G_2}$ . Além disso, em  $G_1$ ,  $\overline{F}$  é a composição

$$G_1 \hookrightarrow \Omega(X, x_0) \times I \times I \xrightarrow{1_{\Omega(X, x_0)} \times f} \Omega(X, x_0) \times I \xrightarrow{a} X,$$

onde  $f(t, s) = 2s/(t+1)$ , e  $a$  é a avaliação. Logo  $\overline{F}|_{G_1}$  é contínua. Já em  $G_2$ ,  $\overline{F}$  é a composição

$$G_2 \hookrightarrow \Omega(X, x_0) \times I \times I \xrightarrow{c_{x_0}} X,$$

onde  $c_{x_0}(w, t, s) = l_{x_0}$ . Portanto  $\overline{F}|_{G_2}$  é contínua.

Pelo que vimos acima, do lema da colagem, segue que  $\overline{F}$  é contínua, e assim,  $F$  é contínua.

Além do mais, vê-se que  $F(l_{x_0}, t) = l_{x_0}$ ,  $F(w, 0) = w * l_{x_0}$  e  $F(w, 1) = 1_{\Omega(X, x_0)}$ . E assim,  $w \simeq w * l_{x_0}$  *rel ponto*. O argumento para provar que  $\mu \circ 1_{\Omega(X, x_0)} \simeq 1_{\Omega(X, x_0)}$ .

Prova de (2):

Para definirmos uma homotopia

$$G : \Omega(X, x_0) \times \Omega(X, x_0) \times \Omega(X, x_0) \times I \longrightarrow \Omega(X, x_0)$$

entre  $\mu \circ (\mu \times 1_{\Omega(X, x_0)}) \simeq \mu \circ (1_{\Omega(X, x_0)} \times \Omega(X, x_0))$  é suficiente definirmos

$$F : \Omega(X, x_0) \times \Omega(X, x_0) \times \Omega(X, x_0) \times I \times I \longrightarrow X$$

contínua (pelo Teorema 2.1) tal que  $G = \bar{F}$ , onde  $\bar{F}(x)(s) = F(x, s)$  com  $x = (w, w', w'', t) \in \Omega(X, x_0) \times \Omega(X, x_0) \times \Omega(X, x_0) \times I$ , e checarmos que a imagem de  $\bar{F}$  em  $X^I$  realmente está em  $\Omega(X, x_0)$ .

Consideremos então  $F$  definida por:

$$F(w, w', w'', t, s) = \begin{cases} w(4s/(t+1)), & \text{se } 0 \leq s \leq (t+1)/4 \\ w'(4s-t-1), & \text{se } (t+1)/4 \leq s \leq (t+2)/4 \\ w''((4s-2-t)/(2-t)), & \text{se } (t+2)/4 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Segue facilmente do lema da colagem que  $F$  é contínua, e que para todo  $(w, w', w'', s) \in \Omega(X, x_0) \times \Omega(X, x_0) \times \Omega(X, x_0) \times I$ ,  $\bar{F}(w, w', w'', s) \in \Omega(X, x_0)$ .

Ainda, temos que, para  $s, t \in I$ ,

$$\bar{F}(w, w', w'', 0)(s) = F(w, w', w'', 0, s) = [(w * w') * w''](s) = \mu \circ (\mu \circ 1_{\Omega(X, x_0)})(s)$$

$$\bar{F}(w, w', w'', 1)(s) = F(w, w', w'', 1, s) = [w * (w' * w'')](s) = \mu \circ (1_{\Omega(X, x_0)} \circ \mu)(s)$$

$$\bar{F}(l_{x_0}, l_{x_0}, l_{x_0}, t)(s) = F(l_{x_0}, l_{x_0}, l_{x_0}, t, s) = l_{x_0}(s)$$

E assim  $\mu \circ (\mu \circ 1_{\Omega(X, x_0)}) \simeq \mu \circ (1_{\Omega(X, x_0)} \circ \mu)$ . Deste modo (2) vale.

Prova de (3):

Seja  $\eta : \Omega(X, x_0) \rightarrow \Omega(X, x_0)$  dada por  $\eta(w) = \bar{w}$ , onde  $\bar{w}(s) = w(1-s)$ .

Fazendo uso do Teorema 2.1 a continuidade de  $\eta$  seguirá.

Consideremos  $K : \Omega(X, x_0) \times I \times I \rightarrow X$  definida por

$$K(w, t, s) = \begin{cases} x_0, & \text{se } 0 \leq s \leq t/2 \\ w(2s-t), & \text{se } t/2 \leq s \leq 1/2 \\ w(2-2s-t), & \text{se } 1/2 \leq s \leq (2-t)/2 \\ x_0, & \text{se } (2-t)/2 \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Seja  $H : \Omega(X, x_0) \times I \longrightarrow \Omega(X, x_0)$ , dada por  $H = \overline{K}$ , onde  $\overline{K}(w, t)(s) = K(w, t, s)$ . A continuidade de  $K$  segue do Teorema 2.1. Para  $s, t \in I$ , verifica-se que

$$\overline{K}(w, 0)(s) = (w * \overline{w})(s) = (\mu \circ (1_{\Omega(X, x_0)} \times \eta) \circ \Delta_{\Omega(X, x_0)})(w)(s)$$

$$\overline{K}(w, 1)(s) = L_{x_0}(s)$$

$$\overline{K}(l_{x_0}, t)(s) = x_0 = l_{x_0}(s)$$

Deste modo, temos que  $\mu \circ (1_{\Omega(X, x_0)} \times \eta) \circ \Delta_{\Omega(X, x_0)} \simeq L_{x_0}$ , e de maneira semelhante mostramos que  $\mu \circ (\eta \times 1_{\Omega(X, x_0)}) \circ \Delta_{\Omega(X, x_0)}$ , e assim a afirmação (3) fica provada. ■

**Definição 2.21** *Sejam  $X$ , e  $A$   $H$ -espaços, sendo  $A \subset X$ , com multiplicações  $\mu_X$  e  $\mu_A$ , respectivamente. Dizemos que  $(X, A)$  é um  $H$ -par se  $(X, A)$  é um par-NDR, e  $\mu_X|_{A \times A} \simeq \mu_A$ .*

Temos os seguintes resultados relacionados à  $H$ -teoria:

**Teorema 2.10** *Para qualquer  $H$ -espaço  $Y$ , existe um complexo  $CW$ ,  $X$ , e uma equivalência de homotopia fraca  $f : X \longrightarrow Y$ .*

**Prova:** Veja [13]. ■

**Teorema 2.11** *Se  $Y$  é um  $H$ -espaço, então  $\pi_1(Y)$  atua trivialmente sobre  $[X, Y]$ , para todo espaço  $X$ .*

**Prova:** Veja [13]. ■

**Teorema 2.12** *Se  $(Y, B)$  é um  $H$ -par, então  $\pi_1(B)$  atua trivialmente sobre  $[X, A; Y, B]$ , para qualquer par-NDR  $(X, A)$ .*

**Prova:** Veja [13].

■

**Teorema 2.13** *Sejam  $X, Y$   $H$ -espaços e complexos CW, e  $f : X \rightarrow Y$  uma  $H$ -aplicação. Então  $(I_f, X)$  é um  $H$ -par, sendo  $I_f$  o cilindro induzido por  $f$ .*

**Prova:** Veja [13].

■

**Teorema 2.14** *Sejam  $X$  um complexo CW, e  $Y$  um  $H$ -espaço. Se  $f : X \rightarrow Y$  é uma equivalência de homotopia fraca, então  $X$  admite uma  $H$ -estrutura que torna  $f$  uma  $H$ -aplicação.*

**Prova:** Veja [13].

■

**Teorema 2.15** *Sejam  $X, Y$   $H$ -espaços, tendo  $X$  uma estrutura de complexo CW,  $f : X \rightarrow Y$  uma  $H$ -aplicação, que é uma equivalência de homotopia fraca. Além disso, suponhamos que  $X$  e  $Y$  sejam  $0$ -conexos. Então  $f$  é equivalência de homotopia.*

**Prova:** Veja [13].

■

Pelo Teorema 2.8 vimos que  $\Omega(X, x_0)$  é um  $H$ -grupo, porém para demonstrarmos o principal resultado deste trabalho, o Teorema de James, necessitaremos de um monóide topológico que possua o mesmo tipo de homotopia de  $\Omega(X, x_0)$ , e este monóide topológico nós iremos definir na próxima seção.

## 2.8 Espaço de Laços de Moore

Nesta seção definimos o Espaço de Laços de Moore de um espaço com ponto base, e provamos que ele é um monóide topológico que possui o mesmo tipo de homotopia do espaço de laços. Inicialmente, relembremos que  $\mathbb{R}_+ = [0, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$  e que  $X^{\mathbb{R}_+}$  é o conjunto formado por todas funções contínuas  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ , munido da topologia compacto-aberta ( Veja a Seção 1 deste Capítulo ).

**Definição 2.22** *Seja  $X$  um espaço topológico, e  $x_0$  um ponto de  $X$ . Definimos  $\Omega^M(X, x_0)$  como sendo o subespaço de  $X^{\mathbb{R}_+} \times \mathbb{R}_+$  tal que  $(\phi, r) \in \Omega^M(X, x_0)$  se, e somente se,  $\phi(0) = x_0$  e  $\phi(t) = x_0$  para todo  $t \geq r$ .*

**Teorema 2.16** *Seja  $\bar{\Omega}(X, x_0) = \{(\phi, r) \in \Omega^M(X, x_0) / r = 1\}$ . Então  $\bar{\Omega}(X, x_0)$  é homeomorfo a  $\Omega(X, x_0)$ . Ou seja,  $\Omega(X, x_0)$  pode ser visto como um subespaço de  $\Omega^M(X, x_0)$ .*

*Prova:* Considere  $\Psi : \Omega(X, x_0) \rightarrow \bar{\Omega}(X, x_0)$  tal que  $\Psi(\phi) = (\bar{\phi}, 1)$ , onde  $\bar{\phi}|_I = \phi$  e  $\bar{\phi}|_{[1, \infty)} = l_{x_0}$ , onde  $l_{x_0}(t) = x_0, \forall t \in I = [0, 1]$ .

$\Psi$  é contínua. Com efeito, seja  $U = [L \times A] \cap \bar{\Omega}(X, x_0)$  um aberto básico de  $\bar{\Omega}(X, x_0)$ , onde  $L = \bigcap_{i=1}^k (S_i, V_i)$  com  $S_i$  compacto em  $\mathbb{R}_+$  e  $V_i$  aberto em  $X$ , para todo  $i = 1, 2, \dots, k$ , e  $A$  um aberto básico de  $\mathbb{R}_+$ . Afirmamos que  $\Psi^{-1}(U)$  é um aberto em  $\Omega(X, x_0)$ . Para isto, seja  $\sigma \in \Psi^{-1}(U)$ , então  $\Psi(\sigma) = (\bar{\sigma}, 1) \in U$ , donde segue que  $\bar{\sigma} \in L$ ,  $1 \in A$ , donde  $\bar{\sigma} \in (S_i, V_i) \forall i = 1, 2, \dots, k$ , o que implica em  $\bar{\sigma}(S_i) \subset V_i, \forall i = 1, 2, \dots, k$ .

Seja  $K_i = S_i \cap I$ . Notamos que  $\sigma \in (K_i, V_i), \forall i = 1, 2, \dots, k$ , pois  $\sigma(K_i) = \sigma(S_i \cap I) = \bar{\sigma}|_I(S_i \cap I) \subset V_i$ , para cada  $i = 1, 2, \dots, k$ . Consideremos então  $V = M \cap \Omega(X, x_0)$ , com  $M = \bigcap_{i=1}^k (K_i, V_i)$ , segue que  $V$  é um aberto em  $\Omega(X, x_0)$ , e pelo que vimos anteriormente,  $\sigma \in V$ .

Finalmente,  $\Psi(V) \subset U$ , pois dado  $\pi \in V$ ,  $\Psi(\pi) = (\bar{\pi}, 1) \in \bar{\Omega}(X, x_0)$ . Notamos que, para  $t \in S_i$  segue que, ou  $t \in S_i \cap I = K_i$  ou  $t \in S_i \cap [1, \infty)$ , donde vem que, para o primeiro caso,  $\bar{\pi}(t) = \pi(t) \in V_i$ , e para o segundo caso,  $\bar{\pi}(t) = x_0$ . Assim,  $\bar{\pi} \in \bigcap_{i=1}^k (S_i, V_i) = L$ , e como  $1 \in A$  segue que  $\Psi(\pi) = (\bar{\pi}, 1) \in (L \times A) \cap \bar{\Omega}(X, x_0) = U$ . Logo  $\Psi$  é contínua.



Seja  $\Upsilon : \overline{\Omega}(X, x_0) \longrightarrow \Omega(X, x_0)$  definida por  $\Upsilon(\phi, 1) = \phi|_I$ .

Constata-se sem dificuldades que,  $\Psi \circ \Upsilon = 1_{\overline{\Omega}(X, x_0)}$ , e além disso,  $\Upsilon \circ \Psi = 1_{\Omega(X, x_0)}$ . Deste modo resta-nos apenas provar que  $\Upsilon$  é contínua, pois daí seguirá que  $\overline{\Omega}(X, x_0)$  e  $\Omega(X, x_0)$  são homeomorfos.

Seja  $U = \bigcap_{i=1}^k (S_i, V_i) \cap \Omega(X, x_0)$  um aberto básico em  $\Omega(X, x_0)$  (para cada  $i = 1, 2, \dots, k$   $S_i$  é compacto de  $\mathbb{R}_+$ , e  $V_i$  é aberto de  $X$ ). Temos que  $\Upsilon^{-1}(U)$  é aberto em  $\Omega(X, x_0)$ . De fato, seja  $(\sigma, 1) \in \Upsilon^{-1}(U)$ , ou seja,  $\sigma|_I \in U$ , donde vem que,  $\sigma|_I \in \Omega(X, x_0)$  e  $\sigma|_I(S_i) \subset V_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, k$ . Como  $S_i$  é compacto de  $I \subset \mathbb{R}_+$ , segue que é compacto em  $\mathbb{R}_+$ .

Consideremos  $V = [P \times A] \cap \overline{\Omega}(X, *)$ , onde  $P = \bigcap_{i=1}^k (S_i, V_i)$ , e  $A$  é um aberto em  $\mathbb{R}_+$  com  $1 \in A$ . Temos então que  $\Upsilon(V) \subset U$ . De fato, se  $(\pi, 1) \in V$ , então  $\pi(S_i) \subset V_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, k$ , e como  $S_i \subset I$  segue que  $\Upsilon(\pi, 1)(S_i) = \pi|_I(S_i) \subset V_i$ . Portanto  $\Upsilon(\pi, 1) \in U$ , e daí segue a continuidade de  $\Upsilon$ . ■

**Teorema 2.17** *Seja  $X$  um espaço topológico, e  $x_0$  um elemento de  $X$ . Então os espaços  $\Omega^M(X, x_0)$  e  $\Omega(X, x_0)$  têm o mesmo tipo de homotopia.*

*Prova:* Consideremos  $\tilde{\Omega}(X, x_0) = \{(\phi, t) \in \Omega^M(X, x_0) / t \geq 1\} \subset \Omega^M(X, x_0)$ . A idéia é mostrarmos que  $\tilde{\Omega}(X, x_0)$  é retrato por deformação de  $\Omega^M(X, x_0)$ , daí seguirá que  $\tilde{\Omega}(X, x_0)$  e  $\Omega^M(X, x_0)$  têm o mesmo tipo de homotopia, além disso provaremos que  $\overline{\Omega}(X, x_0)$  é retrato por deformação de  $\tilde{\Omega}(X, x_0)$ . E isto nos permitirá concluir que  $\overline{\Omega}(X, x_0)$  e  $\Omega^M(X, x_0)$  têm o mesmo tipo de homotopia, e como  $\overline{\Omega}(X, x_0)$  é homeomorfo a  $\Omega(X, x_0)$  (pelo Teorema 2.16), decorrerá que  $\Omega(X, x_0)$  e  $\Omega^M(X, x_0)$  terão o mesmo tipo de homotopia. Inicialmente, mostremos que  $\tilde{\Omega}(X, x_0)$  é um retrato por deformação de  $\Omega^M(X, x_0)$ .

Seja  $H : I \times \Omega^M(X, x_0) \longrightarrow \Omega^M(X, x_0)$  definida por

$$H(s, (\phi, r)) = \begin{cases} (\phi, r + s), & \text{se } r + s \leq 1 \\ (\phi, 1), & \text{se } r \leq 1 \leq r + s \\ (\phi, r), & \text{se } r \geq 1 \end{cases}$$

$H$  é contínua. De fato, seja  $\tilde{H} : I \times X^{\mathbb{R}^+} \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow X^{\mathbb{R}^+} \times \mathbb{R}_+$ , dada por

$$\tilde{H}(s, \phi, r) = \begin{cases} (\phi, r + s), & \text{se } r + s \leq 1 \\ (\phi, 1), & \text{se } r \leq 1 \leq r + s \\ (\phi, r), & \text{se } r \geq 1 \end{cases}$$

Se provarmos a continuidade de  $\tilde{H}$ , seguirá que  $H$  também será contínua, pois  $H = \tilde{H}|_{I \times \Omega^M(X, x_0)}$ . Deste modo basta-nos provar a continuidade de  $\tilde{H}$ . Consideremos os seguintes conjuntos

$$A_1 = X^{\mathbb{R}^+} \times \{(s, r) \in I \times \mathbb{R}_+ : r + s \leq 1\}$$

$$A_2 = X^{\mathbb{R}^+} \times \{(s, r) \in I \times \mathbb{R}_+ : r \leq 1 \leq r + s\}$$

$$A_3 = X^{\mathbb{R}^+} \times \{(s, r) \in I \times \mathbb{R}_+ : r \geq 1\}$$

Temos que  $I \times X^{\mathbb{R}^+} \times \mathbb{R}_+$  é homeomorfo a  $X^{\mathbb{R}^+} \times I \times \mathbb{R}_+$ , via aplicação  $\alpha : X^{\mathbb{R}^+} \times I \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow I \times X^{\mathbb{R}^+} \times \mathbb{R}_+$  dada por  $\alpha(\phi, s, r) = (s, \phi, r)$ . Como  $A_1, A_2, e A_3$  são fechados em  $X^{\mathbb{R}^+} \times I \times \mathbb{R}_+$  segue que  $L_i = \alpha(A_i)$ , para  $i = 1, 2, 3$ , são fechados em  $I \times X^{\mathbb{R}^+} \times \mathbb{R}_+$ . Assim, podemos ver  $\tilde{H}$  como

$$\tilde{H}(s, \phi, r) = \begin{cases} (\phi, r + s), & \text{se } (s, \phi, r) \in L_1 \\ (\phi, 1), & \text{se } (s, \phi, r) \in L_2 \\ (\phi, r), & \text{se } (s, \phi, r) \in L_3 \end{cases}$$

Sejam  $\tilde{H}_i = \tilde{H}|_{L_i}$  para  $i = 1, 2, 3$ . Temos que  $\tilde{H}_i$  é contínua. De fato, temos que  $\tilde{H}_1$  é igual a composição

$$L_1 \xrightarrow{\alpha^{-1}} A_1 \hookrightarrow I \times X^{\mathbb{R}^+} \times \mathbb{R}_+ \xrightarrow{p} X^{\mathbb{R}^+} \times I \times \mathbb{R}_+ \xrightarrow{1_{X^{\mathbb{R}^+}} \times S} X^{\mathbb{R}^+} \times \mathbb{R}_+,$$

onde  $p(s, \phi, r) = (\phi, s, r)$  e  $(1_{X^{\mathbb{R}^+}} \times S)(\phi, s, r) = (\phi, r + s)$ , logo  $\tilde{H}_1$  é contínua.

$\tilde{H}_2$  é igual a composição

$$L_2 \xrightarrow{\alpha^{-1}} A_2 \hookrightarrow I \times X^{\mathbb{R}^+} \times \mathbb{R}_+ \xrightarrow{T} X^{\mathbb{R}^+} \times \mathbb{R}_+,$$

onde  $T(s, \phi, r) = (\phi, 1)$ . Portanto  $\tilde{H}_2$  é contínua.

E finalmente,  $\tilde{H}_3$  é igual a composição

$$L_3 \xrightarrow{\alpha^{-1}} A_3 \hookrightarrow I \times X^{\mathbb{R}^+} \times \mathbb{R}_+ \xrightarrow{\pi_2} X^{\mathbb{R}^+} \times \mathbb{R}_+,$$

onde  $\pi_2(s, \phi, r) = (\phi, r)$ . Donde segue que  $\tilde{H}_3$  é contínua.

Ainda, temos que em  $L_1 \cap L_2$ ,  $\tilde{H}_1 = \tilde{H}_2$ , em  $L_2 \cap L_3$ ,  $\tilde{H}_2 = \tilde{H}_3$  e em  $L_1 \cap L_2 \cap L_3$ ,  $\tilde{H}_1 = \tilde{H}_2 = \tilde{H}_3$ . E como  $L_1 \cup L_2 \cup L_3 = I \times X^{\mathbb{R}^+} \times \mathbb{R}_+$ , segue do lema da colagem que  $\tilde{H}$  é contínua, e daí a continuidade de  $H$  é imediata.

Sejam  $i : \tilde{\Omega}(X, x_0) \rightarrow \Omega^M(X, x_0)$ , a inclusão e  $R : \Omega^M(X, x_0) \rightarrow \tilde{\Omega}(X, x_0)$  dada por  $R(\phi, r) = H(1, (\phi, r))$ . Observamos que

$$H(1, (\phi, r)) = \begin{cases} (\phi, 1), & \text{se } 0 \leq r \leq 1 \\ (\phi, r), & \text{se } r \geq 1 \end{cases}$$

E assim, temos que  $H(1, (\phi, r)) \in \tilde{\Omega}(X, x_0)$ . Donde segue a boa definição de  $R$ . Como  $H$  é contínua,  $R$  também será. Temos ainda que, para  $(\phi, r) \in \tilde{\Omega}(X, x_0)$ ,

$$(R \circ i)(\phi, r) = R(\phi, r) = H(1, (\phi, r)) = (\phi, r) = 1_{\tilde{\Omega}(X, x_0)}(\phi, r)$$

e  $i \circ R \simeq 1_{\Omega^M(X, x_0)}$  via homotopia  $H$ . Notemos que

$$H(0, (\phi, r)) = \begin{cases} (\phi, r), & \text{se } r \leq 1 \\ (\phi, 1), & \text{se } r \leq 1 \text{ e } r \geq 1 \\ (\phi, r), & \text{se } r \geq 1 \end{cases}$$

Portanto  $\tilde{\Omega}(X, x_0)$  é retrato por deformação de  $\Omega^M(X, x_0)$ . E assim,  $\tilde{\Omega}(X, x_0)$  e  $\Omega^M(X, x_0)$  têm o mesmo tipo de homotopia.

