

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

OS SISTEMAS COMPLETOS DE  
DESIGUALDADES PROPOSTOS POR SANTALÓ

Bruno Mendonça Rey dos Santos

SÃO CARLOS - SP  
Março de 2007.



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

OS SISTEMAS COMPLETOS DE  
DESIGUALDADES PROPOSTOS POR SANTALÓ

Bruno Mendonça Rey dos Santos

Dissertação Apresentada ao Programa  
de Pós-Graduação em Matemática da  
Universidade Federal de São Carlos,  
como parte dos requisitos para obten-  
ção do Título de Mestre em Matemá-  
tica.

Orientador: Guillermo Antonio Lobos  
Villagra

SÃO CARLOS - SP  
Março de 2007.



# Agradecimentos

Em primeiro lugar, quero agradecer a Deus por este trabalho, pois sei que Ele tem me abençoado em tudo o que tenho feito. Quero agradecer também aos meus pais pelo amor, apoio e incentivo em meus estudos.

Pelas horas dedicadas à correção do texto, e pelo apoio e torcida, agradeço à Silvia que teve boa vontade de dedicar várias horas a este trabalho.

Agradeço também aos amigos, pelo incentivo, e aos professores.

Não posso esquecer de meu orientador Guillermo, que sugeriu o tema e me apoiou em tudo o que podia.

Por último, agradeço ao financiamento da CAPES, pois sem ele esse trabalho não teria se concretizado.

# Resumo

Santaló propôs (em [21]) que, fixada a família  $\mathcal{C}$  dos corpos convexos de  $\mathbb{R}^2$ , fosse encontrado um sistema completo de desigualdades para cada par e cada tripla das funções área, perímetro, diâmetro, inraio, circunraio e largura mínima. Neste trabalho, estudamos a aplicação da técnica desenvolvida por Blaschke na resolução dos problemas propostos por Santaló que, até hoje, já se encontram solucionados.

**Palavras chave:** geometria convexa, conjuntos convexos, desigualdades geométricas, sistemas completos de desigualdades.

# Abstract

In 1961, Santaló[21] suggested that, considering the family of the convex bodies in  $\mathbb{R}^2$ , it was found a complete system of inequalities for each pair and each triple of the functions area, perimeter, diameter, inradius, circunradius and minimal width. In this work, we applied the technique developed by Blaschke[2] to solve all problems suggested by Santaló, those are solved until now.

# Introdução

O principal objeto de estudo da geometria convexa são os **corpos convexos**, sendo que um corpo convexo é um subconjunto não vazio, compacto e convexo de  $\mathbb{R}^n$ . Sabe-se que um corpo convexo  $K \subset \mathbb{R}^2$  "possui" algumas "grandezas" relacionadas a ele, entre as principais dessas grandezas,  $K$  possui uma área  $A(K)$ , um perímetro  $p(K)$ , um diâmetro  $D(K)$ , um inraio  $r(K)$ , um circunraio  $R(K)$  e uma largura mínima  $\omega(K)$ . Devemos observar que:

1. o inraio de  $K$ ,  $r(K)$ , é o maior raio possível de uma bola fechada contida em  $K$ ;
2. o circunraio de  $K$ ,  $R(K)$ , é o raio da menor bola fechada que contém  $K$ ;
3. e a largura mínima de  $K$ ,  $\omega(K)$ , é a menor distância possível entre um par de retas suporte paralelas de  $K$ .

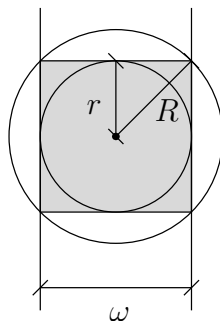


Figura 1: Inraio, circunraio e largura mínima de um quadrado  $K$ .

Relacionando duas ou três das grandezas  $A, p, D, r, R$  e  $\omega$  de um corpo convexo de  $\mathbb{R}^2$ , existem diversas desigualdades. Algumas delas são clássicas e bem conhecidas, como a desigualdade isoperimétrica  $4\pi A \leq p$ , que relaciona a área e o perímetro. Já outras, bem mais recentes, são menos conhecidas, mas cada uma tem seu próprio interesse.

Apesar do interesse individual de cada desigualdade que relaciona as "medidas"  $A, p, D, r, R$  e  $\omega$ , em 1961 Santaló [21] propôs, inspirado pelo trabalho de Blaschke [2], alguns problemas que mostravam um certo interesse nas desigualdades vistas em conjunto, a saber, os seguintes problemas:

Dada uma tripla (um par) de grandezas distintas  $(X, Y, Z) \in \{A, p, D, r, R, \omega\}^3$ , encontrar um número finito de desigualdades  $d_1, \dots, d_k$ , relacionando essas



grandezas, de modo que, se  $x, y, z$  forem números reais não negativos satisfazendo as desigualdades  $d_1(x, y, z), \dots, d_k(x, y, z)$ , então existe um corpo convexo  $C \subset \mathbb{R}^2$ , tal que  $X(C) = x, Y(C) = y$  e  $Z(C) = z$ .

A esse conjunto de desigualdades, quando encontrado, Santaló chamou de "**sistema completo de desigualdades**".

Um exemplo de um sistema completo de desigualdades, relacionando um par de grandezas, é a desigualdade  $d_1(r, R) \equiv r \leq R$ , que é satisfeita por todos os corpos convexos de  $\mathbb{R}^2$ . Essa desigualdade é um sistema completo de desigualdades pois, dados números reais não negativos  $x, y$ , satisfazendo  $d_1(x, y) \equiv x \leq y$ , existe uma elipse  $K$  com inraio  $x$  e circunraio  $y$ .

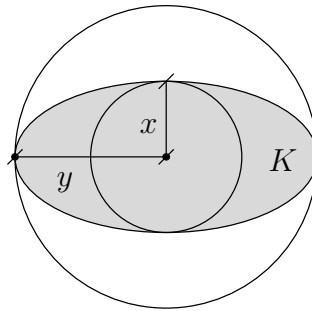


Figura 2:

Chamando de  $\mathcal{A} := \{A, p, D, r, R, \omega\}$ , para cada par de grandezas de  $\mathcal{A}$ , Santaló apresentou um sistema completo de desigualdades relacionando esse par. Já para triplas de grandezas de  $\mathcal{A}$ , ele só encontrou sistemas completos de desigualdades relacionando as triplas  $(A, p, r)$ ,  $(A, p, R)$ ,  $(A, p, \omega)$ ,  $(A, D, \omega)$ ,  $(p, D, \omega)$  e  $(D, r, R)$ , deixando o problema aberto para os demais casos.

O principal obstáculo na resolução dos demais problemas era que, na época de Santaló, não se conheciam muitas desigualdades envolvendo triplas das grandezas de  $\mathcal{A}$ . Havia, portanto, a necessidade de serem descobertas novas desigualdades.

Após estarem abertos durante cerca de 40 anos, alguns dos problemas propostos por Santaló começaram a ser resolvidos, conforme novas desigualdades iam sendo descobertas. Cabe aqui ressaltar a importância da descoberta de novas desigualdades *ótimas*, isto é, desigualdades nas quais a igualdade é alcançada para uma família infinita de conjuntos. As desigualdades nas quais a igualdade é alcançada por apenas uma ou duas figuras (a menos de isometrias) são menos importantes no trabalho de encontrar sistemas completos de desigualdades.

O objetivo principal de nosso trabalho é apresentar todos os sistemas completos de desigualdades encontrados para as triplas das grandezas de  $\mathcal{A}$ , ou seja, apresentar todos os problemas propostos por Santaló em [21] que já foram resolvidos. A fim de atingir esse objetivo, começamos nosso primeiro capítulo com alguns preliminares básicos da geometria convexa, entre esses preliminares estão a "métrica de Hausdorff" e o "teorema de seleção de Blaschke", que são ferramentas úteis para demonstrar a existência de conjuntos extremais para algumas desigualdades, isto é, a existência de soluções para alguns problemas de otimização geométrica. Além disso, com a métrica de Hausdorff,

o conjunto  $\mathcal{C} = \{\text{corpos convexos de } \mathbb{R}^n\}$  é um subespaço métrico fechado do espaço  $\mathcal{C} = \{\text{conjuntos compactos e não vazios de } \mathbb{R}^n\}$ .

No capítulo 2, estudamos algumas propriedades das grandezas  $A, p, D, r, R$  e  $\omega$ , que são funções contínuas definidas em  $\mathcal{C}$  e com valores reais.

O auge do trabalho ocorre no terceiro capítulo, no qual contamos a história dos sistemas completos de desigualdades e apresentamos a técnica desenvolvida por Blaschke para verificar se um conjunto finito de desigualdades é ou não um sistema completo de desigualdades. Nesse capítulo é apresentada ao leitor uma lista de desigualdades conhecidas por Santaló, bem como os problemas resolvidos por ele envolvendo triplas das funções de  $\mathcal{A}$ .

Terminamos então nosso trabalho com o capítulo 4, no qual expomos uma nova lista de desigualdades, todas recentes e não conhecidas por Santaló, e apresentamos como essas desigualdades foram utilizadas para resolver alguns problemas que Santaló havia deixado em aberto. Além disso, reservamos a última seção desse capítulo para enunciar quais são os problemas propostos por Santaló que continuam abertos até hoje.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>vi</b>
<b>1 Conceitos Básicos de Geometria</b>	<b>1</b>
1.1 Conjuntos convexos . . . . .	1
1.1.1 Conjuntos convexos e núcleo convexo . . . . .	1
1.1.2 Interior relativo e conjuntos afim . . . . .	3
1.1.3 Envoltente afim e envoltente convexa . . . . .	7
1.1.4 Simplex . . . . .	11
1.2 Hiperplanos suporte e semi-espacos suporte . . . . .	16
1.2.1 Hiperplanos e semi-espacos . . . . .	16
1.2.2 Caracterização dos hiperplanos e semi-espacos de $\mathbb{R}^n$ . . . . .	18
1.2.3 Hiperplano suporte e semi-espaco suporte . . . . .	20
1.3 Combinações lineares de conjuntos convexos . . . . .	28
1.3.1 Propriedades das combinações lineares . . . . .	28
1.3.2 Combinações lineares de corpos convexos . . . . .	30
1.4 Teorema de seleção de Blaschke . . . . .	32
1.4.1 A métrica de Hausdorff e o teorema de seleção de Blaschke . . . . .	32
1.4.2 Conseqüências do teorema de Blaschke . . . . .	37
<b>2 Algumas funções definidas em <math>\mathcal{C}</math></b>	<b>41</b>
2.1 Funções suporte . . . . .	41
2.2 As funções largura e a largura mínima . . . . .	43
2.3 Função diâmetro . . . . .	45
2.4 Função inraio . . . . .	46
2.5 Função circunraio . . . . .	48
2.6 Funções área e perímetro . . . . .	48
<b>3 Os Sistemas Completos de Desigualdades</b>	<b>50</b>
3.1 A História dos Sistemas Completos de Desigualdades . . . . .	52
3.2 O Diagrama de Blaschke . . . . .	54
3.3 Problemas resolvidos por Santaló . . . . .	55
3.3.1 Desigualdades . . . . .	55
3.3.2 Caso $(A, p, r)$ . . . . .	58
3.3.3 Caso $(A, D, \omega)$ . . . . .	63
3.3.4 Demais problemas resolvidos por Santaló envolvendo triplas das funções $A, p, D, r, R$ e $\omega$ . . . . .	67

<b>4</b>	<b>Os demais problemas propostos por Santaló</b>	<b>75</b>
4.1	Novas desigualdades . . . . .	75
4.2	Demais problemas resolvidos . . . . .	77
4.2.1	Caso $(A, D, R)$ . . . . .	77
4.2.2	Caso $(A, r, R)$ . . . . .	78
4.2.3	Caso $(p, D, R)$ . . . . .	79
4.2.4	Caso $(p, r, R)$ . . . . .	80
4.2.5	Caso $(D, r, \omega)$ . . . . .	81
4.2.6	Caso $(D, R, \omega)$ . . . . .	82
4.2.7	Caso $(r, R, \omega)$ . . . . .	83
4.3	Casos que continuam abertos . . . . .	84
<b>A</b>	<b>Continuidade do caminho <math>\alpha \xrightarrow{f} \alpha X + (1 - \alpha)Y</math></b>	<b>85</b>
<b>B</b>	<b>Uma propriedade dos conjuntos centralmente simétricos</b>	<b>86</b>
<b>C</b>	<b>Uma caracterização dos conjuntos fechados de <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>88</b>
	<b>Índice Remissivo</b>	<b>91</b>

# Capítulo 1

## Conceitos Básicos de Geometria

### 1.1 Conjuntos convexos

Neste capítulo serão estudadas algumas propriedades dos conjuntos convexos, uma vez que as desigualdades que estudamos envolvem grandezas relacionadas a subconjuntos convexos de  $\mathbb{R}^2$ . Nos ateremos portanto apenas a conjuntos convexos em espaços vetoriais reais, normados e de dimensão finita, embora certas propriedades sejam válidas em espaços mais gerais. Assim, a não ser que digamos o contrário, todos os espaços vetoriais vistos aqui terão dimensão finita e estarão munidos de uma norma.

#### 1.1.1 Conjuntos convexos e núcleo convexo

##### Definição 1.1

Dado um espaço vetorial  $V$  e  $a, b \in V$ , definimos o **segmento de reta**  $SG[a; b]$  como sendo o conjunto

$$SG[a; b] := \{x \in V \mid x = a + \alpha(b - a), 0 \leq \alpha \leq 1\}.$$

##### Definição 1.2

Seja  $C$  um subconjunto de um espaço vetorial  $V$ . Dizemos que  $C$  é **convexo** se dados  $x, y \in C$  quaisquer, o segmento  $SG[x; y] \subset C$ .

##### Observações:

1. Segue, da definição, que  $SG[x; y] = SG[y; x]$  e  $SG[x; y] = \{\alpha y + (1 - \alpha)x \mid \alpha \in [0, 1]\} = \{\alpha x + \beta y \mid \alpha + \beta = 1 \text{ e } \alpha, \beta \geq 0\}$ .
2. Obviamente, todo espaço vetorial é convexo e o conjunto  $\emptyset$  é convexo.

O seguinte fato decorre imediatamente da primeira observação feita acima.

##### Lema 1.1

As afirmações abaixo são equivalentes:

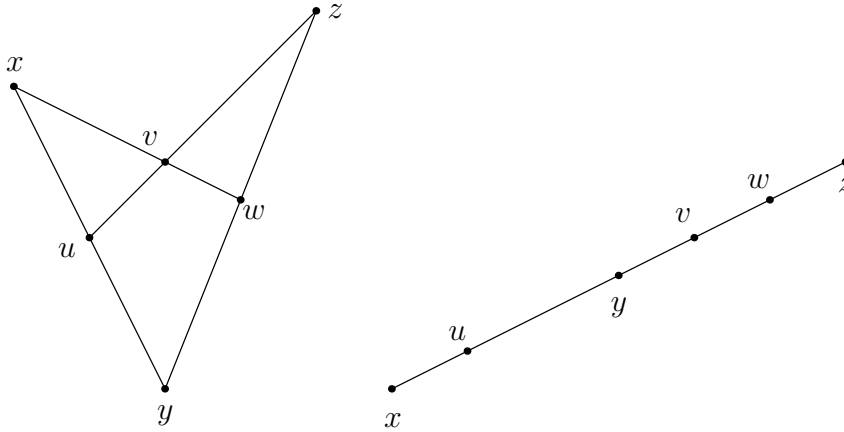
- (i) Um conjunto  $C$  contido em um espaço vetorial  $V$  é convexo.
- (ii) Para todo par de pontos  $x, y \in C$  e para todo par de números reais  $\alpha$  e  $\beta$ , se  $\alpha, \beta \geq 0$  e  $\alpha + \beta = 1$ , então  $\alpha x + \beta y \in C$ .

**Definição 1.3**

Dado  $S \subset V$ ,  $V$  um espaço vetorial, definimos o **núcleo convexo** de  $S$  (ou apenas **núcleo** de  $S$ ) como sendo o conjunto  $\text{KERS} := \{x \in S \mid \text{SG}[x; y] \subset S, \forall y \in S\}$ .

**Lema 1.2**

Sejam  $x, y$  e  $z$  três pontos distintos de  $V$ . Suponhamos  $u \in \text{SG}[x; y]$ ,  $u \neq x$  e  $u \neq y$ . Se  $v \in \text{SG}[z; u]$ , então existe  $w \in \text{SG}[z; y]$  tal que  $v \in \text{SG}[x; w]$ .



**Prova:** Como  $u \in \text{SG}[x; y]$ ,  $u \neq x$  e  $u \neq y$ , então  $u = \lambda y + (1 - \lambda)x$ , com  $\lambda \in (0, 1)$ .

Sendo  $v \in \text{SG}[z; u]$ , então  $v = \alpha z + (1 - \alpha)u$ , com  $\alpha \in [0, 1]$ . Logo vale que

$$v = \alpha z + (1 - \alpha)\lambda y + (1 - \alpha)(1 - \lambda)x, \text{ com } \lambda \in (0, 1) \text{ e } \alpha \in [0, 1] \quad (1.1)$$

Queremos encontrar  $w \in \text{SG}[y; z]$  tal que  $v \in \text{SG}[x; w]$ . Mas  $v \in \text{SG}[x; w] \Leftrightarrow w = tv + (1 - t)x$ , com  $t \geq 1$ . Logo

$$w \in \text{SG}[y; z] \text{ e } v \in \text{SG}[x; w] \Leftrightarrow \begin{cases} w = \gamma z + (1 - \gamma)y, \text{ com } \gamma \in [0, 1] \text{ e} \\ w = tv + (1 - t)x, \text{ com } t \geq 1. \end{cases} \quad (1.2)$$

Juntando (1.1) com (1.2) temos

$$w \in \text{SG}[y; z] \text{ e } v \in \text{SG}[x; w] \Leftrightarrow \begin{cases} w = \gamma z + (1 - \gamma)y, \text{ com } \gamma \in [0, 1] \text{ e} \\ w = t[\alpha z + (1 - \alpha)\lambda y + (1 - \alpha)(1 - \lambda)x] + (1 - t)x \end{cases} \quad (1.3)$$

com  $t \geq 1$ .

Encontrar então o ponto  $w$  é equivalente a encontrar os valores  $t \geq 1$  e  $\gamma \in [0, 1]$  de (1.3). Se conseguirmos então  $\gamma \in [0, 1]$  e  $t \geq 1$  tais que

$$\gamma = t\alpha, \quad (1.4)$$

$$(1 - \gamma) = t(1 - \alpha)\lambda \quad \text{e} \quad (1.5)$$

$$0 = t(\alpha\lambda - \alpha - \lambda) + 1, \quad (1.6)$$

então o problema estará resolvido.

Mas de (1.4) e (1.6) resulta

$$t = \frac{1}{\alpha + \lambda(1 - \alpha)} \quad \text{e} \quad \gamma = \frac{\alpha}{\alpha + \lambda(1 - \alpha)}. \quad (1.7)$$

Resta apenas mostrar que  $t \geq 1$  e que  $\alpha \in (0, 1)$  e que vale (1.5).

De fato vale (1.5) com  $t$  e  $\gamma$  de (1.7), e como  $\alpha \in [0, 1]$ , sai direto que  $\gamma \in (0, 1)$ . Mostraremos agora que  $t \geq 1$ .

Se  $\alpha = 0$  ou  $\alpha = 1$ , então  $t \geq 1$  por (1.7), pois  $\lambda \in (0, 1)$ . Suponhamos então  $\alpha \in (0, 1)$ .

Já que  $\alpha + \lambda(1 - \alpha) = \alpha + \lambda - \alpha\lambda$ , com  $\alpha, \lambda \in (0, 1)$ , tomemos a função  $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(\alpha, \lambda) = \alpha + \lambda - \alpha\lambda$ . Como  $f$  é contínua definida em um compacto, então ela atinge um máximo e um mínimo em  $[0, 1]^2$ . Encontremos o ponto de máximo de  $f$ .

Se  $\nabla f(\alpha', \lambda') = (1 - \lambda', 1 - \alpha') = 0$ , então  $\alpha' = \lambda' = 1$ . Logo os pontos críticos de  $f$  não estão em  $(0, 1)^2$  e seu ponto de máximo está na fronteira.

Como a fronteira de  $[0, 1] \times [0, 1]$  é o conjunto  $([0, 1] \times \{0\}) \cup ([0, 1] \times \{1\}) \cup (\{0\} \times [0, 1]) \cup (\{1\} \times [0, 1])$  temos:

$$\begin{aligned} f(\alpha', 0) &= \alpha' \leq 1, & f(1, 0) &= 1, \\ f(\alpha', 1) &= \alpha' + 1 - \alpha' = 1, \\ f(0, \lambda') &= \lambda' \leq 1, & f(0, 1) &= 1, \\ f(1, \lambda') &= 1 + \lambda' - \lambda' = 1. \end{aligned}$$

Logo  $f(\alpha', \lambda') \leq 1, \forall \alpha', \lambda' \in [0, 1]$  e  $f(\alpha, \lambda) < 1$  se  $\alpha, \lambda \in (0, 1)$ . Assim sendo,  $\frac{1}{t} < 1$  e  $t \geq 1$ .  $\square$

### Proposição 1.3

$KERS$  é convexo.

**Prova:** Sejam  $x, y \in K = KERS$  com  $x \neq y$ . Queremos mostrar que, se  $u \in SG[x; y]$ , então  $u \in K$ . Para isso, seja  $u \in SG[x; y]$  um elemento qualquer, logo  $u = \alpha x + (1 - \alpha)y$  para algum  $0 < \alpha < 1$ .

Tomemos  $z \in S$  qualquer. Se  $z = x$  ou  $z = y$  temos que  $SG[u; z] \subset S$ , pois  $x, y \in KERS$ . Agora, se  $z \neq x$  e  $z \neq y$ , vemos que esse  $z$  existe pois, como  $x \in K$  e  $y \in S$ , então  $SG[x; y] \subset S$ .

Assim, temos que  $x, y$  e  $z$  são três pontos distintos de  $S$ , logo, pelo Lema 1.2, dado  $v \in SG[u; z]$  existe um  $w \in SG[y; z]$  tal que  $v \in SG[x; w]$ . Tomando  $v \in SG[u; z]$ , seja  $w \in SG[y; z]$  tal que  $v \in SG[x; w]$ . Como  $y \in K$ ,  $SG[y; z] \subset S$ , logo  $w \in S$ .

Sendo  $x \in K$  e  $w \in S$  temos que  $SG[x; w] \subset S$ , logo  $v \in S$ . Como o ponto  $v \in SG[u; z]$  é genérico, então  $\forall v \in SG[u; z], v \in S$ , isto é,  $SG[u; z] \subset S$ .

Como a escolha de  $z$  também foi arbitrária,  $SG[u; z] \subset S, \forall z \in S$ . Portanto  $u \in K$ .  $\square$

## 1.1.2 Interior relativo e conjuntos afim

### Definição 1.4

Dado um espaço vetorial  $V$  o transladado de um subespaço  $W \subset V$  é chamado de **subespaço afim** (ou variedade linear).

### Definição 1.5

Se  $U = W + v$  é um subespaço afim transladado de  $W$ , então a **dimensão** de  $U$  é a dimensão de  $W$  e denotamos por  $\dim U = \dim W$ .

A **dimensão** de um conjunto  $S \subset V$  é a dimensão do menor subespaço afim que contém  $S$ .

### Observações:

1. Um subespaço afim de dimensão 1 é chamado de **reta** e um subespaço afim de dimensão  $n - 1$  é chamado de **hiperplano**, se  $\dim V = n$ .
2. Em  $\mathbb{R}^3$  os subespaços afim próprios são os pontos, as retas e os planos, isto é, plano é um subespaço afim de dimensão 2, reta é um subespaço afim de dimensão 1 e ponto é um subespaço afim de dimensão 0.

### **Definição 1.6**

Dado  $S$  um subconjunto do espaço vetorial  $V$ , o **interior relativo** de  $S$ , denotado por  $\text{RELINT}S$ , é o interior de  $S$  em relação ao menor subespaço afim que contém  $S$ , ou seja,

$$\text{RELINT}S := \{x \in S \mid \exists \varepsilon > 0; B(x, \varepsilon) \cap F \subset S\},$$

sendo  $F$  é o menor subespaço afim que contém  $S$ .

A próxima proposição nos diz que o interior relativo de um segmento de reta é o segmento sem seus pontos extremos.

### **Proposição 1.4**

$$\text{RELINT}(\text{SG}[x; y]) = \{x + \alpha(y - x) \mid \alpha \in (0, 1)\}.$$

### **Prova:**

Sabemos que  $\text{SG}[x; y] \subset x + [y - x]$ , sendo  $[y - x]$  o subespaço vetorial gerado pelo vetor  $y - x$ . Mostraremos que  $x + [y - x]$  é o menor subespaço afim que contém  $\text{SG}[x; y]$ .

Com efeito, suponhamos  $\text{SG}[x; y] \subset z + K$ , em que  $z + K$  é um subespaço afim. Logo  $x, y \in z + K$ , portanto  $x = z + k_1$  e  $y = z + k_2$  para certos  $k_1, k_2 \in K$ . Logo  $z = x - k_1 = y - k_2$ , e daqui  $x - y = k_1 - k_2 \in K$ . Assim o subespaço  $[x - y]$ , gerado por  $x - y$ , está contido em  $K$ .

Mas  $z + t(y - x) = x + k_1 + t(y - x) \in z + K$ . Logo  $x + t(y - x) = z - k_1 + t(y - x) \in z + K$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ , pois  $t(y - x), -k_1 \in K$ . Portanto  $x + [y - x] \subset z + K$ , ou seja,  $x + [y - x]$  é o menor subespaço afim que contém  $\text{SG}[x; y]$ .

Agora mostraremos que  $x \notin \text{RELINT}(\text{SG}[x; y])$  (analogamente  $y \notin \text{SG}[x; y]$ ).

Seja  $\varepsilon > 0$  e tome  $z = x - \frac{\varepsilon(y - x)}{2\|y - x\|}$ . Logo  $z \in x + [y - x]$ . Além disso,  $\|z - x\| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ .

Logo  $z \in B(x, \varepsilon) \cap x + [y - x]$ .

Mas  $z \notin \text{SG}[x; y]$  pois  $-\frac{\varepsilon}{2\|y - x\|} < 0$ . Portanto  $B(x, \varepsilon) \cap (x + [y - x]) \not\subset \text{SG}[x; y]$ , isto é,  $x \notin \text{RELINT}(\text{SG}[x; y])$ .

Finalmente, mostraremos que  $z \in \text{RELINT}(\text{SG}[x; y])$ ,  $\forall z \in \text{SG}[x; y]$ , se  $z \neq x$  e  $z \neq y$ .

De fato, se  $z \in \text{SG}[x; y]$ ,  $z \neq x$  e  $z \neq y$ , então  $z = x + \alpha(y - x)$  com  $\alpha \in (0, 1)$ .

Tomemos

$$\varepsilon = \min \{\|x - (x + \alpha(y - x))\|, \|y - (x + \alpha(y - x))\|\},$$



ou seja,  $\varepsilon = \min \{ \|\alpha(y-x)\|, \|(1-\alpha)(y-x)\| \}$ , e um  $w \in B(z, \varepsilon) \cap (x + [y-x])$ . Logo  $w = x + \beta(y-x)$ , com  $\beta \in \mathbb{R}$  e  $\|w-z\| < \varepsilon$ . Assim

$$\begin{aligned} \|x + \alpha(y-x) - x - \beta(y-x)\| &= \|(\alpha - \beta)(y-x)\| < \varepsilon \\ \Rightarrow |\alpha - \beta| \cdot \|y-x\| &< |\alpha| \cdot \|y-x\| \text{ e } |\alpha - \beta| \cdot \|y-x\| < |1-\alpha| \cdot \|y-x\| \\ \Rightarrow |\alpha - \beta| < |\alpha| \text{ e } |\alpha - \beta| < |1-\alpha| &\Rightarrow \beta \in (0, 1). \end{aligned}$$

Portanto  $B(z, \varepsilon) \cap (x + [y-x]) \subset \text{SG}[x; y]$ . Isto prova a proposição.  $\square$

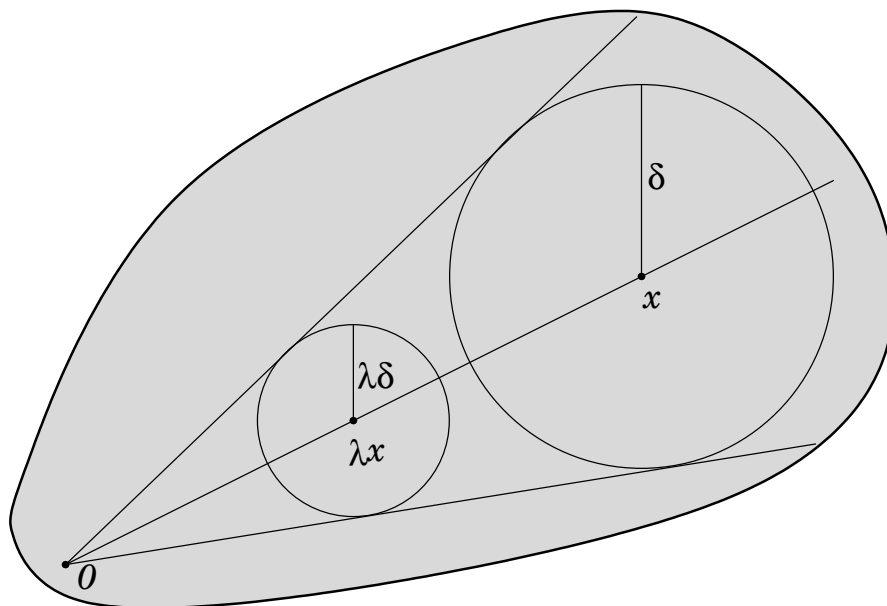
Os seguintes lemas seguem das definições.

**Lema 1.5**

$B(\lambda x, \lambda \delta) = \lambda B(x, \delta)$ ,  $\forall \lambda > 0$ .

**Lema 1.6**

Se  $C$  é convexo,  $0 \in C$  e  $B(x, \delta) \subset C$ , então  $\lambda B(x, \delta) \subset C$ , para todo  $\lambda \in [0, 1]$ .



**Proposição 1.7**

Seja  $C$  um conjunto convexo. Se  $x \in \text{INT}(C)$  e  $y \in C$  então  $\text{RELINT}(\text{SG}[x; y]) \subset \text{INT}(C)$ .

**Prova:** Sejam  $x \in \text{INT}(C)$  e  $y \in C$ . Sem perda de generalidade, podemos considerar  $y = 0$ .

Como  $x \in \text{INT}(C)$ , então existe um  $\varepsilon > 0$  tal que  $B(x, \varepsilon) \subset C$ . Para cada  $u \in \text{RELINT}(\text{SG}[x; y])$ , existe um  $\lambda \in (0, 1)$  tal que  $u = \lambda x$ , pois  $y = 0$ .

Mas  $B(\lambda x, \lambda \varepsilon) = \lambda B(x, \varepsilon) \subset C$ , pelos lemas 1.5 e 1.6. Logo  $B(\lambda x, \lambda \varepsilon) = B(u, \lambda \varepsilon) \subset C$ . Portanto  $u \in \text{INT}(C)$ .  $\square$

**Corolário 1.8**

Se  $C$  é convexo, então  $\text{INT}(C)$  é convexo.

**Prova:** Sejam  $x, y \in \text{INT}(C)$ . Pela proposição 1.7,  $\text{RELINT}(\text{SG}[x; y]) \subset \text{INT}(C)$ . Mas  $\text{SG}[x; y] = \text{RELINT}(\text{SG}[x; y]) \cup \{x, y\} \subset \text{INT}(C)$ .  $\square$

### Lema 1.9

Sejam  $C$  um conjunto convexo,  $0 \in C$  e  $F$  o menor subespaço afim que contém  $C$ . Se  $B(x, \varepsilon) \cap F \subset C$ , então  $\lambda B(x, \varepsilon) \cap F \subset C$ ,  $\forall \lambda \in [0, 1]$ .

**Prova:** Seja  $\lambda \in [0, 1]$  e  $z \in \lambda B(x, \varepsilon) \cap F$ . Como  $0 \in C$ , então  $F$  é um subespaço vetorial. Sendo  $z \in \lambda B(x, \varepsilon) \cap F$ ,  $z = \lambda w \in F$ , para algum  $w \in B(x, \varepsilon)$ .

Se  $\lambda = 0$ , então  $\lambda B(x, \varepsilon) = \{0\} \subset C$ . Logo  $\lambda B(x, \varepsilon) \cap F = \{0\} \subset C$ .

Agora, se  $\lambda \neq 0$ , então  $z \in F$  e  $\frac{1}{\lambda}z = w \in F$ , logo  $w \in B(x, \varepsilon) \cap F \subset C$ . Como  $\lambda \in [0, 1]$ , então  $z \in \text{SG}[0; w] \subset C$ , pois  $0, w \in C$ . Logo  $z \in C$ .  $\square$

### Proposição 1.10

Seja  $C$  um conjunto convexo. Se  $x \in \text{RELINT}C$  e  $y \in C$ , então  $\text{RELINT}(\text{SG}[x; y]) \subset \text{RELINT}C$ .

**Prova:** Sejam  $x \in \text{RELINT}C$  e  $y \in C$ . Sem perda de generalidade, podemos considerar  $y = 0$ .

Como  $x \in \text{RELINT}C$ , então existe um  $\varepsilon > 0$  tal que  $B(x, \varepsilon) \cap F \subset C$ , sendo  $F$  é o menor subespaço afim que contém  $C$ . Para cada  $u \in \text{RELINT}(\text{SG}[x; y])$ , existe um  $\lambda \in (0, 1)$  tal que  $u = \lambda x$ , pois  $y = 0$ .

Mas  $B(u, \lambda\varepsilon) \cap F = \lambda B(x, \varepsilon) \cap F$ . Por outro lado, pelo Lema 1.9,  $\lambda B(x, \varepsilon) \cap F \subset C$ , logo  $B(u, \lambda\varepsilon) \cap F \subset C$  e  $u \in \text{RELINT}C$ .  $\square$

### Corolário 1.11

Se  $C$  é convexo, então  $\text{RELINT}C$  é convexo.

**Prova:** Sejam  $x, y \in \text{RELINT}C$ . Pela Proposição 1.10,  $\text{RELINT}(\text{SG}[x; y]) \subset \text{RELINT}C$ . Mas  $\text{SG}[x; y] = \text{RELINT}(\text{SG}[x; y]) \cup \{x, y\} \subset \text{RELINT}C$ .  $\square$

### Teorema 1.12

Seja  $C$  convexo, então o fecho de  $C$ ,  $\overline{C}$ , é convexo.

**Prova:** Sejam  $x, y \in \overline{C}$  e  $u = \alpha x + \beta y$ , com  $\alpha, \beta \geq 0$  e  $\alpha + \beta = 1$ . Seja também  $B(u, \varepsilon)$  uma bola aberta centrada em  $u$ . Como  $x, y \in \overline{C}$ , existem  $x_0 \in B(x, \varepsilon) \cap C$  e  $y_0 \in B(y, \varepsilon) \cap C$ .

Afirmamos que  $u_0 = \alpha x_0 + \beta y_0 \in B(u, \varepsilon)$ . De fato,  $d(u, u_0) = d(\alpha x + \beta y, \alpha x_0 + \beta y_0) \leq d(\alpha x + \beta y, \alpha x_0 + \beta y) + d(\alpha x_0 + \beta y, \alpha x_0 + \beta y_0) = d(\alpha x, \alpha x_0) + d(\beta y, \beta y_0) < \alpha\varepsilon + \beta\varepsilon = \varepsilon$ .

Como  $u_0 \in \text{SG}[x_0; y_0]$ , então  $u_0 \in C$  e  $B(u, \varepsilon) \cap C \neq \emptyset$ , portanto  $u \in \overline{C}$ .  $\square$

### Definição 1.7

Um conjunto  $S$  é dito **afim** se, para quaisquer  $x, y \in S$ ,  $\alpha x + (1 - \alpha)y \in S$ , qualquer que seja o  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Em outras palavras, podemos dizer que  $S$  é um conjunto afim quando, para qualquer par de pontos  $x$  e  $y$  de  $S$ , a reta que liga os pontos  $x$  e  $y$  está inteiramente contida em  $S$ .

**Proposição 1.13**

Sejam  $V$  é um espaço vetorial e  $S \subset V$ . Nessas condições,  $S$  é afim se, e somente se,  $S$  é um subespaço afim.

**Prova:**

( $\Rightarrow$ ) Suponhamos  $S$  afim e sejam  $x \in S$  e  $U = -x + S$ . Afirmamos que  $U$  é um subespaço vetorial de  $V$ . Para provarmos isso, sejam  $u, v \in U$ , logo existem  $s_1, s_2 \in S$  tais que  $u = -x + s_1$  e  $v = -x + s_2$ .

Daí,

$$u + \lambda v = -x + s_1 + \lambda(-x + s_2) = -x + \lambda \left( 2 \left( \frac{s_1 + s_2}{2} \right) - x \right) + (1 - \lambda)s_1.$$

Sejam  $s_3 = \frac{s_1 + s_2}{2} = \frac{1}{2}s_1 + (1 - \frac{1}{2})s_2 \in S$ ,  $s_4 = -x + 2s_3 \in S$  e  $s_5 = \lambda s_4 + (1 - \lambda)s_1 \in S$ .

Logo, como  $u + \lambda v = -x + s_5$  e  $s_5 \in S$ , segue que  $u + \lambda v \in U$  e portanto  $U$  é subespaço vetorial.

Sendo  $S = x + U$ ,  $S$  é subespaço afim.

( $\Leftarrow$ ) Suponhamos agora que  $S$  seja um subespaço afim e sejam  $x, y \in S$ .

Como  $S$  é um subespaço afim, segue que  $S = v + U$ , para algum subespaço vetorial  $U$  e algum vetor  $v \in V$ . Portanto  $x = v + u_1$  e  $y = v + u_2$  para certos  $u_1, u_2 \in U$ . Assim  $\lambda x + (1 - \lambda)y = \lambda(v + u_1) + (1 - \lambda)(v + u_2) = \lambda u_1 + (1 - \lambda)u_2 + v$ .

Mas  $u_1, u_2 \in U$  que é subespaço, logo  $\lambda u_1 + (1 - \lambda)u_2 \in U$ ,  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ . Segue então que  $\lambda u_1 + (1 - \lambda)u_2 + v \in v + U$ ,  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ , ou seja,  $\lambda x + (1 - \lambda)y \in v + U = S$ ,  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ . Portanto  $S$  é afim.  $\square$

**Observação:** Pela demonstração dessa última proposição, temos:

$S$  afim  $\Leftrightarrow S - s$  é subespaço vetorial, sendo  $s \in S$  um elemento qualquer.

**1.1.3 Envoltente afim e envoltente convexa****Definição 1.8**

Sejam  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  números reais e suponhamos que  $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$ . Nessas condições, dados os pontos  $x_1, \dots, x_k$ , o ponto  $y = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k$  é chamado de **combinação afim** dos pontos  $x_1, \dots, x_k$ . Se, além das condições anteriores, exigirmos que  $\lambda_i \geq 0$ ,  $\forall i = 1, \dots, k$ , então  $y = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k$  é chamado de **combinação convexa** de  $x_1, \dots, x_k$ .

O seguinte resultado relaciona os conjuntos afins e os conjuntos convexos com as combinações afim e convexa.

**Proposição 1.14**

- (i)  $S$  é afim se, e somente se, toda combinação afim de elementos de  $S$  está em  $S$ .
- (ii)  $S$  é convexo se, e somente se, toda combinação convexa de elementos de  $S$  está em  $S$ .

Provamos apenas o segundo item desta última proposição, pois a prova do primeiro é análoga à do segundo.

**Prova do item (ii):**

( $\Leftarrow$ ) Suponhamos que toda combinação convexa de elementos de  $S$  está em  $S$  e sejam  $x, y \in S$ .

Logo,  $\forall \lambda \in [0, 1], \lambda + (1 - \lambda) = 1, \lambda \geq 0$  e  $1 - \lambda \geq 0$ . Assim,  $\lambda x + (1 - \lambda)y$  é uma combinação convexa dos elementos de  $S, \forall \lambda \in [0, 1]$ , e segue que  $\lambda x + (1 - \lambda)y \in S, \forall \lambda \in [0, 1]$ .

Portanto,  $S$  é convexo.

( $\Rightarrow$ ) Suponhamos agora  $S$  convexo e seja  $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$  uma combinação convexa de elementos de  $S$ . Usaremos indução sobre  $n$  para mostrar que  $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n \in S$ .

(1) Para  $n = 1$  sabemos que toda combinação convexa de um único elemento de  $S$  é o próprio elemento que está em  $S$ .

(2) Para  $n = 2$ , consideremos  $\alpha x + \beta y$  uma combinação convexa de no máximo dois elementos de  $S$ . Logo  $\alpha + \beta = 1, \alpha, \beta \geq 0$ .

Portanto  $\alpha x + \beta y \in S$ , pois  $S$  é convexo.

(3) Suponhamos que, para um certo  $k \geq 2$ , toda combinação convexa de no máximo  $k$  elementos de  $S$  está em  $S$ . Mostraremos que toda combinação convexa de  $k + 1$  elementos está em  $S$ . Com efeito, seja  $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k + \lambda_{k+1} x_{k+1}$  uma combinação convexa de  $k + 1$  elementos.

Como  $\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i = 1$  e  $\lambda_i \geq 0, \forall i \in \{1, \dots, k + 1\}$ , podemos considerar  $\alpha = \sum_{i=1}^k \lambda_i$  e  $y = \sum_{i=1}^k \frac{1}{\alpha} \lambda_i x_i$ . Logo  $\sum_{i=1}^k \frac{1}{\alpha} \lambda_i = 1$  e  $\frac{1}{\alpha} \lambda_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, k$ , ou seja  $y$  é uma combinação convexa de  $k$  elementos de  $S$ .

Sendo  $y$  combinação convexa de  $k$  elementos de  $S$ , então  $y \in S$ . Porém

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k + \lambda_{k+1} x_{k+1} = \alpha y + \lambda_{k+1} x_{k+1},$$

com  $\alpha, \lambda_{k+1} \geq 0$  e  $\alpha + \lambda_{k+1} = \sum_{i=1}^k \lambda_i + \lambda_{k+1} = 1$ .

Logo  $\alpha y + \lambda_{k+1} x_{k+1}$  é uma combinação convexa de dois elementos de  $S$  e está em  $S$ , portanto  $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k + \lambda_{k+1} x_{k+1} \in S$ .  $\square$

### Definição 1.9

Um conjunto finito de pontos  $\{x_1, \dots, x_n\}$  é dito **afim dependente** (ou **a.d.**) se existem números reais  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , não todos nulos, tais que  $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 0$  e  $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0$ . De outro modo,  $\{x_1, \dots, x_n\}$  é dito **afim independente** (ou **a.i.**).

Um conjunto  $S$  é dito **afim dependente** se existe um subconjunto finito de  $S$  que seja afim dependente. De outro modo  $S$  é dito **afim independente**.

### Proposição 1.15

Dados  $x_1, \dots, x_n$  pontos de um espaço vetorial  $V$ ,  $x_1, \dots, x_n$  são a.d. (afim dependentes) se, e só se, algum  $x_{i_0}$  é uma combinação afim de  $x_1, \dots, x_{i_0-1}, x_{i_0+1}, \dots, x_n$ , para algum  $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ .

#### Prova:

( $\Rightarrow$ ) Suponhamos  $\{x_1, \dots, x_n\}$  a.d., logo existem  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  não todos nulos com  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$  e  $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0$ .

Seja  $i_0 \in \{1, \dots, n\}$  tal que  $x_{i_0} \neq 0$ , logo

$$x_{i_0} = - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^n \frac{\lambda_i}{\lambda_{i_0}} x_i \quad \text{e} \quad \lambda_{i_0} = - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^n \lambda_i \neq 0.$$

Como  $\lambda_{i_0} = - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^n \lambda_i \neq 0$ , então  $-\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^n \frac{\lambda_i}{\lambda_{i_0}} = 1$ . Portanto  $x_{i_0}$  é uma combinação afim de  $\{x_1, \dots, x_{i_0-1}, x_{i_0+1}, \dots, x_n\}$ .

( $\Leftarrow$ ) Suponhamos agora que  $x_{i_0}$  é uma combinação afim de  $\{x_1, \dots, x_{i_0-1}, x_{i_0+1}, \dots, x_n\}$  para algum  $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ . Sejam os escalares  $\alpha_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , tais que  $x_{i_0} = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{i_0-1} x_{i_0-1} + \alpha_{i_0+1} x_{i_0+1} + \dots + \alpha_n x_n$  e tais que  $\alpha_1 + \dots + \alpha_{i_0-1} + \alpha_{i_0+1} + \dots + \alpha_n = 1$ . Logo  $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{i_0-1} x_{i_0-1} - x_{i_0} + \alpha_{i_0+1} x_{i_0+1} + \dots + \alpha_n x_n = 0$  e  $\alpha_1 + \dots + \alpha_{i_0-1} + (-1) + \alpha_{i_0+1} + \dots + \alpha_n = 0$ . Portanto  $\{x_1, \dots, x_{i_0-1}, x_{i_0}, x_{i_0+1}, \dots, x_n\}$  é a.d.  $\square$

### Proposição 1.16

Qualquer subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  com pelo menos  $n + 1$  elementos é l.d. (linearmente dependente) e qualquer subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  com pelo menos  $n + 2$  elementos é a.d.

**Prova:** Suponhamos que  $S \subset \mathbb{R}^n$  tenha pelo menos  $n + 1$  elementos. Como  $\dim \mathbb{R}^n = n$ , é sabido da álgebra linear que  $S$  é l.d.

Suponhamos agora que  $S$  tenha pelo menos  $n + 2$  elementos, tome então  $x_1, \dots, x_m$  elementos distintos de  $S$  com  $m \geq n + 2$ . Logo  $x_2 - x_1, x_3 - x_1, \dots, x_m - x_1$  são l.d. e existem  $\alpha_2, \dots, \alpha_m$  não todos nulos tais que  $\alpha_2(x_2 - x_1) + \dots + \alpha_m(x_m - x_1) = 0$ . Portanto,

$$\left( - \sum_{i=2}^m \alpha_i \right) x_1 + \sum_{i=2}^m \alpha_i x_i = 0.$$

Agora, tomando  $\alpha_1 = - \sum_{i=2}^m \alpha_i$ , temos que  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  não são todos nulos,  $\alpha_1 + \dots + \alpha_m = 0$  e  $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_m x_m = 0$ , isto é,  $x_1, \dots, x_m$  são a.d.  $\square$

Temos em  $\mathbb{R}^n$  três tipos de combinações: as combinações lineares, as combinações afim e as combinações convexas. Se um conjunto é fechado a respeito das combinações lineares ele é um subespaço vetorial. Se é fechado a respeito das combinações afim ele é subespaço afim e se é fechado a respeito das combinações convexas ele é convexo.

### Proposição 1.17

Se  $\{S_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$  é uma coleção de subconjuntos convexas (afins), então  $\bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} S_\alpha$  é convexo (afim).

#### Prova do caso convexo:

Sejam  $x, y \in \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} S_\alpha$ , portanto  $x, y \in S_\alpha$ , para cada  $\alpha \in \mathcal{A}$ .

Como  $S_\alpha$  é convexo para cada  $\alpha \in \mathcal{A}$ , então  $\text{SG}[x; y] \subset S_\alpha$ ,  $\forall \alpha \in \mathcal{A}$ , logo  $\text{SG}[x; y] \subset \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} S_\alpha$ .  $\square$

**Definição 1.10**

Sejam  $V$  um espaço vetorial e  $S \subset V$ . A **envolvente convexa** de  $S$  é o menor subconjunto convexo de  $V$  que contém  $S$  e a **envolvente afim** de  $S$  é o menor subespaço afim de  $V$  que contém  $S$ . Denotamos a envolvente convexa de  $S$  por  $\text{CONVS}$  e a **envolvente afim** por  $\text{AFFS}$ , ou seja,

$$\text{CONVS} = \bigcap_{C \in \mathfrak{C}} C, \text{ com } \mathfrak{C} = \{C \subset V \mid S \subset C \text{ e } C \text{ é convexo}\},$$

$$\text{AFFS} = \bigcap_{A \in \mathfrak{A}} A, \text{ com } \mathfrak{A} = \{A \subset V \mid S \subset A \text{ e } A \text{ é afim}\}.$$

**Observações:**

1.  $S$  é convexo  $\Leftrightarrow S = \text{CONVS}$  e
2.  $S$  é afim  $\Leftrightarrow S = \text{AFFS}$ .

**Proposição 1.18**

$\text{CONVS}$  consiste no conjunto de todas as combinações convexas de  $S$ .  $\text{AFFS}$  consiste no conjunto de todas as combinações afim de  $S$ .

**Prova:** Provamos apenas o caso convexo, pois o caso afim é similar a este.

Como  $\text{CONVS}$  é convexo, então já sabemos que todas as combinações convexas de  $\text{CONVS}$  está em  $\text{CONVS}$ . Logo qualquer combinação convexa de elementos de  $S$  está em  $\text{CONVS}$ . Resta mostrar que todo elemento de  $\text{CONVS}$  é uma combinação convexa de elementos de  $S$ .

Seja  $T$  o conjunto de todas as combinações convexas de  $S$ , logo  $T \subset \text{CONVS}$ . Se mostrarmos que  $T$  é convexo, então  $\text{CONVS} \subset T$ .

Sejam  $x, y \in T$ , logo  $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$  e  $y = \sum_{j=1}^m \beta_j y_j$  com:  $\alpha_i \geq 0, \beta_j \geq 0, x_i \in S, y_j \in S, \forall i = 1, \dots, n$  e  $\forall j = 1, \dots, m$ , sendo que  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 = \sum_{j=1}^m \beta_j$ .

Então, dado  $\lambda \in [0, 1]$ , seja  $z = \lambda x + (1 - \lambda)y = \sum_{i=1}^n \lambda \alpha_i x_i + \sum_{j=1}^m (1 - \lambda) \beta_j y_j$ .

Mas,

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \lambda \alpha_i + \sum_{j=1}^m (1 - \lambda) \beta_j = \lambda \sum_{i=1}^n \alpha_i + (1 - \lambda) \sum_{j=1}^m \beta_j = \lambda + (1 - \lambda) = 1, \\ \lambda \alpha_i \geq 0 \text{ e } (1 - \lambda) \beta_j \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, n \text{ e } \forall j = 1, \dots, m. \end{cases}$$

Portanto  $z \in T$ , ou seja,  $T$  é convexo. □

**Teorema 1.19 (Caratheodory - 1907)**

Se  $S \neq \emptyset, S \subset \mathbb{R}^n$ , então todo elemento de  $\text{CONVS}$  é uma combinação convexa de no máximo  $n + 1$  elementos de  $S$ .

**Prova:** Seja  $x \in \text{CONVS}$ , logo  $x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m$  com  $m \in \mathbb{N}, x_i \in S, \lambda_i \geq 0$ , para  $i = 1, \dots, m$ , sendo  $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ .

Suponhamos, por absurdo, que  $m > n + 1$ . Então  $\{x_1, \dots, x_m\}$  são a.d., logo existem  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ , não todos nulos, tais que  $\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i = 0$  e  $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 0$ .

Assim,

$$\begin{cases} \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m = x, \\ \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_m x_m = 0. \end{cases}$$

Como os escalares  $\alpha_i$  não são todos nulos, então  $\alpha_k x_k = -\alpha_1 x_1 - \cdots - \alpha_{k-1} x_{k-1} - \alpha_{k+1} x_{k+1} - \cdots - \alpha_m x_m$ , para algum  $1 \leq k \leq m$ . Podemos supor  $\alpha_k > 0$ , senão tomamos  $\gamma_i = -\alpha_i$  para  $1 \leq i \leq m$ .

Como  $\alpha_k > 0$ , então  $x_k = -\frac{1}{\alpha_k} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^m \alpha_i x_i$ . Daí, temos

$$\sum_{j=1}^k \lambda_j x_j = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^m \lambda_j x_j + \lambda_k x_k = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^m \lambda_j x_j - \frac{\lambda_k}{\alpha_k} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^m \alpha_i x_i = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^m \left( \lambda_i - \frac{\lambda_k}{\alpha_k} \alpha_i \right) x_i.$$

Afirmação:  $\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^m \left( \lambda_i - \frac{\lambda_k}{\alpha_k} \alpha_i \right) x_i$  é uma combinação convexa de elementos de  $S$ .

Passo 1: Precisamos provar que a soma dos coeficientes de  $\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^m \left( \lambda_i - \frac{\lambda_k}{\alpha_k} \alpha_i \right) x_i$  é igual

a 1. Com efeito,

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^m \left( \lambda_i - \frac{\lambda_k}{\alpha_k} \alpha_i \right) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^m \lambda_i + \frac{\lambda_k}{\alpha_k} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^m (-\alpha_i) = 1 - \lambda_k + \frac{\lambda_k}{\alpha_k} \alpha_k = 1.$$

Passo 2: Demonstrar que cada escalar de  $\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^m \left( \lambda_i - \frac{\lambda_k}{\alpha_k} \alpha_i \right) x_i$  é maior ou igual a zero.

Se  $\alpha_i \leq 0$ , então  $\lambda_i - \frac{\lambda_k}{\alpha_k} \alpha_i \geq 0$ .

Se  $\alpha_i > 0$ , então  $\lambda_i - \frac{\lambda_k}{\alpha_k} \alpha_i = \alpha_i \left( \frac{\lambda_i}{\alpha_i} - \frac{\lambda_k}{\alpha_k} \right)$ .

Mas, quando escolhermos  $\alpha_k \neq 0$  de tal forma que  $\alpha_k > 0$  e  $\alpha_k x_k = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^m \alpha_i x_i$ , poderíamos

ter feito a escolha de tal forma que  $\alpha_k$  também satisfizesse  $\frac{\lambda_k}{\alpha_k} = \min \left\{ \frac{\lambda_i}{\alpha_i}; 1 \leq i \leq k \text{ e } \alpha_i > 0 \right\}$ .

Dessa forma,  $\frac{\lambda_i}{\alpha_i} - \frac{\lambda_k}{\alpha_k} > 0$  e  $\alpha_i \left( \frac{\lambda_i}{\alpha_i} - \frac{\lambda_k}{\alpha_k} \right) > 0$ .

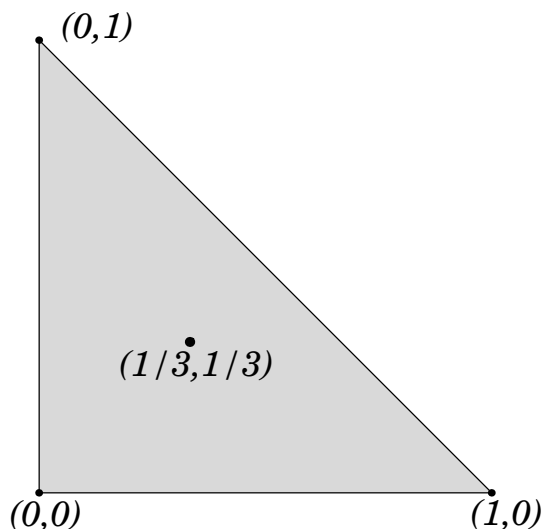
Logo  $x$  é uma combinação convexa de  $m - 1$  elementos de  $S$ . Se  $m - 1 > n + 1$ , repetimos esse processo um número finito de vezes até obter que  $x$  é uma combinação convexa de no máximo  $n + 1$  elementos de  $S$ .  $\square$

Se  $x \in \text{CONVS}$  e  $S \subset \mathbb{R}^n$ , então nem sempre é possível conseguir um número de elementos de  $S$  menor do que  $n + 1$  de forma que  $x$  seja uma combinação convexa destes elementos. Por exemplo, em  $\mathbb{R}^2$ , dado  $S = \{(0, 0); (1, 0); (0, 1)\}$ ,  $\text{CONVS}$  é um triângulo. Um exemplo disso é que  $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$  está em  $\text{CONVS}$  mas não é combinação convexa de nenhuma par de elementos de  $S$ .

### 1.1.4 Simplex

#### Definição 1.11

A envolvente convexa de um número finito de elementos é chamada de **polytope**.



Quando  $S = \{x_1, \dots, x_{k+1}\}$  e  $\dim(\text{CONVS}) = k$  então  $\text{CONVS}$  é chamado de **simplex**  $k$ -dimensional e os pontos  $x_1, \dots, x_{k+1}$  são chamados de vértices de  $\text{CONVS}$ .

### Exemplo 1.1

- 1) um simplex 0-dimensional é um ponto,
- 2) um simplex 1-dimensional é um segmento,
- 3) um simplex 2-dimensional é um triângulo,
- 4) um simplex 3-dimensional é um tetraedro.

**Observação:**  $\dim\{x_1, \dots, x_{k+1}\} = \dim \text{CONV}\{x_1, \dots, x_{k+1}\}$ , pois  $\text{AFF}\{x_1, \dots, x_{k+1}\} = \text{AFF}(\text{CONV}\{x_1, \dots, x_{k+1}\})$ .

### Proposição 1.20

Sejam  $x_1, \dots, x_{k+1}$  vetores de  $V$ . Nessas condições,  $\dim\{x_1, \dots, x_{k+1}\} = k$  se, e somente se, os vetores  $x_1, \dots, x_{k+1}$  são afim independentes.

Para provarmos essa proposição, precisamos do seguinte lema:

### Lema 1.21

O conjunto  $\{x_1, \dots, x_n\}$  é a.d. se, e só se,  $\{x_2 - x_1, \dots, x_n - x_1\}$  é l.d. .

### Prova:

( $\Rightarrow$ ) Suponhamos que  $\{x_1, \dots, x_n\}$  seja a.d., logo existem escalares  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  não todos nulos tais que  $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 0$  e  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$ . Portanto  $\alpha_1 = -\sum_{i=2}^n \alpha_i$ .

Logo  $\alpha_1 \neq 0$  ou  $\alpha_{i_0} \neq 0$ , para algum  $i_0 = 2, \dots, n$ . Daí,  $\sum_{i=2}^n \alpha_i \neq 0$  ou  $\alpha_{i_0} \neq 0$ , para algum  $i_0 = 2, \dots, n$ . Assim,  $\alpha_{i_0} \neq 0$ , para algum  $i_0 = 2, \dots, n$ .

Conseqüentemente,

$$\sum_{i=2}^n \alpha_i (x_i - x_1) = \sum_{i=2}^n \alpha_i x_i - \left[ \sum_{i=2}^n \alpha_i \right] x_1 = \sum_{i=2}^n \alpha_i x_i + \alpha_1 x_1 = 0,$$

e portanto  $\{x_2 - x_1, \dots, x_n - x_1\}$  é l.d.



( $\Leftarrow$ ) Suponhamos agora que  $\{x_2 - x_1, \dots, x_n - x_1\}$  seja l.d. Logo podemos escolher escalares  $\alpha_2, \dots, \alpha_n$ , não todos nulos, tais que  $\sum_{i=2}^n \alpha_i(x_i - x_1) = 0$ .

Definindo  $\alpha_1 = -\sum_{i=2}^n \alpha_i$ , temos que

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = \sum_{i=2}^n \alpha_i x_i + \alpha_1 x_1 = \sum_{i=2}^n \alpha_i x_i - \left[ \sum_{i=2}^n \alpha_i \right] x_1 = \sum_{i=2}^n \alpha_i (x_i - x_1) = 0.$$

Além disso,  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = \alpha_1 + \sum_{i=2}^n \alpha_i = -\sum_{i=2}^n \alpha_i + \sum_{i=2}^n \alpha_i = 0$ . Como os escalares  $\alpha_2, \dots, \alpha_n$  não são todos nulos, então  $\{x_1, \dots, x_n\}$  é a.d..  $\square$

Tendo provado o lema acima, estamos prontos para provar o seguinte resultado:

**Prova da proposição 1.20:**

A prova segue da equivalência das linhas abaixo:

- (1)  $\{x_1, \dots, x_{k+1}\}$  é a.i.,
- (2)  $\{x_2 - x_1, \dots, x_{k+1} - x_1\}$  é l.i.,
- (3)  $\dim[x_2 - x_1, \dots, x_{k+1} - x_1] = k$ ,
- (4)  $\dim \text{AFF}\{x_1, \dots, x_{k+1}\} = k$  e
- (5)  $\dim\{x_1, \dots, x_{k+1}\} = k$ .

A equivalência das linhas (1) e (2) decorre do Lema 1.21, a equivalência das linhas (4) e (5) segue da definição de dimensão de um conjunto, a das linhas (2) e (3) decorre da definição de dimensão de um espaço vetorial e a equivalência das linhas (3) e (4) decorre da igualdade  $\text{AFF}\{x_1, \dots, x_{k+1}\} = x_1 + [x_2 - x_1, \dots, x_{k+1} - x_1]$ .  $\square$

Sabemos, pela Proposição 1.18, que cada ponto de um simplex pode ser escrito como combinação convexa de seus vértices. Além disso podemos provar que essa combinação é única.

**Proposição 1.22**

Se  $S = \{x_1, \dots, x_{k+1}\} \subset \mathbb{R}^n$  e  $\dim S = k$ , então cada ponto do simplex  $\text{CONVS}$  tem uma única representação como combinação linear de seus vértices.

**Prova:** De fato, se  $x_1, \dots, x_{k+1}$  são os vértices de um simplex e  $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_{k+1}$  e  $\beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_{k+1}$  são duas combinações convexas de um mesmo elemento  $x$ , então  $(\alpha_1 - \beta_1)x_1 + \dots + (\alpha_{k+1} - \beta_{k+1})x_{k+1} = 0$ .

Logo  $\gamma_1 x_1 + \dots + \gamma_{k+1} x_{k+1} = 0$ , com  $\gamma_i = \alpha_i - \beta_i$ , para  $i = 1, \dots, k+1$ . Mas  $\sum_{i=1}^{k+1} \gamma_i = \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i - \sum_{i=1}^{k+1} \beta_i = 1 - 1 = 0$ .

Portanto  $\gamma_1 = -\gamma_2 - \dots - \gamma_{k+1}$ , assim  $\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \dots + \gamma_{k+1} x_{k+1} = \gamma_2(x_2 - x_1) + \dots + \gamma_{k+1}(x_{k+1} - x_1) = 0$ .

Como  $x_1, \dots, x_{k+1}$  são os vértices de um simplex, então  $\dim\{x_1, \dots, x_{k+1}\} = k$ , logo  $x_2 - x_1, \dots, x_{k+1} - x_1$  são l.i..

Portanto  $\gamma_2 = \dots = \gamma_{k+1} = 0$ , logo  $\alpha_2 = \beta_2, \dots, \alpha_{k+1} = \beta_{k+1}$ .

Por outro lado, como  $\alpha_1 + \dots + \alpha_{k+1} = 0 = \beta_1 + \dots + \beta_{k+1}$ , então  $\alpha_1 = \beta_1$ .  $\square$

Pela demonstração desta última proposição, podemos provar que, se  $x_1, \dots, x_m$  são a.i., então cada ponto de  $\text{AFF}\{x_1, \dots, x_m\}$  pode ser representado de forma única como combinação afim de  $x_1, \dots, x_m$ .

**Definição 1.12**

Seja  $S = \text{CONV}\{x_1, \dots, x_{k+1}\}$  um simplex  $k$ -dimensional contendo  $x$ . Seja  $\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i x_i$  a representação única de  $x$  como combinação convexa dos vértices de  $S$ . Então os

números  $\alpha_1, \dots, \alpha_{k+1}$  são chamados de **coordenadas baricêntricas** de  $x$ . O ponto  $x_0 = \frac{1}{k+1}(x_1 + \dots + x_{k+1})$  é chamado de **centróide** do simplex  $S$ .

**Observação:** Usando o centróide, prova-se que um simplex tem interior relativo não vazio.

**Proposição 1.23**

Se  $S = \text{CONV}\{x_1, \dots, x_m\}$  é um simplex  $(m - 1)$ -dimensional, então  $\text{RELINT}S \neq \emptyset$ .

**Prova:** Como os pontos  $x_1, \dots, x_m$  são a.i. (são os vértices de  $S$ ), cada ponto de  $S$  tem representação única como combinação afim de  $x_1, \dots, x_m$ . Podemos então definir uma função  $f : \text{AFF}S \rightarrow \mathbb{R}^m$  da seguinte forma:

$$f(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_m x_m) := (\alpha_1, \dots, \alpha_m).$$

Veja que  $f$  leva os pontos de  $S$  em suas coordenadas baricêntricas.

Afirmção:  $f$  é contínua.

De fato, sabendo que  $\text{AFF}S = x_1 + [x_2 - x_1, \dots, x_m - x_1]$ , obtemos que  $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_m x_m = x_1 + \beta_2(x_2 - x_1) + \dots + \beta_m(x_m - x_1)$ . Daí,

$$\begin{cases} \alpha_1 &= 1 - \sum_{i=2}^m \beta_i, \\ \alpha_2 &= \beta_2, \\ \dots &\dots \\ \alpha_m &= \beta_m. \end{cases}$$

Logo  $f(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_m x_m) = (1 - \sum_{i=2}^m \beta_i, \beta_2, \dots, \beta_m)$ .

Sejam  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida por  $h(x) = x - x_1$  e  $g : [x_2 - x_1, \dots, x_m - x_1] \rightarrow \mathbb{R}^m$  definida por  $g(\beta_2(x_2 - x_1) + \dots + \beta_m(x_m - x_1)) = (1 - \sum_{i=2}^m \beta_i, \beta_2, \dots, \beta_m)$ .

Logo  $f = g \circ h|_{\text{AFF}S}$ . Como  $g$  e  $h$  são contínuas, então  $f$  também é contínua.

Consideremos  $x_0$  o centróide de  $S$ , logo  $f(x_0) = (\frac{1}{m}, \dots, \frac{1}{m})$ . Sendo  $f$  contínua, existe uma bola aberta  $B$  com centro em  $x_0$  tal que cada função coordenada de  $f$  é positiva em todo ponto de  $B$ .

Segue que cada ponto de  $B \cap \text{AFF}S$  é uma combinação convexa dos vértices de  $S$ , ou seja,  $B \cap \text{AFF}S \subset S$ . Portanto,  $x_0 \in \text{RELINT}S$ .  $\square$

Uma conseqüência da Proposição 1.23 é o seguinte teorema:

**Teorema 1.24**

Todo conjunto convexo  $k$ -dimensional  $S \subset \mathbb{R}^n$  tem interior relativo não vazio.

**Idéia da Prova:** Primeiro, precisamos mostrar que existem  $x_1, \dots, x_{k+1}$  elementos a.i. de  $S$ . Logo, da demonstração da Proposição 1.23, existe uma bola  $B$  centrada no centróide  $x_0$  do simplex  $\text{CONV}\{x_1, \dots, x_{k+1}\}$  tal que  $B \cap \text{AFF}\{x_1, \dots, x_{k+1}\} \subset \text{CONV}\{x_1, \dots, x_{k+1}\}$ .

Como  $B \cap \text{AFF}\{x_1, \dots, x_{k+1}\} \subset \text{CONV}\{x_1, \dots, x_{k+1}\}$  e  $\text{AFF}\{x_1, \dots, x_{k+1}\} = \text{AFF}(\text{CONV}\{x_1, \dots, x_{k+1}\}) = \text{AFF}S$ , então  $x_0$  está no interior relativo de  $S$ , provando o teorema.  $\square$

**Proposição 1.25**

- (i)  $x \in \text{CONV}S$  se, e somente se  $x$  é elemento de um simplex cujos vértices estão em  $S$ .
- (ii) Se  $x \in \text{CONV}S$ , então  $x$  é ponto do interior relativo de um simplex cujos vértices estão em  $S$ .

**Prova do ítem (ii):** De fato, se  $x \in S$  então  $x$  está no interior relativo do simplex  $\{x\}$  cujo único vértice está em  $S$ . Se  $x \notin S$  e  $\dim S = k$ , então  $S$  é subconjunto de um subespaço vetorial de dimensão  $k$  ou  $k + 1$ , logo  $x$  é a combinação convexa de no máximo  $k + 2$  elementos a.i. de  $S$ , pela demonstração do teorema de Caratheodory.

Sejam  $x_1, \dots, x_m$  os elementos a.i. de  $S$  dos quais  $x$  é uma combinação convexa. Como  $x_1, \dots, x_m$  são a.i., então  $\{x_1, \dots, x_m\}$  são os vértices de um simplex e  $x = \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i$ , com  $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$  e  $\alpha_i > 0$  para todo  $i = 1, \dots, m$ .

Afirmo que  $x \in \text{RELINT}(\text{CONV}\{x_1, \dots, x_m\})$ . Com efeito, considerando a função  $f : (\text{AFF}\{x_1, \dots, x_m\}) \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida por  $f(\beta_1 x_1 + \dots + \beta_m x_m) = (\beta_1, \dots, \beta_m)$ , que é contínua, existe uma bola aberta  $B(x, \varepsilon)$  tal que todo elemento de  $B(x, \varepsilon) \cap \text{AFF}\{x_1, \dots, x_m\}$  tem imagem com coordenadas positivas. Logo

$$B(x, \varepsilon) \cap \text{AFF}\{x_1, \dots, x_m\} \subset \text{CONV}\{x_1, \dots, x_m\}.$$

Portanto  $x \in \text{RELINT}(\text{CONV}\{x_1, \dots, x_m\})$ . Mas  $\dim(\text{CONV}\{x_1, \dots, x_m\}) = m - 1 \leq k + 1$ , pois  $m \leq k + 2$ . Por outro lado,  $\dim S = k$ , logo  $m - 1 \leq k$ , ou seja, a dimensão do simplex é menor ou igual à dimensão do conjunto original.  $\square$

**Exemplo 1.2**

Se  $x \in \text{RELINT}(\text{CONVS})$ , isso não implica que  $x$  está no interior relativo de algum simplex com vértices em  $S$  e com mesma dimensão de  $S$ . Na figura 1.2,  $x$  está no interior relativo de  $\text{CONVS}$ , mas não está no interior relativo de nenhum simplex com vértices em  $S$  e com mesma dimensão de  $S$ .

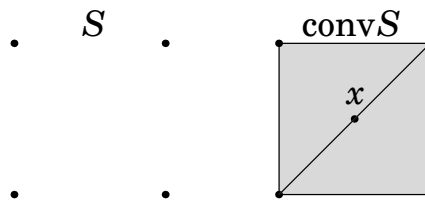


Figura 1.1: figura do exemplo 1.2.

**Teorema 1.26**

Seja  $S$  um aberto de um espaço vetorial normado  $V$ , então  $\text{CONVS}$  é aberto.

**Prova:** Como  $S \subset \text{CONVS}$  então  $\text{INT}(S) \subset \text{INT}(\text{CONVS})$ .

Mas  $S = \text{INT}(S)$ , pois  $S$  é aberto. Logo  $S \subset \text{INT}(\text{CONVS})$ .

Por outro lado,  $\text{CONVS}$  é convexo, logo  $\text{INT}(\text{CONVS})$  também é convexo. Assim,  $S \subset \text{INT}(\text{CONVS})$  com  $\text{INT}(\text{CONVS})$  convexo, logo  $\text{CONVS} \subset \text{INT}(\text{CONVS})$ . Portanto  $\text{CONVS}$  é aberto.  $\square$

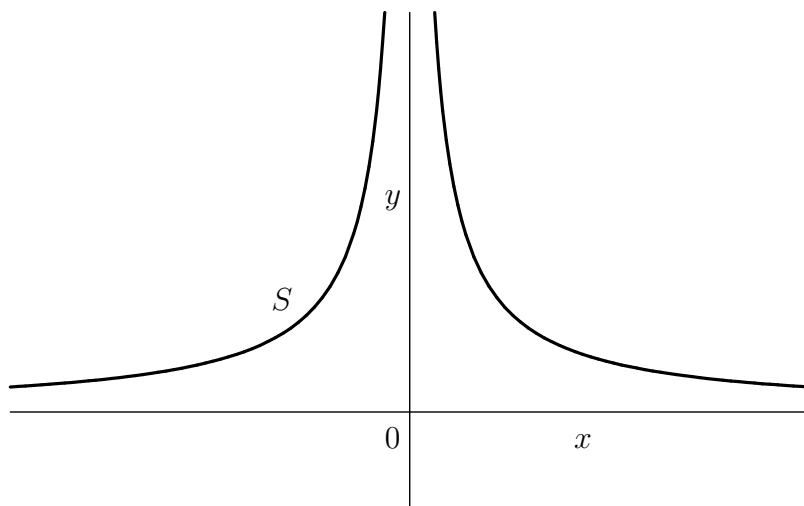
**Exemplo 1.3 ( $S$  fechado  $\not\Rightarrow$   $\text{CONVS}$  fechado.)**

Seja  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 y^2 = 1 \text{ e } y > 0\}$ .

i)  $S$  é fechado:

De fato, sejam  $S_1 = f^{-1}(\{1\})$ , onde  $f$  é a função contínua  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x, y) = x^2 y^2$ , e  $S_2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ .

Como  $S_1$  é a imagem inversa de um conjunto fechado por uma função contínua e  $S_2$  é o produto cartesiano de dois conjuntos fechados, então  $S = S_1 \cap S_2$ ,  $S$  é fechado.



ii)  $\text{CONVS}$  não é fechado:

$\text{CONVS} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y > 0\}$  que não é fechado.

### Proposição 1.27

Seja  $S$  compacto, então  $\text{CONVS}$  é compacto.

**Prova:** Definindo

$$f : \mathbb{R}^{n+1} \times \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{(n+1)\text{-vezes}} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

por

$$f((\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}); (x_1^1, \dots, x_n^1); \dots; (x_1^{n+1}, \dots, x_n^{n+1})) = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i (x_1^i, \dots, x_n^i),$$

$f$  é contínua e  $f(B \times S \times \dots \times S) \subset \mathbb{R}^n$  é compacto, sendo  $B := \{(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} | \alpha_1 + \dots + \alpha_{n+1} = 1 \text{ e } \alpha_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, n+1\}$  um compacto em  $\mathbb{R}^{n+1}$  (pois é limitado e fechado).

Como  $\text{CONVS} = f(B \times S \times \dots \times S)$ , pelo teorema de Caratheodory, então  $\text{CONVS}$  é compacto.  $\square$

## 1.2 Hiperplanos suporte e semi-espacos suporte

### 1.2.1 Hiperplanos e semi-espacos

Já foi visto anteriormente que, em um espaço vetorial  $V$  de dimensão  $n$ , um **hiperplano** é o transladado de um subespaço vetorial de dimensão  $n-1$ , ou seja, um hiperplano é um subespaço afim de dimensão  $n-1$ . A respeito dos hiperplanos de  $V$ , cabem aqui duas observações:

1.  $\mathcal{H}$  é um hiperplano de  $V$  e  $h \in \mathcal{H} \Leftrightarrow \mathcal{H} - h$  é um subespaço vetorial de dimensão  $n-1$ ;

2. se  $h, k \in \mathcal{H}$  e  $\mathcal{H}$  é um hiperplano, então  $\mathcal{H} - h = \mathcal{H} - k$ .

**Definição 1.13**

Seja  $\mathcal{H}$  um hiperplano de um espaço vetorial  $V$ . Um **semi-espaço** de  $V$  é um conjunto  $S$  da forma:

$$S = \{h + \alpha v_0 \mid h \in \mathcal{H} \text{ e } \alpha \geq 0\}$$

sendo  $v_0 \notin \mathcal{H} - h_0$  um vetor fixado, com  $h_0 \in \mathcal{H}$  um outro vetor fixado. O hiperplano  $\mathcal{H}$  é chamado de **face do semi-espaço**  $S$ .

Se  $\mathcal{H}$  é um hiperplano com  $h_0 \in \mathcal{H}$ , então  $V_0 = \mathcal{H} - h_0$  é um subespaço vetorial de  $V$  com  $\dim(V_0) = n - 1$ . Logo  $\exists v_0 \notin V_0$  e portanto o conjunto  $S$  está bem definido e não é vazio.

Além disso, um hiperplano  $\mathcal{H}$  determina exatamente dois semi-espaços cuja interseção é o próprio  $\mathcal{H}$ , como mostramos na próxima proposição.

**Proposição 1.28**

Um hiperplano  $\mathcal{H}$  de  $V$  determina exatamente dois semi-espaços distintos  $S_1$  e  $S_2$  tais que  $S_1 \cap S_2 = \mathcal{H}$  e  $S_1 \cup S_2 = V$ .

**Prova:** A prova está dividida em quatro passos:

Passo 1: A existência de dois semi-espaços distintos.

Sabemos, pela definição, que  $S_1 = \{h + \alpha v_0 \mid h \in \mathcal{H} \text{ e } \alpha \geq 0\}$  e  $S_2 = \{h + \alpha(-v_0) \mid h \in \mathcal{H} \text{ e } \alpha \geq 0\}$  são dois semi-espaços determinados por  $\mathcal{H}$ , sendo  $v_0 \notin V_0 = \mathcal{H} - h_0$  e  $h_0 \in \mathcal{H}$  dois vetores fixados.

Além disso,  $S_1$  e  $S_2$  são distintos, pois  $h_0 + v_0 \in S_1 \setminus S_2$ . De fato, se  $h_0 + v_0 \in S_2$ , então  $h_0 + v_0 = h - \alpha v_0$ , para algum  $h \in \mathcal{H}$  e algum  $\alpha \geq 0$ . Assim  $(1 + \alpha)v_0 = h - h_0 \in \mathcal{H} - h_0$ , e disso segue que  $\alpha = -1$ , pois  $v_0 \notin V_0$ . Como  $\alpha = -1$ , então  $h_0 + v_0 = h - v_0$ , o que implica em  $2v_0 = h - h_0 \in \mathcal{H} - h_0 = V_0$ , ou seja,  $v_0 \in V_0$ , o que é uma contradição.

Portanto  $h_0 + v_0 \in S_1 \setminus S_2$ , analogamente  $h_0 - v_0 \in S_2 \setminus S_1$ , e os dois semi-espaços são distintos.

Passo 2: A interseção de  $S_1$  com  $S_2$  é igual a  $\mathcal{H}$ .

Suponhamos  $x \in S_1 \cap S_2$ , logo  $x = h_1 + \alpha_1 v_0 = h_2 - \alpha_2 v_0$ , com  $h_1, h_2 \in \mathcal{H}$  e  $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$ . Assim,  $x - h_0 = (h_1 - h_0) + \alpha_1 v_0 = (h_2 - h_0) - \alpha_2 v_0$ , ou seja,  $(h_1 - h_0) + \alpha_1 v_0 = (h_2 - h_0) - \alpha_2 v_0$ .

Mas disso sai que  $(\alpha_1 + \alpha_2)v_0 = (h_2 - h_0) - (h_1 - h_0)$ . Como  $h_2 - h_0, h_1 - h_0 \in V_0$ , então  $(\alpha_1 + \alpha_2)v_0 \in V_0$ . Logo  $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ .

Portanto  $\alpha_1 = -\alpha_2 = 0$  e  $x = h_1 = h_2 \in \mathcal{H}$ . Concluimos que  $S_1 \cap S_2 \subset \mathcal{H}$ .

Por outro lado,  $\mathcal{H} \subset S_1 \cap S_2$ , logo  $\mathcal{H} = S_1 \cap S_2$ .

Passo 3: A união de  $S_1$  com  $S_2$  é igual a  $V$ .

Sejam  $v \in V$ ,  $\mathcal{H} = h_0 + V_0$ . Suponhamos que  $h_0 \in V_0$ . Logo  $\mathcal{H} = V_0 + h_0 = V_0$ . Neste caso, como  $\dim(V_0) = n - 1$  e  $v_0 \notin V_0$ , então  $V_0 + [v_0] = V$ . Assim, existem  $u \in V_0$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ , tais que  $v = u + \alpha v_0$ . Como  $V_0 = \mathcal{H}$ , então  $u \in \mathcal{H}$ , daí  $v \in \{h + \alpha v_0 \mid h \in \mathcal{H} \text{ e } \alpha \in \mathbb{R}\} = S_1 \cup S_2$ .

Suponhamos agora que  $h_0 \notin V_0$ . Como  $V = V_0 + [h_0]$ , então existem  $u \in V_0$  e  $\beta \in \mathbb{R}$  tais que  $u + \beta h_0 = v_0$ . Sabendo que  $v_0 \notin V_0$ , obtemos que  $\beta \neq 0$ , logo  $\frac{1}{\beta}u + h_0 = \frac{1}{\beta}v_0 \in V_0 + h_0 = \mathcal{H}$ .

Por outro lado, existem  $w \in V_0$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$  tais que  $w + \alpha v_0 = v$ . Logo

$$v = w + \alpha v_0 = w + \left( \alpha - \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta} \right) v_0 = w + \frac{1}{\beta} v_0 + \gamma v_0 = w + \frac{1}{\beta} u + h_0 + \gamma v_0.$$

Mas  $w + \frac{1}{\beta} u \in V_0$ , logo  $w + \frac{1}{\beta} u + h_0 \in \mathcal{H}$  e  $v \in S_1 \cup S_2$ .

Passo 4: Não existem outros semi-espços diferentes de  $S_1$  e  $S_2$  da forma  $\{h + \alpha v_1 \mid h \in \mathcal{H} \text{ e } \alpha \geq 0\}$ , com  $v_1 \notin V_0$ .

Suponhamos  $S_3 = \{h + \alpha v_1 \mid h \in \mathcal{H} \text{ e } \alpha \geq 0\}$  um semi-espço, com  $v_1 \notin V_0$ , e seja  $u \in S_3$  com  $u \notin \mathcal{H}$ . Como  $V = S_1 \cup S_2$ , então  $u \in S_1$  ou  $u \in S_2$ .

Suponhamos também que  $u \in S_1$ . Neste caso vale que  $u = h + \alpha v_0 = k + \beta v_1$ , com  $h, k \in \mathcal{H}$  e  $\alpha, \beta > 0$ . Logo  $v_1 = \frac{h-k}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta} v_0$ . Como  $h, k \in V_0 + h_0$ , então  $\frac{h-k}{\beta} \in V_0$ .

Seja  $w = l + \gamma v_1 \in S_3$  um vetor qualquer, com  $l \in \mathcal{H}$  e  $\gamma \geq 0$ . Substituindo  $v_1$ , obtemos que

$$w = l + \gamma \left( \frac{h-k}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta} v_0 \right) = l_0 + h_0 + \frac{\gamma}{\beta} (h-k) + \frac{\gamma\alpha}{\beta} v_0 = h_1 + \frac{\gamma\alpha}{\beta} v_0,$$

com  $l = l_0 + h_0$ ,  $l_0 \in V_0$  e  $h_1 = l_0 + \frac{\gamma}{\beta} (h-k) + h_0 \in \mathcal{H}$ . Logo  $w \in S_1$ .

Assim, provamos que, se  $u \in S_1 \cap S_3$ , então  $S_3 \subset S_1$ . Analogamente prova-se que  $S_1 \subset S_3$ . Da mesma forma, podemos provar que, se  $u \in S_2 \cap S_3$ , então  $S_2 = S_3$ .  $\square$

### Definição 1.14

Dizemos que dois hiperplanos são **paralelos** quando um é o transladado do outro. Se  $\mathcal{H}$  e  $\mathcal{K}$  são dois hiperplanos paralelos, denotamos por  $\mathcal{H} // \mathcal{K}$ .

## 1.2.2 Caracterização dos hiperplanos e semi-espços de $\mathbb{R}^n$

Sabemos que o produto interno usual de  $\mathbb{R}^n$  dá origem à norma e à distância usuais. Dados  $u, v \in \mathbb{R}^n$ , denotaremos por  $\langle u, v \rangle$  ao produto interno usual de  $u$  com  $v$ , por  $\|u\|$  à norma usual de  $u$  e por  $d(u, v)$  à distância usual entre  $u$  e  $v$ .

### Proposição 1.29

Se  $\mathcal{H}$  é um hiperplano de  $\mathbb{R}^n$ , então  $\mathcal{H}$  é da forma  $\mathcal{H} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x - a, v \rangle = 0\}$ , para certos vetores  $a, v \in \mathbb{R}^n$ .

#### Observações:

1. O vetor  $v$  é chamado de **vetor normal** ao hiperplano  $\mathcal{H}$ .
2. Os vetores  $a$  e  $v$  determinam o hiperplano  $\mathcal{H}$ .
3. O vetor  $a$  está em  $\mathcal{H}$ .
4. Se  $b \in \mathcal{H}$ , então  $\mathcal{H} = \{x \mid \langle x - a, v \rangle = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x - b, v \rangle = 0\}$ .
5. O hiperplano  $\mathcal{H}$  é chamado de hiperplano normal a  $v$  que passa por  $a$ , sendo que dados os vetores  $a$  e  $v$  existe um único hiperplano normal a  $v$  passando por  $a$ .

**Prova:** Passo 1: Demonstrar que  $\mathcal{H} = \{x \mid \langle x - a, v \rangle = 0\}$  é um hiperplano.

Seja  $\{v_1, \dots, v_{n-1}, v\}$  uma base ortogonal de  $\mathbb{R}^n$ . Afirmo que  $\mathcal{H} = a + [v_1, \dots, v_{n-1}]$ .

De fato,

$$x \in \mathcal{H} \Leftrightarrow \langle x - a, v \rangle = 0 \Leftrightarrow x - a = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i v_i \Leftrightarrow x = a + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i v_i \Leftrightarrow x \in a + [v_1, \dots, v_{n-1}].$$

Passo 2: Provar que todo hiperplano  $\mathcal{H}$  de  $\mathbb{R}^n$  é da forma  $\mathcal{H} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x - a, v \rangle = 0\}$ , para certos vetores  $a \in \mathcal{H}$  e  $v \in \mathbb{R}^n$ .