Mostremos agora que  $\bar{\Omega}(X, x_0)$  e  $\tilde{\Omega}(X, x_0)$  têm o mesmo tipo de homotopia. Para tal, mostraremos que  $\bar{\Omega}(X, x_0)$  é retrato por deformação de  $\tilde{\Omega}(X, x_0)$ . Consideremos

$G : I \times \tilde{\Omega}(X, x_0) \longrightarrow \tilde{\Omega}(X, x_0)$  definida por

$$G(s, (\phi, r)) = (\phi_s^r, (1-s)r + s), \text{ onde } \phi_s^r(t) = \phi[rt/((1-s)r + s)].$$

Afirmamos que  $G$  é contínua. De fato, consideremos

$$\tilde{G} : I \times X^{\mathbb{R}_+} \times [1, \infty) \longrightarrow X^{\mathbb{R}_+} \times [1, \infty),$$

dada por  $\tilde{G}(s, \phi, r) = (\phi_s^r, (1-s)r + s)$ , onde  $\phi_s^r(t) = \phi[rt/((1-s)r + s)]$ . Para provarmos que  $G$  é contínua, basta verificarmos que  $\tilde{G}_1 : I \times X^{\mathbb{R}_+} \times [1, \infty) \longrightarrow X^{\mathbb{R}_+}$ , dada por  $\tilde{G}_1(s, \phi, r) = \phi_s^r$ , e  $\tilde{G}_2 : I \times X^{\mathbb{R}_+} \times [1, \infty) \longrightarrow [1, \infty)$ , dada por  $\tilde{G}_2(s, \phi, r) = (1-s)r + s$ , são contínuas.

A continuidade de  $\tilde{G}_2$  é mais evidente. De fato, sejam

$$\Pi : I \times X^{\mathbb{R}_+} \times [1, \infty) \longrightarrow I \times [1, \infty), \text{ e } \Phi : I \times [1, \infty) \longrightarrow [1, \infty),$$

definidas por  $\Pi(s, \phi, r) = (s, r)$  e  $\Phi(s, r) = (1-s)r + s$ . Claramente  $\Pi$  e  $\Phi$  são contínuas, e além disso  $\tilde{G}_2 = \Phi \circ \Pi$ , e daí segue a continuidade de  $\tilde{G}_2$ .

Verifiquemos agora a continuidade de  $\tilde{G}_1$ . Para isso, consideremos

$$\Delta : I \times X^{\mathbb{R}_+} \times [1, \infty) \longrightarrow [1, \infty) \times X^{\mathbb{R}_+},$$

definida por  $\Delta(s, \phi, r) = (r/((1-s)r + s), \phi)$ . Como as funções coordenadas de  $\Delta$  são contínuas,  $\Delta$  também é contínua. Seja ainda  $\Theta : [1, \infty) \times X^{\mathbb{R}_+} \longrightarrow X^{\mathbb{R}_+}$  dada por

$$\Theta(r, \phi)(t) = \phi(rt) = \phi^r(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

Notemos que  $(\Theta \circ \Delta)(s, \phi, r) = \Theta(r/((1-s)r + s), \phi) = \phi^{r/((1-s)r + s)} = \tilde{G}_1$ . Deste modo, se provarmos que  $\Theta$  é contínua, a continuidade de  $\tilde{G}_1$  seguirá imediatamente. Temos, pelo Teorema 2.1 que  $\Theta$  é contínua se, e somente se,  $\tilde{\Theta} : \mathbb{R}_+ \times [1, \infty) \times X^{\mathbb{R}_+} \longrightarrow X$  dada por  $\tilde{\Theta}(t, r, \phi) = \phi(rt)$  é contínua.

Seja  $\Lambda : \mathbb{R}_+ \times [1, \infty) \times X^{\mathbb{R}_+} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \times X^{\mathbb{R}_+}$ , definida por  $\Lambda(t, r, \phi) = (rt, \phi)$ . Como as funções coordenadas de  $\Lambda$  são contínuas, segue que  $\Lambda$  também é contínua. Ainda, sabemos que a aplicação avaliação  $a : \mathbb{R}_+ \times X^{\mathbb{R}_+} \longrightarrow X$ , que satisfaz  $a(t, \phi) = \phi(t)$  é contínua, pelo Teorema 2.1.

Notemos que  $(a \circ \Lambda)(t, r, \phi) = a(rt, \phi) = \phi(rt) = \tilde{\Theta}(t, r, \phi)$ , e daí vem que  $\tilde{\Theta}$  é contínua, bem como  $\Theta$ . Logo,  $\tilde{G}_1$  é contínua.

Agora, como  $\tilde{G}_1$  e  $\tilde{G}_2$  são contínuas, segue que  $\tilde{G}$  é contínua. Ainda, como  $I \times \tilde{\Omega}(X, x_0) \subset I \times X^{\mathbb{R}_+} \times [1, \infty)$ , segue que  $\tilde{G}|_{I \times \tilde{\Omega}(X, x_0)} = G$  é contínua.

Temos que  $G(1, (\phi, r)) = (\phi_1^r, 1) \in \tilde{\Omega}(X, x_0)$ , Assim podemos considerar  $L : \tilde{\Omega}(X, x_0) \rightarrow \bar{\Omega}(X, x_0)$  dada por  $L(\phi, r) = G(1, (\phi, r))$ . Como  $G$  é contínua, segue que  $L$  também é contínua. Ainda, para  $(\phi, 1) \in \bar{\Omega}(X, x_0)$ , temos

$$(L \circ i)(\phi, 1) = G(1, (\phi, 1)) = (\phi_1^1, 1),$$

sendo  $i : \bar{\Omega}(X, x_0) \rightarrow \tilde{\Omega}(X, x_0)$  a inclusão. Mas,

$$\phi_1^1(t) = \phi[1t/((1-1)1+1)] = \phi(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

Assim,  $G(1, (\phi, 1)) = (\phi_1^1, 1) = (\phi, 1) = 1|_{\bar{\Omega}(X, x_0)}(\phi, 1)$ .

Observamos que  $G(0, (\phi, r)) = (\phi_0^r, r)$ . Mas,

$$\phi_0^r(t) = \phi[rt/((1-0)r+0)] = \phi(rt/r) = \phi(t), \quad \forall t \geq 0,$$

donde vem que  $\phi_0^r = \phi$ . Deste modo, temos que

$$G(0, (\phi, r)) = (\phi_0^r, r) = (\phi, r) = 1|_{\tilde{\Omega}(X, x_0)}(\phi, r).$$

Usando o fato que  $L(\phi, r) = G(1, (\phi, r))$ , segue que  $i \circ L \simeq 1|_{\tilde{\Omega}(X, x_0)}$ , via homotopia  $G$ . Portanto,  $\bar{\Omega}(X, x_0)$  e  $\tilde{\Omega}(X, x_0)$  têm o mesmo tipo de homotopia. Finalmente, pelo Teorema 2.16, vimos que  $\bar{\Omega}(X, x_0)$  e  $\Omega(x, x_0)$  são homeomorfos, e assim têm o mesmo tipo de homotopia. Daí segue que  $\Omega^M(X, x_0)$  e  $\Omega(X, x_0)$  têm o mesmo tipo de homotopia. ■

**Teorema 2.18** *Seja  $\mu : \Omega^M(X, x_0) \times \Omega^M(X, x_0) \rightarrow \Omega^M(X, x_0)$  definida por  $\mu((\phi, r), (\psi, s)) = (\phi, r) \bullet (\psi, s) = (\phi * \psi, r + s)$ , onde*

$$(\phi * \psi)(t) = \begin{cases} \phi(t), & \text{se } 0 \leq t \leq r \\ \psi(t - r), & \text{se } t \geq r \end{cases}$$

Então o espaço  $\Omega^M(X, x_0)$  com a operação  $\mu$  é um monóide topológico, com elemento neutro  $(l_{x_0}, 0)$ .

*Prova:* Inicialmente, mostremos que  $(\Omega^M(X, x_0), \mu)$  é um monóide.

Associatividade de  $\mu$ : Sejam  $(\phi, r)$ ,  $(\psi, s)$  e  $(\theta, t)$ , elementos de  $\Omega^M(X, x_0)$ . Então temos

$$\begin{aligned} [(\phi, r) \bullet (\psi, s)] \bullet (\theta, t) &= (\phi * \psi, r + s) \bullet (\theta, t) \\ &= ((\phi * \psi) * \theta, (r + s) + t) = (\phi * (\psi * \theta), r + (s + t)) \\ &= (\phi, r) \bullet (\psi * \theta, s + t) \\ &= (\phi, r) \bullet [(\psi, s) \bullet (\theta, t)], \end{aligned}$$

estas igualdades decorrem da igualdade  $(\phi * \psi) * \theta = \phi * (\psi * \theta)$ , a qual é justificada por:

$$\begin{aligned} [(\phi * \psi) * \theta](l) &= \begin{cases} (\phi * \psi)(l), & \text{se } 0 \leq l \leq r + s \\ \theta(l - (r + s)), & \text{se } l \geq r + s \end{cases} \\ &= \begin{cases} \phi(l), & \text{se } 0 \leq l \leq r \\ \psi(l - r), & \text{se } r \leq l \leq r + s \\ \theta(l - (r + s)), & \text{se } l \geq r + s \end{cases} \\ &= \begin{cases} \phi(l), & \text{se } 0 \leq l \leq r \\ (\psi * \theta)(l - r), & \text{se } r \leq l \leq r + s \end{cases} \\ &= [\phi * (\psi * \theta)](l) \quad \forall l \in \mathbb{R}_+ \end{aligned}$$

Agora verifiquemos que  $(l_{x_0}, 0)$  de fato é o elemento neutro de  $\Omega^M(X, x_0)$ , mediante a operação  $\mu$ . Seja  $(\phi, r)$  um elemento de  $\Omega^M(X, x_0)$ , então temos:

$(l_{x_0}, 0) \bullet (\phi, r) = (l_{x_0} * \phi, 0 + r) = (\phi, r)$ , onde a última igualdade decorre da igualdade  $l_{x_0} * \phi = \phi$ , a qual se justifica da seguinte maneira,

$$\begin{aligned} (l_{x_0} * \phi)(t) &= \begin{cases} l_{x_0}(t), & \text{se } t = 0 \\ \phi(t), & \text{se } t \geq r \end{cases} \\ &= \begin{cases} x_0, & \text{se } t = 0 \\ \phi(t), & \text{se } 0 \leq t \leq r \end{cases} \\ &= \phi(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \end{aligned}$$

Deste modo, temos que  $\Omega^M(X, x_0)$  com a operação  $\mu$  é um monóide topológico, desde que  $\mu$  seja contínua. Verifiquemos a boa definição de  $\mu$ . Para isso, sejam  $(\phi, r), (\psi, s)$  elementos de  $\Omega^M(X, x_0)$ . Afirmamos que  $(\phi, r) \bullet (\psi, s) = (\phi * \psi, r + s) \in \Omega^M(X, x_0)$ .

De fato, temos que  $\phi * \psi : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ , dada por

$$(\phi * \psi)(t) = \begin{cases} \phi(t), & \text{se } t \in [0, r] \\ \psi(t - r), & \text{se } t \in [r, \infty) \end{cases}$$

é contínua pelo lema da colagem. Além disso,

$$(\phi * \psi)(0) = \phi(0) = x_0, \text{ e } (\phi * \psi)(r + s) = \psi(r + s - r) = \psi(s) = x_0$$

Mostremos a continuidade de  $\mu$ .

Temos que  $\mu : \Omega^M(X, x_0) \times \Omega^M(X, x_0) \rightarrow \Omega^M(X, x_0)$  é dada por

$$\mu((\phi, r), (\psi, s)) = (\phi * \psi, r + s).$$

Como  $\Omega^M(X, x_0) \hookrightarrow X^{\mathbb{R}_+} \times \mathbb{R}_+$ , para provarmos a continuidade de  $\mu$ , basta-nos provar a continuidade de

$$\mu_1 : \Omega^M(X, x_0) \times \Omega^M(X, x_0) \rightarrow X^{\mathbb{R}_+} \text{ e}$$

$$\mu_2 : \Omega^M(X, x_0) \times \Omega^M(X, x_0) \rightarrow \mathbb{R}_+,$$

onde  $\mu_1((\phi, r), (\psi, s)) = \phi * \psi$  e  $\mu_2((\phi, r), (\psi, s)) = r + s$ .

Continuidade de  $\mu_1$ :

Mostrar que  $\mu_1$  é contínua, é equivalente a mostrar a continuidade de

$$\tilde{\mu}_1 : \mathbb{R}_+ \times \Omega^M(X, x_0) \times \Omega^M(X, x_0) \longrightarrow X,$$

onde,

$$\tilde{\mu}_1(t, (\phi, r), (\psi, s)) = \begin{cases} \phi(t), & \text{se } 0 \leq t \leq r \\ \psi(t - r), & \text{se } t \geq r \end{cases}$$

Mostremos então a continuidade de  $\tilde{\mu}_1$ . Sejam

$$F_1 = \{(t, (\phi, r), (\psi, s)) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega^M(X, x_0) \times \Omega^M(X, x_0) | 0 \leq t \leq r\},$$

$$F_2 = \{(t, (\phi, r), (\psi, s)) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega^M(X, x_0) \times \Omega^M(X, x_0) | t \geq r\}.$$

Os conjuntos  $F_1$  e  $F_2$  são fechados em  $\mathbb{R}_+ \times \Omega^M(X, x_0) \times \Omega^M(X, x_0)$ , além disso,

$$F_1 \cup F_2 = \mathbb{R}_+ \times \Omega^M(X, x_0) \times \Omega^M(X, x_0),$$

e em  $F_1 \cap F_2 = \{(t, (\phi, r), (\psi, s)) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega^M(X, x_0) \times \Omega^M(X, x_0) | t = r\}$ , temos

$$\tilde{\mu}_1^1(r, (\phi, r), (\psi, s)) = \tilde{\mu}_1|_{F_1}(r, (\phi, r), (\psi, s)) = \phi(r) = x_0 \text{ e}$$

$$\tilde{\mu}_1^2(r, (\phi, r), (\psi, s)) = \tilde{\mu}_1|_{F_2}(r, (\phi, r), (\psi, s)) = \psi(r - r) = x_0.$$

Deste modo, se provarmos que  $\tilde{\mu}_1^1$  e  $\tilde{\mu}_1^2$  são contínuas em  $F_1$  e  $F_2$ , respectivamente, seguirá a continuidade de  $\tilde{\mu}_1$  pelo lema da colagem.

$\tilde{\mu}_1^1$  é a composição

$$F_1 \hookrightarrow \mathbb{R}_+ \times \Omega^M(X, x_0) \times \Omega^M(X, x_0) \hookrightarrow \mathbb{R}_+ \times X^{\mathbb{R}^+} \times \mathbb{R}_+ \times X^{\mathbb{R}^+} \times \mathbb{R}_+ \xrightarrow{p} \mathbb{R}_+ \times X^{\mathbb{R}^+} \xrightarrow{a} X,$$

onde  $p(t, \phi, r, \psi, s) = (t, \phi)$  e  $a(t, \phi) = \phi(t)$ . Como  $p$  é projeção, e  $a$  é a aplicação avaliação, segue que  $\tilde{\mu}_1^1$  é composição de funções contínuas, portanto também é contínua.

$\tilde{\mu}_1^2$  é a composição

$$F_2 \hookrightarrow \mathbb{R}_+ \times X^{\mathbb{R}^+} \times \mathbb{R}_+ \times X^{\mathbb{R}^+} \times \mathbb{R}_+ \xrightarrow{q} \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times X^{\mathbb{R}^+} \xrightarrow{h \times 1} \mathbb{R}_+ \times X^{\mathbb{R}^+} \xrightarrow{a} X,$$



onde  $q(t, \phi, r, \psi, s) = (t, r, \psi)$ ,  $a(t, \psi) = \psi(t)$  e  $h(t, r) = |r - t|$ . Como  $p$  é projeção,  $a$  é a aplicação avaliação e  $h$  é contínua, segue que  $\tilde{\mu}_1^2$  é composição de funções contínuas, logo também é contínua. Do que argumentamos acima, segue a continuidade de  $\mu_1$ .

Mostremos agora a continuidade de  $\mu_2$ .  $\mu_2$  é a composição

$$\Omega^M(X, x_0) \times \Omega^M(X, x_0) \hookrightarrow X^{\mathbb{R}_+} \times \mathbb{R}_+ \times X^{\mathbb{R}_+} \times \mathbb{R}_+ \xrightarrow{p_2 \times p_2} \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \xrightarrow{s} \mathbb{R}_+,$$

onde  $p_2 : X^{\mathbb{R}_+} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  é a projeção sobre o segundo fator, e  $s$  é a operação de soma de números reais. Como  $s$  e  $p_1$  são contínuas segue que  $\mu_2$  também é contínua.

Agora, como  $\mu_1$  e  $\mu_2$  são contínuas, segue que  $\mu$  é contínua. Deste modo, temos que  $\Omega^M(X, x_0)$  é um monóide topológico.

■

# Capítulo 3

## Produto Reduzido de James

Neste capítulo definiremos o Produto Reduzido de James  $J(X)$  para um espaço topológico  $X$ , com ponto base.

### 3.1 Monóide Livre

Nesta seção, para um conjunto não-vazio  $X$  com um ponto base  $e$ , construiremos um objeto livre  $J(X)$  na categoria dos monóides  $Mon$ , que se chamará monóide livre gerado por  $X$ .

Lembrando que a categoria dos monóides  $Mon$  é tal que:

$$(1) \text{obj}(Mon) = \{M : M \text{ é monóide}\}$$

$$(2) Hom_{Mon}(M, N) = \{f : M \longrightarrow N : f \text{ é homomorfismo de monóides}\}, \text{ onde } M, N \in \text{obj}(Mon)$$

$$(3) \text{ a composição } \circ : Hom_{Mon}(M, N) \times Hom_{Mon}(N, P) \longrightarrow Hom_{Mon}(M, P),$$

sendo  $M, N, P \in \text{obj}(Mon)$ , é a usual.

Seja  $X$  um conjunto não-vazio com ponto base  $e$ . Consideremos então a união disjunta dos  $X^n$ , com  $n \geq 1$ , onde  $X^n = \underbrace{X \times X \times \dots \times X}_{n \text{ vezes}}$ . Denotaremos tal união por

$$\bigsqcup_{n \geq 1} X^n.$$

Em  $\bigsqcup_{n \geq 1} X^n$ , podemos considerar a relação de equivalência  $\sim$  gerada por

$$\left\{ ((x_1, \dots, x_{i-1}, e, x_i, \dots, x_n), (x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_n)) \in \bigsqcup_{j \geq 1} X^j \times \bigsqcup_{j \geq 1} X^j \right\}.$$

Definimos  $J(X)$  como sendo  $\bigsqcup_{n \geq 1} X^n / \sim$ . A classe de equivalência de um elemento  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  em  $J(X)$  será denotada por  $\overline{(x_1, x_2, \dots, x_n)} = x_1 x_2 \dots x_n$ .

Notemos que, para qualquer elemento  $z = z_1 z_2 \dots z_p \in J(X)$ , existe um único  $a \in \bigsqcup_{n \geq 1} X^n$  tal que  $\bar{a} = z$ , sendo

$$a = \begin{cases} (a_1, a_2, \dots, a_q), & \text{se } z_i \neq e \text{ e para algum } i \in \{1, 2, \dots, p\} \\ e, & \text{se } z_i = e, \forall i \in \{1, 2, \dots, p\} \end{cases},$$

com  $a_i \neq e, \forall i = 1, 2, \dots, q$ . Chamamos  $\bar{a}$  de produto reduzido de  $z$ .

Observamos ainda que, se  $z = z_1 z_2 \dots z_k, w = w_1 w_2 \dots w_l \in J(X)$  são produtos reduzidos de  $z$  e  $w$ , respectivamente, e  $z = w$ , então  $k = l$  e  $z_i = w_i, \forall i \in \{1, 2, \dots, l\}$ , ou ambos,  $z$  e  $w$  são iguais a  $e$ .

Agora, consideremos  $\cdot : J(X) \times J(X) \rightarrow J(X)$  definida pela justaposição, ou seja, se  $a = a_1 a_2 \dots a_m, b = b_1 b_2 \dots b_n \in J(X)$ , então  $a \cdot b := a_1 a_2 \dots a_m b_1 b_2 \dots b_n$ .

O próximo teorema, cuja demonstração é imediata, nos garante que  $J(X)$  com a operação  $\cdot$  é um monóide, logo  $J(X)$  é um objeto na categoria *Mon* dos monóides.

**Teorema 3.1**  $J(X)$  com a operação  $\cdot$  é um monóide tendo como elemento identidade  $e$ .

■

**Teorema 3.2** Seja  $X$  um conjunto não-vazio, com ponto base  $e$ , e seja  $i : X \rightarrow J(X)$  a inclusão. Se  $(M, m, *)$  é um monóide com elemento identidade  $m$  e multiplicação  $*$ , e  $f : (X, x_0) \rightarrow (M, m)$  é uma aplicação entre conjuntos, então existe um único homomorfismo de monóides  $\bar{f} : J(X) \rightarrow M$  tal que  $\bar{f} \circ i = f$ . Em outras palavras,  $J(X)$  é um objeto livre sobre o conjunto  $X$  na categoria *Mon* dos monóides.

**Prova:** Seja  $\bar{f} : J(X) \longrightarrow M$  definida por  $\bar{f}(x_1x_2 \dots x_n) = f(x_1) * f(x_2) * \dots * f(x_n)$  e  $\bar{f}(e) = m$ . Claramente  $\bar{f}$  está bem definida (pois  $\bar{f}(e) = m$ ). Afirmamos que  $\bar{f}$  é um homomorfismo de monóides. De fato, sejam  $z = z_1z_2 \dots z_p \neq e$ ,  $w = w_1w_2 \dots w_q \neq e$  elementos de  $J(X)$ , então:

$$\begin{aligned} \bar{f}(z \cdot w) &= \bar{f}(z_1z_2 \dots z_pw_1w_2 \dots w_q) \\ &= f(z_1) * f(z_2) * \dots * f(z_p) * f(w_1) * f(w_2) * \dots * f(w_q) \\ &= \bar{f}(z_1z_2 \dots z_p) * \bar{f}(w_1w_2 \dots w_q) \\ &= \bar{f}(z) * \bar{f}(w) \end{aligned}$$

Caso  $z = e$ ,  $w = w_1w_2 \dots w_q \neq e$ , temos

$$\begin{aligned} \bar{f}(z \cdot w) &= \bar{f}(ew_1w_2 \dots w_q) \\ &= \bar{f}(w_1w_2 \dots w_q) \\ &= f(w_1) * f(w_2) * \dots * f(w_q) \\ &= m * f(w_1) * f(w_2) * \dots * f(w_q) \\ &= f(e) * f(w_1) * f(w_2) * \dots * f(w_q) \\ &= \bar{f}(z) * \bar{f}(w) \end{aligned}$$

Analogamente  $\bar{f}(z \cdot e) = \bar{f}(z) * \bar{f}(e)$ . Logo  $\bar{f}$  é homomorfismo de monóides. Além disso, temos que, para  $x \in X$ ,  $(\bar{f} \circ i)(x) = \bar{f}(x) = f(x)$ , donde vem que  $\bar{f} \circ i = f$ .

Mostremos agora a unicidade de  $\bar{f}$ . Para tanto, suponhamos que exista  $\bar{g} : J(X) \longrightarrow M$  tal que  $\bar{g} \circ i = f$ .

Afirmamos que  $\bar{f} = \bar{g}$ . De fato, seja  $x \in X$ , então  $\bar{f}(x) = f(x) = \bar{g}(x)$ , donde segue que  $\bar{f} = \bar{g}$  em  $X$ . Agora, para  $x_1x_2 \dots x_n \in J(X)$ , temos

$$\bar{f}(x_1x_2 \dots x_n) = \bar{f}(x_1) * \bar{f}(x_2) * \dots * \bar{f}(x_n) = \bar{g}(x_1) * \bar{g}(x_2) * \dots * \bar{g}(x_n) = \bar{g}(x_1x_2 \dots x_n).$$

Logo  $\bar{f} = \bar{g}$  em  $J(X)$ . O que prova a unicidade de  $\bar{f}$ .