De fato, sejam  $\mathcal{H}$  um hiperplano de  $\mathbb{R}^n$  e  $a \in \mathcal{H}$ , então  $\mathcal{H} - a$  é um subespaço vetorial de dimensão  $n - 1$  de  $\mathbb{R}^n$ . Logo existe uma base ortogonal  $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$  de  $\mathcal{H} - a$ . Seja então  $v \in V$  tal que  $\{v_1, \dots, v_{n-1}, v\}$  forme uma base ortogonal de  $\mathbb{R}^n$ . Afirmamos que  $\mathcal{H} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x - a, v \rangle = 0\}$ .

$$x \in \mathcal{H} \Leftrightarrow x - a \in \mathcal{H} - a \Leftrightarrow x - a = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i v_i \Leftrightarrow \langle x - a, v \rangle = 0.$$

□

**Observação:**  $\mathcal{H} = a + [v]^\perp$ , sendo  $[v]^\perp$  o subespaço vetorial ortogonal ao subespaço gerado por  $v$ .

Uma vez que mostramos novas formas de escrever um hiperplano de  $\mathbb{R}^n$ , a seguinte proposição apresenta uma nova forma de caracterizar um semi-espaço de  $\mathbb{R}^n$ .

### Proposição 1.30

Se  $\mathcal{H} = a + [v]^\perp$  é um hiperplano de  $\mathbb{R}^n$ , então os semi-espaços determinados por  $\mathcal{H}$  são da forma:

$$\begin{cases} S_1 = \{x \mid \langle x - a, v \rangle \geq 0\}, \\ S_2 = \{x \mid \langle x - a, v \rangle \leq 0\}. \end{cases}$$

**Prova:** Sabemos que  $v \notin [v]^\perp = \mathcal{H} - a$ , logo

$$S_1 = \{x \mid x = h + \alpha v, \text{ com } \alpha \geq 0 \text{ e } h \in \mathcal{H}\} \quad \text{e} \quad S_2 = \{x \mid x = h + \alpha v, \text{ com } \alpha \leq 0 \text{ e } h \in \mathcal{H}\}.$$

Afirmamos que  $S_1 = \{x \mid \langle x - a, v \rangle \geq 0\}$  e  $S_2 = \{x \mid \langle x - a, v \rangle \leq 0\}$ . De fato, se  $x \in S_1$  então  $x = (a + u) + \alpha v$ , com  $\alpha \geq 0$  e  $u \in [v]^\perp$ . Assim,  $\langle x - a, v \rangle = \langle u, v \rangle + \alpha \|v\| = \alpha \|v\| \geq 0$ . Logo  $S_1 \subset \{x \mid \langle x - a, v \rangle \geq 0\}$ .

Por outro lado, considerando  $\{v_1, \dots, v_{n-1}, v\}$  uma base ortogonal de  $\mathbb{R}^n$ , com  $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$  base de  $[v]^\perp$ , obtemos que, se  $\langle x - a, v \rangle \geq 0$ , então  $x - a = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i v_i + \alpha v$ , com  $\alpha \geq 0$ . Assim  $x - a = k + \alpha v$ , com  $\alpha \geq 0$  e  $k \in [v]^\perp$ , conseqüentemente,  $x = a + k + \alpha v = h + \alpha v$ , com  $\alpha \geq 0$ ,  $h = a + k \in \mathcal{H}$ . Portanto  $\{x \mid \langle x - a, v \rangle \geq 0\} \subset S_1$ .

Analogamente para  $S_2$ . □

### Definição 1.15

Seja  $S = \{x \mid \langle x - a, v \rangle \geq 0\}$  um semi-espaço, então o vetor  $v$  é chamado de **vetor normal interior** a  $S$  e o vetor  $-v$  é chamado de **vetor normal exterior** a  $S$ .

**Observações:**

1. Se  $v$  é um vetor normal ao semi-espaço  $S$ , então  $v$  é normal à face de  $S$ .
2. Se  $v$  é um vetor normal exterior ao semi-espaço  $S$ , então  $S = \{x \mid \langle x - a, v \rangle \leq 0\}$ .
3. Se  $v$  é um vetor normal interior ao semi-espaço  $S$ , então  $S = \{x \mid \langle x - a, v \rangle \geq 0\}$ .

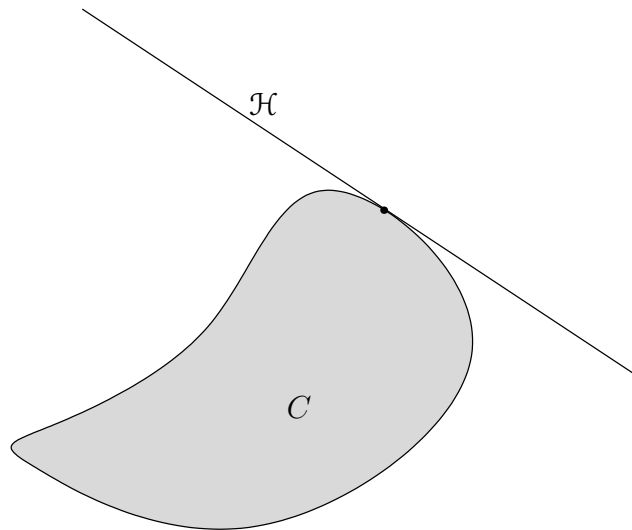
**1.2.3 Hiperplano suporte e semi-espaço suporte****Definição 1.16**

Seja  $C$  um subconjunto não vazio de  $\mathbb{R}^n$ . Um **hiperplano suporte** de  $C$  é um hiperplano  $\mathcal{H}$  que satisfaz:

1.  $\mathcal{H} \cap \overline{C} \neq \emptyset$  e
2.  $\overline{C} \subset S_1$  ou  $\overline{C} \subset S_2$ ,

sendo  $S_1$  e  $S_2$  os subespaços de  $\mathbb{R}^n$  determinados por  $\mathcal{H}$ .

Dizemos que  $\mathcal{H}$  é um "**hiperplano suporte de  $C$  em  $c$** " quando  $\mathcal{H}$  é um hiperplano suporte de  $C$  e  $c \in \mathcal{H} \cap \overline{C}$ .



Queremos mostrar que todo subconjunto não vazio e limitado de  $\mathbb{R}^n$  possui, para cada direção  $v$ , um hiperplano suporte da forma  $a + [v]^\perp$ . Além disso, queremos que o número máximo de hiperplanos suporte de um subconjunto limitado e não vazio de  $\mathbb{R}^n$ , ortogonais a uma dada direção, seja dois. Para provarmos estes resultados precisamos de alguns outros.

**Proposição 1.31**

Se  $\mathcal{H}$  e  $\mathcal{K}$  são hiperplanos paralelos, então existe um vetor  $v$  normal a  $\mathcal{H}$  e a  $\mathcal{K}$  tal que,

$$h \in \mathcal{H} \text{ e } k \in \mathcal{K} \implies \begin{cases} \mathcal{H} \subset \{x \mid \langle x - k, v \rangle \geq 0\}; \\ \mathcal{K} \subset \{x \mid \langle x - h, v \rangle \leq 0\}. \end{cases}$$



**Prova:** Como  $\mathcal{H}$  é um hiperplano, se  $h \in \mathcal{H}$  então  $\mathcal{H} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x - h, v' \rangle = 0\}$  para algum  $v' \in \mathbb{R}^n$ . Da mesma forma, sendo  $\mathcal{K} // \mathcal{H}$  e  $k \in \mathcal{K}$ ,  $\mathcal{K} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x - k, v' \rangle = 0\}$ .

Sejam os semi-espaços  $S_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x - h, v' \rangle \geq 0\}$  e  $S_2 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x - h, v' \rangle \leq 0\}$ . Como  $S_1 \cup S_2 = \mathbb{R}^n$ , então  $k \in S_1$  ou  $k \in S_2$ .

Se  $k \in S_1$ , escolhamos  $v = v'$ , se  $k \notin S_1$ , tomemos  $v = -v'$ . Em qualquer dos dois casos,  $k \in S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x - h, v \rangle \geq 0\}$  e  $v$  é um vetor normal a  $\mathcal{H}$  e a  $\mathcal{K}$ .

Basta mostrar que  $\mathcal{K} \subset S$  e  $\mathcal{H} \subset S' = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x - k, v \rangle \leq 0\}$ .

Tomemos  $x \in \mathcal{K} = k + [v]^\perp$ , logo  $x = k + u$ , para algum  $u \in [v]^\perp$ . Assim,  $\langle x - h, v \rangle = \langle k + u - h, v \rangle = \langle k - h, v \rangle + \langle u, v \rangle = \langle k - h, v \rangle \geq 0$ , pois  $k \in S$ . Concluimos que  $\mathcal{K} \subset S$ .

Como  $\langle k - h, v \rangle \geq 0$ , logo  $\langle h - k, v \rangle \leq 0$ . Portanto  $h \in S'$ , e podemos provar que  $\mathcal{H} \subset S'$  de forma análoga à feita para  $\mathcal{K}$ .  $\square$

### Proposição 1.32

Se  $\mathcal{H}$  e  $\mathcal{K}$  são hiperplanos paralelos e  $v \perp \mathcal{H}$ , então  $\exists \alpha \in \mathbb{R}$  tal que  $\mathcal{H} = \mathcal{K} + \alpha v$  e  $d(\mathcal{H}, \mathcal{K}) = |\alpha| \cdot \|v\|$ .

**Prova:**

Passo 1:  $\exists \alpha \in \mathbb{R}$  tal que  $\mathcal{H} = \mathcal{K} + \alpha v$ .

Como  $\mathcal{H} // \mathcal{K}$ , então  $\mathcal{H} = h + [v]^\perp$  e  $\mathcal{K} = k + [v]^\perp$ , para certos  $h, k \in \mathbb{R}^n$ . Mas  $h = w + \beta v$  e  $k = q + \gamma v$ , para algum  $w$  e algum  $q$  em  $[v]^\perp$  e certos  $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ , pois  $[v] + [v]^\perp = \mathbb{R}^n$ . Portanto,

$$\begin{cases} \mathcal{H} = w + \beta v + [v]^\perp = \beta v + [v]^\perp, \\ \mathcal{K} = q + \gamma v + [v]^\perp = \gamma v + [v]^\perp. \end{cases}$$

Segue que, se  $\alpha = \gamma - \beta$ , então  $\mathcal{H} + \alpha v = \beta v + [v]^\perp + \alpha v = (\beta + \gamma - \beta)v + [v]^\perp = \gamma v + [v]^\perp = \mathcal{K}$ .

Passo 2:  $d(\mathcal{H}, \mathcal{K}) = |\alpha| \cdot \|v\|$ .

Por definição,  $d(\mathcal{H}, \mathcal{K}) = \inf\{d(x, y) \mid x \in \mathcal{H} \text{ e } y \in \mathcal{K}\}$ .

Sejam  $x \in \mathcal{H}$  e  $y \in \mathcal{K}$ , então  $y = h_1 + \alpha v$  para algum  $h_1 \in \mathcal{H}$ . Já que  $[d(x, y)]^2 = [d(x, h_1 + \alpha v)]^2 = \|x - h_1 - \alpha v\|^2 = \langle x - h_1 - \alpha v, x - h_1 - \alpha v \rangle = \|x - h_1\|^2 + \alpha^2 \|v\|^2$ . Obtemos que, se  $[d(x, y)]^2 \geq |\alpha|^2 \cdot \|v\|^2$ , então  $d(x, y) \geq |\alpha| \cdot \|v\|$ , quaisquer que sejam  $x \in \mathcal{H}$  e  $y \in \mathcal{K}$ .

Mas  $d(x, x + \alpha v) = \|x - x - \alpha v\| = |\alpha| \cdot \|v\|$ . Portanto  $d(\mathcal{H}, \mathcal{K}) = |\alpha| \cdot \|v\|$ .  $\square$

### Definição 1.17

Sejam  $\mathcal{H} = h + [v]^\perp$  e  $\mathcal{K} = k + [v]^\perp$  dois hiperplanos paralelos e  $v$  tal que

$$\mathcal{K} \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x - h, v \rangle \geq 0\} = S_1 \quad \text{e} \quad \mathcal{H} \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x - k, v \rangle \leq 0\} = S_2.$$

Dizemos que um hiperplano  $\mathcal{R}$  está entre os hiperplanos  $\mathcal{H}$  e  $\mathcal{K}$  quando  $\mathcal{R} // \mathcal{H}$  e  $\mathcal{R} \subset S_1 \cap S_2$ . Neste caso, denotamos por  $\mathcal{H} * \mathcal{R} * \mathcal{K}$ .

### Proposição 1.33

Se  $\mathcal{H} * \mathcal{R} * \mathcal{K}$ , então  $d(\mathcal{H}, \mathcal{K}) = d(\mathcal{H}, \mathcal{R}) + d(\mathcal{R}, \mathcal{K})$ .

**Prova:** Consideremos  $v$  um vetor tal que  $\mathcal{H} = h + [v]^\perp$ ,  $\mathcal{K} = k + [v]^\perp$ ,  $\mathcal{H} \subset S_1 = \{x \mid \langle x - k, v \rangle \geq 0\}$ ,  $\mathcal{K} \subset S_2 = \{x \mid \langle x - h, v \rangle \leq 0\}$  e  $\mathcal{R} = r + [v]^\perp \subset S_1 \cap S_2$ .

Sejam também  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tais que  $\mathcal{R} = \mathcal{H} + \alpha v = \mathcal{K} + \beta v$ .

Afirmção 1:  $\alpha \geq 0$ .

De fato, se  $x \in \mathcal{R}$ , então  $x \in \mathcal{H} + \alpha v$  e  $x \in S_1$ . Logo  $x = h_1 + \alpha v$ , com  $h_1 \in \mathcal{H}$ , e  $\langle x - h, v \rangle \geq 0$ .

Assim,  $\langle h_1 + \alpha v - h, v \rangle = \alpha \cdot \|v\|^2 \geq 0$ . Portanto  $\alpha \geq 0$ .

Afirmção 2:  $\beta \leq 0$ .

A prova é análoga à feita na afirmação anterior.

Como  $\mathcal{R} = \mathcal{H} + \alpha v$  e  $\alpha \geq 0$ , então  $d(\mathcal{H}, \mathcal{R}) = \alpha \|v\|$ . Analogamente,  $d(\mathcal{K}, \mathcal{R}) = -\beta \|v\|$ .

Mas, como  $\mathcal{R} = \mathcal{K} + \beta v$ , então  $\mathcal{K} = \mathcal{R} - \beta v = \mathcal{H} + \alpha v - \beta v$ . Assim,  $d(\mathcal{H}, \mathcal{K}) = |\alpha - \beta| \cdot \|v\| = \alpha \|v\| - \beta \|v\| = d(\mathcal{H}, \mathcal{R}) + d(\mathcal{R}, \mathcal{K})$ .  $\square$

### Lema 1.34

Sejam  $\mathcal{H}$ ,  $\mathcal{K}$  e  $\mathcal{L}$  hiperplanos paralelos passando pelos pontos  $h$ ,  $k$  e  $l$ , respectivamente. Se existe um vetor não nulo  $v$ , ortogonal a  $\mathcal{H}$ ,  $\mathcal{K}$  e  $\mathcal{L}$ , e tal que  $\langle k - h, v \rangle \geq 0$  e  $\langle k - l, v \rangle \leq 0$ , então  $\mathcal{H} * \mathcal{K} * \mathcal{L}$ .

### Teorema 1.35

Seja  $C$  um subconjunto limitado de  $\mathbb{R}^n$ ,  $C \neq \emptyset$ . Então, para cada vetor  $v \neq 0$ , existe um hiperplano suporte de  $C$  ortogonal a  $v$ . Dado  $v \neq 0$ , o número máximo de hiperplanos suporte de  $C$  perpendiculares a  $v$  é 2.

**Prova:** A demonstração está dividida em quatro passos.

Passo 1:

Seja  $v \neq 0$  um vetor qualquer e, para cada  $x \in \overline{C}$ , definamos o hiperplano  $\mathcal{H}_x := \{y \mid \langle y - x, v \rangle = 0\}$ . Dados dois pontos  $x, y \in \overline{C}$ , afirmamos que  $d(\mathcal{H}_x, \mathcal{H}_y) = |\langle x - y, v \rangle|$ .

De fato, seja  $\alpha \geq 0$  tal que  $\mathcal{H}_y = \mathcal{H}_x + \alpha v$ . Como  $\mathcal{H}_x = x + [v]^\perp$ , segue que  $\mathcal{H}_y = x + \alpha v + [v]^\perp = y + [v]^\perp$ . Logo  $x + \alpha v = y + w$ , para algum  $w \in [v]^\perp$ . Assim  $\langle x - y, v \rangle = \langle -\alpha v + w, v \rangle = -\alpha \|v\|$ . Portanto,  $d(\mathcal{H}_x, \mathcal{H}_y) = |\alpha| \cdot \|v\| = |\langle x - y, v \rangle|$ .

Passo 2:

Seja  $f : \overline{C} \times \overline{C} \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por  $f(x, y) = d(\mathcal{H}_x, \mathcal{H}_y)$ . Como a função  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $g(x, y) = x - y$  é contínua e a função produto interno também é contínua, então a função  $f(x, y) = \langle x - y, v \rangle = d(\mathcal{H}_x, \mathcal{H}_y)$  é contínua.

Passo 3:

Como  $f$  é contínua e o conjunto  $\overline{C} \times \overline{C}$  é compacto (limitado e fechado em  $\mathbb{R}^{2n}$ ), então  $f$  assume um valor de máximo em  $\overline{C} \times \overline{C}$ , ou seja, existem  $x_v, y_v \in \overline{C}$  tais que  $d(\mathcal{H}_{x_v}, \mathcal{H}_{y_v}) = \max \{d(\mathcal{H}_x, \mathcal{H}_y) \mid x, y \in \overline{C}\}$ .

Afirmamos que os hiperplanos  $\mathcal{H}_{x_v}$  e  $\mathcal{H}_{y_v}$  são hiperplanos suporte de  $C$  e provamos isso apenas para  $\mathcal{H}_{x_v}$ .

Sabemos que  $y_v \in \{x \mid \langle x - x_v, v \rangle \geq 0\}$  ou  $y_v \in \{x \mid \langle x - x_v, v \rangle \leq 0\}$ . Suponhamos que  $y_v \in \{x \mid \langle x - x_v, v \rangle \geq 0\}$  (o outro caso é análogo) e seja  $z \in \overline{C}$  um elemento qualquer. Afirmo que  $z \in \{x \mid \langle x - x_v, v \rangle \geq 0\}$ .

Suponhamos, por absurdo, que  $z \notin \{x \mid \langle x - x_v, v \rangle \geq 0\}$ , logo  $\langle z - x_v, v \rangle < 0$ .

Consideremos então o hiperplano  $\mathcal{H}_z$ . Mas  $\langle x_v - z, v \rangle > 0$  e  $\langle x_v - y_v, v \rangle \leq 0$ , logo  $x_v \in \{x \mid \langle x - z, v \rangle \geq 0\} \cap \{x \mid \langle x - y_v, v \rangle \leq 0\}$  e, pelo Lema 1.34,  $\mathcal{H}_{y_v} * \mathcal{H}_{x_v} * \mathcal{H}_z$ , o que implica em  $d(\mathcal{H}_{y_v}, \mathcal{H}_z) = d(\mathcal{H}_{y_v}, \mathcal{H}_{x_v}) + d(\mathcal{H}_{x_v}, \mathcal{H}_z)$ . Como  $d(\mathcal{H}_{x_v}, \mathcal{H}_z) > 0$ , pois  $\mathcal{H}_z \neq \mathcal{H}_{x_v}$ , então  $d(\mathcal{H}_{y_v}, \mathcal{H}_z) > d(\mathcal{H}_{y_v}, \mathcal{H}_{x_v})$ , o que é uma contradição pois a distância  $d(\mathcal{H}_{y_v}, \mathcal{H}_{x_v})$  é máxima.

Assim  $\overline{C} \subset \{x \mid \langle x - x_v, v \rangle \geq 0\}$  e  $\mathcal{H}_{x_v}$  é um hiperplano suporte de  $C$ . Analogamente prova-se que  $\overline{C} \subset \{x \mid \langle x - y_v, v \rangle \leq 0\}$  e  $\mathcal{H}_{y_v}$  é um hiperplano suporte de  $C$ .

Passo 4:

Resta apenas provar que não existe nenhum outro hiperplano suporte de  $C$  ortogonal a  $v$ . Para isso, suponha  $\mathcal{K}$  um hiperplano suporte de  $C$  ortogonal a  $v$ . Como  $\mathcal{K}$  é suporte de  $C$  existe  $z \in \overline{C} \cap \mathcal{K}$  e  $\mathcal{K} = \{x \mid \langle x - z, v \rangle = 0\} = \mathcal{H}_z$ .

Mas  $z \in \{x \mid \langle x - x_v, v \rangle \geq 0\} \cap \{x \mid \langle x - y_v, v \rangle \leq 0\}$ , logo, pelo Lema 1.34,  $\mathcal{H}_{y_v} * \mathcal{H}_z * \mathcal{H}_{x_v}$ , assim  $x_v \in \{x \mid \langle x - z, v \rangle \leq 0\}$  e  $y_v \in \{x \mid \langle x - z, v \rangle \geq 0\}$ .

Se  $\mathcal{H}_z \neq \mathcal{H}_{x_v}$  e  $\mathcal{H}_z \neq \mathcal{H}_{y_v}$ , então  $\langle x_v - z, v \rangle < 0$  e  $\langle y_v - z, v \rangle > 0$ . Logo  $\overline{C} \not\subset \{x \mid \langle x - z, v \rangle \leq 0\}$  e  $\overline{C} \not\subset \{x \mid \langle x - z, v \rangle \geq 0\}$ . Assim  $\mathcal{K}$  não é hiperplano suporte de  $C$ , o que contradiz a suposição.

Portanto  $\mathcal{H}_{x_v}$  e  $\mathcal{H}_{y_v}$  são os únicos hiperplanos suporte de  $C$  ortogonais a  $v$ .  $\square$

Da demonstração do primeiro passo do teorema anterior sai o próximo resultado, que está posto como corolário para referências posteriores.

### Corolário 1.36

A distância entre os hiperplanos  $\mathcal{H}_{x_v}$  e  $\mathcal{H}_{y_v}$ , suportes de  $C$ , ortogonais a  $v$ , é dada por  $|\langle x_v - y_v, v \rangle|$ .

### Definição 1.18

Seja  $C$  um subconjunto não vazio de  $\mathbb{R}^n$ . Um **semi-espaço suporte** de  $C$  é um semi-espaço de  $\mathbb{R}^n$  que contém  $C$  e cuja face é um hiperplano suporte de  $C$ .

Dizemos que  $S$  é um "**semi-espaço suporte de  $C$  em  $c$** " quando  $S$  é semi-espaço suporte de  $C$  e a face de  $S$  é um hiperplano suporte de  $C$  em  $c$ .

### Corolário 1.37

Seja  $C$  um subconjunto limitado e não vazio de  $\mathbb{R}^n$ . Então para cada direção  $v$  existe um, e apenas um, semi-espaço suporte de  $C$  com normal exterior  $v$ . Vale também que, para cada direção  $v$ , existe um, e apenas um, semi-espaço suporte de  $C$  com normal interior  $v$ .

Vimos que dada uma direção  $v$ , sendo  $C$  um conjunto limitado, existe um único semi-espaço suporte de  $C$  com normal exterior  $v$ . Queremos mostrar agora que, se  $C$  for compacto e convexo, então para todo ponto  $p \in \partial C$  (isto é,  $p$  é ponto da fronteira de  $C$ ) existe um hiperplano  $\mathcal{H}_p$  suporte de  $C$  em  $p \in \mathcal{H}_p$ .

Para provarmos isso, precisamos de alguns resultados.

### Lema 1.38

Sejam  $C \subset \mathbb{R}^n$  compacto e  $p \notin C$ . Nessas condições, existe um ponto  $q \in C$  tal que  $d(p, q) = d(p, C)$ . Se  $C$  for convexo, então podemos garantir a unicidade do ponto  $q$ .

**Prova:** Como a função distância é contínua e  $C$  é um compacto, então existe um ponto  $q \in C$  tal que  $d(p, q) = \min\{d(p, x) \mid x \in C\} = d(p, C)$ .

Supondo  $C$  compacto e convexo, seja  $q$  tal que  $d(p, q) = d(p, C)$ . Suponhamos também, por absurdo, que  $q' \in C$  é tal que  $d(p, C) = d(p, q')$  e  $q \neq q'$ .

Como  $C$  é convexo, o segmento  $SG[q; q'] \subset C$ . Consideremos o ponto  $r = \frac{q+q'}{2} \in SG[q; q']$ . Se mostrarmos que  $d(p, r) < d(p, C)$ , então teremos um absurdo, pois  $r \in C$ .

Mas

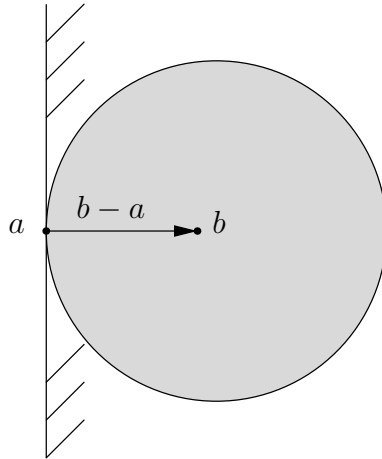
$$\begin{aligned} (d(p, C))^2 &= (d(p, q))^2 = \|p\|^2 - 2\langle p, q \rangle + \|q\|^2 \\ &= \|p\|^2 - 2\langle p, q' \rangle + \|q'\|^2 = \frac{\|p\|^2 - 2\langle p, q \rangle + \|q\|^2 + \|p\|^2 - 2\langle p, q' \rangle + \|q'\|^2}{2} \\ &= \|p\|^2 - \langle p, q \rangle - \langle p, q' \rangle + \frac{\|q\|^2 + \|q'\|^2}{2} = \|p\|^2 - \langle p, q + q' \rangle + \frac{\|q\|^2 + \|q'\|^2}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Por outro lado, } (d(p, r))^2 = \|p\|^2 - 2\left\langle p, \frac{q+q'}{2} \right\rangle + \left\| \frac{q+q'}{2} \right\|^2 = \|p\|^2 - \langle p, q + q' \rangle + \frac{\|q+q'\|^2}{4}.$$

Como  $2\langle q, q' \rangle = 2\|q\| \cdot \|q'\| \cos(\theta) < 2\|q\| \cdot \|q'\| \leq \|q\|^2 + \|q'\|^2$ , pois  $q \neq q'$ , segue que  $\|q\|^2 + 2\langle q, q' \rangle + \|q'\|^2 < 2\|q\|^2 + 2\|q'\|^2$ . Disso resulta que  $\frac{\|q+q'\|^2}{4} < \frac{\|q\|^2 + \|q'\|^2}{2}$  e  $d(p, r) < d(p, C)$ , o que é uma contradição.  $\square$

### Lema 1.39

Sejam  $a \neq b$  pontos de  $\mathbb{R}^n$ . Então a bola fechada  $B[b, \|b - a\|]$  está contida no semi-espço  $\{x \mid \langle x - a, b - a \rangle \geq 0\}$  e  $B[b, \|b - a\|] \cap \{x \mid \langle x - a, b - a \rangle = 0\} = \{a\}$ .



**Prova:** A demonstração está dividida em dois passos.

Passo 1:  $B[b, \|b - a\|] \subset \{x \mid \langle x - a, b - a \rangle \geq 0\}$ .

De fato, se  $x \in B[b, \|b - a\|]$ , então  $\|b - x\|^2 \leq \|b - a\|^2$ . Assim  $\langle b - x, b - x \rangle \leq \langle b - a, b - a \rangle$ , o que implica em  $\|b\|^2 - 2\langle b, x \rangle + \|x\|^2 \leq \|b\|^2 - 2\langle b, a \rangle + \|a\|^2$ . De onde segue que  $\|x\|^2 - \|a\|^2 \leq 2[\langle b, x \rangle - \langle b, a \rangle]$ .

Daí,

$$\begin{aligned}
\langle x - a, b - a \rangle &= \langle x, b \rangle - \langle x, a \rangle - \langle a, b \rangle + \|a\|^2 \\
&\geq \frac{\|x\|^2 - \|a\|^2}{2} - \langle x, a \rangle + \|a\|^2 \\
&= \frac{\|x\|^2 - \|a\|^2 - 2\langle x, a \rangle + 2\|a\|^2}{2} \\
&= \frac{\|x\|^2 - 2\langle x, a \rangle + \|a\|^2}{2} = \frac{\langle x - a, x - a \rangle}{2} \geq 0.
\end{aligned}$$

Logo  $x \in \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x - a, b - a \rangle \geq 0\}$ .

Passo 2:  $B[b, \|b - a\|] \cap \{x \mid \langle x - a, b - a \rangle = 0\} = \{a\}$

Denotando por  $\mathcal{H}$  o hiperplano  $\{x \mid \langle x - a, b - a \rangle = 0\}$ , sabemos que  $a \in B[b, \|b - a\|] \cap \mathcal{H}$ , resta mostrar que  $a$  é o único elemento dessa interseção.

Suponhamos  $a' \in B[b, \|b - a\|] \cap \mathcal{H}$  com  $a' \neq a$ . Logo o segmento  $SG[a; a']$  é um subconjunto de  $B[b, \|b - a\|] \cap \mathcal{H}$ . Sendo  $SG[a; a'] \subset B[b, \|b - a\|]$ , existe um ponto  $b' \in SG[a; a']$  tal que  $d(b', b) < \|b - a\|$ .

Considerando que esse ponto  $b'$  está em  $\mathcal{H}$ , temos que  $\langle b' - a, b - a \rangle = 0$ . Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\langle b' - a, b - a \rangle &= \langle b' - b + b - a, b - a \rangle \\
&= \langle b' - b, b - a \rangle + \|b - a\|^2 = \langle b' - b, b - b' + b' - a \rangle + \|b - a\|^2 \\
&= \langle b' - b, b' - a \rangle - \|b' - b\|^2 + \|b - a\|^2 \\
&= \langle b' - a + a - b, b' - a \rangle - \|b' - b\|^2 + \|b - a\|^2 \\
&= \langle a - b, b' - a \rangle + \|b' - a\|^2 - \|b' - b\|^2 + \|b - a\|^2 \\
&= \|b' - a\|^2 - \|b' - b\|^2 + \|b - a\|^2, \text{ pois } b' \in H.
\end{aligned}$$

Mas  $d(b', b) < \|b - a\| \Rightarrow \|b' - a\|^2 - \|b' - b\|^2 + \|b - a\|^2 > 0$ . Logo  $\langle b' - a, b - a \rangle > 0$ , o que é uma contradição. Portanto  $a' = a$ .  $\square$

### Proposição 1.40

Sejam  $C$ ,  $p$  e  $q$  como no Lema 1.38. Suponha também que  $C$  é convexo. Então podemos concluir que:

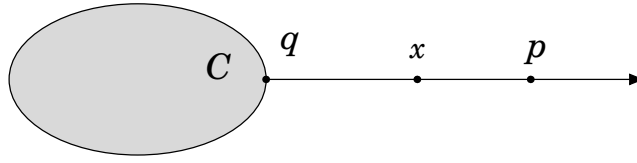
- (i) todo ponto  $x$  da semi-reta  $\overrightarrow{qp}$  satisfaz  $d(x, q) = d(x, C)$ ;
- (ii) o hiperplano  $\mathcal{H}_q = \{x \mid \langle x - q, p - q \rangle = 0\}$  é suporte de  $C$  em  $q$ ;
- (iii) o semi-espaço  $S = \{x \mid \langle x - q, p - q \rangle \leq 0\}$  é suporte de  $C$ .

**Prova:** Parte (i):

Suponhamos  $x \in \overrightarrow{qp}$ . Se  $x = q$ , então  $x \in C$  e  $d(x, C) = 0 = d(x, q)$ . Se  $x = p$ , então, pelo Lema 1.39,  $d(x, C) = d(x, q)$ .

Suponhamos que  $x \neq q$  e  $x \neq p$ . Então  $x = q + \tau(p - q)$  com  $\tau > 0$  e  $\tau \neq 1$ . Assim, podemos separar este problema em dois casos.

Caso 1:  $0 < \tau < 1$ .

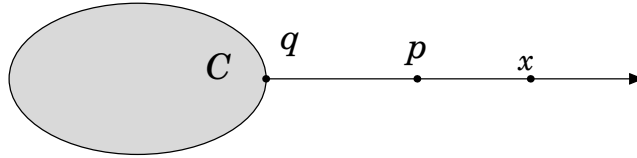


Neste caso,  $x$  está entre  $q$  e  $p$ , logo  $d(p, q) = d(p, x) + d(x, q)$ . Suponhamos, por absurdo, que  $d(x, C) \neq d(x, q)$ , então existe um ponto  $r \in C$  tal que  $d(x, r) < d(x, q)$ . Assim,

$$d(p, q) = d(p, C) \leq d(p, r) \leq d(p, x) + d(x, r) < d(p, x) + d(x, q) = d(p, q),$$

o que é um absurdo.

Caso 2:  $\tau > 1$ .

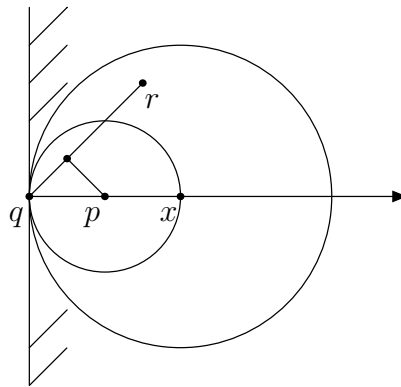


Neste caso  $q * p * x$ . Suponhamos, por absurdo, que  $d(x, q) \neq d(x, C)$ . Logo existe  $r \in C$  tal que  $d(x, r) < d(x, q)$ . Ou seja,  $r \in B(x, \|x - q\|)$ .

Por outro lado,  $r \notin B(p, \|p - q\|)$ , pois  $d(r, p) \geq d(q, p)$ .

Como  $r \in B(x, \|x - q\|)$ , pelo Lema 1.39, segue que  $r$  é um ponto do semi-espço  $S = \{y \mid \langle y - q, x - q \rangle \geq 0\} = \{y \mid \langle y - q, p - q \rangle \geq 0\}$ . Além disso, ainda pelo Lema 1.39,  $r$  não está no hiperplano  $\{y \mid \langle y - q, p - q \rangle = 0\}$ . Assim,  $\langle r - q, p - q \rangle > 0$  e  $r \notin B(p, \|p - q\|)$ , pois  $d(p, C) = d(p, q)$  e  $q$  é único.

Por outro lado, como  $r, q \in C$  e  $C$  é convexo, temos que  $SG[q; r] \subset C$ . Portanto, basta encontrar um ponto do segmento  $SG[q; r]$  que está mais próximo de  $p$  do que o ponto  $q$ , chegando assim a um absurdo.



Seja  $q + \alpha(r - q)$  um ponto do segmento  $SG[q; r]$ , ie.  $\alpha \in [0, 1]$ . Logo

$$[d(p, q + \alpha(r - q))]^2 = \|p - q\|^2 - 2\alpha \langle p - q, r - q \rangle + \alpha^2 \|r - q\|^2.$$

Queremos que  $[d(p, q + \alpha(r - q))]^2 < \|p - q\|^2$ , ou seja,  $\|p - q\|^2 - 2\alpha \langle p - q, r - q \rangle + \alpha^2 \|r - q\|^2 < \|p - q\|^2$ , ou ainda,  $\alpha^2 \|r - q\|^2 < 2\alpha \langle p - q, r - q \rangle$ .

Como  $\alpha \geq 0$ ,  $[d(p, q + \alpha(r - q))]^2 < \|p - q\|^2$  fica equivalente a  $\alpha\|r - q\|^2 < 2\langle p - q, r - q \rangle$ .

Como  $\langle p - q, r - q \rangle > 0$ , podemos tomar  $\alpha \in \left(0, \frac{2\langle p - q, r - q \rangle}{\|r - q\|^2}\right)$ ,  $\alpha < 1$ , obtendo que  $\alpha\|r - q\|^2 < 2\langle p - q, r - q \rangle$ , o que é equivalente a  $[d(p, q + \alpha(r - q))]^2 < \|p - q\|^2$ .

Portanto, existe um ponto no segmento  $SG[r; q]$  mais perto de  $p$  do que  $q$ , contradizendo  $d(p, C) = d(p, q)$ .

Partes (ii) e (iii)

Sabemos que  $q \in \mathcal{H}_q \cap C$ . Falta mostrar que  $C$  está inteiramente contido em  $S$ . Com efeito, seja  $c \in C$  e suponhamos que  $\langle c - q, p - q \rangle > 0$ , então, tomando  $0 < \alpha < \min\left(1, 2\frac{\langle c - q, p - q \rangle}{\|c - q\|^2}\right)$ , obtemos que  $\alpha\|c - q\|^2 < 2\langle c - q, p - q \rangle$ , daí  $\alpha^2\|c - q\|^2 - 2\langle c - q, p - q \rangle < 0$ , ou equivalentemente,  $\alpha^2\|c - q\|^2 - 2\langle c - q, p - q \rangle + \|p - q\|^2 < \|p - q\|^2$ , o que implica em  $d(p, q + \alpha(c - q)) < \|p - q\|$ , o que é um absurdo, pois  $q + \alpha(c - q) \in C$  e  $\|p - q\| = d(p, C)$ .

Portanto  $\langle c - q, p - q \rangle \leq 0$ . □

### Teorema 1.41

Se  $C$  é um sub-conjunto compacto e convexo de  $\mathbb{R}^n$ , então por cada ponto da fronteira de  $C$ ,  $\partial C$ , passa um hiperplano suporte a  $C$ .

**Prova:** Seja  $q \in \partial C$  e considere  $S = S(q, 1)$  a esfera com centro em  $q$  e raio 1. Seja também  $p \in S$  tal que  $d(p, C) = \max\{d(x, C) \mid x \in S\}$ . Basta mostrar que  $\mathcal{H}_q = \{x \mid \langle x - q, p - q \rangle = 0\}$  é um hiperplano suporte de  $C$  em  $q$ .

Se conseguirmos provar que  $d(p, q) = d(p, C)$ , então, pela Proposição (1.40),  $H_q$  é suporte de  $C$  em  $q$ . Mostremos que  $d(p, q) = d(p, C)$ .

Como  $q \in C$  e  $d(p, q) = 1$ , então

$$d(p, C) \leq 1. \quad (1.8)$$

Seja  $0 < \varepsilon < 1$ . Como  $q \in \partial C$ , existe um ponto  $p' \in B(q, \varepsilon/2)$  com  $p' \notin C$ . Sendo  $C$  compacto e convexo, existe um único ponto  $q' \in C$  tal que  $d(p', q') = d(p', C)$ , pelo Lema 1.38. Logo

$$d(p', q') = d(p', C) \leq d(p', q) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Segue que  $d(q, q') \leq d(q, p') + d(p', q') < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ . Logo  $q' \in B(q, \varepsilon)$ .

Como  $q', p' \in B(q, \varepsilon)$ , a semi-reta  $\overrightarrow{q'p'}$  corta  $S$  em um ponto  $r \notin C$ , pois  $C$  é convexo e  $p' \notin C$ . Além disso, pelo primeiro item da Proposição 1.40, vale

$$d(r, C) = d(r, q'). \quad (1.9)$$

Sendo  $z \in S$ , vale

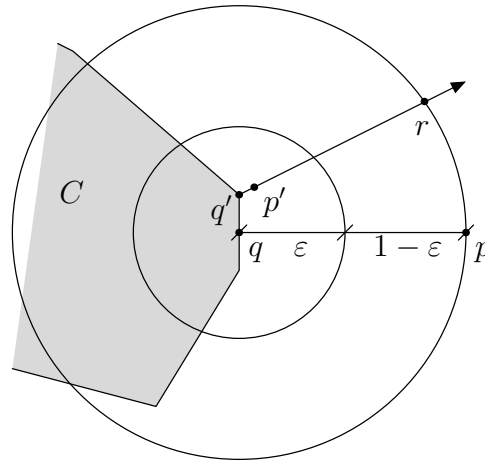
$$d(z, B(q, \varepsilon)) = 1 - \varepsilon. \quad (1.10)$$

Como  $q' \in B(x, \varepsilon)$ , temos que

$$d(r, B(x, \varepsilon)) < d(r, q'). \quad (1.11)$$

Mas então, pelas fórmulas (1.9), (1.10) e (1.11),

$$d(r, C) > 1 - \varepsilon.$$



Resumindo, para cada  $\varepsilon$  entre 0 e 1 existe um ponto  $r \in S$  tal que  $d(r, C) > 1 - \varepsilon$ . Logo  $\max\{d(z, C) \mid z \in S\} \geq 1$ . Portanto

$$d(p, C) \geq 1. \quad (1.12)$$

Juntando (1.8) com (1.12) concluímos que  $d(p, C) = 1$ .  $\square$

### Teorema 1.42

Se  $K \subset \mathbb{R}^n$  é convexo, compacto e não vazio, então  $K = \bigcap_{u \in \mathbb{S}^{n-1}} E_u$ , sendo que  $E_u$  é o semi-espaço suporte de  $K$  com vetor normal exterior  $u$ .

#### Prova:

Sabemos que  $K \subset \bigcap_{u \in \mathbb{S}^{n-1}} E_u$ , resta mostrar que  $\bigcap_{u \in \mathbb{S}^{n-1}} E_u \subset K$ .

Suponhamos, por absurdo, que existe  $h \in \bigcap_{u \in \mathbb{S}^{n-1}} E_u$ , tal que  $h \notin K$ .

Consideremos  $k \in K$  tal que  $d(h, K) = d(h, k)$ . Assim, pela Proposição 1.40, o semi-espaço  $E = \{x \mid \langle x - k, h - k \rangle \leq 0\}$  é suporte de  $C$ . Além disso,  $\frac{h-k}{\|h-k\|} \in \mathbb{S}^{n-1}$  é um vetor normal exterior de  $E$ .

Como  $\langle h - k, h - k \rangle \neq 0$ , pois  $h \notin K$  e  $k \in K$ , então  $h \notin E$ , logo  $h \notin \bigcap_{u \in \mathbb{S}^{n-1}} E_u$ , o que é uma contradição.  $\square$

## 1.3 Combinações lineares de conjuntos convexos

### 1.3.1 Propriedades das combinações lineares

#### Definição 1.19

Sejam  $C_1, \dots, C_k$  subconjuntos não vazios de  $\mathbb{R}^n$  e  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ , com  $k \in \mathbb{N}^*$ . Definimos a **combinação linear**  $\alpha_1 C_1 + \dots + \alpha_k C_k$  por

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i C_i = \{\alpha_1 c_1 + \dots + \alpha_k c_k \mid c_i \in C_i, i = 1, \dots, k\}.$$



**Observações:**

1. Se  $K$  é um subconjunto não vazio de  $\mathbb{R}^n$  e  $x \in \mathbb{R}^n$  então denotamos  $x + K := K + x := K + \{x\}$ ;
2.  $K + \{-x\} = K - x \neq K \setminus \{x\}$ ;
3.  $P + Q = \{p + q | p \in P \text{ e } q \in Q\}$ .

A seguinte proposição contém diversas propriedades (fáceis de serem demonstradas) das combinações lineares de conjuntos convexos.

**Proposição 1.43**

Sejam  $P, Q, R \subset \mathbb{R}^n$  subconjuntos não vazios e  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ . Então:

- (i)  $\alpha P + \beta Q = \beta Q + \alpha P$ ;
- (ii)  $(\alpha P + \beta Q) + \gamma R = \alpha P + (\beta Q + \gamma R)$ ;
- (iii)  $\alpha(P + Q) = \alpha P + \alpha Q$ ;
- (iv)  $(\alpha\beta)P = \alpha(\beta P)$ ;
- (v) Se  $\alpha > 0$ , então  $\alpha P$  é a imagem de  $P$  por uma dilatação de raio  $\alpha$ ;
- (vi)  $\alpha = 0 \Rightarrow \alpha P = \{0\}$ ;
- (vii)  $-P = (-1)P$  é a imagem de  $P$  pela reflexão sobre a origem;
- (viii)  $P + Q = \bigcup_{q \in Q} (P + q) = \bigcup_{p \in P} (Q + p)$ ;
- (ix)  $(P + Q) + (a + b) = (P + a) + (Q + b)$ .

**Teorema 1.44**

A combinação linear de conjuntos convexos é um conjunto convexo.

**Idéia da prova:** Para provar esse teorema, deve-se mostrar que  $\alpha K$  é convexo, se  $K$  o for. Feito isso, deve-se mostrar que a combinação linear de dois conjuntos convexos é um conjunto convexo.

Considerando verdadeira a igualdade  $\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i K_i = \left( \sum_{i=1}^k \alpha_i K_i \right) + \alpha_{k+1} K_{k+1}$ , provamos o teorema por indução.  $\square$

**Lema 1.45**

Sejam  $\varepsilon, \delta > 0$ ,  $\alpha \neq 0$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$  e  $a, b \in \mathbb{R}^n$ . Então

- (i)  $a + B(b, \varepsilon) = B(a + b, \varepsilon)$ ;
- (ii)  $a + B[b, \varepsilon] = B[a + b, \varepsilon]$ ;
- (iii)  $\alpha B(a, \varepsilon) + \beta B(b, \delta) = B(\alpha a + \beta b, |\alpha|\varepsilon + |\beta|\delta)$ ;
- (iv)  $\alpha B(a, \varepsilon) + \beta B[b, \delta] = B(\alpha a + \beta b, |\alpha|\varepsilon + |\beta|\delta)$ ;
- (v)  $\alpha B[a, \varepsilon] + \beta B[b, \delta] = B[\alpha a + \beta b, |\alpha|\varepsilon + |\beta|\delta]$ .

**Proposição 1.46**

Sejam  $K, K_1, \dots, K_m \subset \mathbb{R}^n$  não vazios e  $\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ .

- (i) Se  $K_i$  é aberto e  $\alpha_i \neq 0$ , para algum  $i \in \{1, \dots, m\}$ , então  $\sum_{i=1}^m \alpha_i K_i$  é aberto.
- (ii) Se  $K$  é fechado, então  $\alpha K$  é fechado.
- (iii) Se  $K_1, \dots, K_m$  são limitados, então  $\sum_{i=1}^m \alpha_i K_i$  é limitado.
- (iv) Se  $K_1, \dots, K_m$  são compactos, então  $\sum_{i=1}^m \alpha_i K_i$  é compacto.

**Prova:**

(i) Suponha, sem perda de generalidade, que  $K_1$  é aberto e  $\alpha_1 \neq 0$  e seja  $x = \alpha_1 k_1 + \dots + \alpha_m k_m \in \alpha_1 K_1 + \dots + \alpha_m K_m$ .

Como  $k_1 \in K_1$ , então existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $B(k_1, \varepsilon) \subset K_1$ . Afirimo que  $B = B(\alpha_1 k_1 + \dots + \alpha_m k_m, |\alpha_1| \varepsilon) \subset \alpha_1 K_1 + \dots + \alpha_m K_m$ .

De fato, seja  $y \in B$ . Mas  $B = \alpha_1 B(k_1, \varepsilon) + (\alpha_2 k_2 + \dots + \alpha_m k_m)$ , pelo Lema 1.45. Logo  $y = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 k_2 + \dots + \alpha_m k_m$ , com  $y_1 \in B(k_1, \varepsilon) \subset K_1$ . Portanto  $y \in \alpha_1 K_1 + \dots + \alpha_m K_m$ .

(ii) Sejam  $K$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Se  $\alpha = 0$ , então  $\alpha K = \{0\}$  que é fechado. Se  $\alpha \neq 0$ , então  $\alpha K^c$  é aberto. Resta mostrar que  $\alpha K^c = (\alpha K)^c$ .

Mas  $y \in \alpha K^c \Leftrightarrow y = \alpha k^c$ , para algum  $k^c \in K^c \Leftrightarrow y = \alpha k^c$ , para algum  $k^c \notin K \Leftrightarrow y \notin \alpha K \Leftrightarrow y \in (\alpha K)^c$ .

(iii) Suponha  $K_i \subset B(a_i, \varepsilon_i)$ , com  $\varepsilon_i > 0$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, m\}$ . Mas então  $\alpha_1 K_1 + \dots + \alpha_m K_m \subset \alpha_1 B(a_1, \varepsilon_1) + \dots + \alpha_m B(a_m, \varepsilon_m) = B(\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_m a_m, |\alpha_1| \varepsilon_1 + \dots + |\alpha_m| \varepsilon_m)$ .

(iv) Sejam  $H$ , e  $K$  compactos. Pelos itens (i) e (ii), é suficiente mostrar que  $H + K$  é fechado. Pelo Teorema C.1, precisamos apenas mostrar que, para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ , existe  $y \in H + K$  tal que  $d(x, y) = d(x, H + K)$ . Seja então  $x \in \mathbb{R}^n$  qualquer.

Como  $H$  e  $K$  são compactos, então  $-H + x$  também é compacto, logo existem pontos  $z_0 = -h_0 + x \in -H + x$  e  $k_0 \in K$  tais que  $d(K, -H + x) = \|k_0 - (-h_0 + x)\|$ .

Assim,  $\|k_0 + h_0 - x\| \leq \|k + h - x\|, \forall h \in H$  e  $k \in K$ . Logo  $d(x, H + K) = \|k_0 + h_0 - x\| = d(x, h_0 + k_0)$ , com  $h_0 + k_0 \in H + K$ . Basta então tomar  $y = h_0 + k_0$ .  $\square$

### 1.3.2 Combinações lineares de corpos convexos

#### Definição 1.20

Um **corpo convexo** é um subconjunto, compacto, convexo e não vazio de  $\mathbb{R}^n$ .

Sabemos, pela Proposição 1.46, que combinações lineares de corpos convexos são também corpos convexos. Queremos então estudar os pontos interiores e de fronteira de combinações lineares de corpos convexos bem como os hiperplanos suporte de tais combinações.

#### Proposição 1.47

Seja  $K \subset \mathbb{R}^n$  não vazio e  $\alpha \in \mathbb{R}^*$ . Então  $\text{INT}(\alpha K) = \alpha \text{INT}(K)$  e  $\partial(\alpha K) = \alpha \partial K$ .

#### Proposição 1.48

Sejam  $A, B \subset \mathbb{R}^n$  não vazios e  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$ . Podemos concluir que

(i)  $\text{INT}(A) + B \subset \text{INT}(A + B)$ .

(ii) Se  $a \in A$ ,  $b \in B$  e  $a + b \in \partial(A + B)$ , então  $a \in \partial A$  e  $b \in \partial B$ .

**Prova:** O item (i) sai da Proposição 1.46 e o (ii) é conseqüência do (i).  $\square$

#### Observações:

1. A recíproca do item (ii) da proposição 1.48 não é verdadeira. Ver figura 1.2.

2.  $\text{INT}(A + B) \neq \emptyset \not\Rightarrow \text{INT}(A) \neq \emptyset$  e  $\text{INT}(B) \neq \emptyset$ . Ver figura 1.2.

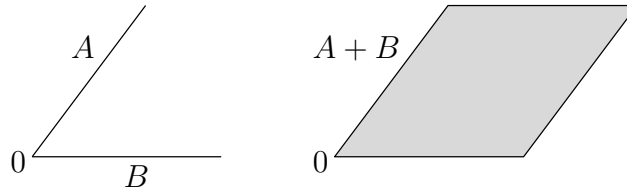


Figura 1.2:

As duas proposições anteriores nos dão uma idéia do que acontece com os pontos interiores e com os pontos de fronteira de combinações lineares de conjuntos convexos. Mas o que queremos é, dados dois corpos convexos, determinar se a soma de dois pontos (um de cada corpo) está ou não na fronteira do conjunto soma. Para isso precisamos de mais alguns resultados.

### Definição 1.21

Sejam  $A$  e  $B$  dois corpos convexos. Dizemos que os pontos  $a \in \partial A$  e  $b \in \partial B$  são **pontos fronteira-correspondentes** quando existem dois semi-espacos  $E_a$  e  $E_b$ , com mesmo vetor normal exterior, tais que  $E_a$  é suporte de  $A$  em  $a$  e  $E_b$  é suporte de  $B$  em  $b$ .

### Lema 1.49

Sejam  $A$  e  $B$  dois subconjuntos não vazios de  $\mathbb{R}^n$  e  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$ . Se  $E$  é um semi-espaco suporte de  $A$  em  $a$  e  $F$  um semi-espaco suporte de  $B$  em  $b$ , ambos com vetor normal exterior  $v$ , então  $\alpha E + \beta F$  é um semi-espaco suporte de  $\alpha A + \beta B$  em  $\alpha a + \beta b$ , com vetor normal exterior  $v$ .

**Idéia da prova:** Primeiro precisamos mostrar que  $\alpha E + \beta F$  é um semi-espaco com normal exterior  $v$ . Feito isso, naturalmente temos  $\alpha A + \beta B \subset \alpha E + \beta F$ .

Por último, dadas  $H$  e  $K$  as faces dos semi-espacos  $E$  e  $F$ , respectivamente, e tomando  $a \in (\partial A) \cap H$  e  $b \in (\partial B) \cap K$ , é só mostrar que  $\alpha a + \beta b \in \alpha H + \beta K$  e  $\alpha H + \beta K$  é a face de  $\alpha E + \beta F$ .  $\square$

### Teorema 1.50

Sejam  $H$  e  $K$  dois corpos convexos com  $h \in H$  e  $k \in K$ . Se  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$ , então  $\alpha h + \beta k \in \partial(\alpha H + \beta K)$  se, e somente se,  $h$  e  $k$  são pontos fronteira-correspondentes.

#### Prova:

( $\Rightarrow$ ) Suponhamos que  $h \in H$  e  $k \in K$  sejam dois pontos fronteira-correspondentes. Logo existem dois semi-espacos  $E_h$  e  $E_k$ , suporte de  $H$  em  $h$  e de  $K$  em  $k$  respectivamente, com mesmo vetor normal exterior. Portanto, pelo Lema 1.49, o semi-espaco  $\alpha E_h + \beta E_k$  é um semi-espaco suporte de  $\alpha H + \beta K$ , em  $\alpha h + \beta k$ . Assim, o ponto  $\alpha h + \beta k \in \partial(\alpha H + \beta K)$ .

( $\Leftarrow$ ) Suponhamos agora que  $x = \alpha h + \beta k \in \partial(\alpha H + \beta K)$ . Logo  $h \in \partial H$  e  $k \in \partial K$ , pela Proposição 1.48. Além disso, pelo teorema 1.41, existe um semi-espaco suporte de  $L = \alpha H + \beta K$  em  $x$ . Seja  $S$  o semi-espaco suporte de  $L$  em  $x$  e  $u$  seu vetor normal exterior. Logo  $S = \{y \mid \langle y - x, u \rangle \leq 0\}$ .

Consideremos os semi-espacos  $S_1 = \{y \mid \langle y - h, u \rangle \leq 0\}$  e  $S_2 = \{y \mid \langle y - k, u \rangle \leq 0\}$  com vetor normal exterior  $u$ . Logo  $h \in \partial S_1$  e  $k \in \partial S_2$ . Afirmamos que  $h$  e  $k$  são pontos fronteira-correspondentes.

Para provarmos essa afirmação, basta mostrar que  $S_1$  é suporte de  $H$  e  $S_2$  é suporte de  $K$ . Seja então  $z \in H$ . Como  $\alpha H + \beta K \subset S$ , então  $\alpha z + \beta k \in S$ , logo  $\langle \alpha z + \beta k - x, u \rangle \leq 0$ . Assim,  $\langle \alpha z + \beta k - \alpha h - \beta k, u \rangle \leq 0$ , e segue que  $\alpha \langle z - h, u \rangle + \beta \langle k - k, u \rangle = \alpha \langle z - h, u \rangle \leq 0$ . Portanto  $S_1$  é suporte de  $H$  em  $h$ .

Analogamente,  $S_2$  é suporte de  $K$  em  $k$ .  $\square$

## 1.4 Teorema de seleção de Blaschke

Será visto aqui um dos principais resultados básicos, o teorema de seleção de Blaschke. A importância desse teorema se dá pelo fato dele ser útil para garantir a existência de conjuntos extremais, como veremos mais adiante.

### 1.4.1 A métrica de Hausdorff e o teorema de seleção de Blaschke

Sabemos que dados  $A$  e  $B$  dois subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$ , a distância entre  $A$  e  $B$  usual é dada por  $d(A, B) = \min\{d(x, y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}$ . Porém essa função distância não é nem de longe uma métrica no conjunto  $\wp(\mathbb{R}^n)$  das partes de  $\mathbb{R}^n$ . Definiremos então uma nova distância que será uma métrica em  $\mathcal{C}$ , onde  $\mathcal{C}$  é o conjunto de todos os subconjuntos compactos e não vazios de  $\mathbb{R}^n$ .

#### Definição 1.22

Sejam  $A, B \subset \mathbb{R}^n$  tais que existem  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$  tais que  $A \subset B + B(0, \varepsilon_1)$  e  $B \subset A + B(0, \varepsilon_2)$ . Nessas condições a **distância de Hausdorff** entre  $A$  e  $B$ , denotada por  $d_H(A, B)$ , é dada por

$$d_H(A, B) := \inf\{\varepsilon > 0 \mid A \subset B + B(0, \varepsilon) \text{ e } B \subset A + B(0, \varepsilon)\}.$$

#### Teorema 1.51

A distância de Hausdorff é uma métrica em  $\mathcal{C} := \{K \subset \mathbb{R}^n \mid K \neq \emptyset \text{ e } K \text{ é compacto}\}$ .

**Prova:** Como é usual, temos que mostrar os seguintes passos para  $A, B, C \in \mathcal{C}$  quaisquer:

- (1) a distância de Hausdorff entre  $A$  e  $B$  está sempre definida;
- (2)  $d_H(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$ ;
- (3)  $d_H(A, B) = d_H(B, A)$ ;
- (4)  $d_H(A, C) \leq d_H(A, B) + d_H(B, C)$ .

(1): Trivial.

(2): ( $\Rightarrow$ ) Suponha que  $d_H(A, B) = 0$ , logo  $\inf\{\varepsilon > 0 \mid A \subset B + B(0, \varepsilon) \text{ e } B \subset A + B(0, \varepsilon)\} = 0$ , ou seja, para todo  $\varepsilon > 0$  vale que  $A \subset B + B(0, \varepsilon)$  e  $B \subset A + B(0, \varepsilon)$ .

Seja então  $x \in A$  e  $\varepsilon > 0$ . Como  $A \subset B + B(0, \varepsilon)$ , então existe um  $b \in B$  tal que  $x \in B(0, \varepsilon) + b = B(b, \varepsilon)$ . Mas isso é o mesmo que dizer que  $b \in B(x, \varepsilon)$ .

Temos então que dado  $\varepsilon > 0$ , existe um ponto  $b \in B$  tal que  $b \in B(x, \varepsilon)$ . Logo  $x$  é ponto de acumulação de  $B$  ou  $x \in B$ . sendo  $B$  fechado,  $x \in B$  e  $A \subset B$ .

Analogamente,  $B \subset A$ .

( $\Leftarrow$ ) Devemos mostrar que  $d_H(A, A) = 0$ . Mas para todo  $\varepsilon > 0$  vale  $A \subset A + B(0, \varepsilon)$ . Logo  $0 = \inf\{\varepsilon > 0 \mid A \subset A + B(0, \varepsilon)\} = d_H(A, A)$ .

(3): Sai direto da definição.

(4): Sejam  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$  tais que:

$$\begin{cases} A \subset B + B(0, \varepsilon_1), \\ B \subset A + B(0, \varepsilon_1), \\ B \subset C + B(0, \varepsilon_2) \text{ e} \\ C \subset B + B(0, \varepsilon_2). \end{cases}$$

Logo  $A \subset B + B(0, \varepsilon_1) \subset C + B(0, \varepsilon_2) + B(0, \varepsilon_1) = C + B(0, \varepsilon_1 + \varepsilon_2)$  e  $C \subset B + B(0, \varepsilon_2) \subset A + B(0, \varepsilon_1) + B(0, \varepsilon_2) = A + B(0, \varepsilon_1 + \varepsilon_2)$ .

Como  $A \subset C + B(0, \varepsilon_1 + \varepsilon_2)$  e  $C \subset A + B(0, \varepsilon_1 + \varepsilon_2)$ , então  $d_H(A, C) \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ .

Sendo  $\varepsilon_1 \in \{\varepsilon > 0 \mid A \subset B + B(0, \varepsilon) \text{ e } B \subset A + B(0, \varepsilon)\}$  e  $\varepsilon_2 \in \{\varepsilon > 0 \mid B \subset C + B(0, \varepsilon) \text{ e } C \subset B + B(0, \varepsilon)\}$  elementos quaisquer, então vale

$$\begin{aligned} d_H(A, C) \leq & \inf \{ \varepsilon > 0 \mid A \subset B + B(0, \varepsilon), B \subset A + B(0, \varepsilon) \} + \\ & + \inf \{ \varepsilon > 0 \mid B \subset C + B(0, \varepsilon), C \subset B + B(0, \varepsilon) \}. \end{aligned}$$

Ou seja,  $d_H(A, C) \leq d_H(A, B) + d_H(B, C)$ . □

**Observação:** Denotamos a bola aberta com centro em  $K$  e raio  $\varepsilon$ , relativa ao espaço métrico  $(\mathcal{C}, d_H)$ , por  $B_H(K, \varepsilon)$ .

### Definição 1.23

Um  $n$ -**cubo** em  $\mathbb{R}^n$ , ou simplesmente **cubo**, é um conjunto da forma  $\prod_{j=1}^n I_j$ , onde cada  $I_j$  é um intervalo fechado da forma  $I_j = [a_j, b_j] \subset \mathbb{R}$ , com  $b_1 - a_1 = \dots = b_n - a_n$ .

### Definição 1.24

Sejam  $C = \prod_{j=1}^n I_j$  um  $n$ -cubo e  $m \in \mathbb{N}$  e considere o conjunto

$$\mathcal{J}_j^m = \left\{ \left[ a_j + i \frac{\tau}{2^m}, a_j + (i+1) \frac{\tau}{2^m} \right] \mid i \in \{0, \dots, 2^m - 1\} \right\},$$

onde  $\tau = b_1 - a_1 = \dots = b_j - a_j$ .

A **subdivisão cúbica de ordem  $m$  de  $C$**  é o conjunto

$$\text{SUB}(C; m) := \left\{ \prod_{j=1}^n K_j \mid K_j \in \mathcal{J}_j^m, \forall j \in \{1, \dots, n\} \right\}.$$

### Exemplo 1.4

A subdivisão cúbica de ordem 2 do cubo  $[3, 4] \subset \mathbb{R}$  é o conjunto:

$$\text{SUB}([3, 4]; 2) = \left\{ \left[ 3, 3 + \frac{1}{4} \right]; \left[ 3 + \frac{1}{4}, 3 + \frac{2}{4} \right]; \left[ 3 + \frac{2}{4}, 3 + \frac{3}{4} \right]; \left[ 3 + \frac{3}{4}, 4 \right] \right\}.$$

### Exemplo 1.5

Se  $C$  for o cubo  $[0, 4] \times [0, 4] \subset \mathbb{R}^2$ , então  $\mathcal{J}_1^2 = \mathcal{J}_2^2 = \{[0, 1]; [1, 2]; [2, 3]; [3, 4]\}$ .

Logo a subdivisão cúbica de  $C$  de ordem 2 é o conjunto

$$\text{SUB}(C; 2) = \{[i, i+1] \times [j, j+1]; i, j \in \{0, \dots, 3\}\}.$$

**Observação:** Veja que a subdivisão cúbica de ordem  $m$  de um  $n$ -cubo é um conjunto finito com  $(2^m)^n$  elementos.

**Definição 1.25**

Seja  $K \subset \mathbb{R}^n$  um subconjunto limitado e considere  $C$  um  $n$ -cubo que contém  $K$ . Consideremos também o conjunto  $K^{(C|m)} := \{X \in \text{SUB}(C; m) \mid X \cap K \neq \emptyset\}$ . Nessas condições, o conjunto

$$K_{(C|m)} := \bigcup_{X \in K^{(C|m)}} X$$

será chamado de **aproximação cúbica de  $K$  de ordem  $m$  por  $C$** .

**Proposição 1.52**

Se  $K \in \mathcal{C}$  é um subconjunto do  $n$ -cubo  $C$ , então

$$d_H(K, K_{(C|m)}) = \frac{\sqrt{n}}{2^m} \alpha,$$

onde  $\alpha$  é o comprimento do lado do cubo, ou seja,  $C = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$  e  $b_1 - a_1 = \dots = b_n - a_n = \alpha$ .

**Corolário 1.53**

Se  $K \in \mathcal{C}$  e  $K \subset C$ , com  $C$  um cubo, então dado  $\varepsilon > 0$  qualquer, existe um  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $d_H(K, K_{(C|m)}) < \varepsilon$ .

**Teorema 1.54 (Teorema de Seleção de Blaschke)**

Seja  $K \in \mathcal{C}$  e  $\mathcal{F}$  uma família infinita de conjuntos compactos não vazios contidos em  $K$ . Então  $\mathcal{F}$  possui ao menos um ponto de acumulação  $F \in \mathcal{C}$ , com  $F \subset K$ .

**Prova:** Para mostrarmos esse teorema, precisamos de algumas etapas. Na primeira etapa demonstraremos que toda seqüência de Cauchy de conjuntos compactos não vazios contidos em um cubo é convergente (na métrica de Hausdorff em  $\mathcal{C}$ ). Na segunda etapa provaremos, utilizando aproximações cúbicas, que existe uma seqüência de Cauchy de elementos distintos de  $\mathcal{F}$ .

Como existe um cubo  $C$  tal que  $K \subset C$ , então a seqüência  $(F_i)_{i=1}^\infty$  de Cauchy obtida na 2ª etapa é uma seqüência de Cauchy de subconjuntos compactos de um cubo, logo essa seqüência é convergente pela 1ª etapa. Sendo  $(F_i)_{i=1}^\infty$  convergente e de termos distintos, o limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n = F$  é um ponto de acumulação de  $\mathcal{F}$ . Restará então mostrar, na última etapa, que  $F \subset K$ .

Etapa 1: Mostrar que toda seqüência de Cauchy de conjuntos compactos não vazios contidos em um cubo é convergente.

Seja  $(F_i)_{i=1}^\infty$  uma seqüência de Cauchy de subconjuntos compactos de  $C$ . Consideremos também, para cada  $i \in \mathbb{N}^*$ , o conjunto

$$B_i = \overline{\bigcup_{j=i}^\infty F_j}.$$

Segue que, para cada  $i \in \mathbb{N}^*$ , o conjunto  $B_i$  é fechado, pois é o fecho de  $\bigcup_{j=i}^\infty F_j$ . Cada  $B_i$  também é limitado, pois  $F_j \subset C$ ,  $\forall j \in \mathbb{N}^*$ , logo  $\bigcup_{j=i}^\infty F_j \subset C$ . Sendo  $C$  fechado, todo

ponto de acumulação de  $C$  está em  $C$ , portanto todo ponto de acumulação de  $\bigcup_{j=i}^{\infty} F_j$  está em  $C$ , ou seja,  $\overline{\bigcup_{j=i}^{\infty} F_j} \subset C$ .

Sendo  $B_i$  limitado e fechado em  $\mathbb{R}^n$ ,  $B_i$  é um subconjunto compacto do conjunto  $C$ . Além disso  $B_i$  é não vazio, pois cada  $F_j$  é não vazio.

Definamos então

$$B = \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i.$$

O conjunto  $B$  é compacto, pois é limitado e fechado. Além disso  $B$  é não vazio, pois  $B_1 \supset B_2 \supset \dots$  e a interseção de uma seqüência encaixante de conjuntos compactos não vazios é também não vazia. (ver [18, pg. 170-171])

Queremos então mostrar que,  $\forall \varepsilon > 0$ , existe um  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $d_H(F_j, B) < \varepsilon$ , sempre que  $j \geq N$ .

**Afirmção:** Dado  $\varepsilon > 0$  qualquer, existe  $N_1 \in \mathbb{N}^*$  tal que  $B_i \subset B + B(0, \varepsilon)$ , sempre que  $i > N_1$ .

Suponha que existe um  $\varepsilon > 0$  tal que  $\forall N \in \mathbb{N}^*; \exists i > N; B_i \not\subset B + B(0, \varepsilon)$ . Daí

para  $N = 1$ , existe um  $i_1 > N$  tal que  $B_{i_1} \not\subset B + B(0, \varepsilon)$ ,

para  $N = i_1$ , existe um  $i_2 > i_1$  tal que  $B_{i_2} \not\subset B + B(0, \varepsilon)$ ,

para  $N = i_2$ , existe um  $i_3 > i_2$  tal que  $B_{i_3} \not\subset B + B(0, \varepsilon)$ ,

...

para  $N = i_k$ , existe um  $i_{k+1} > i_k$  tal que  $B_{i_{k+1}} \not\subset B + B(0, \varepsilon)$ .

Escolhendo  $j \geq i_1$  um número natural e tomando  $i_k > j$ , obtemos que  $B_j \supset B_{i_k}$ , assim  $B_j \not\subset B + B(0, \varepsilon)$ . Resumindo,  $\forall j \geq i_1, B_j \not\subset B + B(0, \varepsilon)$ .

Sendo assim, para cada  $j \geq i_1$  tome  $x_j \in B_j \setminus (B + B(0, \varepsilon))$ . Como  $B_j \subset B_{i_1}$ , então a seqüência de pontos  $(x_j)_{j=i_1}^{\infty}$  está contida no compacto  $B_{i_1}$ , portanto existe uma subsequência  $(x_{j_k})_{k=1}^{\infty}$  convergindo para  $x \in B_{i_1}$ .

Como  $x_k \in B_j, \forall k \geq j$ , então  $x \in B_j$ . Assim sendo,  $x \in B_j, \forall j \geq i_1$ , e isso implica que  $x \in B = \bigcap B_j$ .

Por outro lado,  $x_j \in B_{i_1} \setminus (B + B(0, \varepsilon))$ , para todo  $j \geq i_1$ , e  $B_{i_1} \setminus (B + B(0, \varepsilon))$  é compacto (pois  $B + B(0, \varepsilon)$  é aberto). Portanto  $x \notin B + B(0, \varepsilon)$ , o que é uma contradição, validando assim a afirmação.

Sabemos que  $F_j \subset \overline{F_i \cup \dots \cup F_j \cup \dots} = B_i$ , sempre que  $j \geq i$ . Logo, pela afirmação,

$$F_j \subset B_i \subset B + B(0, \varepsilon), \text{ sempre que } j \geq i > N_1. \quad (1.13)$$

Por outro lado, como a seqüência  $(F_j)_{j=1}^{\infty}$  é de Cauchy, existe um  $N > N_1$  tal que,  $\forall i, j \geq N, d_H(F_j, F_i) < \frac{\varepsilon}{2}$ . Fixado então um  $i \geq N$ , vale que  $F_j \subset F_i + B(0, \varepsilon/2)$ , qualquer que seja  $j \geq N$ .

Assim, obtemos que  $\bigcup_{k=i}^{\infty} F_k \subset F_i + B(0, \varepsilon/2)$ . Logo

$$B_i = \overline{\bigcup_{k=i}^{\infty} F_k} \subset \overline{F_i + B(0, \varepsilon/2)} \subset F_i + B(0, \varepsilon).$$

Concluimos que  $B \subset B_i \subset F_i + B(0, \varepsilon)$ , qualquer que seja  $i > N$ . Juntando isso com (1.13), e sabendo que  $N > N_1$ , está provado que a seqüência  $(F_i)_{i=1}^{\infty} F_i$  é convergente.

Etapa 2: Mostrar que a família  $\mathcal{F}$  possui uma seqüência de Cauchy.

Como a família  $\mathcal{F}$  é infinita, podemos escolher uma seqüência infinita de termos distintos de  $\mathcal{F}$ . Digamos que  $(F_i)_{i=1}^{\infty}$  é essa seqüência.

Sabemos que  $\forall F \in \mathcal{F}; F \subset K$ , logo  $F_i \subset K$ , para todo  $i$ . Sendo  $K$  compacto,  $K \subset C$ , para algum  $n$ -cubo  $C$ . Consideremos  $\text{SUB}(C; 1)$  a subdivisão cúbica de  $C$  de ordem 1 e seja  $\mathcal{W}_1$  o conjunto de todas as uniões possíveis de elementos de  $\text{SUB}(C; 1)$ , isto é,

$$X \in \mathcal{W}_1 \Leftrightarrow \begin{cases} X = \bigcup_{\alpha \in I} X_{\alpha} & \text{e} \\ X_{\alpha} \in \text{SUB}(C; 1), \forall \alpha \in I. \end{cases}$$

Sendo  $\text{SUB}(C; 1)$  finito, o conjunto  $\mathcal{W}_1$  também é finito.

Seja a função  $\tau : \{F_i \mid i \in \mathbb{N}^*\} \rightarrow \mathcal{W}_1$ , definida por  $\tau(F_i) = (F_i)_{(C|1)} \in \mathcal{W}_1$ . Como  $\mathcal{W}_1$  é finito, então  $\tau^{-1}(W_1)$  é um subconjunto infinito de  $\{F_i \mid i \in \mathbb{N}^*\}$ , para algum  $W_1 \in \mathcal{W}_1$ . Daqui,  $(F_i)_{(C|1)} = W_1$  para infinitos valores de  $i$ .

Seja agora  $(F_i^1)$  uma subseqüência de  $(F_i)$  satisfazendo  $(F_i^1)_{(C|1)} = W_1$ .

Pelo mesmo argumento anterior, se  $\mathcal{W}_2$  é o conjunto de todas as uniões possíveis de elementos de  $\text{SUB}(C; 2)$ , então existe um  $W_2 \in \mathcal{W}_2$  tal que  $(F_i^1)_{(C|2)} = W_2$  para infinitos valores de  $i$ . Assim podemos considerar uma subseqüência  $(F_i^2)$  de  $(F_i^1)$  tal que  $F_2^2 \neq F_1^1$  e  $(F_i^2)_{(C|2)} = W_2$ , para todo  $i$ .

Procedendo dessa forma, para cada  $m \in \mathbb{N}^*$ , encontramos uma subseqüência  $(F_i^{m+1})_{i=1}^{\infty}$  de  $(F_i^m)$  tal que  $F_{m+1}^{m+1} \notin \{F_1^1, \dots, F_m^m\}$  e  $(F_i^{m+1})_{(C|m+1)} = W_{m+1}$ , para todo  $i$ .

Considerando a seqüência "diagonal"  $(F_i^i)_{i=1}^{\infty}$  de elementos distintos de  $\mathcal{F}$ . Afirmamos que  $(F_i^i)_{i=1}^{\infty}$  é de Cauchy.

De fato, supondo  $j \geq i$ , temos que  $F_j^j = F_k^i$  para algum  $k \in \mathbb{N}^*$ . Além disso,  $(F_i^i)_{(C|i)} = (F_k^i)_{(C|i)} = W_i$ , portanto

$$\begin{aligned} d_H(F_i^i, F_j^j) &\leq d_H\left(F_i^i, (F_i^i)_{(C|i)}\right) + d_H\left((F_i^i)_{(C|i)}, F_j^j\right) \\ &= d_H\left(F_i^i, (F_i^i)_{(C|i)}\right) + d_H\left((F_k^i)_{(C|i)}, F_k^i\right) \\ &\leq \frac{\sqrt{n}\alpha}{2^i} + \frac{\sqrt{n}\alpha}{2^i} = \frac{\sqrt{n}\alpha}{2^{i-1}}, \text{ pela Proposição 1.52, sendo } \alpha \text{ a aresta de } C. \end{aligned}$$

Mas  $\frac{\sqrt{n}\alpha}{2^{i-1}} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0$ , logo dado  $\varepsilon > 0$ , existe um  $N$  tal que  $d_H(F_i^i, F_j^j) < \varepsilon$ , sempre que  $i, j \geq N$ .

Etapa Final: Mostrar que a seqüência obtida na etapa 2 converge para um subconjunto compacto e não vazio de  $K$ .

Pela etapa 1, a seqüência  $(F_i^i)_{i \in \mathbb{N}^*}$  converge para  $B$ , onde  $B = \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i$  e  $B_i = \overline{\bigcup_{j=i}^{\infty} F_j^j}$ .

Mas  $F_j^j \subset K$ , para cada  $j \in \mathbb{N}^*$ , logo  $\bigcup_{j=i}^{\infty} F_j^j \subset K$  e  $\overline{\bigcup_{j=i}^{\infty} F_j^j} \subset K$ , pois  $K$  é fechado. Assim  $B_i \subset K$ , para cada  $i$  e  $B \subset K$ .  $\square$

**Observação:** Como  $\mathcal{C}$  é um espaço métrico, então uma família  $\mathcal{F}$  de subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$  é um compacto de  $\mathcal{C}$  se  $\mathcal{F}$  for seqüencialmente compacto, ou seja, se toda seqüência



de elementos de  $\mathcal{F}$  admitir subsequência convergente, convergindo para um elemento de  $\mathcal{F}$ .

**Corolário 1.55**

Seja  $K \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto compacto e não vazio. Então  $\mathcal{W} = \{C \in \mathcal{C} \mid C \subset K\}$  é compacto em  $\mathcal{C}$ .

**Prova:** Seja  $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma seqüência convergente de elementos de  $\mathcal{W}$ . Se  $\{W_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  for finito, então obviamente  $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$  admite uma subsequência convergente.

Por outro lado, se  $\{W_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  for um conjunto infinito, o teorema de Blaschke nos garante que  $\{W_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  possui ao menos um ponto de acumulação  $W \in \mathcal{C}$ , com  $W \subset K$ , pois  $W_n \subset K, \forall n \in \mathbb{N}$ .

Como  $W \subset K$  e  $W \in \mathcal{C}$ , então  $W \in \mathcal{W}$ . Afirimo que existe uma subsequência  $(W_{n_j})_{j \in \mathbb{N}^*} \subset (W_n)_{n \in \mathbb{N}}$  com  $W_{n_j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} W$ .

Sendo  $K$  ponto de acumulação de  $\{W_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ , então para cada  $j \in \mathbb{N}^*$ , existem infinitos elementos de  $\{W_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  contidos em  $B_H(W, 1/j)$ . Escolha, para  $j = 1$ , um elemento  $W_{n_1} \in \{W_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  tal que  $W_{n_1} \in B_H(W, 1)$ .

Escolha também, para cada  $j > 1$ ,  $W_{n_j} \in \{W_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  tal que  $n_j > n_{j-1}$  e  $W_{n_j} \in B_H(W, 1/j)$ . Assim a subsequência  $(W_{n_j})_{j \in \mathbb{N}^*}$  converge para  $W$ , na métrica de Hausdorff.  $\square$

### 1.4.2 Conseqüências do teorema de Blaschke

A conseqüência mais imediata do teorema de Blaschke é que o conjunto  $\mathcal{C} := \{C \subset \mathcal{C} \mid C \text{ é convexo}\}$  é fechado em  $\mathcal{C} := \{K \subset \mathbb{R}^n \mid K \neq \emptyset \text{ e } K \text{ é compacto}\}$ . Dessa forma, toda seqüência convergente de corpos convexos converge para um corpo convexo, pois  $\mathcal{C}$  é o conjunto de todos os corpos convexos de  $\mathbb{R}^n$ .

**Teorema 1.56**

$\mathcal{C}$  é um subconjunto fechado de  $\mathcal{C}$ .

**Prova:** Para demonstrarmos que  $\mathcal{C}$  é fechado em  $\mathcal{C}$ , seja  $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma seqüência convergente de elementos de  $\mathcal{C}$ . Digamos que  $K_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} K$ , logo dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 > 0$  tal que,  $d_H(K_n, K) < \varepsilon$ , para todo  $n \geq n_0$ .

Como estamos supondo  $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergente em  $\mathcal{C}$ , então  $K \in \mathcal{C}$ . Resta mostrar que  $K$  é convexo. Para isso, sejam  $a, b \in K$  e  $x = \alpha a + (1 - \alpha)b$ , com  $\alpha \in (0, 1)$ .

Como  $K_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} K$ , então, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 > 0$  tal que  $d_H(K_n, K) < \varepsilon/2$ , para todo  $n \geq n_0$ . Logo,  $K \subset K_{n_0} + B(0, \varepsilon/2)$  e  $K_{n_0} \subset K + B(0, \varepsilon/2)$ . Assim  $a, b \in K \subset K_{n_0} + B(0, \varepsilon/2)$ . Portanto  $x \in K_{n_0} + B(0, \varepsilon/2)$ , pois  $K_{n_0} + B(0, \varepsilon/2)$  é convexo.

Por outro lado,  $x \in K_{n_0} + B(0, \varepsilon/2) \subset [K + B(0, \varepsilon/2)] + B(0, \varepsilon/2) = K + B(0, \varepsilon)$ .

Resumindo, dado  $\varepsilon > 0$ ,  $x \in K + B(0, \varepsilon)$ , ou seja,  $d(x, K) < \varepsilon$ . Como  $\varepsilon$  foi escolhido de forma genérica, então  $d(x, K) = 0$  e  $x \in K$ , pois  $K$  é compacto.  $\square$

Outras aplicações que faremos do teorema de Blaschke serão mostrar que, para todo  $S \in \mathcal{C}$ , existe uma bola fechada com raio máximo contida em  $S$  e uma bola fechada com raio mínimo que contém  $S$ . Antes de provarmos esses teoremas, precisamos de alguns resultados.

**Lema 1.57**

Sejam  $B_1 = B[c_1, r_1]$  e  $B_2 = B[c_2, r_2]$  duas bolas fechadas de  $\mathbb{R}^n$ . Então  $d_H(B_1, B_2) = \|c_1 - c_2\| + |r_1 - r_2|$ .

**Prova:** Suponhamos, sem perda de generalidade, que  $r_1 \geq r_2$  e seja  $\alpha = \|c_1 - c_2\| + |r_1 - r_2| = \|c_1 - c_2\| + r_1 - r_2$ .

Passo 1:  $B_1 \subset B_2 + B(0, \alpha + \varepsilon), \forall \varepsilon > 0$ .

Sejam  $\varepsilon > 0$  e  $x \in B_1$ . Logo  $d(x, c_1) \leq r_1$ . Mas  $d(x, c_2) \leq d(x, c_1) + d(c_1, c_2) \leq r_1 + d(c_1, c_2)$ , portanto  $x \in B[c_2, r_1 + \|c_1 - c_2\|] \subset B(c_2, r_1 + \|c_1 - c_2\| + \varepsilon)$ .

Por outro lado,  $r_1 + \|c_1 - c_2\| + \varepsilon = r_2 + \|c_1 - c_2\| + r_1 - r_2 + \varepsilon = r_2 + \alpha + \varepsilon$ , assim  $B(c_2, r_1 + \|c_1 - c_2\| + \varepsilon) = B[c_2, r_2] + B(0, \alpha + \varepsilon) = B_2 + B(0, \alpha + \varepsilon)$ . Resulta que  $x \in B_2 + B(0, \alpha + \varepsilon)$ .

Passo 2:  $B_2 \subset B_1 + B(0, \alpha + \varepsilon), \forall \varepsilon > 0$ .

Sejam  $\varepsilon > 0$  e  $x \in B_2$ , logo  $d(x, c_2) \leq r_2$ . Mas  $d(x, c_1) \leq d(x, c_2) + d(c_1, c_2) \leq r_2 + d(c_1, c_2)$ , então  $x \in B[c_1, r_2 + \|c_1 - c_2\|] \subset B(c_1, r_2 + \|c_1 - c_2\| + \varepsilon)$ .

Porém  $r_2 + \|c_1 - c_2\| + \varepsilon = r_1 + \|c_1 - c_2\| + r_2 - r_1 + \varepsilon \leq r_1 + \|c_1 - c_2\| + r_1 - r_2 + \varepsilon = r_1 + \alpha + \varepsilon$ , assim  $B(c_1, r_2 + \|c_1 - c_2\| + \varepsilon) \subset B(c_1, r_1 + \alpha + \varepsilon) = B[c_1, r_1] + B(0, \alpha + \varepsilon) = B_1 + B(0, \alpha + \varepsilon)$ . Portanto  $x \in B_1 + B(0, \alpha + \varepsilon)$ .

Pelos passos 1 e 2, concluímos que  $\inf\{\varepsilon \geq 0 \mid B_1 \subset B_2 + B(0, \varepsilon) \text{ e } B_2 \subset B_1 + B(0, \varepsilon)\} \leq \alpha$ .

Suponhamos, por absurdo, que  $\inf\{\varepsilon \geq 0 \mid B_1 \subset B_2 + B(0, \varepsilon) \text{ e } B_2 \subset B_1 + B(0, \varepsilon)\} < \alpha$ , logo existe  $\varepsilon < \alpha$  tal que  $B_1 \subset B_2 + B(0, \varepsilon)$ .

Tomando  $x = c_1 - r_1 \frac{(c_2 - c_1)}{\|c_2 - c_1\|}$ , obtemos que  $d(x, c_1) = r_1$  e  $x \in B_1$ . Mas

$$\begin{aligned} d(c_2, x) &= \left\| c_2 - c_1 + r_1 \frac{(c_2 - c_1)}{\|c_2 - c_1\|} \right\| = \left\| \left( 1 + \frac{r_1}{\|c_2 - c_1\|} \right) \cdot (c_2 - c_1) \right\| \\ &= \|c_2 - c_1\| + r_1 = r_2 + \alpha. \end{aligned}$$

Resultando que  $d(x, c_2) = r_2 + \alpha > r_2 + \varepsilon$ . Logo  $B_1 \not\subset B_2 + B(0, \varepsilon)$ . Contradição.

Portanto  $d_H(B_1, B_2) = \inf\{\varepsilon \geq 0 \mid B_1 \subset B_2 + B(0, \varepsilon) \text{ e } B_2 \subset B_1 + B(0, \varepsilon)\} = \alpha$ .  $\square$

**Lema 1.58**

Seja  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma seqüência de bolas fechadas em  $\mathcal{C}$ . Se  $B_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} B$ , então  $B$  é uma bola fechada.

**Prova:** Seja  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma seqüência de bolas fechadas de  $\mathcal{C}$  convergindo para  $B \in \mathcal{C}$ . Como  $B_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} B$ , então existe um conjunto compacto  $K \subset \mathbb{R}^n$  tal que  $B_n \subset K$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Cada bola  $B_n$  possui um centro  $c_n$  e um raio  $r_n$ . Como  $B_n \subset K$ , então  $c_n \in K$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Assim, a seqüência de centros é limitada, portanto possui uma subseqüência convergente. Seja  $(c_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$  uma subseqüência de  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  com  $c_{n_i} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} c$ .