Do que argumentamos acima, segue que  $J(X)$  é objeto livre na categoria dos monóides *Mon*.

■

**Corolário 3.1** *Se  $L$  é outro objeto livre sobre  $X$  na categoria dos monóides  $Mon$  (com  $\lambda : X \rightarrow L$ ) então existe um isomorfismo de monóides  $\Phi : J(X) \rightarrow L$  tal que  $\Phi \circ i = \lambda$ .*

**Prova:** Como  $J(X)$  é objeto livre sobre  $X$  e  $\lambda : X \rightarrow L$  é uma aplicação entre conjuntos, onde  $L$  é um monóide, então, pelo teorema anterior, existe um único homomorfismo de monóides  $\Phi : J(X) \rightarrow L$  que torna o diagrama abaixo comutativo.

$$\begin{array}{ccc} J(X) & \xrightarrow{\Phi} & L \\ \uparrow i & \nearrow \lambda & \\ X & & \end{array}$$

Utilizando a hipótese de  $L$  ser objeto livre sobre  $X$ , e o fato de  $i : X \rightarrow J(X)$  ser uma aplicação entre conjuntos, sendo  $J(X)$  um monóide, segue pelo teorema anterior que existe um único homomorfismo de monóides  $\Psi : L \rightarrow J(X)$  que faz o diagrama abaixo comutar.

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\Psi} & J(X) \\ \uparrow \lambda & \nearrow i & \\ X & & \end{array}$$

Combinando os dois diagramas anteriores, obtemos um novo diagrama comutativo,

$$\begin{array}{ccccc} J(X) & \xrightarrow{\Phi} & L & \xrightarrow{\Psi} & J(X) \\ \uparrow i & \nearrow \lambda & & \nearrow i & \\ X & & & & \end{array}$$

Logo  $(\Psi \circ \Phi) \circ i = i$ . Agora, como  $J(X)$  é objeto livre sobre  $X$ ,  $i : X \rightarrow J(X)$  é aplicação entre conjuntos e  $J(X)$  é monóide, segue pelo teorema interior, que existe um único homomorfismo de monóides  $\alpha : J(X) \rightarrow J(X)$  tal que  $\alpha \circ i = i$ . Como  $1_{J(X)}$ ,  $\Psi \circ \Phi$  são homomorfismos de monóides,  $1_{J(X)} \circ i = i$  e  $(\Psi \circ \Phi) \circ i = i$ , segue que  $\Psi \circ \Phi = 1_{J(X)}$ . Um argumento análogo mostra que,  $\Phi \circ \Psi = 1_L$ . Portanto  $J(X)$  e  $L$  são isomorfos.

■

**Definição 3.1** *O monóide  $J(X)$  é denominado monóide livre gerado por  $X$ .*

Nosso próximo objetivo será construir uma topologia para  $J(X)$ , quando  $X$  for um espaço topológico de Hausdorff.

### 3.2 A topologia de $J(X)$

Nesta seção consideramos  $X$  um espaço topológico de Hausdorff e  $e$  um ponto não degenerado de  $X$ , isto é, o par  $(X, e)$  é um par-NDR. A partir disso, construiremos uma topologia conveniente para  $J(X)$ .

Seja  $X^n$  o produto de  $n$  cópias de  $X$ , e considere a topologia compactamente gerada em  $X^n$  (podemos fazer tal consideração, pois  $X^n$  é espaço de Hausdorff).

Consideremos a aplicação  $i_k : X^{n-1} \rightarrow X^n$  definida por

$$i_k(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = (x_1, \dots, x_{k-1}, e, x_k, \dots, x_{n-1}),$$

para  $k = 1, 2, \dots, n$ . Definimos  $X_*^{n-1}$  como sendo o conjunto de todos pontos de  $X^n$ , com ao menos uma coordenada igual a  $e$ , ou seja,  $X_*^{n-1} = \bigcup_{k=1}^n i_k(X^{n-1})$ .

Observamos que a aplicação  $i_k$  é (1) contínua e (2) fechada, de onde segue que  $X_*^{n-1}$  é fechado em  $X^n$ .

Prova de (1):  $i_k$  é contínua.

Basta mostrarmos que  $i_k|_C : C \rightarrow X^n$  é contínua para todo compacto  $C \subset X^{n-1}$ .

Mas, se  $F \subset X^n$  é fechado, como  $i_k$  é injetora, segue que

$$(i_k|_C)^{-1}(F) = i_k^{-1}(F) \cap C = i_k^{-1}(F \cap i_k(C)).$$

Mas  $i_k(C)$  é compacto em  $X^n$  ( com a topologia produto ), donde  $F \cap i_k(C)$  é fechado em  $X^n$ , e como  $i_k$  é contínua (com a topologia produto), segue que  $i_k^{-1}(F \cap i_k(C))$  é fechado em  $C$ . E daí segue a continuidade de  $i_k$ .

Prova de (2):  $i_k$  é fechada.

Seja  $F$  um fechado em  $X^{n-1}$ , devemos mostrar que  $i_k(F)$  é fechado em  $X^n$ . Para

tanto, seja  $K$  um compacto qualquer de  $X^n$ . Agora,

$$\begin{aligned} i_k(F) \cap K &= i_k(F) \cap (K \cap i_k(X^{n-1})) \\ &= i_k(F) \cap i_k(i_k^{-1}(K \cap i_k(X^{n-1}))) \\ &= i_k(F \cap i_k^{-1}(K \cap i_k(X^{n-1}))). \end{aligned}$$

Visto que  $i_k$  é contínua quando os espaços  $X^{n-1}$  e  $X^n$  são considerados com a topologia produto, segue que  $i_k(X^{n-1})$  é fechado em  $X^n$ , e assim, como  $K$  é compacto de  $X^n$ ,  $i_k^{-1}(K \cap i_k(X^{n-1}))$  é compacto de  $X^{n-1}$ . Logo  $F \cap i_k^{-1}(K \cap i_k(X^{n-1}))$  é fechado em  $X^n$  (com a topologia produto). Haja visto que a aplicação  $i_k$  é fechada, quando consideramos  $X^{n-1}$  e  $X^n$  com a topologia produto, segue que  $i_k(F \cap i_k^{-1}(K \cap i_k(X^{n-1})))$  é um fechado de  $X^n$ . Portanto  $i_k(F) \cap K$  é fechado em  $X^n$  (com a topologia produto), e assim,  $i_k(F)$  é fechado em  $X^n$  (com a topologia compactamente gerada), o que completa a prova de  $i_k$  ser fechada.

Seja  $J^n(X) = \{x_1x_2 \dots x_n \in J(X) : k \leq n\}$ , ou seja,  $J^n(X)$  é o conjunto de todos elementos de  $J(X)$  que são produtos de no máximo  $n$  elementos de  $X$ . Consideremos  $\pi_n : X^n \rightarrow J^n(X)$  a aplicação definida por  $\pi_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1x_2 \dots x_n$ , e coloque a topologia em  $J^n(X)$ , de tal modo que  $\pi_n$  seja uma proclusão, ou seja,  $A \subset J^n(X)$  é aberto, se, e somente se,  $\pi_n^{-1}(A)$  é aberto em  $X^n$ .

A partir da topologia de  $J^n(X)$ , construiremos uma topologia para  $J(X)$ . O primeiro passo para esta construção é provar que  $J^n(X)$  é compactamente gerado, e para isso, utilizaremos a propriedade **CG 5**. Visto que  $X^n$  é compactamente gerado,  $\pi_n$  é proclusão, se mostrarmos que  $J^n(X)$  é um espaço de Hausdorff, então seguirá que  $J^n(X)$  é compactamente gerado.

**Teorema 3.3** *O espaço  $J^n(X)$  é um espaço de Hausdorff.*

*Prova:* Sejam  $x = x_1x_2 \dots x_n$ ,  $x' = x'_1x'_2 \dots x'_n$  elementos distintos de  $J^n(X)$ . Então podemos escrever  $x = w_1w_2 \dots w_p$ ,  $x' = w'_1w'_2 \dots w'_q$ , onde  $w_i, w'_j \in X - \{e\}$ , e  $(w_1, w_2, \dots, w_p) \neq (w'_1, w'_2, \dots, w'_q)$ .

Como  $X$  é compactamente gerado,  $X$  é espaço de Hausdorff, e assim podemos

escolher vizinhanças  $U$  de  $e$ ,  $V_i$  de  $w_i$ ,  $V'_j$  de  $w'_j$  tais que

$$U \cap V_i = U \cap V'_j = \emptyset \text{ e } V_i \cap V'_j = \emptyset \text{ se } w_i \neq w'_j.$$

Sejam

$$P = V_1 \times V_2 \times \dots \times V_p \times \underbrace{U \times \dots \times U}_{n-p \text{ fatores}}$$

$$P' = V'_1 \times V'_2 \times \dots \times V'_q \times \underbrace{U \times \dots \times U}_{n-q \text{ fatores}}$$

Tomemos  $Q$  como sendo a união de todos conjuntos que podem ser obtidos de  $P$  permutando seus fatores, porém deixando a ordem dos fatores  $V_1, V_2, \dots, V_p$  inalterada. De maneira análoga definimos  $Q'$ . Então  $Q$  e  $Q'$  são abertos em  $X^n$  com a topologia produto, logo são abertos em  $X^n$  com a topologia compactamente gerada. Afirmamos que  $\pi_n(Q)$  e  $\pi_n(Q')$  são abertos em  $J^n(X)$ . De fato, temos que

- (1)  $\pi_n^{-1}(\pi_n(Q)) = Q$ ,
- (2)  $\pi_n^{-1}(\pi_n(Q')) = Q'$ .

Justificativa de (1): Seja  $z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \pi_n^{-1}(\pi_n(Q))$ , então

$$\pi_n(z) = z_1 z_2 \dots z_n \text{ e } \pi_n(z) \in \pi_n(Q).$$

Como  $\pi_n(z) \in J(X)$ , podemos escrevê-lo como produto reduzido, que é único, ou seja,  $\pi_n(z) = z_{j_1} z_{j_2} \dots z_{j_k}$ , com  $k \leq n$ ,  $z_{j_i} \in X - \{e\}$ , para todo  $i = 1, 2, \dots, k$ , e  $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n$ . Agora, como  $\pi_n(z) \in \pi_n(Q)$ , existe  $q = (q_1, q_2, \dots, q_n) \in Q$  tal que  $\pi_n(q) = \pi_n(z)$ . Mas o produto reduzido de  $\pi_n(q)$  deve ter a forma  $q_{i_1} q_{i_2} \dots q_{i_s}$ , para algum  $s \leq n$  e  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_s \leq n$ . Portanto  $s = k$  e  $z_{j_l} = q_{i_l}$  para  $l = 1, 2, \dots, k$ , e para  $z_r$  com  $r \notin \{j_1, j_2, \dots, j_k\}$ ,  $z_r = e$ , donde  $z \in Q$ . Deste modo, temos que  $\pi_n^{-1}(\pi_n(Q)) \subset Q$ . A outra inclusão é imediata, e daí segue (1).

A justificativa de (2) é semelhante à justificativa de (1).

Por (1) e (2) segue que  $\pi_n(Q)$  e  $\pi_n(Q')$  são abertos em  $J^n(X)$ , com  $x \in \pi_n(Q)$  e  $x' \in \pi_n(Q')$ .

Como  $P \cap P' = \emptyset$ , segue imediatamente que  $\pi_n(Q) \cap \pi_n(Q') = \emptyset$ , o que completa a prova do Teorema.

■



**Corolário 3.2** *O espaço  $J^n(X)$  é compactamente gerado.*

■

$J^n(X)$  satisfaz algumas propriedades interessantes, as quais serão úteis para demonstrarmos que  $J(X)$  é um monóide topológico. Tais propriedades se resumem no teorema a seguir.

**Teorema 3.4** *Sejam  $X$  um espaço de Hausdorff e  $e$  um ponto base não degenerado de  $X$ . Então:*

- (1) *A aplicação  $J^{n-1}(X) \hookrightarrow J^n(X)$  é um homeomorfismo entre  $J^{n-1}(X)$  e um subespaço fechado de  $J^n(X)$ ;*
- (2) *A proclusão  $\pi_n : (X^n, X_*^{n-1}) \longrightarrow (J^n(X), J^{n-1}(X))$  é um homeomorfismo relativo;*
- (3)  *$(J^n(X), J^{n-1}(X))$  é um par-NDR.*

*Prova:* Seja  $J_*^{n-1} = \pi_n(X_*^{n-1})$ , então  $X_*^{n-1} = \pi_n^{-1}(J_*^{n-1})$ .

De fato, seja  $z \in \pi_n^{-1}(J_*^{n-1})$ , isto é,

$$z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in X^n \text{ e } \pi_n(z) \in J_*^{n-1} = \pi_n(X_*^{n-1}),$$

assim  $\pi_n(z) = \pi_n(w)$ , com  $w \in X_*^{n-1}$ . Logo  $\pi_n(z) \in J^{n-1}(X)$ , donde  $z$  possui no máximo  $n - 1$  coordenadas diferentes de  $e$ , portanto  $z \in X_*^{n-1}$ , deste modo, temos

$$\pi_n^{-1}(J_*^{n-1}) \subset X_*^{n-1}.$$

A inclusão  $X_*^{n-1} \subset \pi_n^{-1}(J_*^{n-1})$  é imediata. Portanto  $X_*^{n-1} = \pi_n^{-1}(J_*^{n-1})$ .

Sabemos que  $X_*^{n-1}$  é fechado em  $X^n$ , logo  $\pi_n^{-1}(J_*^{n-1})$  é fechado em  $X^n$ , donde vem que  $J_*^{n-1}$  é fechado em  $J^n(X)$ .

Observamos que,

$$J_*^{n-1} = \pi_n(X_*^{n-1}) = \{x_1 x_2 \dots x_k \in J(X) : k \leq n - 1\} = J^{n-1}(X),$$

sendo esta última igualdade, entre conjuntos. Deste modo, se mostrarmos que  $J_*^{n-1}$  e  $J^{n-1}(X)$  possuem a mesma topologia, seguirá que  $J_*^{n-1}$  e  $J^{n-1}(X)$  são homeomorfos, e assim a afirmação (1) ficará justificada. Antes de mostrarmos isso, provemos que  $\pi_n : (X^n, X_*^{n-1}) \longrightarrow (J^n(X), J_*^{n-1})$  é um homeomorfismo relativo.

Sabemos que  $\pi_n : X^n \longrightarrow J^n(X)$  é proclusão, além disso,

$$p_n := \pi_n|_{X^n - X_*^{n-1}} : X^n - X_*^{n-1} \longrightarrow J^n(X) - J_*^{n-1}$$

está bem definida, pois  $\pi_n(X_*^{n-1}) = J_*^{n-1}$ .

Afirmamos que  $p_n$  é homeomorfismo. De fato,  $p_n$  é contínua pois é restrição de uma aplicação contínua. Ainda temos que  $p_n$  é bijetora, pois satisfaz:

(4) Injetividade.

Sejam  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in X^n$  tais que

$$p_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = p_n(y_1, y_2, \dots, y_n),$$

então

$$\begin{aligned} x_1 x_2 \dots x_n = y_1 y_2 \dots y_n, \text{ com } y_i \neq e \neq x_i \forall i = 1, 2, \dots, n &\implies x_i = y_i \forall i = 1, 2, \dots, n \\ &\implies x = y \end{aligned}$$

(5) Sobrejetividade.

Dado  $x \in J^n(X) - J_*^{n-1}$ , isto é,  $x = x_1 x_2 \dots x_n$ , com  $x_i \neq e \forall i = 1, 2, \dots, n$ , então existe  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in X^n - X_*^{n-1}$  tal que  $p_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = x$ .

E finalmente,  $p_n$  é fechada. De fato, seja  $F$  um subconjunto fechado de  $X^n - X_*^{n-1}$ . Então  $\pi_n^{-1}(p_n(F)) = F$  é fechado em  $X^n - X_*^{n-1}$ , logo  $p_n(F)$  é fechado em  $J^n(X) - J_*^{n-1}$ .

Portanto  $\pi_n : (X^n, X_*^{n-1}) \longrightarrow (J^n(X), J_*^{n-1})$  é um homeomorfismo relativo. Novamente, se mostrarmos que  $J^{n-1}(X)$  e  $J_*^{n-1}$  possuem a mesma topologia, seguirá (2).

Provemos então que  $J_*^{n-1}$  e  $J^{n-1}(X)$  possuem a mesma topologia.

Seja  $\pi_* = \pi_n|_{X_*^{n-1}} : X_*^{n-1} \longrightarrow J_*^{n-1}$ . Como  $\pi_n$  é proclusão, e  $X_*^{n-1}$  é um subconjunto fechado de  $X^n$ , segue que  $\pi_*$  também é uma proclusão. Sem muitas dificuldades, verifica-se que o seguinte diagrama é comutativo.

$$\begin{array}{ccc} X^{n-1} & \xrightarrow{i_k} & X_*^{n-1} \\ \downarrow \pi_{n-1} & & \downarrow \pi_* \\ J^{n-1}(X) & \xlongequal{\quad} & J_*^{n-1} \end{array}$$

Seja  $F$  um fechado de  $J^{n-1}(X)$ , então  $\pi_{n-1}^{-1}(F)$  é fechado em  $X^{n-1}$ , e como  $i_k$  é aplicação fechada,  $i_k(\pi_{n-1}^{-1}(F))$  é fechado de  $X_*^{n-1}$ .

Afirmamos que

$$\pi_*^{-1}(F) = \bigcup_{k=1}^n i_k(\pi_{n-1}^{-1}(F)), \quad (6)$$

logo  $\pi_*^{-1}(F)$  é fechado de  $X_*^{n-1}$ , o que implica que  $F$  é fechado em  $J_*^{n-1}$ .

Justificativa de (6):

$$\begin{aligned} z \in \pi_*^{-1}(F) &\implies z \in X_*^{n-1} = \bigcup_{k=1}^n i_k(X^{n-1}) \text{ e } \pi_*(z) \in F \\ &\implies \exists l \in \{1, 2, \dots, n\} \text{ tal que } z \in i_l(X^{n-1}) \text{ e } \pi_*(z) \in F \\ &\implies \exists x = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \in X^{n-1} \text{ tal que } i_l(x) = z \text{ e } \pi_*(z) \in F \\ &\implies \pi_*(z) = \pi_*(i_l(x)) \in F \\ &\implies \pi_*(i_l(x)) = \pi_n(x_1, x_2, \dots, x_{l-1}, e, x_l, \dots, x_{n-1}) \in F \\ &\implies \pi_n(x_1, \dots, x_{l-1}, e, x_l, \dots, x_{n-1}) = x_1 x_2 \dots x_{n-1} = \pi_{n-1}(x) \in F \\ &\implies z \in i_l(\pi_{n-1}^{-1}(F)) \subset \bigcup_{k=1}^n i_k(\pi_{n-1}^{-1}(F)) \end{aligned}$$

Portanto,  $\pi_*^{-1}(F) \subset \bigcup_{k=1}^n i_k(\pi_{n-1}^{-1}(F))$ .

Ainda,

$$\begin{aligned} z \in \bigcup_{k=1}^n i_k(\pi_{n-1}^{-1}(F)) &\implies \exists l \in \{1, 2, \dots, n\}; z \in i_l(\pi_{n-1}^{-1}(F)) \\ &\implies \exists x = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \in \pi_{n-1}^{-1}(F); i_l(x) = z \\ &\implies \pi_*(z) = \pi_*(i_l(x)) = x_1 x_2 \dots x_{n-1} = \pi_{n-1}(x) \in F \\ &\implies z \in \pi_*^{-1}(F) \end{aligned}$$

Logo  $\bigcup_{k=1}^n i_k(\pi_{n-1}^{-1}(F)) \subset \pi_*^{-1}(F)$ . Com isso, fica provado (6).

Consideremos  $F$  um fechado em  $J_*^{n-1}$ , assim  $\pi_*^{-1}(F)$  é fechado de  $X_*^{n-1}$ .

Devido à comutatividade do diagrama acima,  $\pi_{n-1}^{-1}(F) = i_k^{-1}(\pi_*^{-1}(F))$  é fechado de  $J^{n-1}(X)$ , pois  $i_k$  é contínua. E daí segue que  $J_*^{n-1}$  e  $J^{n-1}(X)$  têm a mesma topologia.

Conseqüentemente as afirmações (1) e (2) do teorema são verdadeiras.

Como (2) é verdadeira,  $\pi_n : (X^n, X_*^{n-1}) \longrightarrow (J^n(X), J^{n-1}(X))$  é homeomorfismo relativo. Se provarmos que  $(X^n, X_*^{n-1})$  é um par-NDR, seguirá pela propriedade **CG 9** que  $(J^n(X), J^{n-1}(X))$  é um par-NDR, e assim (3) se justificará.

Por hipótese,  $e$  é um ponto não degenerado de  $X$ , isto é,  $(X, e)$  é um par-NDR. Pela propriedade **CG 8** segue que  $(X, e) \times (X, e) = (X \times X, X \times \{e\} \cup \{e\} \times X) = (X^2, X_*^1)$  é um par-NDR. Suponhamos que, para  $k \geq 2$ ,  $(X^k, X_*^{k-1})$  seja um par-NDR e provemos que o par  $(X^{k+1}, X_*^k)$  é NDR.

Ora, como  $(X, e)$  e  $(X^k, X_*^{k-1})$  são pares NDR, então, ainda pela propriedade **CG 8**,  $(X^k, X_*^{k-1}) \times (X, e) = (X^k \times X, X_*^{k-1} \times \{e\} \cup \{e\} \times X_*^{k-1}) = (X^{k+1}, X_*^k)$  é um par NDR.

■

Agora, do Teorema 3.4 segue que os espaços  $J^n(X)$  formam uma sequência expandida de espaços no sentido de 1.18. Dando ao espaço  $J(X)$  a topologia fraca determinada por  $\{J^n(X)\}$ , vemos, pela propriedade **CG 13** que  $J(X)$  é um espaço filtrado sob a filtração NDR  $\{J^n(X)\}$ .

Para mostrarmos a continuidade da multiplicação em  $J(X)$ , devemos verificar a continuidade da aplicação justaposição  $j : X^m \times X^n \longrightarrow X^{m+n}$  quando consideramos os espaços  $X^m$ ,  $X^n$  e  $X^{m+n}$  compactamente gerados, mas a demonstração disso é semelhante à feita para  $i_k$  e não a faremos aqui.

**Teorema 3.5** *A multiplicação em  $J(X)$  é contínua.*

*Prova:* Temos que o seguinte diagrama é comutativo,

$$\begin{array}{ccc} X^m \times X^n & \xrightarrow{j} & X^{m+n} \\ \downarrow \pi_m \times \pi_n & & \downarrow \pi_{m+n} \\ J^m(X) \times J^n(X) & \xrightarrow{J} & J^{m+n}(X) \end{array}$$

onde  $j$  é a aplicação justaposição, isto é, se  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ ,  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in X^n$  então  $j(x, y) = (x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n)$ .

Seja  $U$  um aberto de  $J^{m+n}(X)$ , então devemos provar que  $J^{-1}(U)$  é um aberto em  $J^m(X) \times J^n(X)$ , o que equivale a mostrar que  $(\pi_m \times \pi_n)^{-1}(J^{-1}(U))$  é um aberto em  $X^m \times X^n$ , pois  $\pi_m \times \pi_n$  é uma proclusão (por **CG 6**). Agora,  $(\pi_m \times \pi_n)^{-1}(J^{-1}(U)) = j^{-1}(\pi_{m+n}^{-1}(U))$  que é um aberto em  $X^m \times X^n$ , e daí segue a continuidade de  $J|_{J^m(X) \times J^n(X)}$  para quaisquer  $m, n$ . Visto que  $J(X)$  é um espaço filtrado por  $\{J^n(X)\}$ , por **CG 15**,  $J(X) \times J(X)$  é filtrado por  $\{L^n(X)\}$ , onde  $L^n(X) = \bigcup_{m=0}^n J^m(X) \times J^{n-m}(X)$ . E daí segue a continuidade de  $J$ .

■

Pelo que comentamos no início deste capítulo e pelo teorema anterior, segue que  $J(X)$  é um monóide topológico. Assim, temos que  $J(X)$  é um objeto na categoria dos monóides topológicos  $TMon$ . O teorema a seguir nos diz mais, que  $J(X)$  é um objeto livre sobre  $X$  na categoria  $TMon$ . O monóide topológico  $J(X)$  é conhecido como Produto Reduzido de James.

**Teorema 3.6** *Seja  $X$  um espaço topológico com ponto base  $x_0$ , e seja  $f : X \rightarrow M$  qualquer aplicação contínua, tal que  $f(x_0) = e$ , onde  $M$  é um monóide topológico, sendo  $e$  seu elemento identidade. Então existe um único homomorfismo contínuo*

$$\bar{f} : (J(X), x_0) \rightarrow (M, e)$$

*de monóides topológicos que estende  $f$ , ou seja, a composição*

$$(X, x_0) \hookrightarrow J(X) \xrightarrow{\bar{f}} M$$

*é igual a  $f$ .*

*Prova:* Seja  $f_n : X^n \rightarrow M$  a aplicação tal que  $f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1) \dots f(x_n)$ . Temos que, para  $k = 1, 2, \dots, n$ ,  $f_n \circ i_k = f_{n-1}$ , pois

$$\begin{aligned}
(f_n \circ i_k)(x_1, \dots, x_{n-1}) &= f_n(x_1, \dots, x_{k-1}, x_0, x_k, \dots, x_{n-1}) \\
&= f(x_1) \dots f(x_{k-1})f(x_0)f(x_k) \dots f(x_{n-1}) \\
&= f(x_1) \dots f(x_{k-1})ef(x_k) \dots f(x_{n-1}) \\
&= f(x_1) \dots f(x_{k-1})f(x_k) \dots f(x_{n-1}) \\
&= f_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}).
\end{aligned}$$

Afirmamos que existe uma aplicação  $\bar{f} : J(X) \longrightarrow M$  tal que

$$(\bar{f}|_{J^n(X)}) \circ \pi_n = f_n, \text{ para } n = 1, 2, \dots$$

Como  $J(X)$  é filtrado por  $\{J^n(X)\}$ , seja  $\bar{f} : J(X) \longrightarrow M$  definida em  $J^n(X)$  por  $\bar{f}(x_1x_2 \dots x_n) = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1)f(x_2) \dots f(x_n)$ . Claramente  $\bar{f}$  é contínua, pois  $f$ , e a multiplicação em  $M$  são contínuas. Além disso, para  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in X^n$ ,  $(\bar{f} \circ \pi_n)(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bar{f}(x_1x_2 \dots x_n) = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .  $\bar{f}$  é um homomorfismo, pois

$$\begin{aligned}
\bar{f}((a_1a_2 \dots a_n) \cdot (b_1b_2 \dots b_m)) &= \bar{f}(a_1a_2 \dots a_nb_1b_2 \dots b_m) \\
&= f_{n+m}(a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_m) \\
&= f(a_1)f(a_2) \dots f(a_n)f(b_1)f(b_2) \dots f(b_m) \\
&= f_n(a_1, a_2, \dots, a_n)f_m(b_1, b_2, \dots, b_m) \\
&= \bar{f}(a_1a_2 \dots a_n)\bar{f}(b_1b_2 \dots b_m).
\end{aligned}$$

Ainda, temos que, para  $x \in X$ ,  $\bar{f}(x) = f_1(x) = f(x)$ . Deste modo, existe um homomorfismo contínuo  $\bar{f}$  que estende  $f$ .

Mostremos agora a unicidade de  $\bar{f}$ . Para tal suponhamos que exista  $\bar{g}$  que estenda  $f$ . Afirmamos que  $\bar{f} = \bar{g}$ . De fato, seja  $x \in X$ , então  $\bar{f}(x) = f(x) = \bar{g}(x)$ , donde vem que  $\bar{f} = \bar{g}$  em  $X$ . Temos que para  $x_1x_2 \dots x_n \in J(X)$ ,

$$\bar{f}(x_1x_2 \dots x_n) = \bar{f}(x_1)\bar{f}(x_2) \dots \bar{f}(x_n) = \bar{g}(x_1)\bar{g}(x_2) \dots \bar{g}(x_n) = \bar{g}(x_1x_2 \dots x_n),$$

logo  $\bar{f} = \bar{g}$  em  $J(X)$ . O que prova a unicidade de  $\bar{f}$ .

■

**Definição 3.2** Chamamos a aplicação  $\bar{f}$ , construída no Teorema anterior, de extensão canônica de  $f$ .

Finalizamos esta seção com algumas observações que serão úteis para a demonstração do Teorema de James.

**Observação-1:** Se  $X$  é complexo CW e  $x_0$  é uma 0-célula de  $X$ , então  $J(X)$  é um complexo CW. Para verificarmos a veracidade desta afirmação, definimos antes, para  $k \geq 1$ ,  $J_k(X)$  como sendo o produto smash  $X^{\wedge k} = \underbrace{X \wedge X \wedge \dots \wedge X}_{k \text{ vezes}}$ . Como  $X$  é complexo CW, por **CW 5**, assim é  $X^{\wedge k}$ , e deste modo  $J_k(X)$  é complexo CW, para todo  $k \geq 1$ . Temos ainda que  $J(X) = \bigcup_{k \geq 1} J_k(X)$ , logo, como união qualquer de complexos CW é complexo CW,  $J(X)$  é complexo CW. Também temos que  $(J(X), \cdot)$  é um monóide topológico, isto segue, pois a topologia de  $J(X)$  como complexo CW coincide com a topologia de  $J(X)$  visto como espaço compactamente gerado (notemos que, por **CW 2**, todo complexo CW é compactamente gerado).

**Observação-2:** Supondo  $X$  um complexo CW, sendo  $x_0$  uma 0-célula, afirmamos que  $J^n(X)$  é complexo CW. Isto é direto, pois  $J^n(X) = \bigcup_{k=1}^n J_k(X)$ .

**Observação-3:** Como  $J^{n-1}(X)$ , pelo Teorema 3.4, pode ser visto como subespaço de  $J^n(X)$ , podemos considerar o espaço quociente  $J^n(X)/J^{n-1}(X)$ . Declaramos que  $J^n(X)/J^{n-1}(X)$  e  $J_n(X)$  são homeomorfos. Ora,  $J^n(X)/J^{n-1}(X)$  e  $J_n(X)$  coincidem como conjuntos, assim basta-nos provar que eles têm os mesmos conjuntos abertos. Para isso, consideremos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} X^n & \xrightarrow{\pi_n} & J^n(X) \\ q_n \downarrow & & \downarrow c_n \\ X^{\wedge n} = J_n(X) & \xlongequal{\quad} & J^n(X)/J^{n-1}(X), \end{array}$$

onde  $q_n : X^n \rightarrow X^{\wedge n} = J_n(X)$ , e  $c_n : J^n(X) \rightarrow J^n(X)/J^{n-1}(X)$  são aplicações quocientes.

Temos então

$$\begin{aligned}
A \subset J_n(X) \text{ é aberto} &\iff q_n^{-1}(A) \text{ é aberto em } X^n \\
&\iff (c_n \circ \pi_n)^{-1}(A) \text{ é aberto em } X^n \\
&\iff \pi_n^{-1}(c_n^{-1}(A)) \text{ é aberto em } X^n \\
&\iff c_n^{-1}(A) \text{ é aberto em } J^n(X) \\
&\iff A \text{ é aberto em } J^n(X)/J^{n-1}(X).
\end{aligned}$$

E assim segue que  $J^n(X)/J^{n-1}(X)$  e  $J_n(X)$  são homeomorfos.

**Observação-4:** Se  $X$  é conexo por caminhos, então  $J(X)$  também é conexo por caminhos. Seja  $n \geq 1$ . Se  $X$  é conexo por caminhos,  $X^n = X \times X \times \dots \times X$  também é conexo por caminhos.

Sabemos que  $\pi_n : X^n \rightarrow J^n(X)$  é contínua e sobrejetora, donde segue que  $J^n(X) = \pi_n(X^n)$  é conexo por caminhos.

Visto que  $J^1(X) \subset J^2(X) \subset \dots \subset J^n(X) \subset \dots$  e  $J(X) = \bigcup_{n \geq 1} J^n(X)$ , segue que  $J(X)$  é conexo por caminhos.



# Capítulo 4

## Teorema de James

### 4.1 Introdução

Sejam  $(X, x_0)$  um espaço com ponto base e  $Ja : (X, x_0) \longrightarrow \Omega(\Sigma X, \bar{x}_0)$ , a aplicação de James, definida por

$$Ja(x)(t) = [x, t] \in \Sigma X.$$

Temos que  $\Omega(\Sigma X, \bar{x}_0)$  não é um monóide topológico, deste modo o Teorema 3.6 não se aplica. Agora, se nós compusermos  $Ja$  com a inclusão de  $\Omega(\Sigma X, \bar{x}_0)$  em  $\Omega^M(\Sigma X, \bar{x}_0)$ , obteremos a aplicação  $\bar{J} : X \longrightarrow \Omega^M(\Sigma X, \bar{x}_0)$  dada por  $\bar{J}(x) = (Ja(x), 1)$ , a qual tem como contra-domínio um monóide topológico.

Observamos que,

$$\bar{J}(x_0) = (Ja(x_0), 1) \text{ e } Ja(x_0)(t) = [x_0, t] = \bar{x}_0,$$

ou seja,  $\bar{J}(x_0) = (l_{\bar{x}_0}, 1)$ , e  $(l_{\bar{x}_0}, 1)$  não é o elemento identidade de  $\Omega^M(\Sigma X, \bar{x}_0)$ . Logo a aplicação  $\bar{J}$  não se enquadra nas hipóteses do Teorema 3.6.

Seja  $\hat{X} = X \sqcup [0, 1] / \sim$ , onde  $\sim$  é a relação de equivalência que identifica 1 e  $x_0$ , isto é,  $1 \sim x_0$ .

Consideremos  $\tilde{J} : X \sqcup [0, 1] \longrightarrow \Omega^M(\Sigma X, \bar{x}_0)$  definida por

$$\tilde{J}(p) = \begin{cases} \bar{J}(p), & \text{se } p \in X \\ (l_{\bar{x}_0}, p), & \text{se } p \in [0, 1] \end{cases}$$

Mostremos que  $\tilde{J}$  é contínua. Como  $X \cap [0, 1] = \emptyset$ , basta provarmos a continuidade de  $\tilde{J}|_X$  e  $\tilde{J}|_{[0,1]}$ . Mas  $\tilde{J}|_X = \bar{J}$ , a qual é contínua, e  $\tilde{J}|_{[0,1]} : [0, 1] \rightarrow \Omega^M(\Sigma X, \bar{x}_0)$  é contínua, pois seja  $U = \bigcap_{i=1}^k (S_i, V_i) \times A$  aberto básico de  $\Omega^M(\Sigma X, \bar{x}_0)$ , onde  $S_i$  é compacto de  $\mathbb{R}_+$ ,  $V_i$  é aberto de  $\Sigma X$ , e  $A$  é aberto em  $\mathbb{R}_+$ .

Temos que existe  $L = A \cap [0, 1]$  aberto de  $[0, 1]$ , com  $\tilde{J}|_{[0,1]}(L) \subset U$ . De fato, seja  $z \in L = A \cap [0, 1]$ , assim  $\tilde{J}|_{[0,1]}(z) = (l_{\bar{x}_0}, z) \in \bigcap_{i=1}^k (S_i, V_i) \times A \cap [0, 1] \subset U$ . Além do mais,  $\tilde{J}(x_0) = \bar{J}(x_0) = (l_{\bar{x}_0}, 1) = \tilde{J}(1)$ . Deste modo,  $\tilde{J}$  preserva a relação  $\sim$ , e é contínua, portanto existe  $\tilde{J}a : X \sqcup [0, 1] / \sim \rightarrow \Omega^M(\Sigma X, \bar{x}_0)$  contínua, dada por  $\tilde{J}a(\hat{p}) = \tilde{J}(p)$ , sendo  $\hat{p} \in X \sqcup [0, 1] / \sim$ .

Tomando 0 como ponto base de  $\hat{X}$ , vemos que  $\tilde{J}a(0) = \tilde{J}(0) = (l_{\bar{x}_0}, 0)$ . Deste modo, temos que  $\tilde{J}a : \hat{X} \rightarrow \Omega^M(\Sigma X, \bar{x}_0)$  é contínua,  $\Omega^M(\Sigma X, \bar{x}_0)$  é monóide topológico, e  $\tilde{J}a$  leva o ponto base de  $\hat{X}$  no elemento identidade de  $\Omega^M(\Sigma X, \bar{x}_0)$ , e assim podemos aplicar o Teorema 3.6, ou seja, existe um único homomorfismo contínuo  $J : J(\hat{X}) \rightarrow \Omega^M(\Sigma X, \bar{x}_0)$  que estende  $\tilde{J}a$ .

O Teorema de James nos diz que, se  $X$  é um complexo CW conexo, então  $J$  é uma equivalência de homotopia. E a demonstração deste Teorema será o nosso objetivo neste capítulo. Para tal demonstração, mostraremos inicialmente que  $H_*(J(\hat{X})) \cong T\tilde{H}_*(X)$  via um isomorfismo  $j_1$  de álgebras graduadas e mostraremos também que existe outro isomorfismo de álgebras graduadas  $j_2$  entre  $H_*(\Omega^M(\Sigma X, \bar{x}_0))$  e  $T\tilde{H}_*(X)$ . Logo a seguir, verificaremos que

$$H_*(J) = j_2 \circ j_1^{-1},$$

sendo assim  $H_*(J)$  um isomorfismo de álgebras graduadas. Tendo isto, aplicaremos o Teorema de Whitehead 1.11, e para isso, precisaremos ainda mostrar que  $J$  é uma equivalência de homotopia fraca, feito isto, aplicaremos o Teorema de Milnor 2.5, e assim, a prova do Teorema de James estará concluída. De início, calcularemos  $H_*(J(\hat{X}))$ .

## 4.2 Cálculo de $H_*(J(\widehat{X}))$

Inicialmente calcularemos  $H_*(J(X); F)$ , sendo  $X$  um complexo CW conexo,  $x_0$  uma 0-célula de  $X$  e  $F$  um corpo.

Lembremos que  $J(X)$  é filtrado por  $\{J^n(X)\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ , e desta forma, segue que

$$J^1(X) \subset J^2(X) \subset \dots \subset J^n(X) \subset \dots \subset J(X)$$

Além do mais, supondo  $Y$  um  $F$ -módulo e considerando

$$T_n(Y) = R \oplus Y \oplus Y \otimes Y \oplus \dots \oplus \underbrace{Y \otimes \dots \otimes Y}_{n \text{ vezes}},$$

vemos que

$$T_1(Y) \subset T_2(Y) \subset \dots \subset T_n(Y) \subset \dots \subset T(Y),$$

sendo  $T(Y)$  a álgebra tensorial do  $F$ -módulo  $Y$ .

Em particular, quando consideramos  $Y = \widetilde{H}_*(X; F)$ ,

$$T_1\widetilde{H}_*(X; F) \subset T_2\widetilde{H}_*(X; F) \subset \dots \subset T_n\widetilde{H}_*(X; F) \subset \dots \subset T\widetilde{H}_*(X; F)$$

A estratégia para a demonstração de que  $H_*(J(X); F) \cong T\widetilde{H}_*(X; F)$  será a seguinte:

Primeiro, mostraremos que, para cada inteiro positivo  $n$  existe um  $F$ -isomorfismo

$$\psi_n : T_n\widetilde{H}_*(X; F) \longrightarrow H_*(J^n(X); F).$$

Logo a seguir, verificaremos a existência dos limites diretos  $\varinjlim H_*(J^n(X); F)$ , e  $\varinjlim T_n\widetilde{H}_*(X; F)$ . Supondo a existência dos limites diretos acima citados, que

$$\varinjlim H_*(J^n(X); F) \cong H_*(J(X); F), \quad \varinjlim T_n\widetilde{H}_*(X; F) \cong T\widetilde{H}_*(X; F),$$

e que  $\psi_n$  induza um  $F$ -isomorfismo  $\bar{\psi}$  entre  $\varinjlim T_n\widetilde{H}_*(X; F)$  e  $\varinjlim H_*(J^n(X); F)$ , então seguirá que  $H_*(J(X); F) \cong T\widetilde{H}_*(X; F)$ .

Deste modo, devemos demonstrar que:

- (1) existe um  $F$ -isomorfismo  $\psi_n : T_n\widetilde{H}_*(X; F) \longrightarrow H_*(J^n(X); F)$ ;

- (2)  $\varinjlim T_n \tilde{H}_*(X; F) \cong T \tilde{H}_*(X; F)$ ;  
 (3)  $\varinjlim H_*(J^n(X); F) \cong H_*(J(X); F)$ ;  
 (4) existe um  $F$ -isomorfismo  $\bar{\psi}$  entre  $\varinjlim T_n \tilde{H}_*(X; F)$  e  $\varinjlim H_*(J^n(X); F)$ .

Para provarmos (1), precisaremos de alguns lemas, os quais enunciaremos a seguir.

**Lema 4.1** *Se  $X$  é complexo CW, e  $A$  é um subcomplexo não-vazio, então existe uma seqüência exata*

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow \tilde{H}_n(A) \xrightarrow{i_*^n} \tilde{H}_n(X) \xrightarrow{j_*^n} \tilde{H}_n(X/A) \xrightarrow{\partial^n} \tilde{H}_{n-1}(X) \xrightarrow{i_*^{n-1}} \tilde{H}_{n-1}(X) \longrightarrow \\ \cdots \longrightarrow \tilde{H}_0(X/A) \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

onde  $i$  é a inclusão  $A \hookrightarrow X$  e  $j$  é a aplicação quociente  $X \rightarrow X/A$

**Prova:** Ver [5].

■

**Lema 4.2** *Se as hipóteses do lema anterior forem satisfeitas, então a seqüência*

$$(*) \quad H_*(A) = R \oplus \tilde{H}_*(A) \xrightarrow{H_*(p)} H_*(X) = R \oplus \tilde{H}_*(X) \xrightarrow{H_*(q)} \tilde{H}_*(X/A)$$

é exata, onde  $H_*(p) = 1_R \times H_*(i)$ ,  $H_*(q) = H_*(j) \circ p_2$ , com  $H_*(i)$ ,  $H_*(j)$  sendo as induzidas em homologia pelas aplicações  $i$  e  $j$  do lema anterior, respectivamente, e  $p_2(r, x) = x$ , com  $(r, x) \in R \oplus \tilde{H}_*(X)$

**Prova:** Como as hipóteses do lema anterior são satisfeitas, existe uma seqüência exata

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow \tilde{H}_n(A) \xrightarrow{i_*^n} \tilde{H}_n(X) \xrightarrow{j_*^n} \tilde{H}_n(X/A) \xrightarrow{\partial^n} \tilde{H}_{n-1}(X) \xrightarrow{i_*^{n-1}} \tilde{H}_{n-1}(X) \longrightarrow \\ \cdots \longrightarrow \tilde{H}_0(X/A) \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

Na seqüência (\*) devemos mostrar que  $\ker(H_*(j) \circ p_2) = \text{Im}(1_R \times H_*(i))$ .

$$\text{Im}(1_R \times H_*(i)) \subset \ker(H_*(j) \circ p_2) \text{ pois, para } (r, H_*(i)(\sum_{k \geq 1} a_k)) \in \text{Im}(1_R \times H_*(i)),$$

$$\text{temos } (H_*(j) \circ p_2)(r, H_*(i)(\sum_{k \geq 1} a_k)) = H_*(j)(\sum_{k \geq 1} i_*^k(a_k)) = \sum_{k \geq 1} (j_*^k \circ i_*^k)(a_k) = 0.$$

Já  $\ker(H_*(j) \circ p_2) \subset \text{Im}(1_R \times H_*(i))$ , pois, para  $(r, \sum_{k \geq 1} a_k) \in \ker(H_*(j) \circ p_2)$ , temos  $H_*(j)(p_2(r, \sum_{j \geq 1} a_k)) = \sum_{k \geq 1} j_*^k(a_k) = 0$ , donde segue que  $j_*^k(a_k) = 0$ , e assim  $a_k \in \text{Im}(i_*^k)$ , logo  $(r, \sum_{k \geq 1} a_k) = (r, \sum_{k \geq 1} i_*^k(a_k)) \in \text{Im}(1_R \times H_*(i))$ . ■

**Prova de (1):** Lembrando que

$$H_*(J(X); F) = \bigoplus_{i \geq 0} H_i(J(X); F), \text{ e } T\tilde{H}_*(X; F) = \bigoplus_{i \geq 0} T^{(i)}\tilde{H}_*(X; F),$$

onde

$$T^{(i)}\tilde{H}_*(X; F) = \begin{cases} F, & \text{se } i = 0 \\ \underbrace{\tilde{H}_*(X; F) \otimes \dots \otimes \tilde{H}_*(X; F)}_{i \text{ vezes}} = \tilde{H}_*(X; F)^{\otimes n}, & \text{se } i \geq 1, \end{cases}$$

podemos definir  $F$ -homomorfismos, para  $n \geq 1$ ,

$$\phi_n : T^{(n)}\tilde{H}_*(X; F) = \tilde{H}_*(X; F)^{\otimes n} \longrightarrow H_*(J(X); F),$$

sendo a composição

$$\tilde{H}_*(X; F)^{\otimes n} \hookrightarrow H_*(X; F)^{\otimes n} \xrightarrow{\times} H_*(X^n; F) \xrightarrow{H_*(\pi_n)} H_*(J^n(X); F) \xrightarrow{H_*(i)} H_*(J(X); F),$$

onde  $\times$  é o produto cross,  $H_*(\pi_n)$  é a induzida em homologia de  $\pi_n$  ( $\pi_n$  é a proclusão definida no capítulo anterior), e  $H_*(i)$  é a induzida em homologia de  $i$ , sendo  $i$  a inclusão de  $J^n(X)$  em  $J(X)$ .

Como  $X$  é complexo CW conexo, segue que  $X$  é conexo por caminhos, logo  $J(X)$  também é conexo por caminhos, e assim  $H_0(J(X); F) \cong F$ . Então podemos definir

$$\phi_0 : T^{(0)}\tilde{H}_*(X; F) = F \longrightarrow H_*(J(X); F)$$

por  $\phi_0(r) = r$ , que também é um  $F$ -homomorfismo. Desta forma, existe um único  $F$ -homomorfismo  $\phi : T\tilde{H}_*(X; F) \longrightarrow H_*(J(X); F)$  tal que  $\phi|_{T^{(n)}\tilde{H}_*(X; F)} = \phi_n$ .