Como  $(c_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$  é uma subseqüência de  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , então  $\{n_i \mid i \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N}$  e  $(r_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$  é uma subseqüência de  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Além disso, sendo  $K$  compacto, existe uma bola que contém  $K$ , logo a seqüência de raios  $(r_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$  é limitada. Logo existe uma subseqüência convergente  $(r_{n_{i_j}})_{j \in \mathbb{N}}$  da seqüência  $(r_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ . Digamos  $r_{n_{i_j}} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} r$ .

Como  $\{n_{i_j} | j \in \mathbb{N}\} \subset \{n_i | i \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N}$ , então  $(c_{n_{i_j}})_{j \in \mathbb{N}}$  é uma subsequência de  $(c_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$  e  $c_{n_{i_j}} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} c$ .

Resumindo,  $r_{n_{i_j}} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} r$  e  $c_{n_{i_j}} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} c$  são subsequências de  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  e  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , respectivamente.

Considerando  $B_0 := B[c, r]$  e  $B = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n$ , podemos afirmar que  $B = B_0$ . Para isso, basta mostrar que  $d_H(B, B_0) \leq \varepsilon$ , qualquer que seja o  $\varepsilon > 0$ .

Tomando  $n_{i_{j_0}} \in \mathbb{N}$  tal que  $\|c - c_{n_{i_{j_0}}}\| < \frac{\varepsilon}{4}$ ,  $|r - r_{n_{i_{j_0}}}| < \frac{\varepsilon}{4}$  e  $d_H(B_{n_{i_{j_0}}}, B) < \frac{\varepsilon}{2}$ , para todo  $n_{i_j} \geq n_{i_{j_0}}$ , temos que

$$d_H(B_{n_{i_{j_0}}}, B_0) = \|c - c_{n_{i_{j_0}}}\| + |r_{n_{i_{j_0}}} - r| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Portanto

$$d_H(B, B_0) \leq d_H(B, B_{n_{i_{j_0}}}) + d_H(B_{n_{i_{j_0}}}, B_0) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Assim, concluímos que  $B = B_0$ . □

### Teorema 1.59

Para todo  $S \in \mathcal{C}$ , existe uma bola fechada contida em  $S$  com raio máximo.

**Prova:** Seja  $S \in \mathcal{C}$ . Como  $S \neq \emptyset$ , existem bolas fechadas contidas em  $S$ , pois, dado  $z \in S$ , obtemos que  $\{z\} = B[z, 0] \subset S$ . Assim, podemos definir  $\mathcal{F} := \{B[x, \varepsilon] | \varepsilon \geq 0 \text{ e } B[x, \varepsilon] \subset S\}$  e  $g : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$  por  $g(X) = \frac{D(X)}{2} = \varepsilon$ . Se  $g$  for contínua e  $\mathcal{F}$  for um subconjunto compacto de  $\mathcal{C}$  então existirá uma bola  $B[x, \varepsilon] \in \mathcal{F}$  com raio máximo.

Passo 1:  $\mathcal{F}$  é compacto.

Seja  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma seqüência de elementos de  $\mathcal{F}$ , logo cada  $B_n$  é uma bola fechada contida em  $S$ . Se  $\{B_n | n \in \mathbb{N}\}$  for finito, então  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  possui subsequência convergente, convergindo para um ponto de  $\mathcal{F}$ .

Suponhamos que  $\{B_n | n \in \mathbb{N}\}$  tem infinitos elementos, logo (pelo teorema de Blaschke)  $\{B_n | n \in \mathbb{N}\}$  possui um ponto de acumulação, que é um subconjunto compacto e não vazio de  $S$ . Seja  $B$  esse ponto de acumulação.

Sendo  $B$  ponto de acumulação de  $\{B_n | n \in \mathbb{N}\}$ , então existe uma subsequência  $(B_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$  de  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergindo para  $B$ . Assim, pelo Lema 1.58,  $B$  é uma bola fechada contida em  $S$ , pois cada  $B_{n_i}$  é uma bola fechada. Portanto  $B \in \mathcal{F}$  e  $\mathcal{F}$  é compacto.

Passo 2:  $g$  é contínua.

Seja  $\mathcal{W}$  o conjunto de todas as bolas fechadas de  $\mathcal{C}$ , logo  $\mathcal{F} \subset \mathcal{W}$ . Afirimo que  $g : \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $g(X) = \frac{D(X)}{2} = \varepsilon$ , é contínua.

De fato, sejam  $B_0 \in \mathcal{W}$  e  $\varepsilon > 0$ . Se  $d_H(B_0, B_1) < \varepsilon$ , então (pelo Lema 1.57)  $\|c_0 - c_1\| + |r_0 - r_1| < \varepsilon$ . Portanto  $|r_0 - r_1| < \varepsilon$  e  $|g(B_0) - g(B_1)| < \varepsilon$ .

Assim,  $g$  é contínua no ponto  $B_0$ , sendo  $B_0$  um ponto qualquer de  $\mathcal{W}$ . □

### Teorema 1.60

Para todo  $S \in \mathcal{C}$ , existe uma bola  $B[x, \varepsilon] \supset S$  com raio mínimo.

**Prova:** Seja  $S \in \mathcal{C}$ . Como  $S$  é limitado, então existem bolas fechadas que contêm  $S$ . Resta mostrarmos que existe uma bola fechada com raio mínimo que contém  $S$ .

Entretanto, como  $S$  é compacto, e sendo  $D$  o diâmetro de  $S$ , existem  $a, b \in S$  tais que  $d(a, b) = D$ .

Passo 1:  $S \subset R$ , sendo  $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ , com  $|b_i - a_i| = D, \forall i = 1, \dots, n$ .

Como  $S \subset \mathbb{R}^n$  é compacto, então, para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ , a função  $\pi_i(x) = x_i$  possui um ponto de máximo e um de mínimo em  $S$ . Fixado  $i \in \{1, \dots, n\}$ , sejam  $p^i, q^i \in S$ , tais que  $\pi_i(p^i) = p_i^i = \min\{\pi_i(x) | x \in S\}$  e  $\pi_i(q^i) = q_i^i = \max\{\pi_i(x) | x \in S\}$ . Assim,  $q_i^i - p_i^i = |q_i^i - p_i^i| \leq d(q^i, p^i) \leq D$ .

Agora, para cada  $i$ , seja  $b_i$  tal que  $p_i^i \leq q_i^i \leq b_i$  e  $b_i - p_i^i = D$ . Tomando  $a_i = p_i^i$ , temos que  $S \subset [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ . De fato, dado  $x \in S$ ,  $x_i \in [p_i^i, q_i^i] \subset [p_i^i, b_i] = [a_i, b_i]$ .

Transladando se necessário, podemos supor que  $a_i = -D/2$  e  $b_i = D/2$ .

Passo 2: Existe uma bola fechada  $B$ , contendo  $S$ , com raio  $D$ .

Sejam  $h, k \in S$  tais que  $d(h, k) = D$ . Seja também  $m = \frac{h+k}{2} \in S$  o ponto médio entre  $h$  e  $k$ . Afirimo que  $S \subset B[m, D]$ . De fato, se  $x \in S$ , então  $d(x, m) \leq D$ . Portanto  $S \subset B[m, D]$ .

Passo 3: Se  $S \subset B[x, \varepsilon]$  e  $\varepsilon \leq D$ , então  $B[x, \varepsilon] \subset C = [a_1 - 2D, b_1 + 2D] \times \cdots \times [a_n - 2D, b_n + 2D]$ .

Suponhamos  $S \subset B[x, \varepsilon]$  com  $\varepsilon \leq D$ . Logo  $S \subset B[x, \varepsilon] \subset B[x, D]$ .

Sejam  $y \in B[x, D]$  e  $z \in S$ . Como  $S \subset B[x, D]$ , então  $d(x, y) \leq 2D$ , portanto  $y_i \in [z_i - 2D, z_i + 2D] \subset [a_i - 2D, b_i + 2D]$ .

Concluimos que  $y \in [a_1 - 2D, b_1 + 2D] \times \cdots \times [a_n - 2D, b_n + 2D] = C$ .

Passo 4: O conjunto  $\mathcal{F} = \{B[x, e] | S \subset B[x, \varepsilon] \subset C\}$  é compacto em  $\mathcal{C}$ , e não é vazio.

Pelo passo 2, existe uma bola  $B$  contendo  $S$  e com raio  $D$ . Já pelo passo 3,  $D \subset C$ . Portanto  $B \in \mathcal{F}$  e  $\mathcal{F}$  não é vazio.

Para mostrarmos que  $\mathcal{F}$  é compacto, seja  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  uma seqüência infinita de elementos de  $\mathcal{F}$ . Basta mostrar que existe uma subseqüência  $(B_{n_i})_{i \in \mathbb{N}^*}$  de  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ , com  $B_{n_i} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} B \in \mathcal{F}$ .

Pelo teorema de Blaschke, existe uma subseqüência  $B_{n_i} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} B \in \mathcal{C}$ , com  $B \subset C$ . Além disso, pela demonstração do teorema de Blaschke,

$$B = \bigcap_{j=1}^{\infty} \overline{\left( \bigcup_{i=j}^{\infty} B_{n_i} \right)}.$$

Mas  $S \subset B_{n_i}$ , para cada  $i \in \mathbb{N}^*$ , pois cada  $B_{n_i} \in \mathcal{F}$ . Portanto  $S \subset B$ . Além disso, pelo Lema 1.58,  $B$  é uma bola fecha.

Resumindo  $S \subset B \subset C$ , logo  $B \in \mathcal{F}$ . Portanto  $\mathcal{F}$  é compacto.

Como  $\mathcal{F}$  é compacto, o teorema é consequência da continuidade da função  $g$  vista na prova do Teorema 1.59.  $\square$

# Capítulo 2

## Algumas funções definidas em $\mathcal{C}$

Nesse capítulo serão estudadas algumas funções definidas no conjunto  $\mathcal{C}$ . A maior parte dessas funções poderia ter sido definida em  $\mathcal{C}$ , sem que houvesse nenhuma alteração nos resultados, mas, como a convexidade é necessária em alguns casos, resolvemos restringir o domínio de todas as funções.

### 2.1 Funções suporte

#### Definição 2.1

Seja  $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ . Definimos a **função suporte**  $H_u : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ , na direção  $u$ , por

$$H_u(K) := \max \{ \langle k, u \rangle \mid k \in K \}.$$

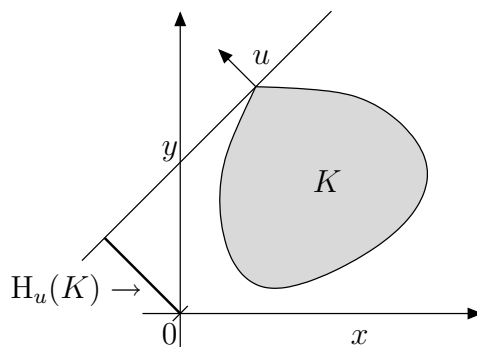


Figura 2.1:

A função suporte é importante pois será utilizada para definirmos a "largura mínima" de um conjunto convexo. Além disso, algumas propriedades do diâmetro e da largura mínima são conseqüências de propriedades das funções suporte. A seguinte proposição, fácil de ser demonstrada, nos dá algumas propriedades das funções suporte.

#### Proposição 2.1

Sejam  $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ ,  $X, Y \in \mathcal{C}$ ,  $\alpha \geq 0$  e  $H_u$  a função suporte associada a  $u$ . Então:

- (i)  $H_u(X + Y) = H_u(X) + H_u(Y)$ ;

- (ii) Se  $X \subset Y$ , então  $H_u(X) \leq H_u(Y)$ ;
- (iii)  $H_u(\alpha X) = \alpha H_u(X)$ ;
- (iv)  $H_u(B[0, \alpha]) = \alpha$ ;
- (v)  $H_u(X + B[x, \alpha]) = H_u(X) + \langle x, u \rangle + \alpha, \forall x \in \mathbb{R}^n$ ;
- (vi)  $H_u(-X) = H_{-u}(X)$ .

**Teorema 2.2**

Dado  $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ , a função suporte  $H_u : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua em  $\mathcal{C}$ .

**Prova:** Seja  $K \in \mathcal{C}$ . Mostraremos que  $H_u$  é contínua em  $K$ . Para isso, tome  $\varepsilon > 0$  qualquer e  $\delta = \varepsilon/2$ .

Suponhamos  $d_H(K, L) < \delta$ , logo  $K \subset L + B[0, \delta]$  e  $L \subset K + B[0, \delta]$ . Logo

$$\begin{cases} H_u(K) \leq H_u(L + B[0, \delta]) = H_u(L) + H_u(B[0, \delta]) = H_u(L) + \delta, \\ H_u(L) \leq H_u(K + B[0, \delta]) = H_u(K) + H_u(B[0, \delta]) = H_u(K) + \delta. \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{cases} H_u(K) - H_u(L) \leq \delta, \\ H_u(L) - H_u(K) \leq \delta. \end{cases}$$

Concluimos que  $|H_u(K) - H_u(L)| \leq \delta = \varepsilon/2 < \varepsilon$ . Portanto  $H_u$  é contínua em  $K$ .  $\square$

Cada função suporte  $H_u$  está relacionada com um vetor  $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ . Porém, se fixarmos  $K \in \mathcal{C}$ , podemos observar a função  $H_u(K)$  como uma função cuja variável é  $u$ . Surge então a pergunta: será que  $H_u(K)$  é contínua em  $u$ ? A resposta a essa pergunta é afirmativa e é o conteúdo da próxima proposição.

**Proposição 2.3**

Fixado  $K \in \mathcal{C}$ , a função  $f : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(u) = H_u(K)$  é contínua em  $\mathbb{S}^{n-1}$ .

**Prova:** Para mostrar que  $f$  é contínua em  $\mathbb{S}^{n-1}$ , mostraremos que  $\bar{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $\bar{f}(u) = \max\{\langle u, k \rangle \mid k \in K\}$ , é contínua. Dessa forma,  $f = \bar{f}|_{\mathbb{S}^{n-1}}$  também será contínua.

Como  $K$  é compacto, existe um  $m > 0$  tal que  $\|k\| \leq m$ , qualquer que seja  $k \in K$ . Assim, dado  $u \in \mathbb{R}^n$ , temos que  $\langle u, k \rangle \leq \|u\| \cdot \|k\| \leq m \cdot \|u\|, \forall k \in K$ . Segue que,  $\max\{\langle u, k \rangle \mid k \in K\} = \langle u, k_0 \rangle \leq \|u\| \cdot \|k_0\| \leq m \cdot \|u\|$ .

Resumindo,  $\bar{f}(u) \leq m \cdot \|u\|, \forall u \in \mathbb{S}^{n-1}$ .

Seja  $\varepsilon > 0$  e  $u \in \mathbb{R}^n$ . Mostraremos que  $\bar{f}$  é contínua em  $u$ . De fato, tomando  $\delta = \varepsilon/m$  e supondo  $\|u - v\| < \delta$ . Temos:

$$\begin{aligned} \bar{f}(u) &= \bar{f}(v + u - v) = \max\{\langle v + u - v, k \rangle \mid k \in K\} \\ &\leq \max\{\langle v, k \rangle \mid k \in K\} + \max\{\langle u - v, k \rangle \mid k \in K\} = \bar{f}(v) + \bar{f}(u - v). \end{aligned}$$

Logo,

$$\bar{f}(u) - \bar{f}(v) \leq \bar{f}(u - v) \leq m \cdot \|u - v\| < m \cdot \delta = \varepsilon.$$

Analogamente,  $\bar{f}(v) - \bar{f}(u) < \varepsilon$ . Portanto  $\bar{f}$  é contínua em  $u$  e está provada a proposição.  $\square$

A seguinte e última proposição dessa seção relaciona as funções suporte com os semi-espacos suporte.

**Proposição 2.4**

Seja  $K \in \mathcal{C}$  e  $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ . Então o subespaço suporte de  $K$  com vetor normal exterior  $u$  é o conjunto  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, u \rangle \leq H_u(K)\}$ .

**Prova:** Sejam  $E = \{x \mid \langle x - k_0, u \rangle \leq 0\}$  o semi espaço suporte de  $K$  com vetor normal exterior  $u$  e face  $\mathcal{H}$ . Suponha também que  $k_0 \in \mathcal{H} \cap K$ . Logo  $\langle k - k_0, u \rangle \leq 0, \forall k \in K$ , portanto  $\langle k, u \rangle \leq \langle k_0, u \rangle, \forall k \in K$ .

Como  $k_0 \in K$ , então  $\max\{\langle k, u \rangle \mid k \in K\} = \langle k_0, u \rangle$ , ou seja,  $H_u(K) = \langle k_0, u \rangle$ . Segue então que  $E = \{x \mid \langle x - k_0, u \rangle \leq 0\} = \{x \mid \langle x, u \rangle \leq \langle k_0, u \rangle\} = \{x \mid \langle x, u \rangle \leq H_u(K)\}$ .  $\square$

## 2.2 As funções largura e a largura mínima

**Definição 2.2**

Seja  $K \in \mathcal{C}$ . Definimos, para cada  $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ , uma função largura  $\omega_u : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$  por  $\omega_u(K) := H_u(K) + H_{-u}(K)$ .

A imagem de  $K$  por  $\omega_u$  é chamada de **largura de  $K$  na direção  $u$** .

Segue da definição, e da continuidade das funções suporte, que cada função largura é contínua em  $\mathcal{C}$ . Já da Proposição 2.3, concluímos que, para cada  $K \in \mathcal{C}$ , a função  $g_K : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $g_K(u) = \omega_u(K)$  é contínua. Portanto, sendo  $\mathbb{S}^{n-1}$  compacto, existem  $u_0, u_1 \in \mathbb{S}^{n-1}$  tais que  $g_K(u_0) = \min\{\omega_u(K) \mid u \in \mathbb{S}^{n-1}\}$  e  $g_K(u_1) = \max\{\omega_u(K) \mid u \in \mathbb{S}^{n-1}\}$ .

**Proposição 2.5**

Seja  $K \in \mathcal{C}$ . Então  $\omega_u(K) = d(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ , sendo  $\mathcal{H}_1 = \{x \mid \langle x, u \rangle = H_u(K)\}$  e  $\mathcal{H}_2 = \{x \mid \langle x, -u \rangle = H_{-u}(K)\}$ .

**Prova:** Segue da Proposição 2.4.  $\square$

**Proposição 2.6**

Sejam  $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ ,  $X, Y \in \mathcal{C}$ ,  $\varepsilon \geq 0$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ , então:

- (i)  $\omega_u(X + Y) = \omega_u(X) + \omega_u(Y)$ ;
- (ii)  $\omega_u(\alpha X) = |\alpha| \cdot \omega_u(X)$ ;
- (iii) Se  $X \subset Y$ , então  $\omega_u(X) \leq \omega_u(Y)$ ;
- (iv)  $\omega_u(X + B[x, \varepsilon]) = \omega_u(X) + 2\varepsilon$ .

**Prova:** Segue da definição e da Proposição 2.1.  $\square$

**Definição 2.3**

Dado  $K \in \mathcal{C}$ , a **largura mínima de  $K$**  é o valor  $\min\{\omega_u(K) \mid u \in \mathbb{S}^{n-1}\}$ .

Denotamos  $\omega(K) := \min\{\omega_u(K) \mid u \in \mathbb{S}^{n-1}\}$ .

**Proposição 2.7**

Sejam  $X, Y \in \mathcal{C}$ ,  $\varepsilon \geq 0$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Então:

- (i)  $\omega(X + Y) \geq \omega(X) + \omega(Y)$ ;
- (ii)  $\omega(\alpha X) = |\alpha| \cdot \omega(X)$ ;
- (iii) Se  $X \subset Y$ , então  $\omega(X) \leq \omega(Y)$ ;
- (iv)  $\omega(X + B[x, \varepsilon]) = \omega(X) + 2\varepsilon$ .

**Prova:**

(i) Sabemos que  $\omega_u(X + Y) = \omega_u(X) + \omega_u(Y)$ , pela Proposição 2.6. Assim,  $\omega_u(X + Y) \geq \inf \{\omega_v(X) \mid v \in \mathbb{S}^{n-1}\} + \inf \{\omega_v(Y) \mid v \in \mathbb{S}^{n-1}\}$ . Logo,  $\inf \{\omega_v(X + Y) \mid v \in \mathbb{S}^{n-1}\} \geq \inf \{\omega_v(X) \mid v \in \mathbb{S}^{n-1}\} + \inf \{\omega_v(Y) \mid v \in \mathbb{S}^{n-1}\}$ . Portanto  $\omega(X + Y) \geq \omega(X) + \omega(Y)$ .

(ii) a (iv) Segue da definição e da Proposição 2.6.  $\square$

**Teorema 2.8**

$\omega$  é contínua em  $\mathcal{C}$ .

**Prova:** Sejam  $K \in \mathcal{C}$  e  $\varepsilon > 0$ . Tomemos  $\delta = \varepsilon/4$ . Se  $L \in B_{\mathbb{H}}(K, \delta)$ , então  $d_{\mathbb{H}}(K, L) < \delta \Rightarrow K \subset L + B[0, \delta]$  e  $L \subset K + B[0, \delta]$ . Logo, pela Proposição 2.7,  $\omega(K) \leq \omega(L) + 2\delta$  e  $\omega(L) \leq \omega(K) + 2\delta$ . Portanto  $|\omega(K) - \omega(L)| \leq 2\delta = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ .  $\square$

**Definição 2.4**

Um conjunto  $K \in \mathcal{C}$  é dito **centralmente simétrico** quando existe  $c \in K$  tal que, se  $x \in K$  então  $2c - x \in K$ .

Pela definição acima, um conjunto  $K$  é centralmente simétrico quando possui um ponto  $c$  que satisfaz: se  $x \in K$ , então a reflexão de  $x$  sobre  $c$  também está em  $K$ .

**Definição 2.5**

Seja  $K \in \mathcal{C}$ , então o conjunto  $K^C := \frac{K-K}{2}$  é chamado de **simetrização central de  $K$** .

Facilmente se prova que a simetrização central  $K^C$  de  $K$  é um conjunto centralmente simétrico com centro na origem. Para isso, basta ver que  $\frac{x-y}{2} \in K^C \Leftrightarrow x, y \in K \Leftrightarrow \frac{-x+y}{2} \in K^C$ .

**Teorema 2.9**

Se  $K \in \mathcal{C}$ , então:

- (i)  $\omega(K^C) = \omega(K)$  e
- (ii)  $\omega(\alpha K + (1 - \alpha)K^C) = \omega(K), \forall \alpha \in [0, 1]$ .

**Prova:**

(i) Sabemos que, para cada  $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ ,  $\omega_u(K^C) = \omega_u\left(\frac{K-K}{2}\right) = \frac{1}{2}\omega_u(K) + \frac{1}{2}\omega_u(K) = \omega_u(K)$ , pela Proposição 2.6. Logo  $\inf \{\omega_u(K^C) \mid u \in \mathbb{S}^{n-1}\} = \inf \{\omega_u(K) \mid u \in \mathbb{S}^{n-1}\}$ , ou seja,  $\omega(K^C) = \omega(K)$ .

(ii) Seja  $\alpha \in [0, 1]$  e  $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ . Então

$$\begin{aligned} \omega_u(\alpha K + (1 - \alpha)K^C) &= \alpha\omega_u(K) + (1 - \alpha)\omega_u(K^C) \\ &= \alpha\omega_u(K) + (1 - \alpha)\omega_u(K) = \omega_u(K). \end{aligned}$$

Isso implica em

$$\inf_{u \in \mathbb{S}^{n-1}} \{\omega_u(\alpha K + (1 - \alpha)K^C)\} = \inf_{u \in \mathbb{S}^{n-1}} \{\omega_u(K)\}.$$

O que conclui nossa demonstração.  $\square$



## 2.3 Função diâmetro

Sabemos que o diâmetro  $D(K)$  de um conjunto  $K$  é dado por  $D(K) := \sup\{d(x, y) \mid x, y \in K\}$ . Dessa forma, a função diâmetro  $D : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$  está bem definida. Veremos algumas propriedades da função diâmetro.

### Proposição 2.10

Se  $K \in \mathcal{C}$ , então  $D(K) = \max\{\omega_u(K) \mid u \in \mathbb{S}^{n-1}\}$ .

**Prova:**

Passo 1:  $D(K) \geq \max\{\omega_u(K) \mid u \in \mathbb{S}^{n-1}\}$ .

Sabemos que existe  $u_0 \in \mathbb{S}^{n-1}$  tal que  $\max\{\omega_u(K) \mid u \in \mathbb{S}^{n-1}\} = \omega_{u_0}(K)$ . Sejam então  $\mathcal{H}^{u_0}$  o hiperplano suporte de  $K$ , com vetor normal exterior  $u_0$ , e  $\mathcal{H}^{-u_0}$  o hiperplano suporte de  $K$  com vetor normal interior  $u_0$ . Logo  $\omega_{u_0}(K) = d(H^{u_0}, H^{-u_0})$ , pela Proposição 2.5.

Dados  $x \in K \cap H^{u_0}$  e  $y \in K \cap H^{-u_0}$ , temos

$$\omega_{u_0}(K) = d(\mathcal{H}^{u_0}, \mathcal{H}^{-u_0}) \leq d(x, y) \leq D(K).$$

Passo 2:  $D(K) \leq \max\{\omega_u(K) \mid u \in \mathbb{S}^{n-1}\}$ .

Sejam  $x_0, y_0 \in \partial K$  tais que  $D(K) = d(x_0, y_0)$ . Sejam também  $\mathcal{H}_{x_0} = \{x \mid \langle x - x_0, y_0 - x_0 \rangle = 0\}$  e  $\mathcal{H}_{y_0} = \{x \mid \langle x - y_0, y_0 - x_0 \rangle = 0\}$ . Mostraremos que  $\mathcal{H}_{x_0}$  e  $\mathcal{H}_{y_0}$  são hiperplanos suporte de  $K$ . Para isso, mostraremos que  $K \subset \{x \mid \langle x - x_0, y_0 - x_0 \rangle \geq 0\}$ , e analogamente pode-se provar que  $K \subset \{x \mid \langle x - y_0, y_0 - x_0 \rangle \leq 0\}$ .

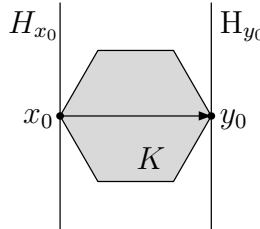


Figura 2.2:

Suponhamos (por absurdo) que  $x \in K$  e  $\langle x - x_0, y_0 - x_0 \rangle < 0$ , assim  $\langle x, y_0 \rangle - \langle x, x_0 \rangle - \langle x_0, y_0 \rangle + \|x_0\|^2 < 0$ , logo  $-\langle x, y_0 \rangle > -\langle x, x_0 \rangle - \langle x_0, y_0 \rangle + \|x_0\|^2$ .

Segue que

$$\begin{aligned} \|x - y_0\|^2 &= \|x\|^2 - 2\langle x, y_0 \rangle + \|y_0\|^2 \\ &> \|x\|^2 - 2\langle x, x_0 \rangle + \|x_0\|^2 + \|x_0\|^2 - 2\langle x_0, y_0 \rangle + \|y_0\|^2 \geq \|x_0 - y_0\|^2. \end{aligned}$$

Contradição, pois  $x, y_0 \in K$  e  $D(K) = \|x_0 - y_0\|$ .

Concluimos que  $K \subset \{x \mid \langle x - x_0, y_0 - x_0 \rangle \geq 0\}$ . Dessa forma,

$$d(\mathcal{H}_{x_0}, \mathcal{H}_{y_0}) = \|y_0 - x_0\| = \omega_{\frac{y_0 - x_0}{\|y_0 - x_0\|}}(K) \leq \sup\{\omega_u(K) \mid u \in \mathbb{S}^{n-1}\},$$

portanto,  $D(K) \leq \sup\{\omega_u(K) \mid u \in \mathbb{S}^{n-1}\}$ . □

**Lema 2.11**

Se  $K \in \mathcal{C}$  e  $D(K) = d(x, y)$ , com  $x, y \in K$ , então existem hiperplanos  $\mathcal{H}_x$  e  $\mathcal{H}_y$ , suporte de  $K$  em  $x$  e  $y$  respectivamente e ortogonais ao segmento  $SG[x; y]$ .

**Prova:** Sai da demonstração da Proposição 2.10. □

**Proposição 2.12**

Sejam  $X, Y \in K$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Então:

- (i)  $D(X + Y) \leq D(X) + D(Y)$ ;
- (ii)  $D(\alpha X) = |\alpha| \cdot D(X)$ ;
- (iii) Se  $X \subset Y$ , então  $D(X) \leq D(Y)$ ;
- (iv)  $D(X + B[x, \varepsilon]) = D(X) + 2\varepsilon$ .

**Prova:** A prova fica como exercício. Uma dica para o item (iv) é utilizar a Proposição 2.10. □

**Teorema 2.13**

A função diâmetro é contínua em  $\mathcal{C}$ .

**Prova:** Análoga à prova feita para o Teorema 2.8, mas utilizando a Proposição 2.12. □

**Teorema 2.14**

Se  $K \in \mathcal{C}$ , então  $D(K^C) = D(K)$  e  $D(\alpha K + (1 - \alpha)K^C) = D(K), \forall \alpha \in [0, 1]$ .

**Prova:** Análoga à prova do Teorema 2.9. □

**Definição 2.6**

Dizemos que  $K \in \mathcal{C}$  **tem largura constante** (ou que  $K$  é um conjunto de largura constante) quando existe  $c \geq 0$  tal que  $\omega_u(K) = c$ , para todo  $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ .

**Teorema 2.15**

Se  $K \in \mathcal{C}$ , então:

- (i)  $\omega(K) \leq D(K)$ ;
- (ii)  $\omega(K) = D(K)$  se, e somente se,  $K$  tem largura constante.

**Prova:** Sai direto da definição e da Proposição 2.10. □

## 2.4 Função inraio

**Definição 2.7**

Seja  $K \in \mathcal{C}$ . O **inraio de  $K$** , denotado por  $r(K)$ , é o raio de uma bola fechada contida em  $K$  com raio máximo.

**Proposição 2.16**

Sejam  $X, Y \in \mathcal{C}$ ,  $\varepsilon \geq 0$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ , então:

- (i)  $r(X + Y) \geq r(X) + r(Y)$ ;
- (ii)  $r(\alpha X) = |\alpha| \cdot r(X)$ ;
- (iii) Se  $X \subset Y$ , então  $r(X) \leq r(Y)$ ;
- (iv)  $r(X + B[x, \varepsilon]) = r(X) + \varepsilon$ .

**Prova do item (iv):** Suponhamos, sem perda de generalidade, que  $x = 0$  é a origem. Mostramos que  $r(X + B[0, \varepsilon]) \geq r(X) + \varepsilon$  e depois que  $r(X + B[0, \varepsilon]) \leq r(X) + \varepsilon$ .

Passo 1:  $r(X + B[x, \varepsilon]) \geq r(X) + \varepsilon$ .

Sejam  $\beta = r(K)$  e  $B[x, \beta] \subset K$ . Logo  $B[x, \beta + \varepsilon] = B[x, \beta] + B[0, \varepsilon] \subset K + B[x, \varepsilon]$ . Portanto, por (iii), temos que  $r(B[x, \beta + \varepsilon]) \leq r(K + B[0, \varepsilon])$ , ou seja,  $\beta + \varepsilon \leq r(K + B[x, \varepsilon])$ .

Passo 2:  $r(X + B[x, \varepsilon]) \leq r(X) + \varepsilon$ .

Suponhamos, por absurdo, que  $r(K + B[0, \varepsilon]) > r(K) + \varepsilon$ . Logo existem  $\delta > 0$  e  $a \in K + B[0, \varepsilon]$ , tais que,  $B[a, \beta + \varepsilon + \delta] \subset K + B[0, \varepsilon]$ .

Como  $\beta = r(K)$ , então  $B[a, \beta + \delta] \not\subset K$ , logo  $B[a, \beta + \delta] \setminus K \neq \emptyset$ .

Seja então  $y \in B[a, \beta + \delta] \setminus K$  tal que  $d(y, K) > 0$  e consideremos  $z \in K$  tal que  $d(y, z) = d(y, K)$ . Então, pela Proposição 1.40, todo ponto  $x$  da semi-reta  $\overrightarrow{zy}$  satisfaz  $d(x, z) = d(x, K)$ .

Seja então  $w \in \overrightarrow{zy} \cap S(y, \varepsilon)$  tal que  $z * y * w$ . Logo  $w \in B[y, \varepsilon] \subset B[a, \beta + \delta + \varepsilon]$ , pois  $y \in B[a, \beta + \delta]$ . Além disso  $w \notin K + B[0, \varepsilon]$ , pois  $d(w, K) = d(w, z) = d(w, y) + d(y, z) = \varepsilon + d(y, z) > \varepsilon$ . Contradição.  $\square$

### Teorema 2.17

A função inraio  $r : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua.

**Prova:** Sejam  $K \in \mathcal{C}$  e  $\varepsilon > 0$ . Tomando  $\delta = \varepsilon/2$ , temos que, se  $d_H(H, K) < \delta$ , então  $H \subset K + B[0, \delta]$  e  $K \subset H + B[0, \delta]$ . Logo  $r(H) \leq r(K + B[0, \delta]) = r(K) + \delta$  e  $r(K) \leq r(H) + \delta$ . Segue que  $|r(H) - r(K)| \leq \delta < \varepsilon$ .  $\square$

### Teorema 2.18

Sejam  $K \in \mathcal{C}$ , então:

- (i)  $2r(K) \leq \omega(K)$ ;
- (ii)  $2r(K) \leq D(K)$ ;
- (iii)  $2r(K) = D(K)$  se, e só se,  $K$  é uma bola fechada.

**Prova:**

(i) Seja  $\alpha = r(K)$ , então existe  $k \in K$  tal que  $B[k, \alpha] \subset K$ , logo  $\omega(B[k, \alpha]) \leq \omega(K)$ , ou seja,  $2\alpha \leq \omega(K)$ . Portanto  $2r(K) \leq \omega(K)$ .

(ii) Como  $\omega(K) \leq D(K)$ , então  $2r(K) \leq D(K)$  (ver Teorema 2.15).

(iii) Suponhamos que  $2r(K) = D(K)$ , logo  $\omega(K) = D(K)$  e, pelo Teorema 2.15,  $K$  tem largura constante.

Sejam  $r = r(K)$  e  $B[k, r] \subset K$ . Como  $K$  tem largura constante, então  $\omega_u(K) = 2r = \min\{\omega_v(K) \mid v \in \mathbb{S}^{n-1}\}$ ,  $\forall u \in \mathbb{S}^{n-1}$ .

Consideremos, para cada  $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ ,  $\mathcal{H}^u$  a face do semi-espaço suporte de  $K$  com vetor normal exterior  $u$ , e  $\mathcal{H}^{-u}$  a face do semi-espaço suporte de  $K$  com vetor normal interior  $u$ . Assim  $d(\mathcal{H}^u, \mathcal{H}^{-u}) = 2r, \forall u \in \mathbb{S}^{n-1}$ .

Como  $B[k, r] \subset K$ , então  $B[k, r]$  é um subconjunto da região compreendida entre os hiperplanos  $\mathcal{H}^u$  e  $\mathcal{H}^{-u}$ . Mas  $d(\mathcal{H}^u, \mathcal{H}^{-u}) = 2r$ , logo  $\mathcal{H}^u$  e  $\mathcal{H}^{-u}$  são hiperplanos suporte de  $B[k, r]$ , para todo  $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ . Assim, cada semi-espaço suporte de  $K$  é também um semi-espaço suporte de  $B[k, r]$ .

Segue, pelo Teorema 1.42, que  $B[k, r] = \bigcap_{u \in \mathbb{S}^{n-1}} E_u = K$ , sendo  $E_u$  o semi-espaço suporte de  $K$  com vetor normal exterior  $u$ .  $\square$

**Observação:** Os conjuntos centralmente simétricos satisfazem a igualdade  $2r(K) = \omega(K)$ .

## 2.5 Função circunraio

### Definição 2.8

Seja  $K \in \mathcal{C}$ . O **circunraio de  $K$** , denotado por  $R(K)$ , é o raio da menor bola fechada que contém  $K$ .

### Proposição 2.19

Sejam  $X, Y \in \mathcal{C}$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Então:

- (i)  $R(X + Y) \leq R(X) + R(Y)$ ;
- (ii)  $R(\alpha X) = |\alpha| \cdot R(X)$ ;
- (iii) Se  $X \subset Y$ , então  $R(X) \leq R(Y)$ ;
- (iv)  $R(X + B[x, \varepsilon]) = R(X) + \varepsilon$ .

### Teorema 2.20

A função circunraio  $R : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua.

**Prova:** Análoga à prova do Teorema 2.17;  $\square$

### Teorema 2.21

Sejam  $K \in \mathcal{C}$ , então:

- (i)  $r(K) \leq R(K)$ , e  $r(K) = R(K)$  se, e só se,  $K$  é uma bola fechada;
- (ii)  $D(K) \leq 2R(K)$ ;
- (iii)  $\omega(K) \leq 2R(K)$ , e  $\omega(K) = 2R(K)$  se, e só se,  $K$  é uma bola fechada.

**Prova:** Ver [3] e [24].  $\square$

**Observação:** Os conjuntos centralmente simétricos satisfazem a igualdade  $D(K) = 2R(K)$ .

## 2.6 Funções área e perímetro

Nessa seção consideramos o conjunto  $\mathcal{C}$  como sendo o conjunto dos corpos convexos de  $\mathbb{R}^2$  para poder definir as funções área e perímetro.

### Definição 2.9

Dado  $K \in \mathcal{C}$ , a **área de  $K$** , denotada por  $A(K)$ , é definida por

$$A(K) := \int_R \chi_K,$$

sendo  $R = [a, b] \times [c, d]$  um retângulo contendo  $K$ ,  $\chi_K$  a função característica de  $K$  e a integral é a integral de Riemann.

O **perímetro de  $K$** , denotado por  $p(K)$ , é definido por

$$p(K) := \sup \{p(X) \mid K \supset X \text{ e } X \text{ é um polígono convexo}\}.$$

Quanto às funções área e perímetro, apenas assumimos a existência delas bem como a veracidade de algumas propriedades que serão vistas mais adiante. Para obter mais informações a respeito dessas funções e da prova de algumas das propriedades que serão vistas, indicamos os livros [3], [22] e [17] e as referências que constam nesses livros.

**Proposição 2.22**

Se  $X, Y \in \mathcal{C}$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ , então:

- (i)  $A(\alpha X) = \alpha^2 \cdot A(X)$ ;
- (ii)  $p(\alpha X) = |\alpha| \cdot p(X)$ ;
- (iii)  $p(X + Y) = p(X) + p(Y)$ ;
- (iv) Se  $X \subset Y$ , então  $A(X) \leq A(Y)$  e  $p(X) \leq p(Y)$ .

**Teorema 2.23**

As funções área e perímetro são contínuas em  $\mathcal{C}$ .

**Teorema 2.24**

Seja  $K \in \mathcal{C}$ , então:

- (i)  $p(K) = p(K^C)$ ;
- (ii)  $A(K) \leq A(K^C)$ ;
- (iii)  $A(K) = A(K^C)$  se, e somente se,  $K$  é centralmente simétrico.

Segue desses dois últimos teoremas o seguinte corolário a respeito da função perímetro:

**Corolário 2.25**

Se  $K \in \mathcal{C}$ , então  $p(\alpha K + (1 - \alpha)K^C) = p(K), \forall \alpha \in [0, 1]$ .

# Capítulo 3

## Os Sistemas Completos de Desigualdades

Iniciaremos nosso capítulo com a história dos sistemas completos de desigualdades. Definiremos, na primeira seção, o que são os sistemas completos de desigualdades e contaremos como surgiu esse tipo de estudo.

Na segunda seção, mostraremos a técnica desenvolvida por Blaschke para verificar se um conjunto de desigualdades é, ou não, um sistema completo e, na última seção, aplicaremos a técnica de Blaschke aos problemas resolvidos por Santaló.

Mas antes de começarmos a história dos sistemas completos de desigualdades, listaremos algumas definições que serão úteis no decorrer do capítulo.

### Definição 3.1

Consideremos um triângulo equilátero  $T$  de lado  $\ell$ . Consideremos também os três arcos de circunferência com centro nos vértices deste triângulo e raios iguais a  $k$ , com  $\omega(T) \leq k \leq \ell$ , sendo cada um desses arcos o maior arco com raio  $k$  mas que não corta o interior do triângulo  $T$ . Nessas condições, a envolvente convexa do triângulo unido com os três arcos em questão é chamada de **conjunto de Yamanouti**.

### Definição 3.2

Uma **lente simétrica** é a interseção de dois círculos com raios iguais e interseção não vazia.

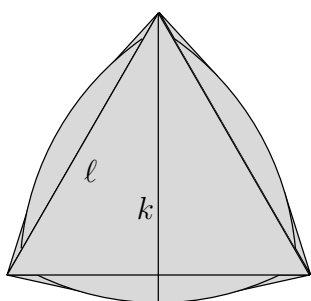


Figura 3.1: Conjunto de Yamanouti.

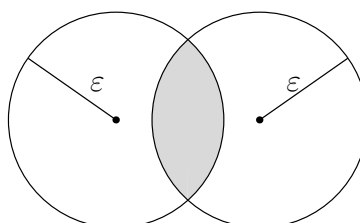


Figura 3.2: Lente Simétrica.

**Definição 3.3**

Trocando dois lados paralelos de um retângulo por dois semicírculos externos ao retângulo, com raios iguais à metade do lado que está sendo substituído, obtemos uma figura que chamaremos de **salsicha**.

**Definição 3.4**

Sejam  $B[x, \varepsilon] \subset \mathbb{R}^n$  uma bola fechada e  $p, q \in \mathbb{R}^n$ . Se  $x$  é o ponto médio entre  $p$  e  $q$ , então a envolvente convexa do conjunto  $B[x, \varepsilon] \cup \{p, q\}$  é chamada de **capbody**.

**Observação:** no decorrer dos nossos capítulos, os capbody's serão capbody's de  $\mathbb{R}^2$ , sempre que a dimensão do espaço estiver omitida.



Figura 3.3: Salsicha.

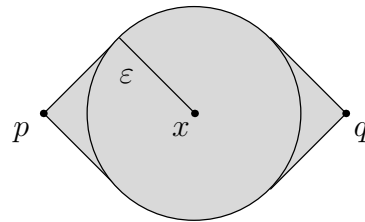


Figura 3.4: Capbody.

**Definição 3.5**

Sejam  $X$  a região do plano delimitada por duas retas paralelas  $r$  e  $\ell$ , e  $C$  um círculo cujo centro equidista de  $r$  e  $\ell$ . O conjunto  $X \cap C$  é chamado de **segmento simétrico de círculo**.

**Definição 3.6**

Sejam  $ABC$  um triângulo equilátero e  $h_A, h_B$  e  $h_C$  as alturas correspondentes aos vértices  $A, B$  e  $C$ , respectivamente. Considere também  $P_A \in h_A, P_B \in h_B$  e  $P_C \in h_C$  três pontos tais que  $d(P_A, A) = d(P_B, B) = d(P_C, C) \leq d(A, O)$ , sendo  $O$  o incentro de  $ABC$ . Sejam  $X_1$  o arco que liga  $B$  a  $C$  com centro  $P_A$ ,  $X_2$  o arco que liga  $A$  a  $B$  com centro  $P_C$  e  $X_3$  o arco que liga  $A$  a  $C$  com centro  $P_B$ . A envolvente convexa de  $ABC \cup X_1 \cup X_2 \cup X_3$  recebe o nome de **triângulo circular**.