Definimos, para  $n \geq 1$ ,  $T_n\tilde{H}_*(X; F)$  como sendo

$$F \oplus \tilde{H}_*(X; F) \oplus \tilde{H}_*(X; F) \otimes \tilde{H}_*(X; F) \oplus \dots \oplus \underbrace{\tilde{H}_*(X; F) \otimes \dots \otimes \tilde{H}_*(X; F)}_{n \text{ vezes}}$$

Provemos que  $\psi_n = \phi|_{T_n \tilde{H}_*(X; F)} : T_n \tilde{H}_*(X; F) \longrightarrow H_*(J^n(X); F)$  é um  $F$ -isomorfismo para todo  $n$ .

Como  $X$  é complexo CW, o Teorema 3.4 se aplica, e assim, o par  $(J^n(X), J^{n-1}(X))$  satisfaz as hipóteses do Lema 4.2. Como  $J^n(X)/J^{n-1}(X)$  e  $X^{\wedge n}$  são homeomorfos, segue que a sequência abaixo é exata,

$$H_*(J^{n-1}(X); F) \xrightarrow{H_*(p)} H_*(J^n(X); F) \xrightarrow{H_*(q)} \tilde{H}_*(X^{\wedge n}; F)$$

Sem muitas dificuldades, verifica-se que o diagrama abaixo é comutativo para todo  $n \geq 1$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & T_{n-1} \tilde{H}_*(X; F) & \xrightarrow{i_{n-1}} & T_n \tilde{H}_*(X; F) & \xrightarrow{p_n} & \tilde{H}_*(X; F)^{\otimes n} \longrightarrow 0 \\ & & \psi_{n-1} \downarrow & & \psi_n \downarrow & & \times \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & H_*(J^{n-1}(X); F) & \xrightarrow{H_*(p)} & H_*(J^n(X); F) & \xrightarrow{H_*(q)} & \tilde{H}_*(X^{\wedge n}; F) \longrightarrow 0, \end{array}$$

com  $i_{n-1}$  sendo a inclusão  $T_{n-1} \tilde{H}_*(X; F) \hookrightarrow T_n \tilde{H}_*(X; F)$ ,  $p_n$  é a projeção sobre a última variável,  $H_*(p) = 1_R \times H_*(i)$ , onde  $i$  é a inclusão  $J^{n-1}(X) \hookrightarrow J^n(X)$ ,  $H_*(q) = H_*(f \circ j) \circ p_2$ , onde  $J^n(X) \xrightarrow{j} J^n(X)/J^{n-1}(X) \xrightarrow{f} X^{\wedge n}$ , sendo  $f$  o homeomorfismo entre  $J^n(X)/J^{n-1}(X)$  e  $X^{\wedge n}$ .

Observamos que a sequência

$$0 \longrightarrow T_{n-1} \tilde{H}_*(X; F) \xrightarrow{i_{n-1}} T_n \tilde{H}_*(X; F) \xrightarrow{p_n} \tilde{H}_*(X; F)^{\otimes n} \longrightarrow 0$$

é exata, para todo  $n \geq 1$ .

Provemos agora que  $\psi_n$  é  $F$ -isomorfismo, para todo  $n \geq 1$ , por indução.

(1) Para  $n = 1$ , temos  $\psi_1 : R \oplus \tilde{H}_*(X) \longrightarrow H_*(J^1(X)) = H_*(X)$ , onde  $\psi_1 = \phi|_{R \oplus \tilde{H}_*(X)}$ , e  $\psi_1(r, x) = (r, x)$ , onde  $(r, x) \in R \oplus \tilde{H}_*(X)$ . Claramente  $\psi_1$  é um  $F$ -isomorfismo (note que  $\tilde{H}_0(X) \cong \{0\}$ , pois  $X$  é conexo por caminhos).

(2) Suponha, para  $n \geq 2$ , que  $\psi_{n-1}$  seja um  $F$ -isomorfismo e provemos que  $\psi_n$  também é um  $F$ -isomorfismo.

Do Teorema de Künneth segue que  $\tilde{H}_*(X)^{\otimes n}$  e  $\tilde{H}_*(X^{\wedge n})$  são  $F$ -isomorfos via o produto cross (notemos que  $F$  é um corpo), e como  $\psi_{n-1}$  é  $F$ -isomorfismo, temos que a

seqüência

$$0 \longrightarrow H_*(J^{n-1}(X)) \longrightarrow H_*(J^n(X); F) \longrightarrow \tilde{H}_*(X^{\wedge n}; F) \longrightarrow 0$$

é exata. Assim o Lema dos 5 se aplica, donde vem que  $\psi_n$  é um  $F$ -isomorfismo. ■

Provaremos, a partir de agora, (2). Para tanto, precisaremos de alguns resultados preliminares.

Dizemos que um conjunto parcialmente ordenado  $D$  é dirigido se, para quaisquer dois elementos  $\alpha, \beta$  de  $D$ , existe um elemento  $\tau$  de  $D$  tal que  $\tau \geq \alpha$  e  $\tau \geq \beta$ .

O conjunto dos números naturais  $\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$ , bem como, o conjunto dos inteiros positivos,  $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$ , são exemplos de conjuntos dirigidos.

Sejam  $D$  um conjunto dirigido, e  $G_\alpha$  um  $F$ -módulo definido para cada  $\alpha \in D$ .

Suponhamos que para cada  $\beta \geq \alpha$  em  $D$ , exista um  $F$ -homomorfismo  $f_{\alpha\beta} : G_\alpha \longrightarrow G_\beta$ , tal que para  $\gamma \geq \beta \geq \alpha$  em  $D$  tenhamos  $f_{\beta\gamma} \circ f_{\alpha\beta} = f_{\alpha\gamma}$  e se  $\alpha = \beta$ , então  $f_{\alpha\beta} = 1_{G_\alpha}$ . O sistema  $\{G_\alpha, f_{\alpha\beta}\}$  com as propriedades acima citadas é chamado sistema dirigido de  $F$ -módulos.

O próximo Teorema garante a existência de limite direto na categoria dos  $R$ -módulos  $R\text{-Mod}$ , sendo  $R$  um anel comutativo com identidade.

**Teorema 4.1** *Sejam  $\{G_\alpha, f_{\alpha\beta}\}$  um sistema dirigido de  $R$ -módulos, e  $G$  o  $R$ -módulo dado*

*por  $\bigoplus_{\alpha \in D} G_\alpha / S$ , sendo  $S$  o submódulo de  $\bigoplus_{\alpha \in D} G_\alpha$  gerado por*

$$\{\lambda_\alpha(g) - \lambda_\beta(f_{\alpha\beta}(g)) : g \in G \text{ e } \beta \geq \alpha\},$$

*com  $\lambda_\gamma : G_\gamma \hookrightarrow \bigoplus_{\alpha \in D} G_\alpha$ ,  $\gamma \in D$ . Então  $G \cong \varinjlim G_\alpha$ .*

**Prova:** Devido às propriedades que definem o sistema dirigido  $\{G_\alpha, f_{\alpha\beta}\}$  segue que  $D$  é filtrado (como na seção 4 do capítulo 2).

Assim, basta mostrarmos que  $G \cong \text{colim} F(\alpha)$ , sendo  $F : D \longrightarrow R\text{-Mod}$  o funtor que associa cada  $\alpha \in \text{obj}(D)$  ao  $R$ -módulo  $G_\alpha$  e caso  $\beta \geq \alpha$ , então existe um

$R$ -homomorfismo  $f_{\alpha\beta} : G_\alpha \longrightarrow G_\beta$ . A boa definição do funtor  $F$  é decorrente do fato de  $\{G_\alpha, f_{\alpha\beta}\}$  ser um sistema dirigido.

Para mostrarmos que  $G \cong \text{colim} F(\alpha)$ , utilizaremos a propriedade definidora de colimite, dada na seção 4 do capítulo 2.

Inicialmente, notemos que a inclusão  $\lambda_\alpha : G_\alpha \longrightarrow \bigoplus_{\alpha \in D} G_\alpha$  ( $\alpha \in D$ ) induz um  $R$ -homomorfismo  $i_\alpha : G_\alpha \longrightarrow G$ . E mais, se  $\beta \geq \alpha$ , então, como  $\lambda_\alpha(g^\alpha) - \lambda_\beta(f_{\alpha\beta}(g^\alpha)) \in S$ ,  $\forall g^\alpha \in G_\alpha$ ,  $i_\beta \circ f_{\alpha\beta} = i_\alpha$ .

Dados  $\alpha, \beta \in D$ , com  $\beta \geq \alpha$ ,  $R$ -módulo  $A$  e  $R$ -homomorfismo  $g_\alpha : G_\alpha \longrightarrow A$ , temos que, se o diagrama

$$\begin{array}{ccccc} G & \xleftarrow{i_\alpha} & G_\alpha & \xrightarrow{g_\alpha} & A \\ & \swarrow i_\beta & \downarrow f_{\alpha\beta} & \searrow g_\beta & \\ & & G_\beta & & \end{array}$$

comuta, então existe um único  $R$ -homomorfismo  $h : G \longrightarrow A$  que completa o diagrama comutativamente.

De fato, para cada  $\alpha \in D$ , existe  $R$ -homomorfismo  $g_\alpha : G_\alpha \longrightarrow A$ , logo pela propriedade universal de Soma Direta, existe um único  $R$ -homomorfismo

$$\tilde{h} : \bigoplus_{\alpha \in D} G_\alpha \longrightarrow A,$$

que torna o diagrama abaixo comutativo, para cada  $\alpha \in D$ ,

$$\begin{array}{ccc} G_\alpha & \xrightarrow{g_\alpha} & A \\ \lambda_\alpha \downarrow & \nearrow \tilde{h} & \\ \bigoplus_{\alpha \in D} G_\alpha & & \end{array}$$

Afirmamos que  $\tilde{h}(S) = \{0\}$ , com  $0 \in A$ . Claramente  $\{0\} \subset \tilde{h}(S)$ , pois  $0 = \lambda_\alpha(0) - \lambda_\alpha(f_{\alpha\alpha}(0))$ . Já  $\tilde{h}(S) \subset \{0\}$ , pois seja  $z \in S$ , isto é,  $z = \lambda_\alpha(g) - \lambda_\beta(f_{\alpha\beta}(g))$ ,



com  $g \in G_\alpha$ ,  $\beta \geq \alpha$  e  $\lambda_\gamma : G_\gamma \hookrightarrow \bigoplus_{\alpha \in D} G_\alpha$ . Ora,

$$\begin{aligned} \tilde{h}(z) &= \tilde{h}(\lambda_\alpha(g)) - \tilde{h}(\lambda_\beta(f_{\alpha\beta}(g))) \\ &= g_\alpha(g) - g_\beta(f_{\alpha\beta}(g)) \\ &\stackrel{*}{=} g_\alpha(g) - g_\alpha(g) \\ &= 0 \end{aligned}$$

sendo que a igualdade  $\star$  decorre da comutatividade do diagrama

$$\begin{array}{ccc} G_\alpha & \xrightarrow{g_\alpha} & A \\ f_{\alpha\beta} \downarrow & \nearrow g_\beta & \\ G_\beta & & \end{array}$$

Como  $\tilde{h}(S) = \{0\}$ , segue que existe um único  $R$ -homomorfismo

$$h : \bigoplus_{\alpha \in D} G_\alpha / S \longrightarrow A$$

dado por  $h(\bar{g}) = \tilde{h}(g)$ , com  $g \in \bigoplus_{\alpha \in D} G_\alpha$ .

Agora, se  $g \in G_\alpha$ , então  $(h \circ i_\alpha)(g) = h(\bar{g}) = \tilde{h}(g) = (\tilde{h} \circ \lambda_\alpha)(g) = g_\alpha(g)$ , donde segue que  $h \circ i_\alpha = g_\alpha$ , para cada  $\alpha \in D$ . A unicidade do  $R$ -homomorfismo é evidente. ■

**Observação 1-** Para qualquer elemento  $g$  de  $\varinjlim G_\alpha$ , existe  $g^\alpha \in G_\alpha$ , para algum  $\alpha \in D$ , tal que  $g = i_\alpha(g^\alpha)$ . Isso é evidente, devido a  $i_\alpha$  ser a composição

$$G_\alpha \xrightarrow{\lambda_\alpha} \bigoplus_{\alpha \in D} G_\alpha \longrightarrow \varinjlim G_\alpha.$$

**Observação 2-** Para qualquer  $\alpha \in D$  e  $g^\alpha \in G_\alpha$ , temos

$$i_\alpha(g^\alpha) = 0 \iff \exists \beta \geq \alpha, \text{ tal que } f_{\alpha\beta}(g^\alpha) = 0.$$

**Exemplo 1-** Para cada  $n \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$ , seja

$$T_n \tilde{H}_*(X) = R \oplus \tilde{H}_*(X) \oplus \tilde{H}_*(X) \otimes \tilde{H}_*(X) \oplus \dots \oplus \underbrace{\tilde{H}_*(X) \otimes \dots \otimes \tilde{H}_*(X)}_{n \text{ vezes}}.$$

Sabemos que  $T_n \tilde{H}_*(X)$  é um  $R$ -módulo. Além disso, para  $m \geq n$  em  $\mathbb{N}^*$ , existe homomorfismo  $i_{nm} : T_n \tilde{H}_*(X) \rightarrow T_m \tilde{H}_*(X)$  definido como sendo a inclusão, ou seja,  $i_{nm}(x) = x$ , para  $x \in T_n \tilde{H}_*(X) \subset T_m \tilde{H}_*(X)$ , e se  $p \geq q \geq r$  em  $\mathbb{N}^*$ , então  $i_{qp} \circ i_{rq} = i_{rp}$ . Logo  $\{T_n \tilde{H}_*(X), i_{nm}\}$  é um sistema dirigido, e assim tem sentido considerarmos  $\varinjlim T_n \tilde{H}_*(X)$ .

**Exemplo 2-** Para  $n, m \in \mathbb{N}^*$  com  $m \geq n$  seja  $j_{nm} : J^n(X) \rightarrow J^m(X)$  a inclusão natural. Tal inclusão induz um  $R$ -homomorfismo em homologia, a saber,

$$H_*(j_{nm}) : H_*(J^n(X)) \rightarrow H_*(J^m(X)).$$

Claramente, para  $p \geq q \geq r$  em  $\mathbb{N}^*$ ,  $j_{qp} \circ j_{rq} = j_{rp}$ . Visto que  $H_*$  é um funtor covariante,  $H_*(j_{rp}) = H_*(j_{qp} \circ j_{rq}) = H_*(j_{qp}) \circ H_*(j_{rq})$ .

Do que afirmamos acima,  $\{H_*(J^n(X)), H_*(j_{nm})\}$  forma um sistema dirigido, e assim o  $R$ -módulo  $\varinjlim H_*(J^n(X))$  está bem definido.

**Exemplo 3-** Para  $n \in \mathbb{N}^*$ , sejam  $G_n = \{0\}$  ( $R$ -módulo trivial) e, para  $m \geq n$  em  $\mathbb{N}^*$ ,  $i_{nm} : G_n \rightarrow G_m$  é tal que  $i_{nm}(0) = 0$ . Sem dificuldade, verifica-se que  $\{G_n, i_{nm}\}$  é um sistema dirigido, e  $\varinjlim G_n = \{0\}$ .

**Teorema 4.2** *Sejam  $\{G_\alpha, f_{\alpha\beta}\}$  um sistema dirigido de  $R$ -módulos,  $A$  um  $R$ -módulo e  $h_\alpha : G_\alpha \rightarrow A$  um  $R$ -homomorfismo tal que, se  $\beta \geq \alpha$ , então,  $h_\beta \circ f_{\alpha\beta} = h_\alpha$ . Agora, pelo Teorema 4.1, existe um único  $R$ -homomorfismo  $h : \varinjlim G_\alpha \rightarrow A$  tal que  $h \circ i_\alpha = h_\alpha$ ,  $\forall \alpha$ , sendo  $i_\alpha : G_\alpha \rightarrow \varinjlim G_\alpha$  o  $R$ -homomorfismo já definido anteriormente. Então  $h : \varinjlim G_\alpha \rightarrow A$  é um  $R$ -isomorfismo se, e somente se, as seguintes declarações são verdadeiras:*

- (1)  $\forall a \in A, \exists \alpha \in D$  e  $\exists g_\alpha \in G_\alpha$  tal que  $h_\alpha(g_\alpha) = a$ ;
- (2) Se  $h_\alpha(g_\alpha) = 0$ , então  $\exists \beta \geq \alpha$  tal que  $f_{\alpha\beta}(g_\alpha) = 0$ .

**Prova:** Segue da construção de  $h$  feita no Teorema 4.1, basta notarmos que  $Im(h) = \bigcup_{\alpha \in D} Im(h_\alpha)$  e  $Ker(h) = \bigcup_{\alpha \in D} Ker(h_\alpha)$  ou das observações feitas anteriormente. ■

**Corolário 4.1**  $\varinjlim T_n \tilde{H}_*(X)$  e  $T \tilde{H}_*(X)$  são  $R$ -isomorfos.

**Prova:** Para cada  $n \in \mathbb{N}^*$ , seja  $h_n : T_n \tilde{H}_*(X) \longrightarrow T \tilde{H}_*(X)$  o  $R$ -homomorfismo inclusão, isto é,  $h_n(x) = x, \forall x \in T_n \tilde{H}_*(X)$  (Observamos que  $T_n \tilde{H}_*(X) \subset T \tilde{H}_*(X)$ ).

Agora, se  $m \geq n$  em  $\mathbb{N}^*$ , então  $h_m \circ i_{nm} = h_n$ . Logo existe um único  $R$ -homomorfismo  $h : \varinjlim T_n \tilde{H}_*(X) \longrightarrow T \tilde{H}_*(X)$ , tal que  $h \circ i_n = h_n$ , onde

$$i_n : T_n \tilde{H}_*(x) \longrightarrow \varinjlim T_n \tilde{H}_*(X)$$

é o  $R$ -homomorfismo induzido pela inclusão  $T_n \tilde{H}_*(X) \hookrightarrow \bigoplus_{n \geq 1} T_n \tilde{H}_*(X)$ .

O  $R$ -homomorfismo  $h$  é tal que  $h(\overline{g_n}) = h_n(g_n)$ , onde  $g_n \in T_n \tilde{H}_*(X)$  e  $\overline{g_n}$  representa a classe de  $g_n$  em  $\varinjlim T_n \tilde{H}_*(X)$ .

Afirmamos que  $h$  é um  $R$ -isomorfismo. Ora, para qualquer  $a \in T \tilde{H}_*(X)$ ,  $a \in T_n \tilde{H}_*(X)$  para algum  $n \in \mathbb{N}^*$ , e assim  $h_n(a) = a$ , e ainda, se  $h_n(a) = 0$ , então existe  $m \geq n \in \mathbb{N}^*$  tal que  $i_{nm}(a) = h_n(a) = 0$ . Portanto, pelo último Corolário, temos que  $\varinjlim T_n \tilde{H}_*(X)$  e  $T \tilde{H}_*$  são  $R$ -isomorfos, via  $R$ -isomorfismo  $h$ . ■

O Corolário anterior, nos garante que, caso  $R$  seja um corpo,  $\varinjlim T_n \tilde{H}_*(X)$  e  $T \tilde{H}_*(X)$  são  $R$ -isomorfos, ficando assim provado o item (2) do início desta seção.

Passaremos agora a justificar o item (3) do início desta seção, isto é,  $\varinjlim H_*(J^n(X)) \cong H_*(J(X))$ , quando  $X$  for um complexo CW conexo, sendo  $R$  um corpo, e  $x_0$  uma 0-célula.

Sejam  $D$  um conjunto dirigido e  $X = \bigcup_{\alpha \in D} X_\alpha$  um conjunto com a propriedade de que, se  $\beta \geq \alpha$ , então  $X_\alpha \subset X_\beta$ . Sendo  $\{X_\alpha, f_{\alpha\beta}\}$  um sistema dirigido, onde  $f_{\alpha\beta} : X_\alpha \hookrightarrow X_\beta$ , para  $\beta \geq \alpha$ , é a inclusão, então de maneira semelhante ao Exemplo 2, vemos que  $\{H_i(X_\alpha; R), H_i(f_{\alpha\beta})\}$  forma um sistema dirigido.

Temos ainda que, se  $i_\alpha : X_\alpha \longrightarrow X$  é a inclusão natural para cada  $\alpha \in D$ , então  $H_i(i_\alpha) : H_i(X_\alpha) \longrightarrow H_i(X)$  é um  $R$ -homomorfismo. E mais, se  $\beta \geq \alpha$ , como  $i_\beta \circ f_{\alpha\beta} = i_\alpha$ ,  $H_i(i_\beta) \circ H_i(f_{\alpha\beta}) = H_i(i_\alpha)$ . Logo, pela propriedade definidora de limite direto, existe um único  $R$ -homomorfismo  $l : \varinjlim H_i(X_\alpha) \longrightarrow H_i(X)$  tal que  $l \circ t_\alpha =$

$H_i(i_\alpha)$ , onde  $t_\alpha : H_i(X_\alpha) \longrightarrow \varinjlim H_i(X_\alpha)$  é o  $R$ -homomorfismo induzido pela inclusão  $H_i(X_\alpha) \hookrightarrow \bigoplus_{\alpha \in D} H_i(X_\alpha)$ .

O  $R$ -homomorfismo  $l$  é dado por  $l(\bar{x}_\alpha) = H_i(i_\alpha)(x_\alpha)$  para  $x_\alpha \in H_i(X_\alpha)$ . Um passo importante para a justificativa de (3) é o Teorema a seguir.

**Teorema 4.3** *Se um espaço topológico  $X$  é a união de subespaços  $X_\alpha$ , onde  $\alpha \in D$ , sendo  $D$  um conjunto dirigido, e  $\{X_\alpha, f_{\alpha\beta}\}$  um sistema dirigido, com a propriedade de que cada subconjunto compacto de  $X$  esteja inteiramente contido em algum  $X_\alpha$ , então a aplicação natural  $\varinjlim H_i(X_\alpha) \longrightarrow H_i(X)$  dada anteriormente é um  $R$ -isomorfismo para quaisquer índice  $i$  e anel comutativo com identidade  $R$ .*

**Prova:** Ver [5].

■

**Corolário 4.2** *Para cada  $i \in \mathbb{N}$ ,  $\varinjlim H_i(J^n(X))$  e  $H_i(J(X))$  são  $R$ -isomorfos.*

**Prova:** Sabemos que  $J(X)$  é filtrado por  $\{J^n(X)\}$ , logo a propriedade **CG 12** se aplica, e assim, se  $K$  é um subconjunto compacto de  $J(X)$ , então  $K \subset J^n(X)$ , para algum  $n \in \mathbb{N}^*$ . Além do mais, pelo Exemplo 2,  $\{J^n(X), j_{nm}\}$  forma um sistema dirigido. Deste modo, as hipóteses do último Teorema são satisfeitas, portanto a aplicação natural  $l : \varinjlim H_i(J^n(X); R) \longrightarrow H_i(J(X))$  é um  $R$ -isomorfismo, para cada  $i \in \mathbb{N}$ .

■

Utilizando este último Corolário, e a definição do limite direto  $\varinjlim H_*(J^n(X))$  segue que  $\varinjlim H_*(J^n(X))$  e  $H_*(J(X))$  são  $R$ -isomorfos, via um  $R$ -isomorfismo  $\alpha$  o que conclui a justificativa de (3).

Finalmente, tentemos justificar o item (4) do início desta seção, o qual afirma que  $\psi_n$  induz um  $F$ -isomorfismo  $\bar{\psi}$  entre  $\varinjlim T_n \tilde{H}_*(X; F)$  e  $\varinjlim H_*(J^n(X))$ , sendo  $F$  um corpo,  $X$  um complexo CW conexo, tendo  $x_0$  como uma 0-célula. Para a devida justificativa de (4), faremos uso do seguinte resultado:

**Teorema 4.4** *Sejam  $\{A'_\alpha, f'_{\alpha\beta}\}$ ,  $\{A_\alpha, f_{\alpha\beta}\}$  e  $\{A''_\alpha, f''_{\alpha\beta}\}$  sistemas dirigidos baseados no mesmo conjunto dirigido  $D$ .*

*Se  $A'_\alpha \longrightarrow A_\alpha \longrightarrow A''_\alpha$  é sequência exata, para cada  $\alpha \in D$ , e o diagrama*

$$\begin{array}{ccccc} A'_\alpha & \longrightarrow & A_\alpha & \longrightarrow & A''_\alpha \\ \downarrow f'_{\alpha\beta} & & \downarrow f_{\alpha\beta} & & \downarrow f''_{\alpha\beta} \\ A'_\beta & \longrightarrow & A_\beta & \longrightarrow & A''_\beta \end{array}$$

*comuta, para todo  $\beta \geq \alpha$ , então a sequência induzida*

$$\lim_{\longrightarrow} A'_\alpha \longrightarrow \lim_{\longrightarrow} A_\alpha \longrightarrow \lim_{\longrightarrow} A''_\alpha$$

*é exata.*

**Prova:** Ver [1].

■

**Corolário 4.3** *Se  $\phi_n : T_n \tilde{H}_*(X) \longrightarrow H_*(J^n(X))$  é um  $R$ -isomorfismo, para todo  $n \in \mathbb{N}$ , que torna o diagrama*

$$\begin{array}{ccc} T_n \tilde{H}_*(X) & \xrightarrow{\phi_n} & H_*(J^n(X)) \\ \downarrow i_{nm} & & \downarrow H_*(j_{nm}) \\ T_m \tilde{H}_*(X) & \xrightarrow{\phi_m} & H_*(J^m(X)) \end{array}$$

*comutativo,  $\forall m \geq n$  em  $\mathbb{N}^*$ , então  $\lim_{\longrightarrow} T_n \tilde{H}_*(X) \cong \lim_{\longrightarrow} H_*(J^n(X))$ .*

**Prova:** Aplicação imediata do Teorema anterior, basta considerarmos os sistemas dirigidos  $\{T_n \tilde{H}_*(X), i_{nm}\}$ ,  $\{H_*(J^n(X)), H_*(j_{nm})\}$  e  $\{G_n, p_{nm}\}$ , onde  $G_n = \{0\}$  e  $p_{nm}(0) = 0$ , baseados em  $R$ .

■

Na justificativa de (1) vimos que existe um único  $R$ -homomorfismo  $\phi : T \tilde{H}_*(X) \longrightarrow H_*(J(X))$  tal que  $\phi|_{T^{(n)} \tilde{H}_*(X)} = \psi_n$ . Afirmamos que  $\phi$  é um  $R$ -isomorfismo. Visto que a propriedade (1) é válida, ou seja,  $\psi_n$  é um  $R$ -isomorfismo, do

Corolário 4.3, segue que  $\varinjlim T_n \tilde{H}_*(X)$  e  $\varinjlim H_*(J^n(X))$  são  $R$ -isomorfos, via um  $R$ -isomorfismo  $\gamma$ .

Agora a composição

$$T\tilde{H}_*(X) \xrightarrow{h^{-1}} \varinjlim T_n \tilde{H}_*(X) \xrightarrow{\gamma} \varinjlim H_*(J^n(X)) \xrightarrow{\alpha} H_*(J(X))$$

é igual a  $\phi$ , e como  $h^{-1}$ ,  $\gamma$  e  $\alpha$  são  $R$ -isomorfismos, sendo  $h$  e  $\alpha$  os  $R$ -isomorfismos de (2) e (3), respectivamente, concluímos que  $\phi$  é um  $R$ -isomorfismo. ■

Pelo que vimos até então, quando  $R$  é um corpo,  $X$  é complexo CW conexo, tendo  $x_0$  como uma 0-célula,  $H_*(J(X); R) \cong T\tilde{H}_*(X; R)$ .

Utilizando o Apêndice, vemos que  $H_*(J(\hat{X}); R) \cong H_*(J(X); R)$ , donde segue que  $H_*(J(\hat{X}); R) \cong T\tilde{H}_*(X; R)$  via um  $R$ -isomorfismo  $j_1$ .

### 4.3 Fibrações

A esta seção, destinamos alguns conceitos e resultados sobre Fibrações que terão aplicações no cálculo de  $H_*(\Omega(\Sigma X, \bar{x}_0))$ .

Sejam  $E$ ,  $B$  espaços topológicos, e  $p : E \rightarrow B$  uma aplicação contínua. Denotaremos aplicações da forma  $F : X \times I \rightarrow Y$  simplesmente por  $F_t$ , ou seja,  $F_t(x) = F(x, t)$ .

Dizemos que a aplicação  $p$  tem a propriedade de levantamento de homotopia com relação a um espaço  $X$  se, e somente se, para quaisquer aplicações  $g_t : X \times I \rightarrow B$ , e  $\tilde{g}_0 : X \times \{0\} \rightarrow E$  tais que  $p \circ \tilde{g}_0 = g_0 \circ i$ , existe uma homotopia  $\tilde{g}_t : X \times I \rightarrow E$  que levanta  $\tilde{g}_0$ , ou seja, que torna o diagrama abaixo comutativo.

$$\begin{array}{ccc} X \times \{0\} & \xrightarrow{\tilde{g}_0} & E \\ \downarrow i & \nearrow \tilde{g}_t & \downarrow p \\ X \times I & \xrightarrow{g_t} & B, \end{array}$$

onde  $i(x, 0) = (x, 0)$ .

**Definição 4.1** *Sejam  $E$  e  $B$  espaços topológicos, e  $p : E \rightarrow B$  uma aplicação contínua.  $p$  é uma fibração se, e somente se,  $p$  tem a propriedade de levantamento de homotopia com relação a qualquer espaço  $X$ . Definimos ainda a fibra de  $b \in B$  como sendo  $F_b = p^{-1}(b)$ .*

A partir de agora, listaremos alguns resultados sobre fibrações, que relacionam o que já estudamos. Na medida que necessitarmos, faremos as demonstrações.

**Teorema 4.5** *Seja  $p : E \rightarrow B$  uma fibração. Se  $B$  é conexo por caminhos, então todas as fibras de elementos de  $B$  têm o mesmo tipo de homotopia.*

**Prova:** Veja [10].

■

**Teorema 4.6** *Seja  $p : E \rightarrow B$  uma fibração. Se  $U \subset B$ , então  $p|_{p^{-1}(U)} : p^{-1}(U) \rightarrow U$  é uma fibração.*

**Prova:** Veja [10].

■

**Teorema 4.7** *Sejam  $p : E \rightarrow B$  uma fibração, e  $B$  um espaço contrátil. Então, para todo  $b \in B$ ,  $E \simeq B \times F_b$ .*

**Prova:** Veja [5].

■

**Teorema 4.8** *Seja*

$$PX = \{\gamma : I \rightarrow X : \gamma \text{ é contínua e } \gamma(0) = x_0\},$$

onde  $x_0$  é um ponto fixado de  $X$ . Então a aplicação  $p : PX \rightarrow X$ , definida por

$$p(\phi) = \phi(1),$$

é uma fibração.

**Prova:** Sejam  $A$  um espaço topológico qualquer,  $f : A \times \{0\} \rightarrow PX$ , e  $g_t : X \times I \rightarrow X$  aplicações contínuas dadas, que satisfazem  $p \circ f = g_0 \circ i$ . Devemos construir uma aplicação contínua  $\tilde{g} : A \times I \rightarrow X$  que torne o diagrama a seguir, comutativo.

$$\begin{array}{ccc} A \times \{0\} & \xrightarrow{f} & PX, \\ i \downarrow & \nearrow \tilde{g} & \downarrow p \\ A \times I & \xrightarrow{g_t} & X \end{array}$$

Primeiro, notemos que  $p$  é contínua (é uma restrição da aplicação avaliação, a qual é contínua).

Seja  $f(a, 0) = \gamma_a \in PX$ , ou seja,  $\gamma_a(0) = x_0$ , e  $\gamma_a : I \rightarrow X$  é contínua.

Definimos  $\tilde{g} : A \times I \rightarrow PX$  por  $\tilde{g}(a, t) \in PX$ , sendo que  $\tilde{g}(a, t) : I \rightarrow X$  é dada por

$$\tilde{g}(a, t)(s) = (\gamma_a * \Gamma_a^t)(s) = \begin{cases} \gamma_a(2s), & \text{se } 0 \leq s \leq 1/2 \\ \Gamma_a^t(2s - 1), & \text{se } 1/2 \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Claramente  $\tilde{g}$  é contínua, desde que  $\gamma_a * \Gamma_a^t$  faça sentido, e  $\Gamma_a^t$  seja contínua.

Consideremos então  $\Gamma_a^t = g|_{\{a\} \times [0, t]} \circ \varphi_t$ , onde  $\varphi_t : I \rightarrow [0, t]$  é definida por  $\varphi_t(l) = l \cdot t$ . Deste modo,  $\Gamma_a^t$  é contínua, e além disso,

$$\begin{aligned} \gamma_a^t(0) &= [g|_{\{a\} \times [0, t]} \circ \varphi_t](0) \\ &= g|_{\{a\} \times [0, t]}(\varphi_t(0)) \\ &= g|_{\{a\} \times [0, t]}(0) \\ &= (g \circ i)(a, 0) \\ &= (p \circ f)(a, 0) \\ &= p(\gamma_a). \end{aligned}$$

Ainda temos que os triângulos do diagrama anterior comutam.

De fato,



$$\begin{aligned}
(p \circ \tilde{g})(a, t) &= \tilde{g}(a, t)(1) \\
&= \Gamma_a^t(1) \\
&= [g|_{\{a\} \times [0, t]} \circ \varphi_t](1) \\
&= g|_{\{a\} \times [0, t]}(t) \\
&= g(a, t).
\end{aligned}$$

E,  $(\tilde{g} \circ i)(a, 0) = \tilde{g}(a, 0) : I \times \{0\} \longrightarrow X$  é tal que,

$$\tilde{g}(a, 0)(t) = \gamma_a * \Gamma_a^0(t) = \begin{cases} \gamma_a(2t), & \text{se } 0 \leq t \leq 1/2 \\ \Gamma_a^0(2t - 1), & \text{se } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases},$$

e como  $\Gamma_a^0(2t - 1) = [g|_{\{a\} \times [0, 0]} \circ \varphi_0](2t - 1) = g(a, 0) = \gamma_a(1)$ , segue que  $\tilde{g} \circ i = f$ .

Portanto  $p$  é uma fibração.

Além do mais,

$$\begin{aligned}
p^{-1}(x_0) &= \{\gamma \in PX : \gamma(1) = x_0\} \\
&= \{\gamma : I \longrightarrow X : \gamma \text{ é contínua e } \gamma(0) = x_0 = \gamma(1)\} \\
&= \Omega(X, x_0)
\end{aligned}$$

■

**Teorema 4.9** *Se  $p : X \longrightarrow Y$  é fibração,  $B \subset Y$ , e  $B$  é retrato por deformação forte de um aberto  $U$  de  $Y$ , então  $p^{-1}(B)$  é retrato por deformação de  $p^{-1}(U)$ , no sentido fraco.*

**Prova:** Visto que  $p : X \longrightarrow Y$  é fibração por hipótese, pelo Teorema 4.6,

$$p = p|_{p^{-1}(U)} : p^{-1}(U) \longrightarrow U$$

é fibração. Agora, como  $B$  é retrato por deformação forte de  $U$ , existe homotopia

$F : U \times I \longrightarrow U$  que satisfaz:

- (1)  $F(u, 0) = u$ , para todo  $u \in U$ ;
- (2)  $F(u, 1) \in B$ , para todo  $u \in U$ ;
- (3)  $F(b, t) = b$ , para todo  $b \in B$  e para todo  $t \in I$ .

Haja visto que a aplicação  $p$  é contínua, assim será a aplicação

$$p \times 1_I : p^{-1}(U) \times I \longrightarrow U \times I.$$

Temos então a composição  $F \circ (p \times 1_I)$ , a qual é contínua, e além disto, por (1), (2), e (3), vemos que:

$$(4) \quad F \circ (p \times 1_I)(x, 0) = F(p(x), 0) = p(x), \quad \forall x \in p^{-1}(U);$$

$$(5) \quad F \circ (p \times 1_I)(x, 1) = F(p(x), 1) \in B, \quad \forall x \in p^{-1}(U);$$

$$(6) \quad F \circ (p \times 1_I)(c, 1) = F(p(c), 1) = p(c), \quad \forall c \in p^{-1}(B).$$

Definindo  $\tilde{F}_0 : p^{-1}(U) \times \{0\} \longrightarrow p^{-1}(U)$  por  $\tilde{F}_0(x, 0) = p(x)$ , temos que  $(p \circ \tilde{F}_0)(x, 0) = p(x) = [F \circ (p \times 1_I) \circ i](x, 0)$ , sendo  $i : p^{-1}(U) \times \{0\} \longrightarrow p^{-1}(U) \times I$  a inclusão natural. Deste modo, como  $p$  é fibração, existe aplicação contínua

$$\tilde{F} : p^{-1}(U) \times I \longrightarrow p^{-1}(U)$$

que torna o diagrama abaixo comutativo.

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) \times \{0\} & \xrightarrow{\tilde{F}_0} & p^{-1}(U) \\ i \downarrow & \nearrow \tilde{F} & \downarrow p \\ p^{-1}(U) \times I & \xrightarrow{F \circ (p \times 1_I)} & U \end{array}$$

Pelas propriedades (4), (5) e (6), vemos que  $\tilde{F}$  é tal que

$\tilde{F}(x, 0) = x$ ,  $\tilde{F}(x, 1) \in p^{-1}(B) \quad \forall x \in p^{-1}(U)$  e  $\tilde{F}(c, 1) = c \quad \forall c \in p^{-1}(B)$ . Logo  $p^{-1}(B)$  é retrato por deformação de  $p^{-1}(U)$ , no sentido fraco.

■

#### 4.4 Cálculo de $H_*(\Omega^M(\Sigma X, \bar{x}_0))$

**Teorema 4.10** *Se  $X$  é um complexo CW conexo, e  $x_0$  é uma 0-célula de  $X$ , então, para todo corpo  $R$ ,  $H_*(\Omega(\Sigma X, \bar{x}_0); R) \cong TH_*(X; R)$ .*

**Prova:** Inicialmente, fixemos algumas notações:

$$Y = \Sigma X,$$

$$Y_+ = C_+(X),$$

$$Y_- = C_-(X),$$

$$y_0 = \bar{x}_0 = [x_0, t] = [x, 1] = [x, 0],$$

onde  $C_+(X)$  e  $C_-(X)$  representam os cones reduzidos, já definidos no capítulo 2. Ainda no Capítulo 2, vimos que  $Y = Y_- \cup Y_+$ ,  $Y_- \cap Y_+ \approx X \hookrightarrow \Sigma X$  ( $A \approx B \iff A$  e  $B$  são homeomorfos).

Consideremos a aplicação  $p : PY \longrightarrow Y$  definida por  $p(\phi) = \phi(1)$ , para  $\phi \in PY$ . Do Teorema 4.8, sabemos que  $p$  é uma fibração, com fibra  $p^{-1}(y_0) = \Omega(Y, y_0)$ .

Sejam  $P_+Y = p^{-1}(Y_+)$  e  $P_-Y = p^{-1}(Y_-)$ . Temos que os elementos de  $P_+Y$  são caminhos em  $Y$  que iniciam em  $y_0$  e terminam em  $Y_+$ , já os elementos de  $P_-Y$  são caminhos em  $Y$  que começam em  $y_0$  e terminam em  $Y_-$ .

Temos ainda que  $P_+Y \cap P_-Y = p^{-1}(Y_+) \cap p^{-1}(Y_-) = p^{-1}(Y_+ \cap Y_-) \approx p^{-1}(X)$  consiste no conjunto cujos elementos são caminhos em  $Y$  que iniciam em  $y_0$  e terminam em  $X$ .

Por hipótese,  $X$  é complexo CW, deste modo,  $Y_+$  e  $Y_-$  são subcomplexos de  $\Sigma X$ , e assim, por **CW 6**, existem abertos  $U_+$  e  $U_-$  em  $Y$  contendo, respectivamente,  $Y_+$  e  $Y_-$ , tais que  $Y_+$ , e  $Y_-$  são retratos por deformação forte de  $U_+$  e  $U_-$ , respectivamente. Além disso, vê-se que  $X \approx Y_+ \cap Y_-$  é retrato por deformação de  $U_+ \cap U_-$ .

Agora, visto que  $p$  é fibração, segue do Teorema 4.9, que  $P_+Y$ ,  $P_-Y$  e  $P_+Y \cap P_-Y$  são retratos por deformação, no sentido fraco, de  $p^{-1}(U_+)$ ,  $p^{-1}(U_-)$  e  $p^{-1}(U_+) \cap p^{-1}(U_-)$ , respectivamente, os quais são abertos em  $PY$ , devido à continuidade de  $p$ .

Vale observarmos que se  $A$  é retrato por deformação de  $B$  ( retrato por deformação no sentido fraco ), então  $A$  e  $B$  têm o mesmo tipo de homotopia, e em consequência disto,  $H_n(A) \cong H_n(B)$ ,  $\forall n \geq 0$ .

Segue, pelo que vimos acima, que

$$H_n(P_+Y) \cong H_n(p^{-1}(U_+)),$$

$$H_n(P_-Y) \cong H_n(p^{-1}(U_-)) \text{ e}$$

$$H_n(P_+Y \cap P_-Y) \cong H_n(p^{-1}(U_+) \cap p^{-1}(U_-)).$$

Agora estamos aptos a utilizar a sequência de Mayer-Vietoris para a decomposição em abertos de  $PY$ ,  $PY = p^{-1}(U_+) \cup p^{-1}(U_-)$ , notamos que  $p^{-1}(U_+) \cap p^{-1}(U_-) \neq \emptyset$ , pois  $p^{-1}(U_+) \cap p^{-1}(U_-) = p^{-1}(U_+ \cap U_-)$  e  $X \approx Y_+ \cap Y_- \subset U_+ \cap U_-$ .

Logo temos a sequência exata

$$\dots \longrightarrow H_{n-1}(PY) \xrightarrow{\partial_{n-1}} A_n \xrightarrow{a_n} B_n \xrightarrow{b_n} H_n(PY) \longrightarrow \dots \longrightarrow H_0(PY) \longrightarrow 0,$$

sendo

$$A_n = H_n(p^{-1}(U_+) \cap p^{-1}(U_-)),$$

$$B_n = H_n(p^{-1}(U_+)) \oplus H_n(p^{-1}(U_-)),$$

$$a_n = (H_n(i_1), -H_n(i_2)),$$

$$b_n = H_n(k_1) + H_n(k_2),$$

onde,  $i_1 : p^{-1}(U_+) \cap p^{-1}(U_+) \hookrightarrow p^{-1}(U_+)$ ,  $i_2 : p^{-1}(U_+) \cap p^{-1}(U_-) \hookrightarrow p^{-1}(U_-)$ ,  $k_1 : p^{-1}(U_+) \hookrightarrow PY$  e  $k_2 : p^{-1}(U_-) \hookrightarrow PY$ .

A sequência acima pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \dots \longrightarrow H_n(P_+Y \cap P_-Y) \xrightarrow{(H_n(j_1), -H_n(j_2))} H_n(P_+Y) \oplus H_n(P_-Y) \xrightarrow{H_n(w_1) + H_n(w_2)} H_n(PY) \xrightarrow{\partial_n} \dots \\ \dots \longrightarrow H_0(PY) \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

onde  $j_1 : P_+Y \cap P_-Y \hookrightarrow P_+Y$ ,  $j_2 : P_+Y \cap P_-Y \hookrightarrow P_-Y$ ,  $w_1 : P_+Y \hookrightarrow PY$ , e  $w_2 : P_-Y \hookrightarrow PY$ .

Agora, pelo Teorema 2.3,  $PY$  é contrátil, e como a sequência acima é exata, donde

$$\phi_n = (H_n(j_1), -H_n(j_2)) : H_n(P_+Y \cap P_-Y) \longrightarrow H_n(P_+Y) \oplus H_n(P_-Y)$$

é um  $R$ -isomorfismo  $\forall n \geq 1$ .

Se considerarmos homologia reduzida, e utilizarmos o fato de que

$$\tilde{H}_*(P_+Y \cap P_-Y) = \bigoplus_{i \geq 0} \tilde{H}_i(P_+Y \cap P_-Y),$$

então obtemos um  $R$ -isomorfismo  $\phi : \tilde{H}_*(P_+Y \cap P_-Y) \longrightarrow \tilde{H}_*(P_+Y) \oplus \tilde{H}_*(P_-Y)$ , onde  $\phi = (\phi_1, \phi_2) = (\tilde{H}_*(i_1), -\tilde{H}_*(i_2))$ , sendo  $\tilde{H}_*(i_1)$  e  $\tilde{H}_*(i_2)$  as induzidas em homologia reduzida pelas inclusões  $i_1 : P_+Y \cap P_-Y \hookrightarrow P_+Y$  e  $i_2 : P_+Y \cap P_-Y \hookrightarrow P_-Y$ , respectivamente.

Caso desconsiderarmos o sinal negativo na segunda coordenada de  $\phi$ , ainda continuaremos com um  $R$ -isomorfismo. A partir deste momento assumiremos isto feito, ou seja, quando citarmos  $\phi$ , estaremos pensando em  $\phi = (\tilde{H}_*(i_1), \tilde{H}_*(i_2))$ . Nosso próximo objetivo é reescrever o  $R$ -isomorfismo  $\phi$  como um  $R$ -isomorfismo

$$\theta : \tilde{H}_*(\Omega Y \times X) \longrightarrow \tilde{H}_*(\Omega Y) \oplus \tilde{H}_*(\Omega Y).$$

Para começarmos, como  $p : PY \longrightarrow Y$  é fibração, do Teorema 4.6 segue que  $p|_{p^{-1}(Y_+)} : P_+Y \longrightarrow Y_+$  também é fibração. Agora, do Teorema 2.4 sabemos que  $Y_+$  é contrátil, sendo  $H_+ : Y_+ \times I \longrightarrow Y_+$  a retração por deformação de  $Y_+$  em  $y_0$  definida por  $H_+([x, t], s) = [x, (1-s)t + s]$ . Logo as hipóteses do Teorema 4.7 são satisfeitas, e assim,  $P_+Y$  e  $p^{-1}(y_0) \times Y_+ = \Omega(Y, y_0) \times Y_+$  têm o mesmo tipo de homotopia.

Agora, explicitaremos equivalências de homotopia entre  $P_+Y$  e  $\Omega(Y, y_0) \times Y_+$ .

Seja  $f_+ : P_+Y \longrightarrow \Omega(Y, y_0) \times Y_+$  definida por  $f_+(\gamma) = (\psi_+^\gamma, p(\gamma))$ , onde

$$\psi_+^\gamma(s) = \begin{cases} \gamma(2s), & \text{se } 0 \leq s \leq 1/2 \\ H_+(p(\gamma), 2s-1), & \text{se } 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

$f_+$  é contínua pois suas funções coordenadas são contínuas.