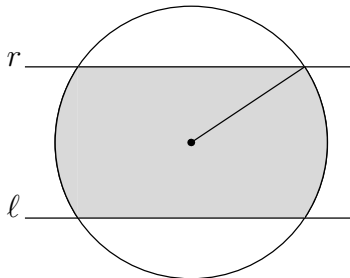


Figura 3.5: Segmento Simétrico de Círculo.

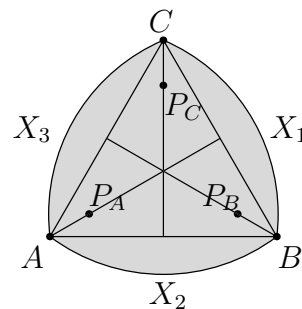


Figura 3.6: Triângulo Circular.

### 3.1 A História dos Sistemas Completos de Desigualdades

Embora esta seção se chame "A História dos Sistemas Completos de Desigualdades", não contaremos a história pelo começo, mas pela definição:

#### Definição 3.7

Sejam  $\mathcal{F}$  uma família de subconjuntos não-vazios de  $\mathbb{R}^n$  e  $a_1, \dots, a_m$  funções de  $\mathcal{F}$  em  $\mathbb{R}_+$ . Dizemos que as  $k$  desigualdades  $d_1(x_1, \dots, x_m), \dots, d_k(x_1, \dots, x_m)$  são, ou formam, um **sistema completo de desigualdades** se:

1. para todo  $K \in \mathcal{F}$ , as imagens  $a_1(K), \dots, a_m(K)$  satisfazem as desigualdades  $d_1(a_1(K), \dots, a_m(K)), \dots, d_k(a_1(K), \dots, a_m(K))$  e
2. se  $A_1, \dots, A_m$  são números não-negativos que satisfazem as desigualdades  $d_1(A_1, \dots, A_m), \dots, d_k(A_1, \dots, A_m)$ , então existe um conjunto  $K \in \mathcal{F}$  tal que  $a_1(K) = A_1, \dots, a_m(K) = A_m$ .

Quem iniciou o estudo dos sistemas completos de desigualdades foi Blaschke (ver [2]) que, em 1916, propôs a seguinte questão:

"Dados os valores  $s, v, m \in \mathbb{R}_+$  quaisquer tais que

$$(\star) \begin{cases} s^2 \geq 3v \cdot m, \\ m^2 \geq 4\pi s, \\ m^3 \geq 48\pi^2 v, \\ s^3 \geq 36\pi v^2, \\ 2m^2 \geq \pi^3 s, \text{ se } v = 0, \end{cases}$$

existe algum conjunto convexo e compacto  $K \subset \mathbb{R}^3$  com área de superfície  $s$ , volume  $v$  e curvatura média integral  $m$ ?"

No problema proposto por Blaschke, a família  $\mathcal{F}$  da Definição (3.7) é a família dos subconjunto convexos e compactos não vazios de  $\mathbb{R}^3$ , as desigualdades são

$$\left. \begin{aligned} S(K)^2 &\geq 3V(K) \cdot M(K), \\ M^2(K) &\geq 4\pi S(K), \\ M^3(K) &\geq 48\pi^2 V(K), \end{aligned} \right\} \text{(desigualdades de Minkowski),} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} S^3(K) &\geq 36\pi V^2(K), \text{ (desigualdade isoperimétrica de } \mathbb{R}^3), \\ 2M^2(K) &\geq \pi^3 S(K), \text{ (desigualdade isoperimétrica plana} \\ &\text{em termos de } S \text{ e } M), \end{aligned} \quad (3.2)$$

e as funções  $S, M, V : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}_+$  são a área de superfície, a curvatura média integral e o volume, respectivamente.

As desigualdades (3.1), (3.2) e (3.2) eram conhecidas na época de Blaschke e são satisfeitas para qualquer  $K$  em  $\mathcal{F}$ . A questão era saber se para quaisquer valores  $v, s$  e  $m$  (não negativos), satisfazendo as desigualdades (3.1), (3.2) e (3.2), sempre existiria um corpo convexo  $K$  de  $\mathbb{R}^3$  com  $V(K) = v$ ,  $M(K) = m$  e  $S(K) = s$ .



Se isso fosse verdade, então o conjunto de cinco desigualdades seria um sistema completo de desigualdades, porém isso não é verdade: existem  $v$ ,  $m$  e  $s$  reais não-negativos, que satisfazem as desigualdades (3.1), (3.2) e (3.2), para os quais não existe um corpo convexo  $K$  de  $\mathbb{R}^3$  com  $V(K) = v$ ,  $S(K) = s$  e  $M(K) = m$  (ver [19], [1], [20] e [7]).

Apesar da resposta a esse problema ser negativa, Blaschke criou uma técnica para facilitar a resolução de seu problema, técnica esta que foi utilizada mais tarde por Santaló. Além disso, criou-se uma nova questão: será possível obtermos novas desigualdades relacionando as funções  $V$ ,  $S$  e  $M$  de forma que, sempre que  $v, s, m$  satisfizerem as desigualdades (3.1), (3.2) e (3.2) e as novas desigualdades, exista  $K$  com  $V(K) = v$ ,  $S(K) = s$  e  $M(K) = m$ ?

Essa nova questão ainda permanece aberta e é motivo de pesquisa matemática, mas não será estudada aqui. Estudaremos entretanto a utilização que Santaló fez da técnica de Blaschke em problemas similares, mas com outra família de conjuntos e outras funções.

Foi Santaló quem, em 1961, introduziu a definição de sistemas completos de desigualdades e a família de conjuntos que ele estudava era a família dos conjuntos convexos, compactos e não-vazios do plano. Com essa família, Santaló encontrou um sistema completo de desigualdades relacionando cada par das seguintes funções:  $A$  (área),  $p$  (perímetro),  $D$  (diâmetro),  $r$  (inraio),  $R$  (circunraio) e  $\omega$  (largura mínima). Encontrou também um sistema completo de desigualdades relacionando as triplas  $(A, p, r)$ ,  $(A, p, R)$ ,  $(A, p, \omega)$ ,  $(A, D, \omega)$ ,  $(p, D, \omega)$  e  $(D, r, R)$  e estudou os casos  $(D, R, \omega)$  e  $(r, R, \omega)$ , mas sem concluir esses últimos dois.

Cabe observar que os problemas resolvidos por Santaló não foram resolvidos apenas por ele, mas diversas pessoas trabalharam nas desigualdades (ver [21], [23] e as referências em ambos os artigos).

Embora Santaló tenha demonstrado algumas desigualdades, seu principal trabalho não foi o de encontrar novas desigualdades, mas foi o de utilizar as técnicas desenvolvidas por Blaschke em cada par e em cada tripla das funções  $A$ ,  $p$ ,  $D$ ,  $r$ ,  $R$  e  $\omega$  para verificar se as desigualdades existentes que relacionavam cada par ou tripla formavam um sistema completo.

Trabalhos posteriores ao de Santaló foram feitos por M. A. Hernández Cifre, S. Segura Gomis e G. Salinas Martínez que resolveram os casos  $(A, D, R)$ ,  $(A, r, R)$ ,  $(p, D, R)$ ,  $(p, r, R)$ ,  $(D, r, \omega)$ ,  $(D, R, \omega)$  e  $(r, R, \omega)$  (ver [13], [14], [15] e [9]), mas ainda existem sete casos abertos para os quais as desigualdades existentes não formam um sistema completo:  $(A, p, D)$ ,  $(A, D, r)$ ,  $(A, r, \omega)$ ,  $(A, R, \omega)$ ,  $(p, D, r)$ ,  $(p, r, \omega)$  e  $(p, R, \omega)$ .

Mantendo as funções  $A$ ,  $p$ ,  $D$ ,  $r$ ,  $R$  e  $w$  e restringindo nossa família de figuras para a família dos conjuntos convexos compactos 3-rotacionalmente simétricos de  $\mathbb{R}^2$ , foram resolvidos 14 dos 20 possíveis casos envolvendo triplas de funções em [10]. Já para a família dos conjuntos convexos compactos centralmente simétricos de  $\mathbb{R}^2$ , os 20 casos se reduzem a 4 que foram todos resolvidos em [11].

Também são objetos de investigação alguns sistemas completos de desigualdades para famílias de conjuntos convexos de  $\mathbb{R}^n$  e de  $\mathbb{R}^3$  (ver[12]). Porém, em nosso trabalho, estudamos apenas sistemas completos de desigualdades para figuras convexas e compactas planas, mais especificamente, estudamos os problemas propostos por Santaló que já foram resolvidos.

### 3.2 O Diagrama de Blaschke

No problema de Blaschke, suponhamos que  $s$ ,  $v$  e  $m$  satisfazem as desigualdades  $(\star)$ . Assim, se  $m = 0$ , então  $s = v = m = 0$ , e o problema se torna encontrar um corpo convexo  $K$  tal que  $S(K) = V(K) = M(K) = 0$ . Para isso, basta tomar  $K$  um ponto de  $\mathbb{R}^3$ . Logo, se  $m = 0$ , existe  $K$  compacto, convexo e não-vazio tal que  $M(K) = m$ ,  $V(K) = v$  e  $S(K) = s$ .

Assim, de agora em diante consideraremos  $m \neq 0$ . Neste caso, a idéia que Blaschke teve para tentar resolver seu problema foi a de tomar a função  $\varphi : \mathcal{F}^* \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$  definida por  $\varphi(K) = \left( \frac{4\pi S}{M^2}, \frac{48\pi^2 V}{M^3} \right)$ , sendo  $V = V(K)$ ,  $M = M(K)$ ,  $S = S(K)$  e  $\mathcal{F}^*$  a família dos corpos convexos de  $\mathbb{R}^3$  com curvatura média integral diferente de 0.

Pelas desigualdades de Minkowski (desigualdades (3.1)), segue que a imagem de  $\varphi$  está contida no quadrado  $[0, 1] \times [0, 1]$ . Além disso, a função  $\varphi$  está bem definida, pois  $M(K) \neq 0$  para qualquer  $K \in \mathcal{F}^*$ .

Uma outra característica da função  $\varphi$  é que ela é invariante por dilatações.

Além da função  $\varphi$ , Blaschke considerou a função  $\varphi' : X \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$  definida por  $\varphi'(s, v, m) = \left( \frac{4\pi s}{m^2}, \frac{48\pi^2 v}{m^3} \right)$ , sendo  $X$  o conjunto das triplas  $(s, v, m)$  de  $\mathbb{R}^3$  com  $s, v \geq 0$ ,  $m > 0$ , satisfazendo as desigualdades  $(\star)$ . Obviamente a imagem da função  $\varphi$  é um subconjunto da imagem da função  $\varphi'$ .

Com as funções  $\varphi$  e  $\varphi'$ , Blaschke observou que se as duas imagens forem iguais, então dada uma tripla de pontos  $(s, v, m) \in X$  vai existir um conjunto  $K \in \mathcal{F}$  com  $S(K) = s$ ,  $V(K) = v$  e  $M(K) = m$ .

De fato, dada  $(s, v, m) \in X$  e considerando  $\text{Im}(\varphi) = \text{Im}(\varphi')$ , então existe um conjunto  $H \in \mathcal{F}$  com  $\left( \frac{4\pi S(H)}{M^2(H)}, \frac{48\pi^2 V(H)}{M^3(H)} \right) = \left( \frac{4\pi s}{m^2}, \frac{48\pi^2 v}{m^3} \right)$ .

Mas, sendo  $\varphi$  invariante por dilatações, temos

$$\left( \frac{4\pi S(\alpha H)}{M^2(\alpha H)}, \frac{48\pi^2 V(\alpha H)}{M^3(\alpha H)} \right) = \left( \frac{4\pi S(H)}{M^2(H)}, \frac{48\pi^2 V(H)}{M^3(H)} \right) = \left( \frac{4\pi s}{m^2}, \frac{48\pi^2 v}{m^3} \right),$$

para qualquer  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ .

Agora, tomando  $\alpha$  tal que  $\alpha M(H) = m$  e sabendo que  $M(\alpha H) = \alpha M(H)$ ,  $V(\alpha H) = \alpha^3 V(H)$  e  $S(\alpha H) = \alpha^2 S(H)$ , segue que

$$\left( \frac{4\pi \alpha^2 S(H)}{\alpha^2 M^2(H)}, \frac{48\pi^2 \alpha^3 V(H)}{\alpha^3 M^3(H)} \right) = \left( \frac{4\pi S(\alpha H)}{M^2(\alpha H)}, \frac{48\pi^2 V(\alpha H)}{M^3(\alpha H)} \right) = \left( \frac{4\pi s}{m^2}, \frac{48\pi^2 v}{m^3} \right).$$

Logo  $M(\alpha H) = m$ ,  $V(\alpha H) = v$  e  $S(\alpha H) = s$ .

Dessa forma, tomando  $K = \alpha H \in \mathcal{F}$ ,  $M(K) = m$ ,  $S(K) = s$  e  $V(K) = v$ , assim o trabalho de Blaschke se resumiria a mostrar que  $\text{Im}(\varphi) = \text{Im}(\varphi')$ . O primeiro passo para isso seria encontrar a fronteira da imagem da função  $\varphi'$  e verificar se esta fronteira é também a fronteira da imagem de  $\varphi$ , mas isso não é verdade e até hoje procura-se a fronteira da imagem da função  $\varphi$  afim de resolver o problema de Blaschke.

Apesar de não ter encontrado a fronteira da função  $\varphi$ , Blaschke descobriu parte dela através das desigualdades (3.1), (3.2) e (3.2). Portanto a imagem da função  $\varphi$  recebe o nome de **Diagrama de Blaschke**, e a parte da fronteira da imagem que  $\varphi$  que ainda não foi encontrada é chamada de **fronteira perdida do Diagrama de Blaschke**.

Voltando à função  $\varphi'$ , e chamando  $(x, y) = \varphi'(s, v, m)$ , temos, pela primeira das desigualdades (3.1), que  $y \geq x^2$ . Então parte da fronteira de  $\varphi'$  é a curva  $y = x^2$  contida em  $[0, 1] \times [0, 1]$ . Essa parte da fronteira é também parte da imagem da função  $\varphi$ , pois representa a imagem dos capbouds tridimensionais (ver a Definição 3.4), sendo o ponto  $(0, 0)$  imagem de um segmento e o ponto  $(1, 1)$  imagem da esfera.

Uma outra parte da fronteira de  $\text{IM}(\varphi)$ , também determinada por Blaschke, foi descoberta considerando os conjuntos sem volume, nesse caso  $y = 0$ , e a desigualdade isoperimétrica plana em termos de  $S$  e  $M$  em (3.1) nos garante que  $0 \leq x \leq \frac{8}{\pi^2}$ . Esses pontos são imagens dos conjuntos convexos bidimensionais.

É importante observarmos que o diagrama de Blaschke (ou a imagem da função  $\varphi$ ) é um conjunto conexo por caminhos, pois sendo  $H, K \in \mathcal{F}^*$ , a função  $f : [0, 1] \rightarrow \mathcal{F}^*$  definida por  $f(t) = tH + (1-t)K$  é contínua (ver apêndice A). Logo  $c = \varphi \circ f|_{[0,1]}$  descreve um caminho que liga  $\varphi(H)$  a  $\varphi(K)$ .

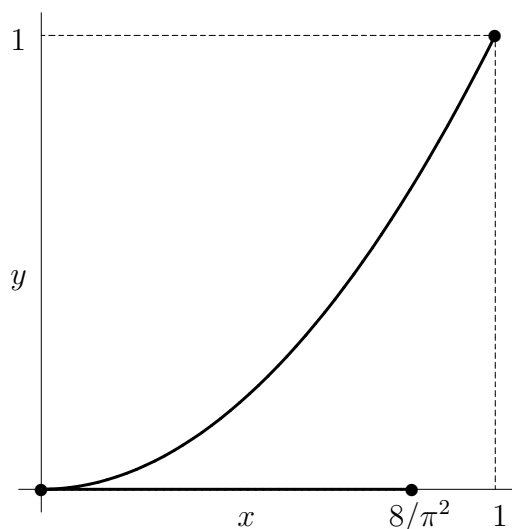


Figura 3.7: Parte da Fronteira de  $\varphi$ .

Para o nosso estudo, utilizamos as mesmas idéias de Blaschke nos problemas propostos por Santaló, como será visto mais adiante.

### 3.3 Problemas resolvidos por Santaló

Antes de entrarmos nos problemas resolvidos por Santaló, é útil termos uma lista de algumas desigualdades conhecidas na época envolvendo as funções  $A$ ,  $p$ ,  $D$ ,  $r$ ,  $R$  e  $\omega$ .

#### 3.3.1 Desigualdades

Tabela 3.1: Desigualdades envolvendo pares de funções.

Funções	Índices	Desigualdades	Igualdade
$A, p$	$d_1$	$4\pi A \leq p^2$	$\circ$
$A, D$	$d_2$	$4A \leq \pi D^2$	$\circ$
$A, r$	$d_3$	$\pi r^2 \leq A$	$\circ$
$A, R$	$d_4$	$A \leq \pi R^2$	$\circ$
$A, \omega$	$d_5$	$\omega^2 \leq \sqrt{3}A$	$\Delta, -$
$p, D$	$d_6$   $d_7$	$2D \leq p \leq \pi D$	$-$   $\omega = c$
$p, r$	$d_8$	$2\pi r \leq p$	$\circ$
$p, R$	$d_9$   $d_{10}$	$4R \leq p \leq 2\pi R$	$-$   $\circ$
$p, \omega$	$d_{11}$	$\pi\omega \leq p$	$\omega = c$
$D, r$	$d_{12}$	$2r \leq D$	$\circ$
$D, R$	$d_{13}$   $d_{14}$	$\sqrt{3}R \leq D \leq 2R$	$\mathcal{Y}^\dagger$   $\text{Cent}^\dagger$
$D, \omega$	$d_{15}$	$\omega \leq D$	$\omega = c$
$r, R$	$d_{16}$	$r \leq R$	$\circ$
$r, \omega$	$d_{17}$   $d_{18}$	$2r \leq \omega \leq 3r$	$^\dagger\text{Cent}$   $\Delta, -$
$R, \omega$	$d_{19}$	$\omega \leq 2R$	$\circ$

$^\dagger$  existem mais figuras para as quais vale a igualdade.

Tabela 3.2: Desigualdades envolvendo triplas de funções.

Funções	Índices	Desigualdades	Igualdade	Condições
$A, p, D$	$D_1$	$*8\phi A \leq p(p - 2D \cos \phi)$	$\emptyset$	
	$D_2$	$16A^2 \geq p(p - 2D)^2 \cdot (4D - p)$	$\Delta_{\text{is}}$	$2D \leq p \leq 3D$
$A, p, r$	$D_3$   $D_4$	$\frac{pr}{2} \leq A \leq r(p - \pi r)$	$\langle \odot \rangle$   $\circ$	
$A, p, R$	$D_5$	$A \leq R(p - \pi R)$	$\circ$	
	$D_6$	$**8\sigma A \leq p(p - 4R \cos \sigma)$	$\emptyset, -$	
$A, p, \omega$	$D_7$	$4A \leq \omega(2p - \pi\omega)$	$\circ$	
	$D_8$	$***2A \geq \omega(p - \sqrt{3}\omega \sec^2 \theta)$	$\mathcal{Y}$	$\pi\omega \leq p \leq 2\sqrt{3}\omega$

Tabela 3.2: continuando da página anterior.

Funções	Índices	Desigualdades	Igualdade	Condições
	$D_9$	$16A^2\omega^3 \geq p(p\omega - 4A)^2 \cdot (8A - p\omega)$	$\Delta_{is}$	$2\sqrt{3}\omega \leq p$
$A, D, \omega$	$D_{10}$	$D\omega \leq 2A$	$\Delta_D^\omega$	$\omega \leq \frac{\sqrt{3}}{2}D$
	$D_{11}$	**** $A \geq 3\omega \left[ \eta + \omega \left( \arcsin \rho - \frac{\pi}{3} \right) \right] - \frac{\sqrt{3}}{2}D^2$	$\mathcal{Y}$	$\omega \geq \frac{\sqrt{3}}{2}D$
	$D_{12}$	**** $2A \leq \omega\eta + D^2 \arcsin \rho$	$\emptyset$	
$p, D, \omega$	$D_{13}$   $D_{14}$	**** $2[\eta + \omega \arcsin \rho] \leq p \leq 2[\eta + D \arcsin \rho]$	$\langle \odot \rangle$   $\emptyset$	
$D, r, R$	$D_{15}$	$(D^2 - 2Rr) \cdot \sqrt{4R^2 - D^2} \leq 4R^2r$	$\Delta_{is}$	
	$D_{16}$	$D \geq R + r$	$\dagger\omega = c, \Delta_o$	
$r, R, \omega$	$D_{17}$	$\omega \leq r + R$	$\dagger\Delta_o, \mathcal{Y}, \omega =$	

\* $\phi$  é solução da equação  $2\phi D = p \sin(\phi)$

\*\* $\sigma$  é solução da equação  $p \sin \sigma = 4R\sigma$

\*\*\* $\theta$  é solução da equação  $6\omega(\tan \theta - \theta) = p - \pi\omega$

$$****\eta = \sqrt{D^2 - \omega^2}, \rho = \frac{\omega}{D}$$

$\dagger$  existem mais conjuntos que satisfazem a igualdade.

Nas tabelas 3.1 e 3.2, os símbolos que aparecem na coluna "Igualdade" representam os conjuntos para os quais a desigualdade da linha se torna uma igualdade.





As desigualdades da tabela (3.1) foram demonstradas em [3] ou em [24]. A demonstração das desigualdades  $D_1$  e  $D_2$  podem ser encontradas em [16] e em [3], a desigualdade  $D_6$  pode ser encontrada em [5] OU [6], a  $D_7$  em [16] e em [3], a  $D_8$  e a  $D_{10}$  em [23], a  $D_9$  em [25], a  $D_{11}$  em [16] e as desigualdades  $D_{15}$ ,  $D_{16}$  e  $D_{17}$  se encontram em [21].

As demais desigualdades são encontradas em [3] ou em [23] sendo que as desigualdades  $D_1$ ,  $D_{12}$  e  $D_7$  foram corrigidas em [23]. Os problemas resolvidos por Santaló podem ser encontrados em [21].

A tabela a seguir mostra que conjunto cada símbolo representa.

Tabela 3.3: Legenda.

$\bigcirc$	círculo
$\triangle$	triângulo equilátero

$\Delta_{is}$	triângulo isósceles cujo lado desigual é menor ou igual aos outros dois
$\Delta_{\circ}$	triângulo circular
—	segmento de reta
$\omega = c$	figuras de largura constante
$\mathcal{Y}$	conjuntos de Yamanouti
Cent	conjuntos convexos centralmente simétricos
	salsicha
	segmento simétrico de círculo
	lente simétrica
	capbody
$\Delta_D^\omega$	triângulo com base $D$ e altura $\omega$

**Observação:** Um triângulo isósceles cujo lado desigual é menor ou igual aos outros dois pode ser definido como:





- (1) um triângulo isósceles cujos lados iguais têm comprimento igual ao seu diâmetro, ou
- (2) um triângulo isósceles cujas alturas iguais têm comprimento igual à sua largura mínima.

Tendo em mãos essas desigualdades, iniciaremos agora o estudo dos problemas resolvidos por Santaló de encontrar sistemas completos de desigualdades envolvendo as seguintes triplas de funções:  $(A, p, r)$ ,  $(A, p, R)$ ,  $(A, p, \omega)$ ,  $(A, D, \omega)$ ,  $(p, D, \omega)$  e  $(D, r, R)$ .

### 3.3.2 Caso $(A, p, r)$

O caso  $(A, p, r)$  foi resolvido com as desigualdades dadas na seguinte tabela:

Tabela 3.4: Desigualdades envolvidas no problema  $(A, p, r)$ .

Índices	Desigualdades	Igualdade
$d_1$	$4\pi A \leq p^2$	
$d_8$	$2\pi r \leq p$	
$D_3$	$p \cdot r \leq 2A$	
$D_4$	$A \leq r(p - \pi r)$	

Na primeira e segunda desigualdades, a igualdade é verificada nos círculos. Na terceira desigualdade, a igualdade se verifica nos capbody's, e na quarta, nas salsichas. Cabe observar que os círculos são casos particulares de capbody's e de salsichas, portanto os círculos satisfazem a igualdade na terceira e na quarta desigualdades.

### Estratégia de resolução do problema

O primeiro passo para mostrarmos que essas quatro desigualdades formam, de fato, um sistema completo de desigualdades é mostrar que, considerando  $A = p = r = 0 \in \mathbb{R}_+$ , existe um corpo convexo  $K$  com  $A(K) = p(K) = r(K) = 0$ . Mas isso é muito fácil de se conseguir, basta tomar  $K$  um ponto.

Desconsideremos então o caso trivial  $A = p = r = 0$ . Como as duas primeiras desigualdades mostram que  $p = 0$  implica em  $A = r = p = 0$ , segue que no caso não trivial  $p \neq 0$ . Assim, voltemos nossa atenção apenas aos corpos convexos diferentes dos pontos. Para isso, seja  $\mathcal{C}^* := \{K \in \mathcal{C} \mid K \text{ não é um ponto}\}$ .

Consideremos então a função  $\varphi : \mathcal{C}^* \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $\varphi(K) = \left( \frac{2\pi r(K)}{p(K)}; \frac{4\pi A(K)}{p^2(K)} \right)$ . Essa função está bem definida pois, como os pontos não são elementos do domínio, então  $p(K) \neq 0$ , qualquer que seja o  $K \in \mathcal{C}^*$ .

As desigualdades  $d_1$  e  $d_7$  deixam claro que a imagem da função  $\varphi$  está contida no quadrado  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

Consideremos também o conjunto  $X := \{(A', r', p') \in \mathbb{R}^3 \mid A', r' \geq 0, p' > 0, 4\pi A' \leq (p')^2, 2\pi r' \leq p', A' \leq r'(p' - \pi r'), p' \cdot r' \leq 2A'\}$ , ou seja,  $X$  é o conjunto das triplas de números reais não negativos (com última coordenada positiva) que satisfazem as desigualdades  $d_1, d_7, D_3$  e  $D_4$ . Seja a função  $\varphi' : X \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $\varphi'(A', r', p') = \left( \frac{2\pi r'}{p'}; \frac{4\pi A'}{(p')^2} \right)$ .

Para mostrar que as quatro desigualdades da tabela 3.4 formam um sistema completo de desigualdades, adota-se a seguinte estratégia: mostra-se que a imagem da função  $\varphi'$  é igual à imagem da função  $\varphi$ . Feito isso, para cada tripla  $(A', r', p')$  satisfazendo as desigualdades, com  $p' \neq 0$ , existe um conjunto  $K \in \mathcal{C}^*$  tal que  $\left( \frac{2\pi r(K)}{p(K)}; \frac{4\pi A(K)}{p^2(K)} \right) = \left( \frac{2\pi r'}{p'}; \frac{4\pi A'}{(p')^2} \right)$ .

Seja  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ , logo

$$\left( \frac{2\pi r(K)}{p(K)}; \frac{4\pi A(K)}{p^2(K)} \right) = \left( \frac{2\pi \alpha r(K)}{\alpha p(K)}; \frac{4\pi \alpha^2 A(K)}{\alpha^2 p^2(K)} \right) = \left( \frac{2\pi r(\alpha K)}{p(\alpha K)}; \frac{4\pi A(\alpha K)}{p^2(\alpha K)} \right).$$

Ou seja,  $\varphi$  é invariante por dilatações.

Por outro lado, sendo  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$  tal que  $\alpha p(K) = p'$ , temos que

$$\left( \frac{2\pi \alpha r(K)}{\alpha p(K)}; \frac{4\pi \alpha^2 A(K)}{\alpha^2 p^2(K)} \right) = \left( \frac{2\pi r(K)}{p(K)}; \frac{4\pi A(K)}{p^2(K)} \right) = \left( \frac{2\pi r'}{p'}; \frac{4\pi A'}{(p')^2} \right).$$

Logo,  $\alpha p(K) = p' \Rightarrow \alpha r(K) = r'$  e  $\alpha^2 A(K) = A'$ .

Conclusão:  $A(\alpha K) = A', r(\alpha K) = r'$  e  $p(\alpha K) = p'$ . Assim, para cada tripla  $(A', r', p')$  satisfazendo as desigualdades, com  $p' \neq 0$ , existe um conjunto  $K' = \alpha K \in \mathcal{C}^*$  tal que  $A(K') = A', r(K') = r'$  e  $p(K') = p'$ . Portanto o sistema de desigualdades é completo.

Resumindo, se as imagens das funções  $\varphi$  e  $\varphi'$  coincidirem, então o sistema é completo. Por outro lado, se o sistema for completo, dado um ponto  $(x, y) \in \text{Im}(\varphi')$ , existe uma tripla  $(A', r', p') \in \mathbb{R}^3$ , satisfazendo as desigualdades da tabela 3.4, com  $p' \neq 0$ , tal que  $(x, y) = \varphi'(A', r', p')$ . Mas, como  $(A', r', p')$  satisfazem as desigualdades e o sistema é completo, segue que existe  $K \in \mathcal{C}$  tal que  $A(K) = A', r(K) = r'$  e  $p(K) = p'$ . Logo  $\varphi(K) = \varphi'(A', r', p') = (x, y)$ .

Concluí-se que  $\text{Im}(\varphi) \supset \text{Im}(\varphi')$ , mas  $\text{Im}(\varphi) \subset \text{Im}(\varphi')$ , portanto, se o sistema de desigualdades for completo, então  $\text{Im}(\varphi) = \text{Im}(\varphi')$ .

**Encontrando a imagem de  $\varphi'$** 

Seja  $(x, y) \in \text{Im}(\varphi')$ . A definição de  $\varphi'$  nos diz que  $(x, y) = \left(\frac{2\pi r'}{p'}; \frac{4\pi A'}{(p')^2}\right)$ . Pela desigualdade  $D_4$  temos

$$\begin{aligned} A' &\leq r'(p' - \pi r') = r' \cdot p' \left(1 - \frac{\pi r'}{p'}\right) \Leftrightarrow \frac{A'}{p'} \leq r' \left(1 - \frac{\pi r'}{p'}\right) \\ \Leftrightarrow \frac{4\pi A'}{(p')^2} &\leq \frac{2\pi r'}{p'} \left(2 - \frac{2\pi r'}{p'}\right) \Leftrightarrow y \leq x(2 - x) = -x^2 + 2x. \end{aligned}$$

Portanto os pontos da imagem de  $\varphi'$  estão abaixo da curva  $y = -x^2 + 2x$ , dentro do quadrado  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

Por outro lado, da desigualdade  $D_3$  sai

$$2A' \geq p' \cdot r' \Leftrightarrow \frac{2A'}{p'} \geq r' \Leftrightarrow \frac{4\pi A'}{(p')^2} \geq \frac{2\pi r'}{p'} \Leftrightarrow y \geq x. \quad (3.3)$$

Ou seja, os pontos de  $\text{Im}(\varphi')$  estão acima da reta  $x = y$ .

Veja que em  $x = 0$  e em  $x = 1$  as duas funções coincidem:

$x$	$-x^2 + 2x$
0	0
1	1

Já para os pontos em que  $x \in (0, 1)$ ,  $-x^2 + 2x > x$ . Além disso, para cada  $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$  com  $x \leq y \leq -x^2 + 2x$ , temos que, fazendo  $p' = 1$ ,  $r' = \frac{x}{2\pi}$  e  $A' = \frac{y}{4\pi}$ , a tripla  $(A', r', p')$  satisfaz as desigualdades, portanto  $(x, y) \in \text{Im}(\varphi')$ .

Concluimos então que a imagem de  $\varphi'$  é toda a região compreendida entre a reta  $x = y$  e a curva  $y = -x^2 + 2x$ .

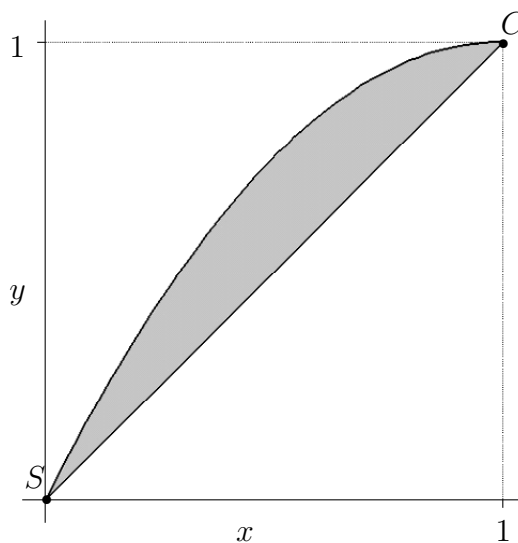


Figura 3.8: Imagem de  $\varphi'$ .



**Provando que  $\partial\mathbf{IM}(\varphi') \subset \partial\mathbf{IM}(\varphi)$**

Seja  $(x, y) \in \partial\mathbf{IM}(\varphi')$ , logo  $y = x$  ou  $y = -x^2 + 2x$ . Queremos encontrar um conjunto  $K \in \mathcal{C}^*$  tal que  $\varphi(K) = (x, y)$ , ou seja,

$$(x, y) = \left( \frac{2\pi r(K)}{p(K)}; \frac{4\pi A(K)}{p^2(K)} \right).$$

Caso 1: Analisemos o caso em que  $y = x$ .

Se  $x = 0$ , então  $x = y = 0$  e  $r = 0$ . Tomando  $K$  um segmento de reta, sua imagem por  $\varphi$  será o par  $(0, 0) = (x, y)$ .

Suponha agora  $x > 0$ . Como a igualdade em  $D_3$  é alcançada pelos capbodys, procuraremos um capbody cuja imagem por  $\varphi$  seja  $(x, y)$ . Podemos encontrar  $p > 0$  e  $r > 0$ , com  $p \geq r$ , tais que

$$\frac{2\pi r}{p} = x.$$

Como um capbody é determinado pelos valores de  $r$  e  $D$ , devemos encontrar  $D \geq r$  de forma que o capbody  $K$  determinado por  $r$  e  $D$  tenha perímetro  $p$ .

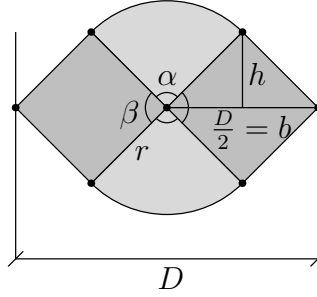


Figura 3.9: Capbody determinado por  $r$  e por  $D$ .

Mas o perímetro de um capbody é dado por:

$$p = \left[ \pi - 2 \arccos \left( \frac{r}{b} \right) \right] 2r + 4\sqrt{b^2 - r^2},$$

ou equivalentemente,

$$\frac{p}{4r} - \frac{\pi}{2} + \arccos \left( \frac{r}{b} \right) - \sqrt{\frac{b^2}{r^2} - 1} = 0, \quad (3.4)$$

sendo  $b = \frac{D}{2} \geq r$ , pela desigualdade  $d_{12}$ .

Na equação (3.4), a divisão por  $r$  é possível pois  $x > 0 \Leftrightarrow r > 0$ .

Consideremos a função  $f(b) = \frac{p}{4r} - \frac{\pi}{2} + \arccos \left( \frac{r}{b} \right) - \sqrt{\frac{b^2}{r^2} - 1}$ , para  $b \geq r$ .

Daí, segue que

$$f(r) = \frac{p}{4r} - \frac{\pi}{2} + \arccos(1) - \sqrt{1 - 1} = \frac{p}{4r} - \frac{\pi}{2}.$$

Mas

$$\frac{2\pi r}{p} = x \leq 1 \Rightarrow \frac{\pi}{2} \leq \frac{p}{4r} \Rightarrow \frac{p}{4r} - \frac{\pi}{2} \geq 0,$$

ou seja,  $f(r) \geq 0$ .

Por outro lado,  $\lim_{b \rightarrow \infty} f(b) = -\infty$ , logo existe um  $b_0 \in [r, \infty]$  tal que  $f(b_0) = 0$ . Portanto existe  $b_0 \geq r$  que determina, junto com  $r$ , um capbody com perímetro  $p$ .

Seja então  $K$  o capbody determinado por  $r$  e  $b_0$  com perímetro  $p$ . Sendo  $K$  um capbody,  $A(K)$ ,  $r(K)$  e  $p(K)$  satisfazem  $D_3$ . Assim, trocando o símbolo da desigualdade pela igualdade na equação (3.3), segue que  $\varphi(K) = (x, y)$ .

Caso 2: Analisemos agora o caso em que  $y = -x^2 + 2x$ .

Como queremos  $K$  tal que  $\varphi(K) = (x, y)$ , então  $K$  deve satisfazer:  $x = \frac{2\pi r}{p}$  e  $y = \frac{4\pi A}{p^2}$ . Mas  $y = -x^2 + 2x$ , logo precisamos encontrar  $K$  que satisfaça

$$\frac{4\pi A}{p^2} = -\left(\frac{2\pi r}{p}\right)^2 + 2\frac{2\pi r}{p} \Leftrightarrow -\pi r^2 + r \cdot p = A. \quad (3.5)$$

Sabemos que as salsichas satisfazem  $-\pi r^2 + r \cdot p = A$ , procuremos então entre as salsichas uma cuja imagem por  $\varphi$  seja  $(x, y)$ .

Facilmente encontramos  $A \geq 0$  e  $p > 0$  tais que  $y = \frac{4\pi A}{p^2}$ . Logo  $p^2 \geq 4\pi A$ , pois  $y \in [0, 1]$ .

Como uma salsicha é totalmente determinada por seu perímetro e inraio, se encontrarmos  $r$  tal que  $p \geq 2\pi r$  e que satisfaça (3.5), então resolvemos nosso problema.

Mas  $-\pi r^2 + r \cdot p = A \Leftrightarrow \pi r^2 - p \cdot r - A = 0$ . Tomando  $r = \frac{p - \sqrt{p^2 - 4\pi A}}{2\pi}$  temos que  $A$ ,  $r$  e  $p$  satisfazem (3.5). Além disso, sendo  $p^2 - 4\pi A \geq 0$ ,  $r \in \mathbb{R}$  e  $0 \leq 2\pi r \leq p$ .

Como  $0 \leq 2\pi r \leq p$ , segue que  $p$  e  $r$  determinam uma salsicha  $K$ , com área  $A$  por (3.5). Conclusão:  $\varphi(K) = (x, y)$ , pela escolha de  $p$  e de  $A$  e por (3.5).

Portanto  $\partial \text{IM}(\varphi') \subset \partial \text{IM}(\varphi)$ , pelos casos 1 e 2.

### Provando que $\text{IM}(\varphi') \subset \text{IM}(\varphi)$

Para mostrarmos que  $\text{IM}(\varphi') \subset \text{IM}(\varphi)$ , mostraremos que o segmento  $\text{SG}[(x, x), (x, -x^2 + 2x)] \subset \text{IM}(\varphi)$  para cada  $x \in [0, 1]$ . Isso é suficiente, pois cada  $(x, y) \in \text{IM}(\varphi')$  satisfaz  $x \leq y \leq -x^2 + 2x$ .

Seja então  $x \in [0, 1]$  e tome  $H$  um capbody que satisfaz  $\varphi(H) = (x, x)$ . Tomemos também  $K$  uma salsicha que satisfaz  $\varphi(K) = (x, 2x - x^2)$ . Podemos supor (dilatando se necessário) que  $p(H) = p(K) = p$  e que  $r(H) = r(K) = r$ , pois  $x = \frac{2\pi r(H)}{p(H)} = \frac{2\pi r(K)}{p(K)}$ .

Consideremos a função  $f : [0, 1] \rightarrow \mathcal{C}^*$ , definida por  $f(\alpha) = \alpha H + (1 - \alpha)K$ . Afirmamos que  $(\varphi \circ f)(\alpha) = (x, y(\alpha))$ , para todo  $\alpha \in [0, 1]$ .

De fato, sendo  $f(\alpha) = (x(\alpha), y(\alpha))$ , então  $x(\alpha) = \frac{2\pi r(f(\alpha))}{p(f(\alpha))}$ . Se mostrarmos que  $r(f(\alpha)) = r$  e  $p(f(\alpha)) = p$ , então  $x(\alpha) = x$ ,  $\forall \alpha \in [0, 1]$ .

Mas  $p(f(\alpha)) = p(\alpha H + (1 - \alpha)K) = \alpha p(H) + (1 - \alpha)p(K) = p(H) = p$ , pela Proposição 2.22. Além disso, pela Proposição 2.16,  $r(f(\alpha)) = r(\alpha H + (1 - \alpha)K) \geq \alpha r(H) + (1 - \alpha)r(K) = r$ .

Por outro lado, a desigualdade  $d_{17}$  garante que  $2r(f(\alpha)) \leq \omega(f(\alpha))$ . Sabendo que  $\omega(H) = \omega(K) = 2r$ , podemos supor que as retas  $\ell_1$  e  $\ell_2$ , determinadas pelas equações  $y = r$  e  $y = -r$  respectivamente, são retas suporte de  $H$  e de  $K$ . Logo  $\ell_1$  e  $\ell_2$  também são retas suporte de  $\alpha H + (1 - \alpha)K$  (veja o Lema 1.49). Portanto  $d(\ell_1, \ell_2) \geq \omega(\alpha H + (1 - \alpha)K)$ , logo  $\omega(H) = d(\ell_1, \ell_2) \geq \omega(\alpha H + (1 - \alpha)K) \geq \alpha \omega(H) + (1 - \alpha)\omega(K) = \omega(H)$ , pela

Proposição 2.7. Assim  $\omega(f(\alpha)) = \omega(H)$ ,  $2r(f(\alpha)) \leq \omega(f(\alpha)) = \omega(H) = 2r$  e  $r(f(\alpha)) \geq r$ , logo  $r(f(\alpha)) = r$ .

Como  $r(f(\alpha)) = r$  e  $p(f(\alpha)) = p$ , então  $x(\alpha) = x$ . Assim, sendo as funções  $f$  e  $\varphi$  contínuas (ver o capítulo 2 e o apêndice A), a composição  $(\varphi \circ f)$  é um caminho em  $[0, 1] \times [0, 1]$  ligando os pontos  $\varphi(f(0)) = \varphi(K) = (x, 2x - x^2)$  e  $\varphi(f(1)) = \varphi(H) = (x, x)$ . Logo, dado  $(x, y) \in \text{SG}[(x, x); (x, 2x - x^2)]$ , existe um  $\alpha \in [0, 1]$  com  $y = y(\alpha)$ . Portanto  $(x, y) = (x(\alpha), y(\alpha)) = \varphi(f(\alpha))$ .

Concluimos que, para cada  $(x, y) \in \text{SG}[(x, x); (x, 2x - x^2)]$ , existe um corpo convexo  $X = f(\alpha) \in \mathcal{C}$ , tal que  $(x, y) = \varphi(X)$ . Assim  $\text{SG}[(x, x); (x, 2x - x^2)] \subset \text{IM}(\varphi)$ .