De fato,  $f_+^2 : P_+Y \longrightarrow Y_+$  é dada por  $f_+^2(\gamma) = p(\gamma)$ , e  $p$  é contínua. Mostremos que  $f_+^1 : P_+Y \longrightarrow \Omega(Y, y_0)$  dada por  $f_+^1(\gamma) = w_+^\gamma$  é contínua. Para tanto, basta mostrarmos que a composição

$$P_+Y \xrightarrow{f_+^1} \Omega(Y, y_0) \xrightarrow{i} Y^I$$

é contínua.

Agora, visto que  $I$  é localmente compacto, pelo Teorema 2.1, mostrar que  $i \circ f_+^1$  é contínua é equivalente a mostrar que  $\overline{i \circ f_+^1} : P_+Y \times I \longrightarrow Y$ , definida por

$$\overline{i \circ f_+^1}(\gamma, s) = w_+^\gamma(s)$$

é contínua.

Ora,  $P_+Y \times I = \underbrace{P_+Y \times [0, 1/2]}_{F_1} \cup \underbrace{P_+Y \times [1/2, 1]}_{F_2}$ , onde  $F_1$  e  $F_2$  são fechados em  $P_+Y \times I$ .

$w_+^\gamma$  é contínua em  $F_1$ , pois neste caso,  $w_+^\gamma$  é a composição

$$F_1 = P_+Y \times [0, 1/2] \xrightarrow{1_{P_+Y} \times f} P_+Y \times I \xrightarrow{a} Y,$$

onde  $f(s) = 2s$ , e  $a$  é a aplicação avaliação.

Além disso, em  $F_2$ ,  $w_+^\gamma$  é a composição

$$F_2 = P_+Y \times [1/2, 1] \xrightarrow{p \times q} Y_+ \times I \xrightarrow{H_+} Y_+,$$

onde  $g(s) = 2s - 1$ . Claramente  $w_+^\gamma$  é contínua em  $F_2$ . E mais, para  $s = 1/2$ ,

$$\gamma(2s) = \gamma(1) = H_+(\gamma(1), 0) = H_+(p(\gamma), 2s - 1).$$

Logo, pelo Lema da colagem,  $w_+^\gamma$  é contínua, o que conclui a prova da continuidade de  $f_+$ .

Voltando ao problema de explicitar a equivalência de homotopia, seja  $g_+ : \Omega(Y, y_0) \times Y_+ \rightarrow P_+Y$  definida, para  $(\gamma, x) \in \Omega(Y, y_0)$ , por  $g_+(\gamma, x) = \xi_+^{(\gamma, x)}$ , onde

$$\xi_+^{(\gamma, x)}(s) = \begin{cases} \gamma(2s), & \text{se } 0 \leq s \leq 1/2 \\ H_+(x, 2 - 2s), & \text{se } 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Afirmamos que  $g_+$  é contínua.

De fato,  $g_+$  é contínua, se, e somente se, a composição

$$\Omega(Y, y_0) \times Y_+ \xrightarrow{g_+} P_+Y \xrightarrow{i} Y^I$$

é contínua. Haja visto que  $I$  é localmente compacto, o Teorema 2.1 se aplica, ou seja, a continuidade da composição acima equivale a mostrar a continuidade de

$$\tilde{h} : \Omega(Y, y_0) \times Y_+ \times I \rightarrow Y,$$

definida por  $\tilde{h}(\gamma, x, s) = \xi_+^{(\gamma, x)}(s)$ .

Mostremos então a continuidade de  $\tilde{h}$ . Temos que

$$\Omega(Y, y_0) \times Y_+ \times I = \underbrace{\Omega(Y, y_0) \times Y_+ \times [0, 1/2]}_{L_1} \cup \underbrace{\Omega(Y, y_0) \times Y_+ \times [1/2, 1]}_{L_2},$$

onde  $L_1$  e  $L_2$  são fechados em  $\Omega(Y, y_0) \times Y_+ \times I$ .

Em  $L_1$ ,  $\xi_+^{(\gamma, x)}$  é a composição de funções

$$L_1 \xrightarrow{T} \Omega(Y, y_0) \times [0, 1/2] \times Y_+ \xrightarrow{P_1} \Omega(Y, y_0) \times [0, 1/2] \xrightarrow{1_{\Omega(Y, y_0)} \times m} \Omega(Y, y_0) \times I \xrightarrow{a} Y,$$

onde  $T(\gamma, x, s) = (\gamma, s, x)$ ,  $P_1(\gamma, s, x) = (\gamma, s)$ ,  $m(s) = 2s$ , e  $a$  é a avaliação. Como as funções na última composição são contínuas, segue que  $\xi_+^{(\gamma, x)}$  é contínua em  $L_1$ .

Já em  $L_2$ ,  $\xi_+^{(\gamma, x)}$  é a composição

$$\Omega(Y, y_0) \times Y_+ \times [1/2, 1] \xrightarrow{P_2} Y_+ \times [1/2, 1] \xrightarrow{1_{Y_+} \times n} Y_+ \times I \xrightarrow{H_+} Y_+,$$

sendo  $P_2(\gamma, x, s) = (x, s)$ ,  $n(s) = 2 - 2s$ . Logo,  $\xi_+^{(\gamma, x)}$  é contínua em  $L_2$ . Além do mais, em  $L_1 \cap L_2$ , isto é, quando  $s = 1/2$ ,  $\gamma(2s) = \gamma(1) = y_0 = H_+(x, 1) = H_+(x, 2 - 2s)$ .

Temos que  $f_+ \circ g_+$  e  $g_+ \circ f_+$  são homotópicas à  $1_{\Omega(Y, y_0) \times Y_+}$  e  $1_{P_+ Y}$ , respectivamente.

Provemos inicialmente que  $f_+ \circ g_+ \simeq 1_{\Omega(Y, y_0) \times Y_+}$ . Para tanto, denotaremos  $H(x, s)$  por  $\phi^x$ , com  $x \in Y_+$  fixado.

Agora, para  $(\gamma, x) \in \Omega(Y, y_0) \times Y_+$ ,

$$\begin{aligned} (f_+ \circ g_+)(\gamma, x) &= f_+(g_+(\gamma, x)) \\ &= f_+(\xi_+^{(\gamma, x)}) \\ &= (\psi^{\xi_+^{(\gamma, x)}}, x) \\ &= ((\gamma * \overline{\phi^x}) * \phi^x, x) \end{aligned}$$

Mas sabemos que  $(\gamma * \overline{\phi^x}) * \phi^x \simeq \gamma * (\overline{\phi^x} * \phi^x) \simeq \gamma * c_x \simeq \gamma$ , onde  $c_x : I \rightarrow Y_+$  é tal que  $c_+(s) = x$ ,  $\forall s \in I$ . Deste modo, existe homotopia  $G : \Omega(Y, y_0) \times I \rightarrow \Omega(Y, y_0)$  entre  $(\gamma * \overline{\phi^x}) * \phi^x$  e  $c_x$ .

Seja  $F : \Omega(Y, y_0) \times Y_+ \times I \rightarrow \Omega(Y, y_0) \times Y_+$  definida por  $F(\gamma, x, t) = (G(x, t), x)$ .

Claramente  $F$  é uma homotopia entre  $f_+ \circ g_+$  e  $1_{\Omega(Y, y_0) \times Y_+}$ .

Vejamos agora a justificativa de  $g_+ \circ f_+ \simeq 1_{P_+ Y}$ .

Para  $\gamma \in P_+Y$ , temos

$$\begin{aligned}
(g_+ \circ f_+)(\gamma) &= g_+(f_+(\gamma)) \\
&= g_+(\psi_+^\gamma, p(\gamma)) \\
&= g_+(\psi_+^\gamma, \gamma(1)) \\
&= \xi_+^{(\psi_+^\gamma, \gamma(1))} \\
&= (\gamma * \phi^{\gamma(1)}) * \overline{\phi^{\gamma(1)}}
\end{aligned}$$

Como  $(\gamma * \phi^{\gamma(1)}) * \overline{\phi^{\gamma(1)}} \simeq \gamma * (\phi^{\gamma(1)} * \overline{\phi^{\gamma(1)}}) \simeq \gamma * c_{\gamma(1)} \simeq \gamma$ .

Seja  $H$  a homotopia entre  $(\gamma * \phi^{\gamma(1)}) * \overline{\phi^{\gamma(1)}}$  e  $\gamma$ , esta será a homotopia desejada entre  $g_+ \circ f_+$  e  $1_{P_+Y}$ .

De maneira análoga ao que foi desenvolvido anteriormente,  $p : P_-Y \rightarrow Y_-$  é fibração, e  $Y_-$  é contrátil, com retração por deformação  $H_- : Y_- \times I \rightarrow Y_-$  de  $Y_-$  em  $y_0$  definida por  $H_-([x, t], s) = [x, t(1-s)]$ . Logo, pelo Teorema 4.7 temos que  $P_-Y \simeq Y_- \times \Omega(Y, y_0) \simeq \Omega(Y, y_0) \times Y_-$ .

Constrói-se equivalências de homotopia,  $f_-$  e  $g_-$ , de maneira semelhante a construção das equivalências de homotopia  $f_+$  e  $g_+$ , neste caso, apenas trocando o sinal  $+$  pelo sinal  $-$  nas expressões anteriores.

Quando restringimos  $f_-$  e  $g_-$  à  $P_+Y \cap P_-Y$  e  $\Omega(Y, y_0) \times (Y_+ \cap Y_-)$  obtemos, respectivamente,

$$\widetilde{f}_- : P_+Y \cap P_-Y \rightarrow \Omega(Y, y_0) \times (Y_+ \cap Y_-) \text{ e}$$

$$\widetilde{g}_- : \Omega(Y, y_0) \times (Y_+ \cap Y_-) \rightarrow P_+Y \cap P_-Y$$

Identificando  $Y_+ \cap Y_-$  com  $X$ , obtemos equivalências de homotopias

$$\widehat{f}_- : P_+Y \cap P_-Y \rightarrow \Omega(Y, y_0) \times X \text{ e}$$

$$\widehat{g}_- : \Omega(Y, y_0) \times X \rightarrow P_+Y \times P_-Y$$

dadas por  $\widehat{f}_-(\gamma) = (\gamma * \tau^{\gamma(1)}, \gamma(1))$ , onde  $\tau^{\gamma(1)}(s) = H_-(\gamma(1), s)$  e  $\widehat{g}_-(\gamma, x) = \gamma * \overline{\tau^x}$  com  $\overline{\tau^x}(s) = H_-(x, 1-s)$ .

Pelo que vimos até agora,  $P_+Y \simeq \Omega(Y, y_0) \times Y_+$ , e como  $Y_+$  é contrátil,  $P_+Y \simeq \Omega(Y, y_0)$ . De modo análogo, vemos que  $P_-Y \simeq \Omega(Y, y_0)$ .



Ainda,  $P_+Y \cap P_-Y \simeq \Omega(Y, y_0) \times X$ . Portanto, tomando as devidas composições, e utilizando o fato que equivalências de homotopia induzem isomorfismos em homologia, obtemos o isomorfismo  $\theta : \tilde{H}_*(\Omega(Y, y_0) \times X) \longrightarrow \tilde{H}_*(\Omega(Y, y_0)) \oplus \tilde{H}_*(\Omega(Y, y_0))$ .

Analisemos agora as coordenadas de  $\theta$ .

A primeira coordenada de  $\theta$ ,  $\theta_1$ , é induzida em homologia pela composição

$$\Omega Y \times X \xrightarrow{\hat{g}_-} P_+Y \cap P_-Y \xrightarrow{i_1} P_+Y \xrightarrow{f_+} \Omega Y \times Y_+ \xrightarrow{p_1} \Omega Y,$$

e a segunda coordenada de  $\theta$ ,  $\theta_2$ , é induzida em homologia pela composição

$$\Omega Y \times X \xrightarrow{\hat{g}_-} P_+Y \cap P_-Y \xrightarrow{i_2} P_-Y \xrightarrow{f_-} \Omega Y \times Y_- \xrightarrow{p_1} \Omega Y.$$

Através de uma reparametrização adequada, vemos que  $p_1 \circ f_+ \circ i_1 \circ \hat{g}_-$  torna-se igual a composição

$$\Omega Y \times X \xrightarrow{1_{\Omega Y} \times Ja} \Omega Y \times \Omega Y \xrightarrow{\mu} \Omega Y,$$

onde  $Ja : (X, x_0) \longrightarrow (\Omega(Y, y_0), l_{y_0})$  é a aplicação de James definida na introdução deste capítulo, e  $p_2 \circ f_- \circ i_2 \circ \hat{g}_-$  torna-se igual, a menos de uma reparametrização, a  $P_1 : \Omega Y \times X \longrightarrow \Omega Y$ , definida por  $P_1(\gamma, x) = \gamma$ , com  $(\gamma, x) \in \Omega Y \times X$ . Deste modo,  $\theta_1 = H_*(\mu \circ (1_{\Omega Y} \times Ja)) = H_*(\mu) \circ H_*(1_{\Omega Y} \times Ja)$  e  $\theta_2 = H_*(P_1)$ .

Por **HR 3**,  $\tilde{H}_*(\Omega Y \times X) \cong [H_*(\Omega Y) \otimes \tilde{H}_*(X)] \oplus \tilde{H}_*(\Omega Y)$ , via  $R$ -isomorfismo  $\tau = (\tau_1, \tau_2) : \tilde{H}_*(\Omega Y \times X) \longrightarrow [H_*(\Omega Y) \otimes \tilde{H}_*(X)] \oplus \tilde{H}_*(\Omega Y)$ , onde  $\tau_2 = \theta_2$ .

Faremos uso agora do seguinte resultado de álgebra que afirma que:

Sejam  $X, Y$  e  $Z$   $R$ -módulos. Se  $T = (T_1, T_2) : X \longrightarrow Y \times Z$  é um  $R$ -isomorfismo, então  $T|_{Ker T_2} : Ker T_2 \longrightarrow Z$  é um  $R$ -isomorfismo (para maiores detalhes veja [6]).

Como temos o resultado acima e  $\theta$  é um  $R$ -isomorfismo,

$$\theta_1|_{Ker(\theta_2)} : Ker(\theta_2) \longrightarrow \tilde{H}_*(\Omega Y) \text{ e}$$

$$\tau_1|_{Ker(\tau_2)} : Ker(\tau_2) = Ker(\theta_2) \longrightarrow H_*(\Omega Y) \otimes \tilde{H}_*(X)$$

são  $R$ -isomorfismos.

Deste modo temos o seguinte diagrama comutativo.

$$\begin{array}{ccc} \text{Ker}(\theta_2) & \xrightarrow{\theta_1} & \tilde{H}_*(\Omega Y) \\ \downarrow \tau_1 & \nearrow \theta_1 \circ \tau_1^{-1} & \\ H_*(\Omega Y) \otimes \tilde{H}_*(X) & & \end{array}$$

Portanto  $L_1 = \theta_1 \circ \tau_1^{-1}$  é um  $R$ -isomorfismo. Agora, como

$$\theta_1 = H_*(\mu) \circ H_*(1_{\Omega Y} \times Ja),$$

o diagrama

$$\begin{array}{ccccc} H_*(\Omega Y \times X) & \xrightarrow{H_*(1_{\Omega Y} \times Ja)} & H_*(\Omega Y \times \Omega Y) & \xrightarrow{H_*(\mu)} & H_*(\Omega Y) \\ \updownarrow & & \updownarrow & \nearrow P(\mu) & \\ H_*(\Omega Y) \otimes H_*(X) & \xrightarrow{c_*} & H_*(\Omega Y) \otimes H_*(\Omega Y) & & \end{array}$$

é comutativo, onde  $P(\mu)$  é o produto de Pontryagin, e  $c_* = 1_{H_*(\Omega Y) \otimes H_*(J)}$ . Desta forma, segue que o  $R$ -isomorfismo  $L_1$  é dado pela composição

$$H_*(\Omega Y) \otimes \tilde{H}_*(X) \xrightarrow{1_{H_*(\Omega Y)} \otimes \tilde{H}_*(J)} H_*(\Omega Y) \otimes \tilde{H}_*(\Omega Y) \xrightarrow{\tilde{P}(\mu)} \tilde{H}_*(\Omega Y),$$

onde  $\tilde{P}(\mu) = P(\mu)|_{H_*(\Omega Y) \otimes \tilde{H}_*(X)}$ .

Para finalizarmos a prova de que  $H_*(\Omega Y) \cong T\tilde{H}_*(X)$  simplesmente aplicamos o Teorema algébrico 1.3, com  $A = H_*(\Omega Y)$ ,  $V = \tilde{H}_*(X)$  e  $i = H_*(J)$  via um  $R$ -isomorfismo  $j_2$ . ■

Visto que  $\Omega^M(Y, y_0) \simeq \Omega(Y, y_0)$ ,  $H_*(\Omega^M(Y, y_0); R) \cong H_*(\Omega(Y, y_0); R)$ , e como  $H_*(\Omega(Y, y_0); R) \cong T\tilde{H}_*(X; R)$ , segue que  $H_*(\Omega^M(Y, y_0); R) \cong T\tilde{H}_*(X; R)$ .

## 4.5 Prova do Teorema de James

Lembremos que o Teorema de James afirma que, se  $X$  é um complexo CW conexo, então  $J : J(\hat{X}) \longrightarrow \Omega^M(\Sigma X, \bar{x}_0)$  é uma equivalência de homotopia.

Para provarmos o Teorema de James, precisaremos do seguinte Lema.

**Lema 4.3** *Sejam  $X, Y$  H-espacos 0-conexos,  $f : X \longrightarrow Y$  uma H-aplicação que é uma equivalência em homologia, isto é,  $H_n(f) : H_n(X; \mathbb{Z}) \longrightarrow H_n(Y; \mathbb{Z})$  é isomorfismo para todo  $n$ . Então  $f$  é uma equivalência de homotopia fraca.*

**Prova:** Visto que  $X, Y$  são H-espacos, pelo Teorema 2.10, existem complexos CW  $K, L$  e equivalências de homotopia fraca  $\phi : K \longrightarrow X, \psi : L \longrightarrow Y$ . Sendo assim, do Teorema 2.14,  $K$  e  $L$  admitem uma H-estrutura que tornam  $\phi$  e  $\psi$  H-aplicações, e por **CW 8**, existe uma única aplicação contínua (a menos de homotopia)  $g' : K \longrightarrow L$  tal que  $\psi \circ g' \simeq f \circ \phi$ .

Agora, pelo Teorema de Aproximação Celular **CW 10**,  $g'$  é homotópica a uma aplicação celular  $g : K \longrightarrow L$ , e como  $g'$  é única, a menos de homotopia, segue que  $\psi \circ g \simeq f \circ \phi$ .

Sabemos que equivalências de homotopia induzidas em homologia são iguais, desta forma,  $H_n(\psi) \circ H_n(g) = H_n(\psi \circ g) = H_n(f \circ \phi) = H_n(f) \circ H_n(\phi)$ .

Como  $\phi$  e  $\psi$  são equivalências de homotopia fraca e  $X$  e  $Y$  são 0-conexos, portanto conexos por caminho, segue por **CW 7** que  $K$  e  $L$  também são 0-conexos, e assim, pelo Teorema 2.15,  $\phi$  e  $\psi$  são equivalências de homotopia. Mas equivalências de homotopia induzem isomorfismos em homologia, logo  $H_n(\phi)$  e  $H_n(\psi)$  são isomorfismos para todo  $n$ .

Da relação  $H_n(\psi) \circ H_n(g) = H_n(f) \circ H_n(\phi)$ , do que comentamos acima, e da hipótese de  $H_n(f)$  ser um isomorfismo, segue que  $H_n(g)$  é um isomorfismo, para qualquer  $n$ .

Afirmamos que  $g : K \longrightarrow L$  é uma H-aplicação. Para tanto, devemos mostrar a comutatividade em homotopia do seguinte diagrama,

$$\begin{array}{ccc} K \times K & \xrightarrow{g \times g} & L \times L \\ \mu_K \downarrow & & \downarrow \mu_L \\ K & \xrightarrow{g} & L, \end{array}$$

onde  $\mu_K$  e  $\mu_L$  representam os produtos em  $K$  e  $L$ , respectivamente.

Temos que  $\psi \times \psi \circ g \times g = \psi \circ g \times \psi \circ g \simeq f \circ \phi \times f \circ \phi = f \times f \circ \phi \times \phi$ . Utilizando isto, e o fato de  $f, \phi$  e  $\psi$  serem H-aplicações, obtemos o seguinte diagrama comutativo, o qual nos garante a comutatividade do diagrama anterior.

$$\begin{array}{ccc}
K \times K & \xrightarrow{g \times g} & L \times L \\
\downarrow \mu_K & \begin{array}{c} \swarrow \phi \times \phi \\ X \times X \xrightarrow{f \times f} Y \times Y \\ \downarrow \mu_X \quad \downarrow \mu_Y \\ X \xrightarrow{f} Y \\ \swarrow \phi \quad \searrow \psi \end{array} & \downarrow \mu_L \\
K & \xrightarrow{g} & L
\end{array}$$

Consideremos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc}
K & \xrightarrow{\phi} & X \\
g \downarrow & & \downarrow f \\
L & \xrightarrow{\psi} & Y,
\end{array}$$

onde  $\phi$  e  $\psi$  são equivalências de homotopia fraca, isto é,  $\pi_n(\phi)$ , e  $\pi_n(\psi)$  são isomorfismos para todo  $n$ . Como o diagrama acima comuta,

$$\pi_n(\psi) \circ \pi_n(g) = \pi_n(\psi \circ \phi) = \pi_n(f \circ \phi) = \pi_n(f) \circ \pi_n(\phi),$$

e desta última igualdade segue que  $g$  é equivalência de homotopia se, e somente se,  $f$  é equivalência de homotopia fraca.

Pelos argumentos acima feitos, podemos reescrever o Lema em questão no seguinte formato:

Sejam  $X$  e  $Y$ , complexos CW, com estrutura de H-espço, e 0-conexos, seja ainda  $f : X \rightarrow Y$  uma H-aplicação que é celular, e equivalência em homologia. Então  $f$  é equivalência de homotopia fraca.

Por hipótese,  $X$  e  $Y$  são complexos CW 0-conexos, donde vem que  $X$  e  $Y$  são conexos por caminhos, consequentemente  $\pi_0(X) = \{0\} = \pi_0(Y)$ . Sendo assim,  $\pi_0(f)$  é um isomorfismo.

Mostremos agora que, para  $n \geq 1$ ,  $\pi_n(f)$  é um isomorfismo.

Como estamos supondo  $f$  uma aplicação celular, por **CW 9**, o cilindro induzido por  $f$ ,  $I_f$  é um complexo CW, tendo  $X$  e  $Y$  como subcomplexos. Consequentemente,

$(I_f, X)$  é um par CW. Além do mais, sabemos que,  $Y$  é retrato por deformação de  $I_f$ .  
 Donde vem que  $Y \simeq I_f$ .

Agora, como  $Y$  é um H-espço, segue que  $I_f$  também será um H-espço. Utilizando o Teorema 2.13, vemos que  $(I_f, X)$  é um H-par.

Portanto, pelos Teoremas 2.12 e 2.11, temos que  $X, Y, I_f$  e  $(I_f, X)$  são simples.

Visto que  $X$  é 0-conexo, pelo Teorema de Hurewicz, temos que a aplicação  $\bar{\rho} : \pi_1^*(X) \rightarrow H_1(X)$  é um isomorfismo. Agora, como  $X$  é simples,  $\pi_1(X)$  atua trivialmente sobre  $\pi_1(X)$ , logo  $\pi_1^*(X) \cong \pi_1(X)$ , donde vem que a aplicação de Hurewicz  $\rho_X : \pi_1(X) \rightarrow H_1(X)$  é um isomorfismo. De maneira semelhante, vemos que a aplicação de Hurewicz  $\rho_Y : \pi_1(Y) \rightarrow H_1(Y)$  é um isomorfismo.