### 3.3.3 Caso $(A, D, \omega)$

O caso  $(A, D, \omega)$  foi resolvido com as desigualdades da tabela 3.5.

Tabela 3.5: Desigualdades envolvidas no problema  $(A, D, \omega)$ .

Índices	Desigualdades	Igualdade	Condições
$d_2$	$4A \leq \pi D^2$	$\bigcirc$	
$d_5$	$\omega^2 \leq \sqrt{3}A$	$\triangle$	
$d_{15}$	$\omega \leq D$	$\omega = c$	
$D_{10}$	$D \cdot \omega \leq 2A$	$\triangle_D^\omega$	$\omega \leq \frac{\sqrt{3}}{2}D$
$D_{11}$	**** $A \geq 3\omega \cdot \left[ \eta + \omega \left( \arcsin \rho - \frac{\pi}{3} \right) \right] - \frac{\sqrt{3}}{2}D^2$	$\mathcal{Y}$	$\omega \geq \frac{\sqrt{3}}{2}D$
$D_{12}$	**** $2A \leq \omega\eta + D^2 \arcsin \rho$	$\bigcirc$	

$$\text{****} \eta = \sqrt{D^2 - \omega^2}, \rho = \frac{\omega}{D}$$

#### Estratégia de resolução do problema

Sejam  $\varphi : \mathcal{C}^* \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definida por

$$\varphi(K) = \left( \frac{\omega(K)}{D(K)}; \frac{4A(K)}{\pi D^2(K)} \right),$$

e  $X$  o conjunto formado pelas triplas de números não negativos  $(A, D, \omega)$ , com última coordenada positiva, que (fazendo um abuso de linguagem) satisfazem as desigualdades da tabela 3.5. Definamos então a função  $\varphi' : X \rightarrow \mathbb{R}^2$  por

$$\varphi'(A, D, \omega) = \left( \frac{\omega}{D}; \frac{4A}{\pi D^2} \right).$$

Afim de simplificar a escrita, estamos utilizando as mesmas letras para representar as funções  $A, D$  e  $\omega$  ou para representar os números reais  $A, D$  e  $\omega$ . Além disso, representaremos da mesma maneira as desigualdades que relacionam os números  $A, D$  e  $\omega$  ou as desigualdades que são satisfeitas pelas funções  $A, D$  e  $\omega$ .

Podemos observar que a função  $\varphi$  é invariante por dilatações e que  $\text{IM}(\varphi) \subset \text{IM}(\varphi')$ . Além disso, as desigualdades  $d_2$  e  $d_{15}$  garantem que  $\text{IM}(\varphi') \subset [0, 1] \times [0, 1]$ . Então, pelo mesmo argumento utilizado no caso anterior, precisamos apenas mostrar que  $\text{IM}(\varphi) = \text{IM}(\varphi')$  e faremos isso utilizando a mesma seqüência do caso anterior.

**Encontrando a imagem de  $\varphi'$** 

Seja  $(x, y) = \varphi'(A, D, \omega)$ , com  $A, D, \omega \in X$ . Utilizando a desigualdade  $D_{12}$  temos

$$\begin{aligned} 2A &\leq \omega\sqrt{D^2 - \omega^2} + D^2 \arcsin\left(\frac{\omega}{D}\right) \Rightarrow \frac{4A}{\pi D^2} \leq \frac{2\omega}{\pi D^2}\sqrt{D^2 - \omega^2} + \frac{2}{\pi} \arcsin\left(\frac{\omega}{D}\right) \\ &\Rightarrow y \leq \frac{2}{\pi} \left[ \frac{\omega}{D}\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{D^2}} + \arcsin\left(\frac{\omega}{D}\right) \right] = \frac{2}{\pi} \left[ x\sqrt{1 - x^2} + \arcsin(x) \right] \\ &\Rightarrow y \leq \frac{2}{\pi} \left[ x\sqrt{1 - x^2} + \arcsin(x) \right]. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Utilizando a desigualdade  $D_{10}$  temos:

$$\begin{aligned} D \cdot \omega \leq 2A &\Rightarrow \frac{\omega}{D} \leq \frac{2A}{D^2} \Rightarrow \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\omega}{D} \leq \frac{4A}{\pi D^2}, \text{ se } \omega \leq \frac{\sqrt{3}}{2}D \\ &\therefore \frac{2}{\pi}x \leq y, \text{ se } x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Para  $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq x \leq 1$  utilizamos a desigualdade  $D_{11}$ :

$$\begin{aligned} A &\geq 3\omega \left[ \sqrt{D^2 - \omega^2} + \omega \left( \arcsin\left(\frac{\omega}{D}\right) - \frac{\pi}{3} \right) \right] - \frac{\sqrt{3}}{2}D^2 \\ \Rightarrow \frac{4A}{\pi D^2} &\geq \frac{12}{\pi} \cdot \frac{\omega}{D} \left[ \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{D^2}} + \frac{\omega}{D} \left( \arcsin\left(\frac{\omega}{D}\right) - \frac{\pi}{3} \right) \right] - 2\frac{\sqrt{3}}{\pi}, \text{ se } \frac{\sqrt{3}}{2}D \leq \omega \leq D \\ &\Rightarrow y \geq \frac{12}{\pi}x \left[ \sqrt{1 - x^2} + x \left( \arcsin(x) - \frac{\pi}{3} \right) \right] - 2\frac{\sqrt{3}}{\pi}, \text{ se } \frac{\sqrt{3}}{2} \leq x \leq 1. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Da desigualdade  $d_5$  obtemos

$$\begin{aligned} \omega^2 &\leq \sqrt{3}A \Rightarrow \frac{4\omega^2}{\pi D^2} \leq \sqrt{3}\frac{4A}{\pi D^2} \\ &\Rightarrow \frac{4}{\pi}x^2 \leq \sqrt{y} \Leftrightarrow y \geq \frac{4}{\sqrt{3}\pi}x^2. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Assim, de (3.6) e de (3.9), resulta que

$$\frac{4}{\sqrt{3}\pi}x^2 \leq y \leq \frac{2}{\pi} \left[ x\sqrt{1 - x^2} + \arcsin(x) \right]. \quad (3.10)$$

De (3.6) e de (3.7) sai que

$$\frac{2}{\pi}x \leq y \leq \frac{2}{\pi} \left[ x\sqrt{1 - x^2} + \arcsin(x) \right], \text{ se } x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (3.11)$$

Já de (3.6) e de (3.8), sai que

$$\frac{12}{\pi}x \left[ \sqrt{1 - x^2} + x \left( \arcsin(x) - \frac{\pi}{3} \right) \right] - \frac{\sqrt{3}}{2} \leq y \leq \frac{2}{\pi} \left[ x\sqrt{1 - x^2} + \arcsin(x) \right], \text{ se } x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (3.12)$$

Mas

$$\frac{2}{\pi}x \geq \frac{4}{\sqrt{3}\pi}x^2, \text{ se } x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

e

$$\frac{12}{\pi}x \left[ \sqrt{1-x^2} + x \left( \arcsin(x) - \frac{\pi}{3} \right) \right] - \frac{\sqrt{3}}{2} \geq \frac{4}{\sqrt{3}\pi}x^2, \text{ se } x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Logo a desigualdade (3.10) pode ser descartada e as desigualdades (3.11) e (3.12) determinam inteiramente a imagem da função  $\varphi'$ .

**Observações:**

1. Como a desigualdade (3.10) pode ser descartada, a desigualdade  $d_5$  também pode ser descartada, ou seja, a desigualdade  $d_5$  não é necessária para o nosso problema.
2. Se considerássemos a igualdade  $d_5$  e desconsiderássemos as desigualdades  $D_{10}$  e  $D_{11}$ , a imagem e o domínio da função  $\varphi'$  seriam diferentes, mas o sistema não seria mais completo, pois a imagem da função  $\varphi$  diferiria da imagem dessa nova função  $\varphi'$  como será visto adiante.

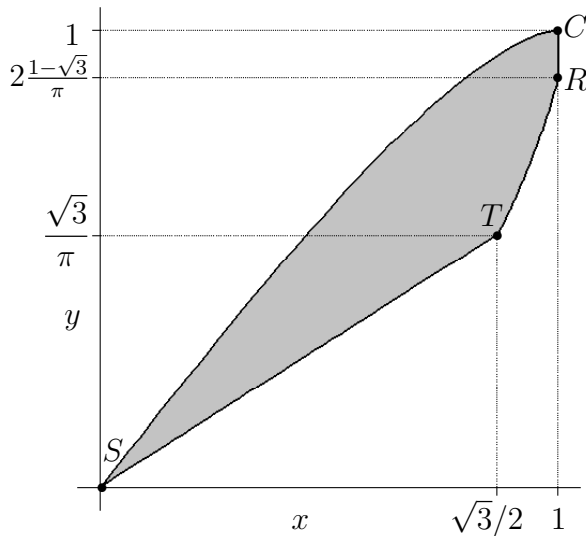


Figura 3.10: Imagem de  $\varphi'$ .

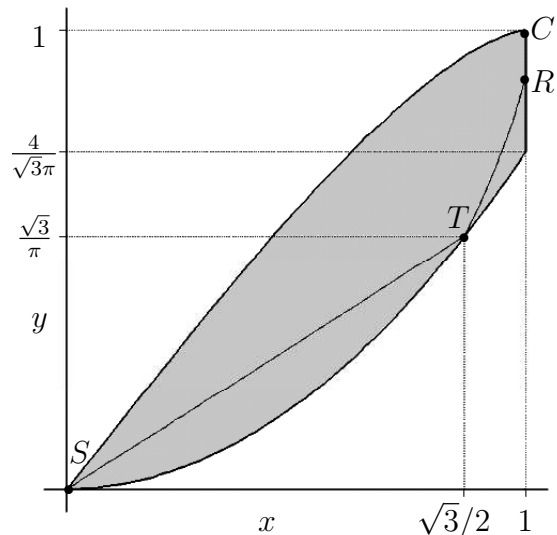


Figura 3.11: Imagem de  $\varphi'$  desconsiderando as desigualdades  $D_{10}$  e  $D_{11}$  e considerando a desigualdade  $d_5$ .

**Provando que  $\text{IM}(\varphi') \subset \text{IM}(\varphi)$**

Seja  $(x, y) \in \text{IM}(\varphi')$ . Temos então vários casos possíveis:

1.  $y = \frac{2}{\pi} \left[ x\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x) \right]$
2.  $x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$  e  $y = \frac{2x}{\pi}$
3.  $x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$  e  $y = \frac{12}{\pi}x \left[ \sqrt{1-x^2} + x \left( \arcsin(x) - \frac{\pi}{3} \right) \right] - \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$4. x \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ e } \frac{2x}{\pi} < y < \frac{2}{\pi} [x\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x)]$$

$$5. x \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ e } \frac{12}{\pi}x [\sqrt{1-x^2} + x(\arcsin(x) - \frac{\pi}{3})] - \frac{\sqrt{3}}{2} < y < \frac{2}{\pi} [x\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x)]$$

Em qualquer desses casos, é possível pegarmos  $\omega$  e  $D$  não negativos tais que  $x = \frac{\omega}{D}$ .

No primeiro caso, podemos construir então o segmento simétrico de círculo  $K = B[(0, \frac{\omega}{2}), \frac{D}{2}] \cap R$ , sendo  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq \omega\}$  a região entre as retas  $y = 0$  e  $y = \omega$ . Como um segmento simétrico de círculo satisfaz a igualdade em  $D_{12}$ , então a imagem de  $K$  por  $\varphi$  é  $(x, y)$  (ver figura 3.12 e fórmula (3.6)).

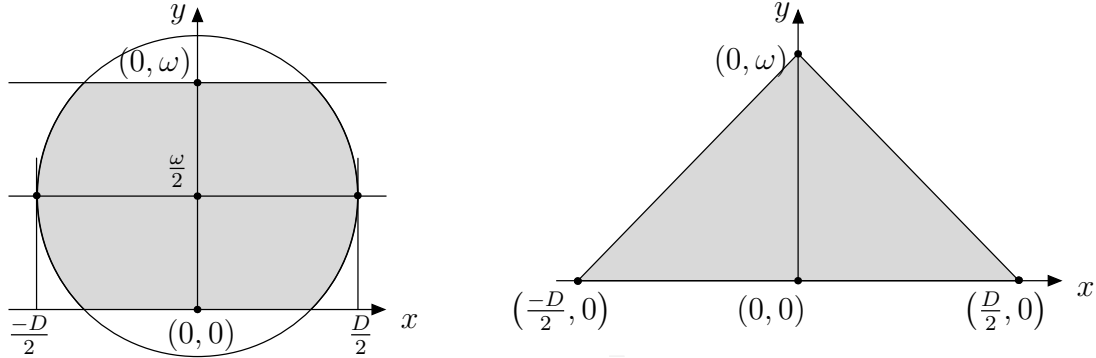


Figura 3.12: Capbody e triângulo isósceles com diâmetro  $D$  e largura mínima  $\omega$ .

No caso 2, peguemos o triângulo isósceles  $T$  formado pelos vértices  $(-D/2, 0)$ ,  $(D/2, 0)$  e  $(0, \omega)$ . Como  $x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ , então  $\omega \leq \frac{\sqrt{3}}{2}D$ , logo a base  $SG[(-D/2, 0); (D/2, 0)]$  é o maior lado do triângulo  $T$ . Sabendo que num triângulo o diâmetro é a medida do maior lado e a largura mínima é a altura relativa ao maior lado, então  $T$  tem diâmetro  $D$  e largura mínima  $\omega$ .

Sendo  $T$  um triângulo de base  $D$  e altura  $\omega$ ,  $T$  satisfaz a igualdade em  $D_{10}$  e, pelas contas feitas anteriormente, vale que  $\varphi(T) = (x, y)$ .

No caso 3, tomando  $\frac{\omega}{D} = x$  podemos construir um conjunto de Yamanouti  $\mathcal{Y}$  com diâmetro  $D$  e largura mínima  $\omega$ . Isso é fácil de fazer, pois nos conjuntos de Yamanouti o diâmetro  $D$  é igual ao lado do triângulo e  $\omega$  é igual ao raio do arco. Como  $x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ , então  $\omega \geq D\frac{\sqrt{3}}{2}$  e  $D\frac{\sqrt{3}}{2}$  é a altura do triângulo. Segue que  $D\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \omega \leq D$ , ou seja, o raio dos arcos está entre a altura do triângulo e o lado do triângulo. Portanto um triângulo de lado  $D$  com arcos de raio  $\omega$  definem um conjunto de Yamanouti  $\mathcal{Y}$  que satisfaz a igualdade em  $D_{11}$ . Logo vale  $\varphi(\mathcal{Y}) = (x, y)$ .

Os últimos dois casos são similares, portanto mostraremos apenas o quarto caso. Nesse caso, ao invés de mostrar que  $(x, y) \in \text{IM}(\varphi)$ , mostraremos que o segmento

$$\text{SG} \left[ \left( x, \frac{2x}{\pi} \right); \left( x, \frac{2}{\pi} [x\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x)] \right) \right] \quad (3.13)$$

está contido em  $\text{IM}(\varphi)$ .

Sabemos (pelos casos 1 e 2) que os extremos do segmento  $\text{SG} \left[ \left( x, \frac{2x}{\pi} \right), \left( x, \frac{2}{\pi} [x\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x)] \right) \right]$  são pontos de  $\text{IM}(\varphi)$ . Resta mostrar que os pontos do interior do segmento estão em  $\text{IM}(\varphi)$ .

Para isso, tomemos o segmento de círculo simétrico  $K$  do primeiro caso e o triângulo  $T$  do segundo, tais que  $x = \frac{\omega}{D}$ ,  $\omega = \omega(T) = \omega(K)$  e  $D = D(T) = D(K)$ .

Seja também  $T^C$  a simetrização central de  $T$ . Logo, pelo Teorema 2.9,  $\omega(\alpha T + (1 - \alpha)T^C) = \omega(T)$ . Já pelo Teorema 2.14,  $D(\alpha T + (1 - \alpha)T^C) = D(T)$ . Portanto  $\varphi(\alpha T + (1 - \alpha)T^C) = \left(\frac{\omega(T)}{D(T)}, y(\alpha)\right) = (x, y(\alpha))$ . Como a função  $f(\alpha) = \alpha T + (1 - \alpha)T^C$  é contínua em  $[0, 1]$  (ver apêndice A), segue que a função  $\varphi \circ f$  é um caminho em  $\mathbb{R}^2$  e  $(\varphi \circ f)(\alpha) = (x, y(\alpha))$ , para todo  $\alpha \in [0, 1]$ . Assim, para cada ponto  $(x, y)$  do segmento  $\text{SG}[\varphi(T); \varphi(T^C)]$ , existe um corpo convexo  $\alpha T + (1 - \alpha)T^C$  cuja imagem por  $\varphi$  é o ponto  $(x, y)$ . Assim o segmento  $\text{SG}\left[\left(x, \frac{2x}{\pi}\right); (x, y(T^C))\right]$  está contido em  $\text{IM}\varphi$ .

Resta mostrar que o segmento  $\text{SG}\left[\left(x, y(T^C)\right); \left(x, \frac{2}{\pi} [x\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x)]\right)\right]$  está contido na imagem de  $\varphi$ .

Consideremos a função contínua  $g : [0, 1] \rightarrow \mathcal{C}^*$  definida por  $g(\alpha) = \alpha T^C + (1 - \alpha)K$ . Sabemos que  $\varphi \circ g$  é um caminho ligando os pontos  $\varphi(K)$  e  $\varphi(T^C)$ . Queremos mostrar que  $(\varphi \circ g)(\alpha)$  mantém a primeira coordenada constante.

Como  $T^C$  é centralmente simétrico, tem largura mínima  $\omega = \omega(K)$  e diâmetro  $D = D(K)$ , podemos supor (transladando e rodando se necessário) que  $T^C$  está contido em  $K$  (ver apêndice B).

Mas  $\omega(g(\alpha)) \geq \alpha\omega(T^C) + (1 - \alpha)\omega(K) = \omega$ , pela Proposição 2.7. Por outro lado,  $\alpha T^C + (1 - \alpha)K \subset \alpha K + (1 - \alpha)K = K$ , assim (pela Proposição 2.7)  $\omega(g(\alpha)) \leq \omega(K) = \omega$ . Logo  $\omega(g(\alpha)) = \omega, \forall \alpha \in [0, 1]$ .

Por outro lado, como  $T^C$  têm diâmetro  $D$ , então existem dois pontos  $a, b \in T^C$  tais que  $d(a, b) = D$ . Logo  $\alpha a + (1 - \alpha)a = a, \alpha b + (1 - \alpha)b = b$ , ou seja,  $a, b \in \alpha T^C + (1 - \alpha)K$  e  $D(\alpha T^C + (1 - \alpha)K) \geq d(a, b) = D$ . Por outro lado,  $D(\alpha T^C + (1 - \alpha)K) \leq \alpha D(T^C) + (1 - \alpha)D(K) = D$ , pela Proposição 2.12. Portanto  $D(\alpha T^C + (1 - \alpha)K) = D$  e  $\varphi \circ g$  mantém a primeira coordenada constante.

Está, portanto, provado que  $(x, y) \in \text{IM}(\varphi') \implies (x, y) \in \text{IM}(\varphi)$ .

#### **Observações:**

1. Nos problemas  $(A, p, r)$  e  $(A, D, \omega)$  colocamos a figura da imagem da função  $\varphi'$ . Como essa imagem é a imagem da função  $\varphi$ , esta figura é o diagrama de Blaschke-Santaló que corresponde ao problema.
2. Os demais casos resolvidos por Santaló são semelhantes a estes dois aqui apresentados, portanto nos limitaremos a mostrar as desigualdades utilizadas para cada caso, definir a função  $\varphi$  e encontrar o diagrama de Blaschke-Santaló correspondente ao problema.

### **3.3.4 Demais problemas resolvidos por Santaló envolvendo triplas das funções $A, p, D, r, R$ e $\omega$**

Nessa seção, bem como nos próximos capítulos, utilizaremos as letras  $C, R, S$  e  $T$  para representarmos as imagens (pela função  $\varphi$ ) do círculo, do triângulo de Releaux, do segmento de reta e do triângulo equilátero, respectivamente.

#### **Caso $(A, p, R)$**

As desigualdades utilizadas neste problema foram:





Tabela 3.6: Desigualdades utilizadas no caso  $(A, p, R)$ .

Índices	Desigualdades	Igualdade
$d_1$	$4\pi A \leq p^2$	$\circ$
$d_9$	$4R \leq p$	—
$D_6$	$**8\sigma A \leq p(p - 4R \cos \sigma)$	$\emptyset, -$

\*\* $\sigma$  é solução da equação  $p \sin \sigma = 4R\sigma$

Além dessas, Favard ([5] e [6]) demonstrou que a menor área, fixados  $p$  e  $R$ , é atingida nos **polígonos quase-regulares**. Um polígono quase-regular, de circunraio  $R$  e  $n$  lados, é um polígono inscrito em um círculo com raio  $R$ , sendo que  $n - 1$  dos seus lados têm mesma medida e o último tem medida menor ou igual à dos outros  $n - 1$ .

A área de um polígono quase regular pode ser obtida em função de seu perímetro e circunraio, digamos  $A = f(p, R)$ , portanto, para um conjunto convexo qualquer, vale a desigualdade  $A \leq f(p, R)$ , que também será utilizada em nosso problema, mesmo não constando na tabela 3.6.

**Observação:** Embora a área de um polígono quase regular possa ser obtida em função de seu circunraio e perímetro, a fórmula que obtém a área é muito complicada.

A função  $\varphi : \mathcal{C}^* \rightarrow \mathbb{R}^2$  é dada por

$$\varphi(K) = (x, y) = \left( \frac{4R}{p}, \frac{4\pi A}{p^2} \right).$$

As desigualdades  $d_1$  e  $d_9$  garantem que a imagem de  $\varphi$  está contida no quadrado unitário  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

Da desigualdade  $D_6$  temos

$$\begin{aligned} 8\sigma A \leq p(p - 4R \cos \sigma) &\Leftrightarrow 4\pi A \leq \frac{\pi}{2\sigma} p(p - 4R \cos \sigma) \\ \Leftrightarrow \frac{4\pi A}{p^2} \leq \frac{\pi}{2\sigma} \left( 1 - \frac{4R}{p} \cos \sigma \right) &\Leftrightarrow y \leq \frac{\pi}{2\sigma} (1 - x \cos \sigma). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Como  $p \sin \sigma = 4R\sigma$ , então  $\frac{\sin \sigma}{\sigma} = x$  e o lado direito da desigualdade acima depende apenas de  $x$ . Logo (3.14) fornece a fronteira superior do diagrama de Blaschke-Santaló. A curva obtida pela igualdade em (3.14) é a imagem das lentes simétricas pela função  $\varphi$  e é a curva que liga o ponto  $C = \left( \frac{2}{\pi}, 1 \right)$  ao ponto  $S = (1, 0)$  no diagrama de Blaschke-Santaló.

A fronteira inferior do diagrama é a imagem dos polígonos quase regulares. Essa imagem também fornece uma curva que liga os pontos  $C$  e  $S$ .

### Caso $(A, p, \omega)$

As desigualdades usadas neste problema foram as seguintes:

Tabela 3.7: Desigualdades utilizadas no caso  $(A, p, \omega)$ .

Índices	Desigualdades	Igualdade	Condição
$d_5$	$\omega^2 \leq \sqrt{3}A$	$\triangle$	
$d_{11}$	$\pi\omega \leq p$	$\omega = c$	
$D_7$	$4A \leq \omega(2p - \pi\omega)$	$\circ$	
$D_8$	$2A \geq \omega(p - \sqrt{3}\omega \sec^2 \theta)$	$\mathcal{Y}$	$\pi\omega \leq p \leq 2\sqrt{3}\omega$
$D_9$	$16A^2\omega^3 \geq p(p\omega - 4A)^2 \cdot (8A - p\omega)$	$\triangle_{is}$	$2\sqrt{3}\omega \leq p$

$\theta$  é solução da equação  $6\omega(\tan \theta - \theta) = p - \pi\omega$

A função  $\varphi : \mathcal{C}^* \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$  é definida por  $\varphi(K) = (x, y)$ , sendo

$$\begin{cases} x = \frac{\pi\omega}{p} & \text{e} & y = \frac{\omega^2}{\sqrt{3}A}, & \text{se } A \neq 0; \\ x = 0 & \text{e} & y = 0, & \text{se } A = 0. \end{cases}$$

As desigualdades  $d_{11}$  e  $d_5$  garantem que a imagem de  $\varphi$  está contida no quadrado unitário  $[0, 1] \times [0, 1]$ . Já da desigualdade  $D_7$ , se  $A \neq 0$ , resulta que

$$\begin{aligned} 4A \leq 2\omega \cdot p - \pi\omega^2 &\Leftrightarrow 4\pi A\omega \leq 2\pi\omega^2 p - \pi^2\omega^3 \Leftrightarrow \frac{4\pi\omega}{p} \leq \frac{2\pi\omega^2}{A} - \frac{\pi^2\omega^3}{pA} \\ &\Leftrightarrow \frac{4\pi\omega}{p} \leq \frac{\omega^2}{\sqrt{3}A} \pi\sqrt{3} \left(2 - \frac{\pi\omega}{p}\right) \Leftrightarrow \frac{4\frac{\pi\omega}{p}}{\pi\sqrt{3} \left(2 - \frac{\pi\omega}{p}\right)} \leq \frac{\omega^2}{\sqrt{3}A} \\ &\Leftrightarrow \frac{4x}{\pi\sqrt{3}(2-x)} \leq y. \end{aligned} \quad (3.15)$$

No caso em que  $A = 0$ , a desigualdade (3.15) continua válida, portanto  $\forall K \in \mathcal{C}^*$ , se  $(x, y) = \varphi(K)$ , então  $y \geq \frac{4x}{\pi\sqrt{3}(2-x)}$ . Logo a desigualdade (3.15) nos dá a parte inferior do diagrama de Blaschke-Santaló, sendo que a igualdade em (3.15) é alcançada para as salsichas e é a curva que une origem (imagem do segmento de reta) ao ponto  $C = \left(1, \frac{4}{\sqrt{3}\pi}\right)$ .

A desigualdade  $D_8$  é válida para  $\pi\omega \leq p \leq 2\sqrt{3}\omega$ , ou seja, para  $\frac{\pi}{2\sqrt{3}} \leq x \leq 1$ . Nesse intervalo, temos

$$\begin{aligned} \omega p - \sqrt{3}\omega^2 \sec^2 \theta \leq 2A &\Leftrightarrow \omega^2 - \frac{\sqrt{3}\omega^3 \sec^2 \theta}{p} \leq \frac{2A\omega}{p} \\ &\Leftrightarrow \omega^2 \left(\pi - \frac{\sqrt{3}\pi\omega \sec^2 \theta}{p}\right) \leq \frac{2A\pi\omega}{p} \Leftrightarrow \omega^2 \left(\pi - \sqrt{3}x \sec^2 \theta\right) \leq 2Ax \\ &\Leftrightarrow \frac{\omega^2}{A} \leq \frac{x}{\pi - \sqrt{3}x \sec^2 \theta} \\ &\Leftrightarrow y \leq \frac{x}{\sqrt{3}\pi - 3x \sec^2 \theta}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Como  $\theta$  é solução da equação  $6\omega(\tan \theta - \theta) = p - \pi\omega$ , então  $\theta$  é solução das equações:

$$\begin{aligned} 6\omega(\tan \theta - \theta) = p - \pi\omega &\Leftrightarrow \frac{6\pi\omega}{p}(\tan \theta - \theta) = \pi - \frac{\pi^2\omega}{p} \\ &\Leftrightarrow 6x(\tan \theta - \theta) = \pi(1 - x) \stackrel{x \neq 0}{\Leftrightarrow} \tan \theta - \theta = \frac{\pi(1 - x)}{6x}. \end{aligned}$$

Assim, o lado direito da desigualdade (3.16) depende apenas de  $x$ , pois  $\theta$  pode ser escrito em função de  $x$ . Portanto a desigualdade (3.16) fornece a parte superior do diagrama de Blaschke-Santaló para  $\frac{\pi}{2\sqrt{3}} \leq x$ , sendo que a igualdade é alcançada nos conjuntos de Yamanouti. A igualdade em (3.16) fornece a curva que liga os pontos  $T = \left(\frac{\pi}{2\sqrt{3}}, 1\right)$  e  $R = \left(1, \frac{2}{\pi\sqrt{3}-3}\right)$ .

Os pontos  $R$  e  $C$  são ligados por um segmento de reta, sendo que cada ponto desse segmento é a imagem por  $\varphi$  de um conjunto de largura constante.

A última desigualdade a ser analisada é a  $D_9$ , válida para  $2\sqrt{3}\omega \leq p \Leftrightarrow x \leq \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$ . Como a parte inferior do diagrama já foi determinada pela fórmula (3.15), então a desigualdade  $D_9$  determina a parte inferior do diagrama para  $x \leq \pi/2\sqrt{3}$ . Sabendo que a igualdade em  $D_9$  é alcançada para os triângulos isósceles cujas alturas iguais medem  $\omega$  e com perímetro  $p$  (veja a figura (3.13)), então, podemos parametrizar a curva dada pela igualdade em  $D_9$ .

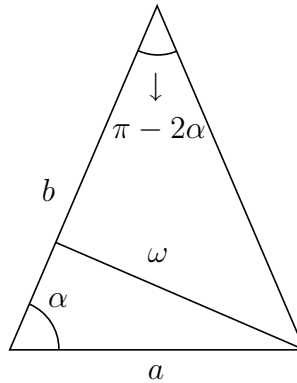


Figura 3.13: Triângulo isósceles com perímetro  $p$  e alturas iguais  $\omega$ .

Seja  $K$  um triângulo isósceles com perímetro  $p$  e largura mínima  $\omega$ , sendo  $\omega$  o comprimento das duas alturas iguais. Sejam também  $a$  o comprimento do lado desigual de  $K$ ,  $b$  o comprimento dos lados iguais e  $\alpha$  a medida dos ângulos iguais, logo

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{a} = \sin \alpha &\Rightarrow \omega = a \sin \alpha, & \frac{\omega}{b} = \sin(\pi - 2\alpha) &\Rightarrow \omega = b \sin(\pi - 2\alpha) \\ & & \Rightarrow b = \frac{a \sin \alpha}{\sin(\pi - 2\alpha)} &= \frac{a}{2 \cos \alpha}. \end{aligned}$$

Sabendo que  $p = 2b + a$  e  $A = b\omega/2$ , temos que  $p = \frac{a(1+\cos \alpha)}{\cos \alpha}$  e  $A = \frac{a^2}{4} \tan \alpha$ . Substituindo em  $x$  e em  $y$  segue que

$$x = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sin(2\alpha)}{1 + \cos \alpha} \quad \text{e} \quad y = \frac{2 \sin(2\alpha)}{\sqrt{3}}.$$



Como as duas alturas iguais têm medida  $\omega$ , então o triângulo  $K$  deve ter o lado desigual menor do que os outros dois, assim  $\pi/3 \leq \alpha\pi/2$ , portando  $0 \leq x \leq \pi/2\sqrt{3}$ . Portanto a curva que dá a fronteira superior do diagrama, para  $x$  entre 0 e  $\pi/2\sqrt{3}$ , é a curva determinada por

$$\left( \frac{\pi \sin(2\alpha)}{2(1 + \cos \alpha)}, \frac{2 \sin(2\alpha)}{\sqrt{3}} \right),$$

com  $\alpha$  variando entre  $\pi/3$  e  $\pi/2$ . Essa curva liga a origem ao ponto  $T$  e os pontos dessa curva são imagens dos triângulos isósceles cujos ângulos iguais variam entre  $\pi/2$  e  $\pi/3$ .

**Caso**  $(p, D, \omega)$

Tabela 3.8: Desigualdades utilizadas no caso  $(p, D, \omega)$ .

Índices	Desigualdades	Igualdade
$d_7$	$p \leq \pi D$	$\omega = c$
$d_{15}$	$\omega \leq D$	$\omega = c$
$D_{13}$	**** $2[\eta + \omega \arcsin \rho] \leq p$	
$D_{14}$	**** $p \leq 2[\eta + D \arcsin \rho]$	

$$\text{****} \eta = \sqrt{D^2 - \omega^2}, \rho = \frac{\omega}{D}$$

A função  $\varphi : \mathcal{C}^* \rightarrow \mathbb{R}^2$  é dada por

$$\varphi(K) = \left( \frac{\omega}{D}; \frac{p}{\pi D} \right),$$

e as desigualdades  $d_7$  e  $d_{15}$  garantem que a imagem de  $\varphi$  está contida no quadrado unitário.

Da desigualdade  $D_{13}$  temos:

$$\begin{aligned} p \geq 2 \left[ \sqrt{D^2 - \omega^2} + \omega \arcsin \left( \frac{\omega}{D} \right) \right] &\Leftrightarrow \frac{p}{\pi D} \geq \frac{2}{\pi} \left[ \sqrt{1 - x^2} + x \arcsin(x) \right] \\ &\Leftrightarrow y \geq \frac{2}{\pi} \left[ \sqrt{1 - x^2} + x \arcsin(x) \right]. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Curva obtida pela igualdade na desigualdade acima fornece a fronteira inferior do diagrama de Blaschke-Santaló, e é a curva que liga o ponto  $S = (0, 2/\pi)$  ao ponto  $C = (1, 1)$ . Cada ponto dessa curva é a imagem de um capbody.

De  $D_{14}$  sai:

$$\begin{aligned} p \leq 2 \left[ \sqrt{D^2 - \omega^2} + D \arcsin \left( \frac{\omega}{D} \right) \right] &\Leftrightarrow \frac{p}{\pi D} \leq \frac{2}{\pi} \left[ \sqrt{1 - x^2} + \arcsin(x) \right] \\ &\Leftrightarrow y \leq \frac{2}{\pi} \left[ \sqrt{1 - x^2} + \arcsin(x) \right]. \end{aligned} \quad (3.18)$$

A igualdade, na desigualdade acima, é alcançada pelos segmentos simétricos de círculo, sendo que a imagem desses segmentos fornece a fronteira superior do diagrama, que também é uma curva ligando os pontos  $S$  e  $C$ .

**Caso**  $(D, r, R)$

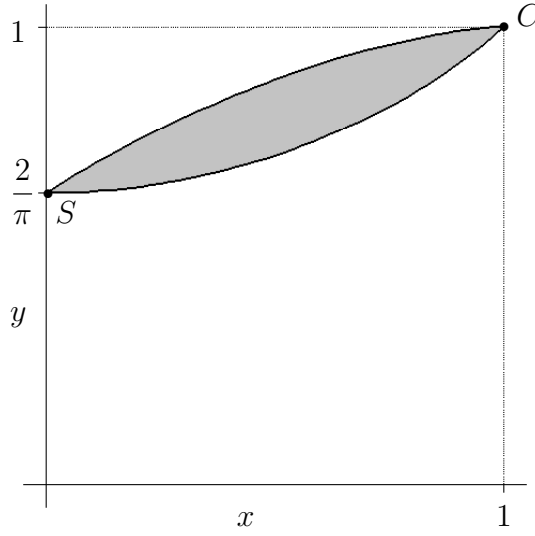


Figura 3.14: Diagrama de Blaschke-Santaló para o caso  $(p, D, \omega)$ .

Tabela 3.9: Desigualdades utilizadas no caso  $(p, D, \omega)$ .

Índices	Desigualdades	Igualdade
$d_{13}$	$\sqrt{3}R \leq D$	$y^\dagger$
$d_{14}$	$D \leq 2R$	$\text{Cent}^\dagger$
$d_{16}$	$r \leq R$	$\bigcirc$
$D_{15}$	$(D^2 - 2Rr) \cdot \sqrt{4R^2 - D^2} \leq 4R^2r$	$\Delta_{\text{is}}$
$D_{16}$	$D \geq R + r$	${}^\dagger\omega = \text{cte}, \Delta_{\circ}$

${}^\dagger$ existem mais conjuntos que satisfazem a igualdade.

A função  $\varphi : \mathcal{C}^2 \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$  é dada por

$$\varphi(K) = \left( \frac{D}{2R}; \frac{r}{R} \right),$$

e, pelas desigualdades  $d_{14}$  e  $d_{16}$ , a imagem de  $\varphi$  está contida em seu contradomínio.

Da desigualdade  $d_{13}$  temos  $\sqrt{3}R \leq D \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \leq x$ . Mas a igualdade em  $d_{13}$  só é alcançada para conjuntos convexos que contêm um triângulo equilátero de mesmo diâmetro, sendo que o menor inraio (nessa família de conjuntos) é alcançado pelos triângulos equiláteros com diâmetro  $D$ , e o maior pelos triângulos de Releaux.

Assim, como a imagem do triângulo equilátero por  $\varphi$  é o ponto  $T = (\sqrt{3}/2, 1/3)$ , e a imagem do triângulo de Releaux é o ponto  $R = (\sqrt{3}/2, \sqrt{3} - 1)$ , então a curva  $x = \sqrt{3}/2$ , com  $y$  variando entre  $1/2$  a  $\sqrt{3} - 1$ , fornece parte da fronteira do diagrama de Blaschke, e liga os pontos  $T$  e  $R$  pelas imagens dos conjuntos de Yamanoti.

Para  $x = 1$ , tomando as salsichas de diâmetro  $2R$  e largura mínima  $2r$ , podemos variar  $r$  e  $R$  de forma que  $y = r/R$  possa ter qualquer valor entre 0 e 1. Logo a curva  $x = 1$  também é parte da fronteira do diagrama, ligando o ponto  $C = (1, 1)$  ao ponto  $S = (1, 0)$ .

Da desigualdade  $D_{15}$  temos:

$$\begin{aligned}
 (D^2 - 2Rr) \cdot \sqrt{4R^2 - D^2} \leq 4R^2r &\Leftrightarrow \left( \frac{D^2}{4R^2} - \frac{r}{2R} \right) \sqrt{4R^2 - D^2} \leq r \\
 \Leftrightarrow \left( \frac{D^2}{4R^2} - \frac{r}{2R} \right) \frac{\sqrt{4R^2 - D^2}}{2R} \leq \frac{r}{2R} &\Leftrightarrow \left( x^2 - \frac{y}{2} \right) \sqrt{1 - x^2} \leq \frac{y}{2} \\
 \Leftrightarrow x^2 \sqrt{1 - x^2} \leq \frac{y}{2} \left( 1 + \sqrt{1 - x^2} \right) &\Leftrightarrow \frac{2x^2 \sqrt{1 - x^2}}{1 + \sqrt{1 - x^2}} \leq y. \tag{3.19}
 \end{aligned}$$

A curva dada pela igualdade em (3.19) é a fronteira inferior do diagrama, sendo também a imagem dos triângulos isósceles nos quais o lado desigual é menor (ou igual) aos dois outros lados. Essa curva liga os pontos  $T$  e  $S$ .

Da desigualdade  $D_{16}$  temos:

$$\begin{aligned}
 D \geq R + r &\Leftrightarrow \frac{D}{2R} \geq \frac{1}{2} + \frac{r}{2R} \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2} + \frac{y}{2} \\
 &\Leftrightarrow 2x - 1 \geq y. \tag{3.20}
 \end{aligned}$$

A igualdade em (3.20) determina a fronteira superior do diagrama, que é a imagem dos conjuntos convexos de largura constante. Essa curva liga os pontos  $R$  e  $C$ .

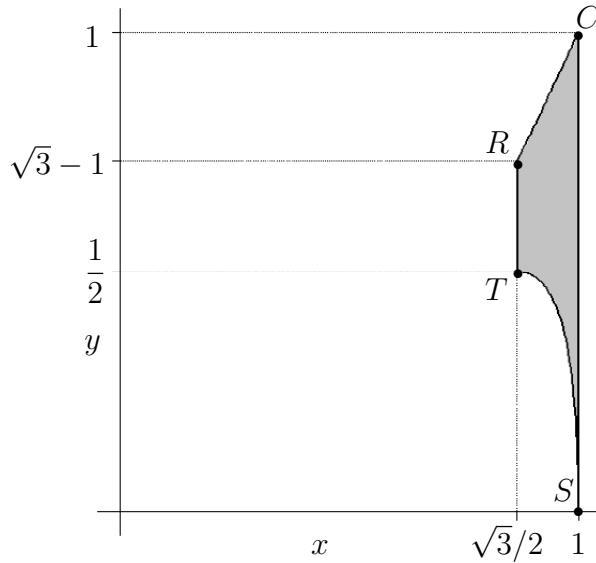


Figura 3.15: Diagrama de Blaschke-Santaló para o caso  $(D, r, R)$ .

# Capítulo 4

## Os demais problemas propostos por Santaló

Nesse capítulo estudaremos os demais problemas propostos por Santaló que não foram resolvidos por ele. Alguns desses problemas foram resolvidos recentemente e outros ainda estão abertos. Mas, antes de começarmos nosso estudo, necessitaremos de uma nova lista de desigualdades que ainda não eram conhecidas na época de Santaló.

### 4.1 Novas desigualdades

Com a descoberta de novas desigualdades, foi possível resolver os casos  $(A, D, R)$ ,  $(A, r, R)$ ,  $(p, D, R)$ ,  $(p, r, R)$ ,  $(D, r, \omega)$ ,  $(D, R, \omega)$  e  $(r, R, \omega)$ .

Tabela 4.1: Novas desigualdades.

Funções	Índices	Desigualdades	Igualdade	Referências
$A, D, r$	$D_{18}$	$A \geq r(\sqrt{D^2 - 4r^2} + 2r \arcsin \frac{2r}{D})$	$\langle \odot \rangle$	[9]
	$D_{19}$	$A \leq 2Dr$	—	[8]
$A, D, R$	$D_{20}$	$4AR^2 \geq D^3 \sqrt{4R^2 - D^2}$	$\triangle_{is}$	[14]
	$D_{21}$	$2A \leq 3 \left[ D^2 \left( \frac{\pi}{3} - \arccos \frac{\sqrt{3}R}{D} \right) - \sqrt{3}R(R - \sqrt{D^2 - 3R^2}) \right]$	$\omega_A = c$	[14]

Tabela 4.1: continuando da página anterior.