Ainda temos o seguinte diagrama comutativo ( ver [5]):

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X) & \xrightarrow{\pi_1(f)} & \pi_1(Y) \\ \rho_X \downarrow & & \downarrow \rho_Y \\ H_1(X) & \xrightarrow{H_1(f)} & H_1(Y). \end{array}$$

Como  $H_1(f)$  é isomorfismo por hipótese, bem como  $\rho_X$  e  $\rho_Y$ , segue que  $\pi_1(f)$  é isomorfismo. Disto segue que  $(I_f, X)$  é 0-conexo. Logo, pelo Teorema Relativo de Hurewicz 1.15, podemos concluir que  $\pi_1^\dagger(I_f, X) \cong H_1(I_f, X)$ , e como o par  $(I_f, X)$  é simples, segue que  $\pi_1(I_f, X) \cong \pi_1^\dagger(I_f, X)$ . Portanto,  $\pi_1(I_f, X) \cong H_1(I_f, X)$ , sendo o isomorfismo em questão dado pelo homomorfismo relativo de Hurewicz  $\rho_{(I_f, X)}$ .

Para o par  $(I_f, X)$  temos as seqüências exatas de homotopia e de homologia (veja 1.5 e 1.4 ),

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & \pi_n(X) & \longrightarrow & \pi_n(I_f) & \longrightarrow & \pi_n(I_f, X) & \longrightarrow & \pi_{n-1}(X) & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \pi_0(X) & \longrightarrow & \pi_0(I_f) \\ \dots & \longrightarrow & H_n(X) & \longrightarrow & H_n(I_f) & \longrightarrow & H_n(I_f, X) & \longrightarrow & H_{n-1}(X) & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & H_0(X) & \longrightarrow & H_0(I_f). \end{array}$$

Devido à  $I_f \simeq Y$ , obtemos novas seqüências exatas, substituindo,  $I_f$  (quando não aparece no par  $(I_f, X)$ ) por  $Y$ . Ainda, tendo como referência [5], vemos que o diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
(1) \dots \pi_2(I_f, X) & \longrightarrow & \pi_1(X) & \xrightarrow{\pi_1(f)} & \pi_1(Y) & \longrightarrow & \pi_1(I_f, X) \longrightarrow \dots \\
\rho_{(I_f, X)} \downarrow & & \rho_X \downarrow & & \rho_Y \downarrow & & \rho_{(I_f, X)} \downarrow \\
(2) \dots H_2(I_f, X) & \longrightarrow & H_1(X) & \xrightarrow{H_1(f)} & H_1(Y) & \longrightarrow & H_1(I_f, X) \longrightarrow \dots
\end{array}$$

comuta. E como, a sequência (2) é exata, e  $H_n(f)$  é isomorfismo, para todo  $n$ , vemos que  $H_n(I_f, X) \cong \{0\}$ , e daí  $\pi_1(I_f, X) \cong \{0\}$ , logo  $(I_f, X)$  é 1-conexo. Novamente utilizando o Teorema Relativo de Hurewicz 1.15, e os fatos de  $H_2(I_f, X) \cong \{0\}$  e  $(I_f, X)$  serem simples, segue que  $\pi_2(I_f, X) \cong \{0\}$ . Então através de um processo indutivo, e da utilização dos Teoremas de Hurewicz garantimos que  $\pi_q(I_f, X) \cong \{0\}$ , para todo inteiro positivo  $q$ , e como a sequência acima é exata, segue que  $\pi_n(f)$  é um isomorfismo para todo  $n$ , e isto completa a prova do Lema. ■

Finalmente, estamos aptos a provar o Teorema de James.

**Teorema 4.11** *Seja  $X$  um complexo CW conexo, então a aplicação*

$$J : J(\widehat{X}) \longrightarrow \Omega^M(\Sigma X, \bar{x}_0),$$

*definida na introdução deste capítulo, é uma equivalência de homotopia.*

**Prova:** Seja  $R$  um corpo. Devido à  $J$  ser um homomorfismo de monóides topológicos, temos que o diagrama a seguir comuta.

$$\begin{array}{ccc}
\widehat{X}^n & \xrightarrow{\pi_n} & J^n(\widehat{X}) \xrightarrow{i} J(\widehat{X}) \\
J^n \downarrow & & \downarrow J \\
[\Omega^M(\Sigma X)]^n & \xrightarrow{\Gamma} & \Omega^M(\Sigma X),
\end{array}$$

onde  $\Gamma(\gamma_1, \dots, \gamma_n) = \gamma_1 \bullet \dots \bullet \gamma_n$ ,  $J^n = \underbrace{J \times J \times \dots \times J}_{n \text{ vezes}}$ ,  $i$  é a inclusão natural,  $\pi_n$  é a proclusão definida no capítulo anterior, e  $\bullet$  é a multiplicação em  $\Omega^M(\Sigma X)$ .

Induzindo as aplicações do diagrama acima, em homologia, obtemos um novo diagrama, também comutativo, a saber

$$\begin{array}{ccccc}
\tilde{H}_*(\widehat{X})^{\otimes n} & & & & \\
\downarrow j & & & & \\
H_*(\widehat{X})^{\otimes n} & & & & \\
\downarrow \times & & & & \\
H_*(\widehat{X}^n) & \xrightarrow{H_*(\pi_n)} & H_*(J^n(\widehat{X})) & \xrightarrow{H_*(i)} & H_*(J(\widehat{X})) \\
\downarrow H_*(J^n) & & & & \downarrow H_*(J) \\
H_*([\Omega^M(\Sigma X)]^n) & \xrightarrow{H_*(\Gamma)} & & & H_*(\Omega^M \Sigma X),
\end{array}$$

onde  $j$  é a inclusão natural de  $\tilde{H}_*(\widehat{X})^{\otimes n}$  em  $H_*(\widehat{X})^{\otimes n}$ .

Desta forma temos que,

$$\begin{array}{ccc}
& T\tilde{H}_*(\widehat{X}; R) & \\
j_1 \swarrow & & \searrow j_2 \\
H_*(J(\widehat{X}); R) & \xrightarrow{H_*(J)} & H_*(\Omega^M \Sigma X; R)
\end{array}$$

é um diagrama comutativo.

Agora, pelo que vimos nas seções precedentes, se  $X$  é um complexo CW conexo, então  $H_*(J(\widehat{X})) \cong H_*(J(X))$ ,  $H_*(\Omega^M \Sigma \widehat{X}) \cong H_*(\Omega \Sigma X)$  e  $T\tilde{H}_*(\widehat{X}) \cong T\tilde{H}_*(X)$ . Utilizando isto, e os cálculos das seções 4.2 e 4.4, vemos que  $j_1$  e  $j_2$  são isomorfismos de álgebras graduadas. Consequentemente,  $H_*(J)$  é um isomorfismo de álgebras graduadas.

Visto que  $R$  é corpo, quando  $R = \mathbb{Q}$  ou  $R = \mathbb{Z}_p$ , para  $p$  primo,  $H_*(\widehat{J})$  continua sendo um isomorfismo. Logo, pelo Corolário 1.1,  $H_*(J)$  é um isomorfismo de álgebras graduadas para  $R = \mathbb{Z}$ .

Como, por hipótese,  $X$  é conexo, segue que  $J(\widehat{X})$  e  $\Omega^M \Sigma X$  são 0-conexos. Ainda  $J$  é uma H-aplicação (obviamente  $J(X)$  e  $\Omega^M \Sigma X$  são H-espacos), e  $H_n(\widehat{J})$  é um isomorfismo, quando  $R = \mathbb{Z}$ . Sendo assim, as hipóteses do Lema anterior são satisfeitas, consequentemente,  $J$  é uma equivalência de homotopia fraca.

Sabemos que, se  $X$  é complexo CW, então  $J(X)$  também é complexo CW. Ora,  $X$ , por hipótese, é complexo CW, e assim, sem dificuldades constata-se que  $\widehat{X}$  é complexo CW, logo  $J(\widehat{X})$  também é complexo CW. Já  $\Omega^M \Sigma \widehat{X}$ , pelo Teorema de Milnor 2.5, tem o

mesmo tipo de homotopia de um complexo CW, e desta forma podemos aplicar o Teorema de Whitehead 1.11 para  $\widehat{J}$ , ou seja, concluímos que  $\widehat{J}$  é uma equivalência de homotopia.

■



# Capítulo 5

## Apêndice

Neste Apêndice, mostraremos que  $(\widehat{X}, 0)$  e  $(X, x_0)$  possuem o mesmo tipo de homotopia, quando  $X$  é um complexo CW conexo. Supondo isso já feito, afirmamos que  $(J(\widehat{X}), 0)$  e  $(J(X), x_0)$  têm o mesmo tipo de homotopia.

De fato, como  $(\widehat{X}, 0) \simeq (X, x_0)$ , existem aplicações contínuas

$$f : (\widehat{X}, 0) \longrightarrow (X, x_0),$$

$$g : (X, x_0) \longrightarrow (\widehat{X}, 0),$$

tais que  $f \circ g \simeq 1_X \text{ rel } x_0$  e  $g \circ f \simeq 1_{\widehat{X}} \text{ rel } 0$ .

Consideremos a composição

$$(X, x_0) \xrightarrow{g} (\widehat{X}, 0) \xrightarrow{i} (J(\widehat{X}), 0).$$

Visto que  $J(X)$  é monóide topológico livre sobre  $X$  e  $J(\widehat{X})$  é monóide topológico, pelo Teorema 3.6, existe um único homomorfismo contínuo  $\bar{g} : (J(X), x_0) \longrightarrow (J(\widehat{X}), \widehat{0})$  tal que  $\bar{g} \circ j = i \circ g$ , onde  $j : X \longrightarrow J(X)$  é a inclusão natural.

De modo semelhante obtemos homomorfismo contínuo

$$\bar{f} : (J(\widehat{X}), \widehat{0}) \longrightarrow (J(X), x_0).$$

Pela demonstração do Teorema 3.6, sabemos que  $\bar{g}(x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_k) = g(x_1) \cdot g(x_2) \cdot \dots \cdot g(x_k)$  e  $\bar{f}(y_1 \cdot y_2 \cdot \dots \cdot y_n) = f(y_1) \cdot f(y_2) \cdot \dots \cdot f(y_n)$ .

Mostremos que  $\bar{f} \circ \bar{g} \simeq 1_{J(X)}$  rel  $x_0$  e  $\bar{g} \circ \bar{f} \simeq 1_{J(\hat{X})}$  rel  $0$ .

Como  $f \circ g \simeq 1_X$  rel  $x_0$ , existe homotopia  $F : X \times I \rightarrow X$  tal que

$$F(x, 0) = (f \circ g)(x), \quad F(x, 1) = x \text{ e } F(x_0, t) = x_0,$$

para  $x \in X$ , e  $t \in I$ .

Tomemos  $\bar{F} : J(X) \times I \rightarrow J(X)$  definida por

$$\bar{F}(x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n, t) = F(x_1) \cdot F(x_2) \cdot \dots \cdot F(x_n).$$

Sem muitas dificuldades, verifica-se que  $\bar{F}$  é uma homotopia entre  $\bar{f} \circ \bar{g}$  e  $1_{J(X)}$  tal que  $\bar{F}(x_0, t) = x_0$ .

De modo análogo obtemos homotopia  $\bar{G} : J(\hat{X}) \times I \rightarrow J(\hat{X})$  entre  $\bar{g} \circ \bar{f}$  e  $1_{J(\hat{X})}$  tal que  $\bar{G}(0, t) = 0$ . Feito isto, caso  $(\hat{X}, 0) \simeq (X, x_0)$ , teremos

$$H_*(J(\hat{X})) \cong H_*(J(X)).$$

Mostremos então que  $(\hat{X}, 0) \simeq (X, x_0)$ , quando  $X$  for um complexo CW conexo, sendo  $x_0$  uma 0-célula. Para tanto, faremos uso do seguinte Lema.

**Lema 5.1** *Sejam  $x_0 = (0, \dots, 0) \in D^n$ , e  $\sim$  a relação de equivalência sobre  $D^n \sqcup [0, 1]$  que identifica 1 e  $x_0$ , ou seja,  $1 \sim x_0$ . Então  $(D^n, x_0)$  e  $(D^n \sqcup [0, 1] / \sim, 0)$ , com  $0 \in [0, 1]$ , têm o mesmo tipo de homotopia (preservando pontos bases).*

**Prova:** Consideremos  $f : D^n \rightarrow D^n \sqcup [0, 1] / \sim$ , definida por

$$f(x) = \begin{cases} \overline{2|x|}, & \text{se } 0 \leq |x| \leq 1/2 \\ \overline{(2|x| - 1)x/|x|}, & \text{se } 1/2 \leq |x| \leq 1, \text{ e} \end{cases}$$

$g : D^n \sqcup [0, 1] / \sim \rightarrow D^n$ , dada por

$$g(\bar{x}) = \begin{cases} x, & \text{se } x \in D^n \\ x_0, & \text{se } x \in [0, 1] \end{cases}$$

Temos que  $f \circ g : D^n \sqcup [0, 1] / \sim \longrightarrow D^n \sqcup [0, 1] / \sim$  é dada por

$$(f \circ g)(\bar{x}) = \begin{cases} \overline{2|x|}, & \text{se } 0 \leq |x| \leq 1/2 \\ \bar{0}, & \text{se } x \in [0, 1] \\ \overline{(2|x| - 1)x/|x|}, & \text{se } 1/2 \leq |x| \leq 1 \end{cases}$$

e  $g \circ f : D^n \longrightarrow D^n$  é tal que

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} x_0, & \text{se } 0 \leq |x| \leq 1/2 \\ (2|x| - 1)x/|x|, & \text{se } 1/2 \leq |x| \leq 1 \end{cases}$$

Afirmamos que  $f \circ g \simeq 1_{D^n \sqcup [0, 1] / \sim} \text{ rel } \{0\}$ .

De fato, consideremos  $F : D^n \sqcup [0, 1] / \sim \times I \longrightarrow D^n \sqcup [0, 1] / \sim$ , definida por

$$F(\bar{x}, t) = \begin{cases} \overline{2|x| + (1-t)} & \text{se } 0 \leq |x| \leq t/2 \\ \overline{x(1-t)} & \text{se } x \in [0, 1] \\ \overline{\left(\frac{2|x| - t}{2-t}\right) \frac{x}{|x|}}, & \text{se } t/2 \leq |x| \leq 1 \end{cases}$$

Sem muitas dificuldades, verifica-se a boa definição de  $F$ , bem como a continuidade. Além do mais,  $F(\bar{x}, 0) = \bar{x}$ ,  $F(\bar{x}, 1) = (f \circ g)(\bar{x})$ , e  $F(0, t) = 0$ . E assim segue a veracidade da afirmação acima.

Para concluirmos a prova do lema em questão, definimos  $H : D^n \times I \longrightarrow D^n$  por

$$H(x, t) = \begin{cases} x_0, & \text{se } 0 \leq |x| \leq 1/2 \\ \left(\frac{2|x| - t}{2-t}\right) \frac{x}{|x|}, & \text{se } t/2 \leq |x| \leq 1 \end{cases}$$

Sem muitos problemas verifica-se a boa definição e continuidade de  $H$ . Ainda temos que  $H(x, 0) = x$ ,  $H(x, 1) = (g \circ f)(x)$  e  $H(x_0, t) = x_0$ , logo  $H$  é uma homotopia, que preserva o ponto base  $x_0$ , entre  $g \circ f$  e  $1_{D^n}$ . Deste modo, dos argumentos acima realizados segue o lema.

■

Observamos que, se  $X$  for um conjunto discreto, então  $x_0$  é ponto isolado de  $X$ .

Consideremos então  $f : (X, x_0) \longrightarrow (\widehat{X}, 0)$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} \bar{x}, & \text{se } x \neq x_0 \\ 0, & \text{se } x = x_0 \end{cases}$$

e  $\tilde{g} : X \sqcup I \longrightarrow X$  dada por

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \in X \\ x_0, & \text{se } x \in I \end{cases}.$$

$\tilde{g}$  é contínua e preserva a relação de equivalência  $\sim$  que identifica 1 e  $x_0$ , logo existe aplicação contínua  $g : (\widehat{X}, 0) \longrightarrow (X, x_0)$  definida por  $g(\bar{x}) = \tilde{g}(x)$  (notemos que  $g(0) = \tilde{g}(0) = x_0$ ).

Sem problemas vemos que  $g \circ f \simeq 1_X \text{ rel } x_0$  e  $f \circ g \simeq 1_{\widehat{X}} \text{ rel } 0$ . Portanto, quando  $X$  for discreto,  $(X, x_0) \simeq (\widehat{X}, 0)$ .

Se  $X$  não for um conjunto discreto, pelo fato que  $X$  é complexo CW,  $x_0$  pertence ao interior de alguma célula  $n$ -dimensional  $e^n$ .

Pela definição de complexo CW temos o seguinte homeomorfismo

$$h = \phi|_{B^n} : (B^n, 0) \longrightarrow (e^n, x_0),$$

onde  $0 = \underbrace{(0, 0, \dots, 0)}_{n \text{ vezes}}$ , e  $B^n = D^n - S^{n-1}$ . Agora, pelo Lema anterior,  $(D^n, 0) \simeq (D^n \sqcup I / \sim, 0)$ , e mais, as equivalências de homotopia restritas à  $S^{n-1} = \partial D^n$  funcionam, grosseiramente falando, como a identidade, isto é,  $f : (D^n, 0) \longrightarrow (D^n \sqcup I / \sim, 0)$  e  $g : (D^n \sqcup I / \sim, 0) \longrightarrow (D^n, 0)$  são tais que, para  $x \in S^{n-1}$ ,  $f(x) = \bar{x}$  e  $g(\bar{x}) = x$ . Logo  $(B^n \sqcup I / \sim, 0)$  e  $(B^n, x_0)$  têm o mesmo tipo de homotopia. As equivalências de homotopia em questão serão denotadas por  $a = f|_{B^n}$  e  $b = g|_{B^n \sqcup I / \sim}$ .

Consideremos o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccccc} (B^n \sqcup I / \sim, 0) & \xrightarrow{l} & (e^n \sqcup I / \sim, 0) & \xrightarrow{c} & (\widehat{X}, 0) \\ \begin{array}{c} a \uparrow \downarrow b \\ \downarrow \uparrow \end{array} & & \begin{array}{c} \tilde{b} \uparrow \downarrow \tilde{a} \\ \downarrow \uparrow \end{array} & & \begin{array}{c} \beta \uparrow \downarrow \alpha \\ \downarrow \uparrow \end{array} \\ (B^n, 0) & \xrightarrow{h} & (e^n, x_0) & \xrightarrow{c} & (X, x_0), \end{array}$$

onde  $l$  é homeomorfismo,  $\tilde{a} = l \circ a \circ h^{-1}$ , e  $\tilde{b} = h \circ b \circ l^{-1}$ .

Como  $h$  e  $l$  são homeomorfismos, e  $a$  e  $b$  são equivalências de homotopia, segue que  $\tilde{a}$  e  $\tilde{b}$  são equivalências de homotopia.

Finalmente, provemos que  $(\widehat{X}, 0) \simeq (X, x_0)$ . Para tanto, sejam

$$\alpha : (\widehat{X}, 0) \longrightarrow (X, x_0), \text{ e}$$

$$\beta : (X, x_0) \longrightarrow (\widehat{X}, 0)$$

definidas por

$$\alpha(\bar{x}) = \begin{cases} \tilde{a}(\bar{x}), & \text{se } x \in e^n \sqcup I \\ \bar{x}, & \text{se } x \notin e^n \sqcup I \end{cases}$$

$$\beta(x) = \begin{cases} \tilde{b}, & \text{se } x \in e^n \\ x, & \text{se } x \notin e^n \end{cases}$$

Claramente  $\alpha$  e  $\beta$  estão bem definidas e são contínuas.

Tomando  $F : \widehat{X} \times I \longrightarrow \widehat{X}$  dada por

$$F(\bar{x}, t) = \begin{cases} \tilde{F}(\bar{x}, t), & \text{se } x \in e^n \sqcup I \\ \bar{x}, & \text{se } x \notin e^n \sqcup I, \end{cases}$$

onde  $\tilde{F}$  é a homotopia entre  $\tilde{b} \circ \tilde{f}$  e  $1_{e^n \sqcup I/\sim}$ , que satisfaz  $\tilde{F}(0, t) = 0$ .

Temos que

$$F(\bar{x}, 0) = \begin{cases} \tilde{F}(\bar{x}, 0), & \text{se } x \in e^n \sqcup I \\ \bar{x}, & \text{se } x \notin e^n \sqcup I \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (\tilde{b} \circ \tilde{a})(\bar{x}), & \text{se } x \in e^n \sqcup I \\ \bar{x}, & \text{se } x \notin e^n \sqcup I \end{cases}$$

$$= (\beta \circ \alpha)(\bar{x})$$

$$\begin{aligned}
F(\bar{x}, 1) &= \begin{cases} \tilde{F}(\bar{x}, 1), & \text{se } x \in e^n \sqcup I \\ \bar{x}, & \text{se } x \notin e^n \sqcup I \end{cases} \\
&= \begin{cases} \bar{x}, & \text{se } x \in e^n \sqcup I \\ \bar{x}, & \text{se } x \notin e^n \sqcup I \end{cases} \\
&= 1_{\hat{X}}(\bar{x}).
\end{aligned}$$

Além do mais,  $F(0, t) = \tilde{F}(0, t) = 0$ , para  $t \in I$ . Logo  $\beta \circ \alpha \simeq 1_{\hat{X}}$  (rel 0).

Analogamente, vemos que  $\alpha \circ \beta \simeq 1_X$  rel  $x_0$ , e isto conclui a prova de que  $(X, x_0) \simeq (\hat{X}, 0)$ .

■

# Referências Bibliográficas

- [1] BREDORN G.: *Topology and Geometry*; Springer-Verlag GTM 139, 1993.
- [2] CARLSSON G., MILGRAM R.J.: *Handbook of Algebraic Topology - Stable Homotopy and Iterad Loop Spaces*; Elsevier Science B.V., 1995.
- [3] DUGUNDIJI J.: *Topology*; Allyn and Bacon, 1966.
- [4] DWYER W.G., SPALINSKI J.: *Handbook of Algebraic Topology - Homotopy Theories and Model Categories*; Elsevier Science B.V., 1995.
- [5] HATCHER A.: *Algebraic Topology*; Cambridge Univ.Press, 2002.
- [6] HUNGERFORD T.W.: *Algebra*; Springer-Verlag GTM 73, 1989.
- [7] JAMES I.M.: *Reduced product spaces*; Ann.of Math.62 (1955).
- [8] MILGRAM R.J.: *Iterad loop spaces*; Ann.of Math.386-403 (1966).
- [9] MILNOR J.: *On spaces having the homotopy type of a CW-complex*; Trans.Amer.Math.Soc.90 (1959).
- [10] ROTMAN J.J.: *An introduction to algebraic topology*; Springer-Verlag GTM 119, 1998.
- [11] SPANIER E.: *Algebraic Topology*; McGraw-Hill, 1966.
- [12] STEENROD N.E.: *A convenient category of topological spaces*; Michigan Math.J. 14, (1967).

- [13] WHITEHEAD G.W.: *Elements of homotopy theory*; Springer-Verlag GTM 61, 1978.