Funções	Índices	Desigualdades	Igualdade	Referências
A, r, R	$D_{22}$	$*A \leq 2(r\kappa + R^2 \arcsin \vartheta)$	$\bigcirc$	[4]
	$D_{23}$	$*A \geq 2r(\kappa + r \arcsin \vartheta)$	$\langle \bigcirc \rangle$	[4]
A, r, $\omega$	$D_{24}$	$(\omega - 2r)^2 \cdot (4r - \omega)A^2 \leq r^4\omega^3$	$\triangle_{\text{is}}$	[9]
A, R, $\omega$	$D_{25}$	$2A \leq \omega\sqrt{4R^2 - \omega^2} + 4R^2 \arcsin \frac{\omega}{2R}$	$\bigcirc$	[9]
	$D_{26}$	$\omega^8 R^4 \geq 16A^4 (R^2\omega^2 - A^2)$	$\triangle_{\text{is}}$	[9]
p, D, r	$D_{27}$	$p \geq 2(\sqrt{D^2 - 4r^2} + 2r \arcsin \frac{2r}{D})$	$\langle \bigcirc \rangle$	[9]
	$D_{28}$	$p \leq 2D + 4r$	—	[8]
p, D, R	$D_{29}$	$\frac{Rp}{D(2R + \sqrt{4R^2 - D^2})} \geq$	$\triangle_{\text{is}}$	[14]
p, r, R	$D_{30}$	$*p \leq 4(\kappa + R^2 \arcsin \vartheta)$	$\bigcirc$	[4]
	$D_{3I}$	$*p \geq 4(\kappa + r \arcsin \vartheta)$	$\langle \bigcirc \rangle$	[4]
p, r, $\omega$	$D_{32}$	$(\omega - 2r)^2 \cdot (4r - \omega)p^2 \leq 4r^2\omega^3$	$\triangle_{\text{is}}$	[9]
p, R, $\omega$	$D_{33}$	$p \leq 2(\sqrt{4R^2 - \omega^2} + 2 \arcsin \frac{\omega}{2R})$	$\bigcirc$	[9]
D, r, $\omega$	$D_{34}$	$D^2(\omega - 2r)^2 \cdot (4r - \omega) \leq 4r^4\omega$	$\triangle_{\text{is}}$	[13]
	$D_{35}$	$D \geq \sqrt{3}(\omega - r)$	$\mathcal{Y}$	[13]
D, R, $\omega$	$D_{36}$	$4R^4\omega^2 \geq (4r^2 - D^2)D^4$	$\triangle_{\text{is}}$	[15]
r, R, $\omega$	$D_{37}$	$(4r - \omega) \cdot (\omega - 2r)R \leq 2r^3$	$\triangle_{\text{is}}$	[15]

$$*\vartheta = \frac{r}{R}, \quad \kappa = \sqrt{R^2 - r^2}$$

Todas as desigualdades da tabela (4.1) não eram conhecidas por Santaló, pois foram provadas posteriormente.

Na desigualdade  $D_{21}$ , a igualdade é alcançada pelos conjuntos de largura constante que, para  $D$  e  $R$  fixados, atingem área máxima. Esses conjuntos, denotados por  $\omega_A = c$ , são construídos da seguinte forma:

Seja  $K$  um conjunto de largura constante de circunraio  $R$ , inraio  $r$  e diâmetro  $D = \omega$ . Sejam também  $\Gamma$  e  $\gamma$  o circuncírculo e o incírculo de  $K$ , respectivamente. Sabe-se a respeito dos conjuntos de largura constante que  $\Gamma$  e  $\gamma$  têm mesmo centro (ver [3]) e que  $D = \omega = R + r$ .

Consideremos então  $T$  um triângulo equilátero inscrito em  $\Gamma$ . Tracemos então, para cada vértice de  $T$ , o círculo com centro no vértice e raio  $R + r$ . Tracemos também, para cada lado de  $T$ , o círculo cujo lado é uma corda, com centro no interior de  $T$  e com raio  $(R + r)/2$ . O conjunto formado pela interseção de  $\Gamma$  com esses 6 círculos é um conjunto de largura constante e área máxima (ver [14]).



## 4.2 Demais problemas resolvidos

### 4.2.1 Caso $(A, D, R)$

Esse caso foi resolvido em [14] e as desigualdades desse caso são:

Tabela 4.2: Desigualdades utilizadas no caso  $(A, D, R)$ .

Índices	Desigualdades	Igualdade
$d_4$	$A \leq \pi R^2$	$\bigcirc$
$d_{13}$	$\sqrt{3}R \leq D$	$y^\dagger$
$d_{14}$	$D \leq 2R$	Cent <sup>†</sup>
$D_{20}$	$4AR^2 \geq D^3 \sqrt{4R^2 - D^2}$	$\triangle_{\text{is}}$
$D_{21}$	$2A \leq 3 \left[ D^2 \left( \frac{\pi}{3} - \arccos \frac{\sqrt{3}R}{D} \right) - \sqrt{3}R (R - \sqrt{D^2 - 3R^2}) \right]$	$\omega_A = c$

<sup>†</sup>existem mais figuras para as quais vale a igualdade.

A função  $\varphi : \mathcal{C}^* \rightarrow [0, 1]^2$  é dada por

$$\varphi(K) = \left( \frac{A}{\pi R^2}, \frac{D}{2R} \right).$$

Veja que as desigualdades  $d_4$  e  $d_{14}$  garantem que a imagem de  $\varphi$  está contida em  $[0, 1]^2$ .

A desigualdade  $d_{13}$  garante que  $y \geq \sqrt{3}/2$ , logo a curva  $y = \sqrt{3}/2$  fornece a parte inferior da fronteira do diagrama de Blaschke-Santaló, ligando os pontos  $T = \left( \frac{3\sqrt{3}}{\pi}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$  a  $R = \left( \frac{3(\pi - \sqrt{3})}{2\pi}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$  pelas imagens dos conjuntos de Yamanouti.

Já da desigualdade  $d_{14}$  resulta que  $y \leq 1$ , sendo que a igualdade  $y = 1$  é a parte superior da fronteira do diagrama, ligando os pontos  $S = (0, 1)$  e  $C = (1, 1)$  pelas imagens dos segmentos de círculo simétricos.

Da desigualdade  $D_{20}$  sai que

$$x \geq \frac{4}{\pi} y^3 \sqrt{1 - y^2},$$

sendo que a igualdade é alcançada pelos triângulos isósceles. Dessa forma, a fronteira esquerda do diagrama de Blaschke-Santaló é dada pela curva  $x = \frac{4}{\pi} y^3 \sqrt{1 - y^2}$ , ligando os pontos  $S$  e  $T$ . Observe que cada ponto dessa curva é a imagem de algum triângulo isósceles.

Por último, da desigualdade  $D_{21}$ , resulta

$$x \leq 2y^2 \left[ 1 - \frac{3}{\pi} \arccos \left( \frac{\sqrt{3}}{2y} \right) \right] + \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \left[ \sqrt{4y^2 - 3} - 1 \right].$$

A igualdade é alcançada pelos conjuntos de largura constante com área máxima, cujas imagens fornecem a parte direita da fronteira do diagrama ligando os pontos  $R$  e  $C$ .

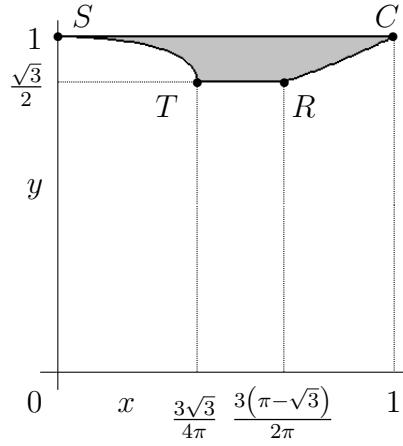


Figura 4.1: Diagrama de Blaschke-Santaló para o caso  $(A, D, R)$ .

#### 4.2.2 Caso $(A, r, R)$

Esse caso foi resolvido em [4] e as desigualdades desse caso estão na tabela 4.3:

Tabela 4.3: Desigualdades utilizadas no caso  $(A, r, R)$ .

Índices	Desigualdades	Igualdade
$d_4$	$A \leq \pi R^2$	$\circ$
$d_{16}$	$r \leq R$	$\circ$
$D_{22}$	$A \leq 2(r\kappa + R^2 \arcsin \vartheta)$	$\circ$
$D_{23}$	$A \geq 2r(\kappa + r \arcsin \vartheta)$	$\langle \circ \rangle$

$$\vartheta = \frac{r}{R}$$

$$\kappa = \sqrt{R^2 - r^2}$$

A função  $\varphi : \mathcal{C}^* \rightarrow [0, 1]^2$  é dada por

$$\varphi(K) = \left( \frac{A}{\pi R^2}, \frac{r}{R} \right),$$

e as desigualdades  $d_4$  e  $d_{16}$  garantem que a imagem de  $\varphi$  está contida em seu contradomínio.

Da desigualdade  $D_{22}$  resulta

$$x \leq \frac{2}{\pi} \left( y\sqrt{1-y^2} - \arcsin y \right),$$

em que a igualdade é alcançada pelos segmentos de círculo simétricos e é a fronteira inferior do diagrama de Blaschke-Santaló, ligando os pontos  $S = (0, 0)$  e  $C = (1, 1)$ .

Já da desigualdade  $D_{23}$  resulta

$$\pi x \geq 2y \left( \sqrt{1-y^2} - y \arcsin y \right),$$

em que a igualdade é alcançada pelos capboudys e é a fronteira superior do diagrama, também ligando os pontos  $S = (0, 0)$  e  $C = (1, 1)$ .

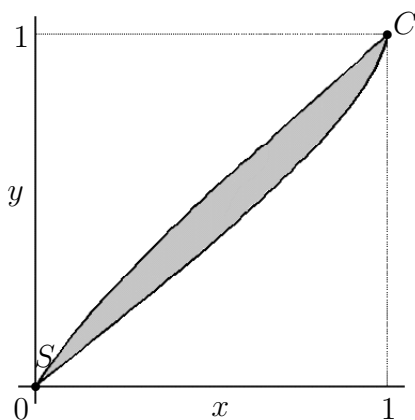


Figura 4.2: Diagrama de Blaschke-Santaló para o caso  $(A, r, R)$ .

### 4.2.3 Caso $(p, D, R)$

Esse caso foi resolvido em [14] e as desigualdades utilizadas estão na tabela 4.4:

Tabela 4.4: Desigualdades utilizadas no caso  $(p, D, R)$ .

Índices	Desigualdades	Igualdade
$d_7$	$p \leq \pi D$	$\omega = \text{cte}$
$d_{13}$	$\sqrt{3}R \leq D$	$y^\dagger$
$d_{14}$	$D \leq 2R$	$\text{Cent}^\dagger$
$D_{29}$	$\frac{Rp}{D(2R + \sqrt{4R^2 - D^2})} \geq$	$\Delta_{\text{is}}$

$^\dagger$  existem mais figuras para as quais vale a igualdade.

A função  $\varphi : \mathcal{C}^* \rightarrow [0, 1]^2$  é dada por  $\varphi(K) = \left(\frac{p}{\pi D}, \frac{\sqrt{3}R}{D}\right)$  e as desigualdades  $d_7$  e  $d_{13}$  garantem que sua imagem está contida dentro de  $[0, 1]^2$ .

Da desigualdade  $d_7$  sai que  $x \leq 1$ . A curva  $x = 1$  é fronteira direita do diagrama de Blaschke-Santaló e liga os pontos  $R = (1, 1)$  e  $C = (1, \sqrt{3}/2)$ . Cada ponto dessa curva é a imagem de um conjunto de largura constante.

Da desigualdade  $d_{13}$  sai que  $y \leq 1$ . A curva  $y = 1$  é a fronteira superior do diagrama e liga os pontos  $T = (3/\pi, 1)$  e  $R$ . Cada ponto dessa curva é a imagem de um conjunto de Yamanouti.

A desigualdade  $d_{14}$  implica em  $y \geq \sqrt{3}/2$ , sendo que a curva  $y = \sqrt{3}/2$  é a fronteira inferior do diagrama ligando os pontos  $S = (2/\pi, \sqrt{3}/2)$  e  $C$ . Cada um dos pontos dessa curva é a imagem de um segmento de círculo simétrico.

Por último, a desigualdade  $D_{29}$  implica em

$$\pi x \geq 2 + \sqrt{4 - \frac{3}{y^2}}.$$

A curva dada pela igualdade é a fronteira esquerda do diagrama, ligando os pontos  $S$  e  $T$  e cada ponto dessa curva é a imagem de um triângulo isósceles.

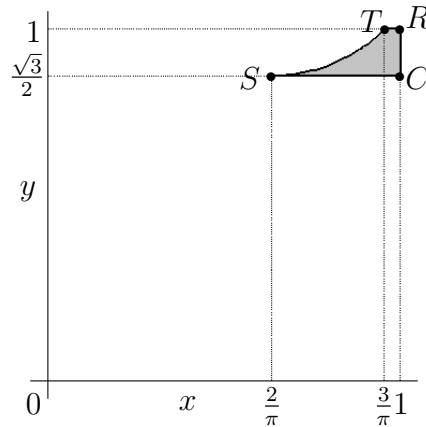


Figura 4.3: Diagrama de Blaschke-Santaló para o caso  $(p, D, R)$ .

#### 4.2.4 Caso $(p, r, R)$

Esse caso foi resolvido em [4] e as desigualdades envolvidas estão na tabela 4.5:

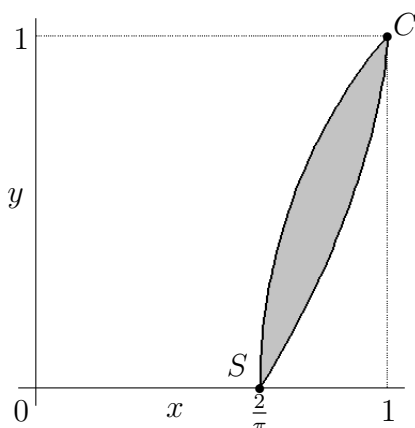
Tabela 4.5: Desigualdades utilizadas no caso  $(p, r, R)$ .

Índices	Desigualdades	Igualdade
$d_{10}$	$p \leq 2\pi R$	○
$d_{16}$	$r \leq R$	○
$D_{30}$	$p \leq 4(\kappa + R^2 \arcsin \vartheta)$	⊖
$D_{31}$	$p \geq 4(\kappa + r \arcsin \vartheta)$	⟨⊙⟩

A função  $\varphi : \mathcal{C}^* \rightarrow [0, 1]^2$  é dada por  $\varphi(K) = (\frac{p}{2\pi R}, \frac{r}{R})$  e as desigualdades  $d_{10}$  e  $d_{16}$  garantem que sua imagem está contida dentro de  $[0, 1]^2$ .

Da desigualdade  $D_{30}$  sai que  $\pi x \geq 2 \left( \sqrt{1 - y^2} + y \arcsin y \right)$ , sendo que a curva definida pela igualdade é a fronteira inferior do diagrama de Blaschke-Santaló, ligando os pontos  $S = (2/\pi, 0)$  e  $C = (1, 1)$ . Cada ponto dessa curva é a imagem de um segmento de círculo simétrico por  $\varphi$ .

Já da desigualdade  $D_{31}$ , temos que  $\pi x \geq 2 + \sqrt{4 - 3/y^2}$ . A igualdade nessa desigualdade define a parte superior da fronteira do diagrama, também ligando os pontos  $C$  e  $S$ , e cada ponto dessa curva é a imagem de um capbody.

Figura 4.4: Diagrama de Blaschke-Santaló para o caso  $(p, r, R)$ .

#### 4.2.5 Caso $(D, r, \omega)$

Esse caso foi resolvido em [13] e as desigualdades envolvidas estão na tabela 4.6:

Tabela 4.6: Desigualdades utilizadas no caso  $(D, r, \omega)$ .

Índices	Desigualdades	Igualdade
$d_{12}$	$2r \leq D$	$\circ$
$d_{15}$	$\omega \leq D$	$\omega = \text{cte}$
$d_7$	$2r \leq \omega$	$\dagger \text{Cent}$
$D_{34}$	$D^2(\omega - 2r)^2 \cdot (4r - \omega) \leq 4r^4\omega$	$\triangle_{\text{is}}$
$D_{35}$	$D \geq \sqrt{3}(\omega - r)$	$\mathcal{Y}$

$\dagger$  existem mais figuras para as quais vale a igualdade.

A função  $\varphi : \mathcal{E}^* \rightarrow [0, 1]^2$  é dada por  $\varphi(K) = \left(\frac{\omega}{D}, \frac{2r}{D}\right)$  e as desigualdades  $d_{12}$  e  $d_{15}$  garantem que sua imagem está contida dentro de  $[0, 1]^2$ .

Da desigualdade  $d_{15}$  sai que  $x \leq 1$ , sendo que a curva  $x = 1$ , ligando os pontos  $C = (1, 1)$  e  $R = \left(1, \frac{2(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}}\right)$ , é parte da fronteira do diagrama de Blaschke-Santaló. Cada ponto dessa curva é a imagem de um conjunto de largura constante.

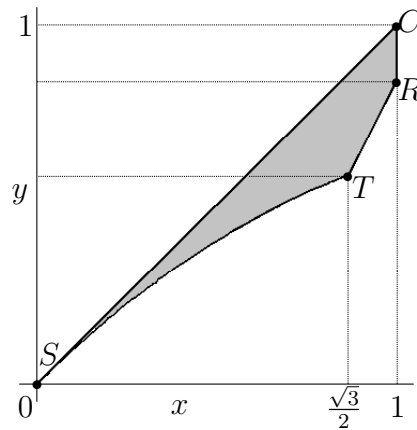
Da desigualdade  $d_7$  resulta  $y \leq x$ , sendo que a curva  $x = y$  é a parte superior da fronteira do diagrama e liga os pontos  $S = (0, 0)$  e  $C$ . Cada ponto dessa curva é a imagem de um segmento de círculo simétrico.

A desigualdade  $D_{34}$  implica em

$$4(x - y)^2 \cdot (2y - x) \leq y^4x,$$

em que a igualdade define a parte da fronteira do diagrama que liga o ponto  $S$  ao ponto  $T = (\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/2)$ . Cada ponto dessa curva é a imagem de um triângulo isósceles.

A última parte da fronteira do diagrama é a curva  $x = 1/\sqrt{3} + y/2$ , que sai da desigualdade  $D_{35}$ . Essa curva liga os pontos  $T$  e  $R$  e é a imagem dos conjuntos de Yamanouti.

Figura 4.5: Diagrama de Blaschke-Santaló para o caso  $(D, r, \omega)$ .

#### 4.2.6 Caso $(D, R, \omega)$

Esse caso foi resolvido em [15] e as envolvidas envolvidas estão na tabela 4.7:

Tabela 4.7: Desigualdades utilizadas no caso  $(D, R, \omega)$ .

Índices	Desigualdades	Igualdade
$d_{13}$	$\sqrt{3}R \leq D$	$y^\dagger$
$d_{14}$	$D \leq 2R$	Cent $^\dagger$
$d_{15}$	$\omega \leq D$	$\omega = \text{cte}$
$d_{19}$	$\omega \leq 2R$	$\bigcirc$
$D_{36}$	$4R^4\omega^2 \geq (4r^2 - D^2) D^4$	$\triangle_{\text{is}}$

$^\dagger$ existem mais figuras para as quais vale a igualdade.

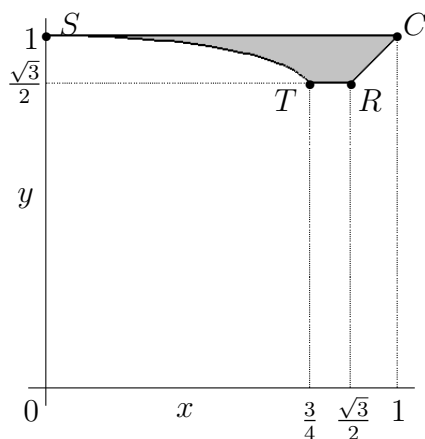
A função  $\varphi : \mathcal{C}^* \rightarrow [0, 1]^2$  está definida por  $\varphi(K) = (\frac{\omega}{2R}, \frac{D}{2R})$  e as desigualdades  $d_{14}$  e  $d_{19}$  garantem que sua imagem está contida em seu contradomínio.

Da desigualdade  $d_{12}$  resulta  $y \geq \sqrt{3}/2$ , sendo que a igualdade  $y = \sqrt{3}/2$  é a parte inferior da fronteira do diagrama de Blaschke-Santaló, ligando os pontos  $T = (3/4, \sqrt{3}/2)$  e  $R = (\sqrt{3}/2, \sqrt{3}/2)$ . Cada ponto dessa curva é a imagem de um conjunto de Yamanouti.

Da desigualdade  $d_{14}$  segue que  $y \leq 1$ . A igualdade  $y = 1$  é a parte superior do diagrama e liga os pontos  $S = (0, 1)$  e  $C = (1, 1)$ . Cada ponto dessa curva é a imagem de um conjunto centralmente simétrico.

A desigualdade  $d_{15}$  implica em  $x \leq y$  e  $x = y$  define a fronteira direita do diagrama, ligando os pontos  $R$  e  $C$ . Os pontos dessa curva são imagens dos conjuntos de largura constante.

A parte esquerda do diagrama é a curva  $x^2 = 4y^4(1 - y^2)$  que resulta da desigualdade  $D_{36}$  e liga os pontos  $S$  e  $T$ . Cada ponto dessa curva é a a imagem de um triângulo isósceles.

Figura 4.6: Diagrama de Blaschke-Santaló para o caso  $(D, R, \omega)$ .

### 4.2.7 Caso $(r, R, \omega)$

Esse caso foi resolvido em [15] e as desigualdades envolvidas estão na tabela 4.8:

Tabela 4.8: Desigualdades utilizadas no caso  $(r, R, \omega)$ .

Índices	Desigualdades	Igualdade
$d_{16}$	$r \leq R$	$\bigcirc$
$d_7$	$2r \leq \omega$	$\dagger \text{Cent}$
$d_{19}$	$\omega \leq 2R$	$\bigcirc$
$D_{17}$	$\omega \leq r + R$	$\dagger \Delta_{\text{circ}}, \mathcal{Y}, \omega = \text{cte}$
$D_{37}$	$(4r - \omega) \cdot (\omega - 2r)R \leq 2r^3$	$\Delta_{\text{is}}$

$\dagger$  existem mais figuras para as quais vale a igualdade.

As desigualdades  $d_{16}$  e  $d_{19}$  garantem que a imagem da função  $\varphi : \mathcal{C}^* \rightarrow [0, 1]^2$ , definida por  $\varphi(K) = (\frac{\omega}{2R}, \frac{r}{R})$ , está contida em  $[0, 1]^2$ .

Da desigualdade  $d_7$  sai que  $x \geq y$ . A igualdade  $x = y$  determina a parte superior do diagrama de Blaschke-Santaló. Essa curva liga os pontos  $S = (0, 0)$  e  $C = (1, 1)$ .

Da desigualdade  $D_{17}$  resulta que  $2x - 1 \leq y$  e a curva definida por  $2x - 1 = y$  é a parte direita da fronteira inferior do diagrama, ligando os pontos  $T = (3/4, 1/2)$  e  $C$ . Cada ponto dessa curva é a imagem de um conjunto de Yamanouti ou de um triângulo circular.

A última parte da fronteira do diagrama é a curva  $4(2y - x) \cdot (x - y) = y^3$ , que é consequência da desigualdade  $D_{37}$ . Essa curva liga os pontos  $S$  e  $T$  e é a imagem dos triângulos isósceles, cujo lado desigual é menor ou igual aos outros dois.

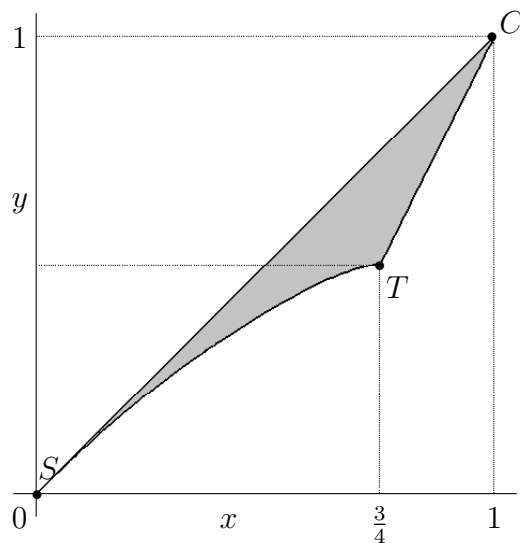


Figura 4.7: Diagrama de Blaschke-Santaló para o caso  $(r, R, \omega)$ .

### 4.3 Casos que continuam abertos

Finalizando nosso trabalho, resta mostrar quais os problemas propostos por Santaló que continuam abertos até hoje, que são os seguintes casos:  $(A, p, D)$ ,  $(A, D, r)$ ,  $(A, r, \omega)$ ,  $(A, R, \omega)$ ,  $(p, D, r)$ ,  $(p, r, \omega)$  e  $(p, R, \omega)$ .

Resultados parciais sobre esses casos podem ser encontrados em [9] ou em [19].



# Apêndice A

## Continuidade do caminho

$$\alpha \xrightarrow{f} \alpha X + (1 - \alpha)Y$$

Nesse apêndice provaremos que, dados  $X$  e  $Y$  dois corpos convexos de  $\mathbb{R}^n$ , a função  $f : [0, 1] \rightarrow \mathcal{C}$ , definida por  $f(\alpha) = \alpha X + (1 - \alpha)Y$ , é uma função contínua. Sejam então  $\alpha_0 \in [0, 1]$  e  $\varepsilon > 0$ . Queremos encontrar  $\delta > 0$  tal que,  $|\alpha - \alpha_0| < \delta \Rightarrow d_H(f(\alpha), f(\alpha_0)) < \varepsilon$ .

Consideremos  $a = \sup\{\|x\|; x \in X\}$ ,  $b = \sup\{\|y\|; y \in Y\}$  e  $c = \max\{a, b\}$ . Portanto, se  $x \in X$  e  $y \in Y$ , vale

$$\begin{aligned} \|\alpha x + (1 - \alpha)y - (\alpha_0 x + (1 - \alpha_0)y)\| &\leq \|\alpha x - \alpha_0 x\| + \|(1 - \alpha)y - (1 - \alpha_0)y\| = \\ &= |\alpha - \alpha_0| \cdot \|x\| + |\alpha - \alpha_0| \cdot \|y\| = |\alpha - \alpha_0| \cdot (\|x\| + \|y\|) \leq \\ &\leq |\alpha - \alpha_0| \cdot 2c. \end{aligned} \tag{A.1}$$

Tomemos então  $\delta = \frac{\varepsilon}{4c}$  e  $\alpha \in B(\alpha_0, \delta)$  e seja  $z \in f(\alpha)$ . Sabemos que  $z \in f(\alpha) \Leftrightarrow z = \alpha x + (1 - \alpha)y$ , com  $x \in X$  e  $y \in Y$ . Logo  $z_0 = \alpha_0 x + (1 - \alpha_0)y \in \alpha_0 X + (1 - \alpha_0)Y$ . Por outro lado,  $\|z - z_0\| \leq |\alpha - \alpha_0| \cdot 2c < \delta \cdot 2c = \frac{\varepsilon}{2}$ , por (A.1). Portanto  $z \in B(z_0, \varepsilon/2)$ .

Resumindo, para cada  $z \in f(\alpha)$ , existe  $z_0 \in f(\alpha_0)$  com  $z \in B(z_0, \varepsilon/2)$ . Analogamente, para cada  $z_0 \in f(\alpha_0)$ , existe  $z \in f(\alpha)$  com  $z_0 \in B(z, \varepsilon/2)$ . Assim  $f(\alpha) \subset f(\alpha_0) + B(0, \varepsilon/2)$  e  $f(\alpha_0) \subset f(\alpha) + B(0, \varepsilon/2)$ .

Como  $f(\alpha) \subset f(\alpha_0) + B(0, \varepsilon/2)$  e  $f(\alpha_0) \subset f(\alpha) + B(0, \varepsilon/2)$ , então  $d_H(f(\alpha), f(\alpha_0)) \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$ .

# Apêndice B

## Uma propriedade dos conjuntos centralmente simétricos

Queremos mostrar que todo corpo convexo centralmente simétrico de  $\mathbb{R}^2$  está contido em um segmento de círculo simétrico com mesmo diâmetro e mesma largura mínima. Mas antes, mostraremos um teorema mais geral.

### Teorema B.1

Seja  $K$  um corpo convexo centralmente simétrico de  $\mathbb{R}^n$  com centro  $c$  e diâmetro  $D$ . Então existem  $E_1$  e  $E_2$  semi-espacos suporte de  $K$ , com faces  $\mathcal{H}_1$  e  $\mathcal{H}_2$ , respectivamente, tais que:

- (i)  $d(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) = \omega(K)$ ;
- (ii)  $K \subset E_1 \cap E_2 \cap B[c, D/2]$ ;
- (iii)  $d(c, \mathcal{H}_1) = d(c, \mathcal{H}_2)$ .

Antes de demonstrarmos esse teorema, precisaremos de um lema.

### Lema B.2

Se  $\mathcal{H}$  é um hiperplano com vetor normal unitário  $u$ ,  $x \notin \mathcal{H}$  e  $y \in \mathcal{H}$ , então  $d(x, \mathcal{H}) = |\langle x - y, u \rangle|$ .

**Prova:** do lema.

Sabemos que  $d(x, \mathcal{H}) = \inf \{d(x, z) \mid z \in \mathcal{H}\}$ . Mas  $d(x, z) = \|x - z\|$  e  $x - z = \langle x - z, v_1 \rangle v_1 + \dots + \langle x - z, v_{n-1} \rangle v_{n-1} + \langle x - z, u \rangle u$ , sendo  $\{v_1, \dots, v_{n-1}, u\}$  uma base ortonormal de  $\mathbb{R}^n$ .

Como  $\mathcal{H}$  é um hiperplano com vetor normal  $u$ , então  $H = \{z \mid \langle z, u \rangle = \alpha\}$ , com  $\alpha$  uma constante.

Seja então  $\{v_1, \dots, v_{n-1}, u\}$  uma base ortonormal de  $\mathbb{R}^n$ ,

$$\|x - z\|^2 = \sum_{i=1}^{n-1} \langle x - z, v_i \rangle^2 + \langle x - z, u \rangle^2 \geq \langle x - z, u \rangle^2 = |\langle x, u \rangle - \alpha|^2.$$

Portando  $d(x, \mathcal{H}) \geq |\langle x, u \rangle - \alpha|$ .

Tomando  $k = \sum_{i=1}^{n-1} \langle x, v_i \rangle v_i + \alpha u$ , temos que  $k \in \mathcal{H}$  e que  $\|x - k\| = \|\langle x, u \rangle u - \alpha u\| = |\langle x, u \rangle - \alpha|$ . Logo  $d(x, \mathcal{H}) = |\langle x, u \rangle - \alpha|$ .

Por outro lado,  $|\langle x - y, u \rangle| = |\langle x, u \rangle - \alpha|$ , pois  $y \in \mathcal{H}$ . Logo  $d(x, \mathcal{H}) = |\langle x - y, u \rangle|$ .  $\square$

**Prova:** do Teorema B.1.

(i) Sabemos que  $\omega(K) = \omega_u(K)$ , para algum  $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ , logo  $\omega(K) = \omega_u(K) = d(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ , sendo  $\mathcal{H}_1 = \{x \mid \langle x, u \rangle = H_u(K)\}$  e  $\mathcal{H}_2 = \{x \mid \langle x, -u \rangle = H_{-u}(K)\}$ , pela Proposição 2.5.

(ii) Além disso, pela Proposição 2.4,  $K \subset \{x \mid \langle x, -u \rangle \leq H_{-u}(K)\} \cap \{x \mid \langle x, u \rangle \leq H_u(K)\}$ . Chamemos então  $E_1 = \{x \mid \langle x, u \rangle \leq H_u(K)\}$  e  $E_2 = \{x \mid \langle x, -u \rangle \leq H_{-u}(K)\}$ .

Mostraremos que  $K \subset B[c, D/2]$ . Para isso seja  $x \in K$ , logo  $2c - x \in K$  e  $d(2c - x, x) = d(x, c) + d(c, 2c - x) = 2\|c - x\|$ , pois  $c$  está entre  $x$  e  $2c - x$ . Como  $d(x, 2c - x) \leq D$ , então  $\|c - x\| \leq D/2$  e  $K \subset B[c, D/2]$ .

(iii) Afirmo que se  $x_0 \in \mathcal{H}_1 \cap K$ , então  $2c - x_0 \in \mathcal{H}_2$ . Suponha, por absurdo, que  $2c - x_0 \notin \mathcal{H}_2$ , logo  $\langle 2c - x_0, -u \rangle < H_{-u}(K)$ , pois  $2c - x_0 \in K \subset \{x \mid \langle x, -u \rangle \leq H_{-u}(K)\}$ .

Por outro lado,  $x_0 \in \mathcal{H}_1 \Rightarrow \langle x_0, u \rangle = H_u(K)$ , portanto  $\langle 2c - x_0, -u \rangle < H_{-u}(K) \Rightarrow 2\langle c, -u \rangle + \langle x_0, u \rangle < H_{-u}(K) \Rightarrow 2\langle c, u \rangle > H_u(K) - H_{-u}(K)$ .

Seja então  $x_1 \in \mathcal{H}_2 \cap K$ , logo  $\langle x_1, -u \rangle = H_{-u}(K)$  e  $2c - x_1 \in K$ . Mas então

$$\begin{aligned} \langle 2c - x_1, u \rangle &= 2\langle c, u \rangle + \langle x_1, -u \rangle = 2\langle c, u \rangle + H_{-u}(K) > \\ &> H_u(K) - H_{-u}(K) + H_{-u}(K) = H_u(K). \end{aligned}$$

Contradição. Portanto  $2c - x_0 \in \mathcal{H}_2$ .

Como  $x_0 \in \mathcal{H}_1$  e  $2c - x_0 \in \mathcal{H}_2$ , então

$d(c, \mathcal{H}_1) = |\langle c - x_0, u \rangle|$  e  $d(c, \mathcal{H}_2) = |\langle c - (2c - x_0), u \rangle| = |\langle -c + x_0, u \rangle|$ . Portanto  $d(c, \mathcal{H}_1) = d(c, \mathcal{H}_2)$ .  $\square$

### Corolário B.3

Se  $K$  é um corpo convexo centralmente simétrico de  $\mathbb{R}^2$ , então  $K$  está contido em um segmento de círculo simétrico com mesmo diâmetro e mesma largura mínima.

**Prova:**

Sejam  $D = D(K)$ ,  $\omega = \omega(K)$  e  $c$  o centro de  $K$ . Tome então  $E_1$  e  $E_2$  dois semi-espacos suporte de  $K$  com faces  $\mathcal{H}_1$  e  $\mathcal{H}_2$ , respectivamente, tais que:

- (i)  $d(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) = \omega(K)$ ;
- (ii)  $K \subset E_1 \cap E_2 \cap B[c, D/2]$ ;
- (iii)  $d(c, \mathcal{H}_1) = d(c, \mathcal{H}_2)$ .

Como estamos em  $\mathbb{R}^2$ , então o conjunto  $C = E_1 \cap E_2 \cap B[c, D/2]$  é um segmento de círculo simétrico. Além disso,  $\mathcal{H}_1$  e  $\mathcal{H}_2$  são hiperplanos suporte paralelos de  $C$ , portanto  $\omega(C) \leq d(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) = \omega$ .

Como  $K \subset C \Rightarrow \omega = \omega(K) \leq \omega(C)$ , segue então que  $\omega(C) = \omega = \omega(K)$ .

Por outro lado  $K \subset C \subset B[c, D/2]$ , logo  $D = D(K) \leq D(C) \leq D(B[c, D/2]) = D$ .  $\square$

# Apêndice C

## Uma caracterização dos conjuntos fechados de $\mathbb{R}^n$

### Teorema C.1

$F \subset \mathbb{R}^n$  é fechado se, e somente se,  $\forall x \in \mathbb{R}^n, \exists y \in F$  tal que  $d(x, y) = d(x, F)$ .

#### Prova:

( $\Rightarrow$ ) Seja  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $\alpha = d(x, F)$ . Como  $\alpha = \inf\{d(x, z) \mid z \in F\}$ , então existe uma seqüência  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de elementos de  $F$  satisfazendo  $d(x, y_n) \rightarrow \alpha$ .

Seja então  $\varepsilon > 0$ , logo existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que,  $d(x, y_n) < \alpha + \varepsilon, \forall n \geq N$ , ou seja,  $y_n \in B[x, \alpha + \varepsilon], \forall n \geq N$ . Assim a seqüência  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é limitada, portanto existe uma subseqüência  $(y_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$  convergente.

Suponhamos, sem perda de generalidade, que  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é convergente e  $y_n \rightarrow y$ . Sendo  $F$  fechado,  $y \in F$ .

Como  $y_n \rightarrow y$  e a função  $z \mapsto d(x, z)$  é contínua, então  $d(x, y_n) \rightarrow d(x, y)$ . Por outro lado,  $d(x, y_n) \rightarrow \alpha$ , ou seja,  $d(x, y) = \alpha$ .

( $\Leftarrow$ ) Suponhamos agora que  $\forall x \in \mathbb{R}^n, \exists y \in F$  tal que  $d(x, y) = d(x, F)$ . Seja então  $x$  um ponto de acumulação de  $F$ , logo existe uma seqüência  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de elementos de  $F$  com  $y_n \rightarrow x$ .

Seja também  $y \in F$  tal que  $d(x, y) = d(x, F)$ . Mas  $d(x, F) = 0$ , pois  $y_n \rightarrow x$ . Portanto  $d(x, y) = 0$  e  $x = y \in F$ .  $\square$

# Referências Bibliográficas

- [1] BIERI, H.: *Mitteilung zum Problem eines konvexen Extremerkörpers*. Arch. Math., 1:462–463, 1949.
- [2] BLASCHKE, W.: *Eine Frage über konvexe Körper*. Jahresbericht Deutsch. Math. Ver., 25:121–125, 1916.
- [3] BONNESSEN, T.; FENCHEL, W.: *Theorie der Konvexen Körper*. Springer.
- [4] BÖRÖCZKY, K.; HERNÁNDEZ CIFRE, M. A.; SALINAZ MARTINEZ G.: *Optimizing area and perimeter of convex sets for fixed circumradius and inradius*. Monatsh. Math., 138(2):95–110, 2003.
- [5] FAVARD, J.: *Problèmes d'extrémums relatifs aux courbes convexes I*. Ann. École norm., 46:345–369, 1929.
- [6] FAVARD, J.: *Problèmes d'extrémums relatifs aux courbes convexes II*. Ann. École norm., 47:313–324, 1930.
- [7] GROEMER, H.: *Eine neue Ungleichung für konvexe Körper*. Math. Z., 86:361–364, 1965.
- [8] HENK, M.; TSINTSIFAS, G.: *Some inequalities for planar convex figures*. Elem. Math., 49(3):120–125, 1994.
- [9] HERNÁNDEZ CIFRE, M. A.; SALINAS MATÍNEZ, G.: *Some optimization problems for planar convex figures*. Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl., part I, (70):395–405, 2002.
- [10] HERNÁNDEZ CIFRE, M. A.; SALINAS MATÍNEZ, G.; SEGURA GOMIS S.: *Complete systems of inequalities*. J. Ineq. Pure Appl. Math., 2(1):39–49, 2001.
- [11] HERNÁNDEZ CIFRE, M. A.; SALINAS MATÍNEZ, G.; SEGURA GOMIS S.: *Complete systems of inequalities for centrally symmetric planar convex sets*. Intern. Math. J., 2(1):39–49, 2002.
- [12] HERNÁNDEZ CIFRE, M. A.; PASTOR GONZÁLES, J. A.; SALINAS MATÍNEZ G.; SEGURA GOMIS S.: *Complete systems of inequalities for centrally symmetric convex sets in the  $n$ -dimensional space*. Arch. Inequal. Appl.
- [13] HERNÁNDEZ CIFRE, M. A.: *Is there a planar convex set with given width, diameter and inradius?* Amer. Math. Monthly, 107:893–900, 2000.

- [14] HERNÁNDEZ CIFRE, M. A.: *Optimizing the perimeter an the area of convex sets with fixed diameter an circunradius*. Arch. Math. (Basel), 79(2):147–157, 2002.
- [15] HERNÁNDEZ CIFRE, M. A.; SEGURA GOMIS, S.: *The missing boundaries of the Santaló diagrams for the cases  $(d, \omega, R)$  and  $(\omega, R, r)$* . Discrete Comput. Geom., 23(3):381–388, 2000.
- [16] KUBOTA, T.: *Einige Ungleichheitsbeziehungen über Elinien und Eiflächen*. Sci. Rep. Tôhoku Univ., 12:45–65, 1923.
- [17] LAY, STEVEN R.: *Convex sets and their applications*. Krieger Publishing Company, 1992.
- [18] MUNKRES, JAMES R.: *Topology, a first curse*. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, 1975.
- [19] SALINAS MARTÍNEZ, G.: *Sistemas Completos de Desigualdades*. Tese de Doutorado, Universidad de Murcia, 2002.
- [20] SANGWINE-YAGER, J. R.: *The missing boundary of the Blaschke diagram*. Amer. Math. Mounthly, 96:233–237, 1989.
- [21] SANTALÓ, L. A.: *Sobre los sistemas completos de desigualdes entre tres elementos de una figura convexa plana*. Math. Notae., 17:82–104, 1961.
- [22] SCHNEIDER, ROLF: *Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory*. Cambridge University Press, 1934.
- [23] SHOLANDER, M.: *On certain minimum problems in the theory of convex curves*. Trans. Amer. Math. Soc., 73:139–173, 1952.
- [24] YAGLOM, I. M.; BOLTYANSKII, V. G.: *Convex Figures*. Reinehart and Winston, 1961.
- [25] YAMANOUTI, M.: *Notes on closed convex figures*. Proc. Phys.-Math. Soc. Japan, 14:605–609, 1932.

# Índice Remissivo

- $\mathcal{C}$ , 37
- $\mathcal{C}$ , 37
- $\bigcirc$ , 57
- $\langle \odot \rangle$ , 58
- KER, 2
- $\emptyset$ , 58
- $\mathcal{Y}$ , 58
- $B_H$ , 33
- $d_H$ , 32
- $\overline{C}$ , 6
- $\bigcirc$ , 58
- , 58
- $\bigoplus$ , 58
- $\triangle$ , 57
- $\triangle_D^\omega$ , 58
- $\triangle_o$ , 58
- $\triangle_{is}$ , 58
- $\omega = c$ , 58
- $\omega_A = c$ , 76
- $n$ -cubo, 33
- área, 48
- Cent, 58
  
- a.d., 8
- a.i., 8
- afim
  - combinação, 7
  - conjunto, 6
  - dependente, 8
  - independente, 8
  - subespaço, 3
- aproximação cúbica, 34
  
- capbody, 51
- Caratheodory, 10
- centróide, 13
- centralmente simétrico, 44
- circunraio, vi, 48
- combinação
  - afim, 7
  - convexa, 7
- conjunto
  - afim, 6
  - centralmente simétrico, 44
  - convexo, 1
  - de largura constante, 46
  - de Yamanouti, 50
- convexa
  - combinação, 7
  - envolvente, 10
- convexo
  - conjunto, 1
  - corpo, vi, 30
  - núcleo, 2
- coordenadas baricêntricas, 13
  
- diâmetro, 45
- Diagrama de Blaschke, 54
- distância de Hausdorff, 32
  
- face, 17
- função
  - área, 48
  - circunraio, 48
  - diâmetro, 45
  - inraio, 46
  - largura, 43
  - perímetro, 48
  - suporte, 41
  
- hiperplano, 4
  - suporte, 20
  
- inraio, vi, 46
- interior relativo, 4
  
- largura, 43
  - constante, 46
  - mínima, vi, 43

- lente simétrica, 50
- núcleo convexo, 2
- perímetro, 48
- polytope, 11
- pontos fronteira correspondentes, 31
- salsicha, 51
- segmento de reta, 1
- segmento simétrico de círculo, 51
- semi-espço, 17
  - suporte, 23
- simetrização central, 44
- simplex, 11
- sistema completo de desigualdades, vii, 52
- subdivisão cúbica, 33
- subespaço
  - afim, 3
- suporte
  - função, 41
  - hiperplano, 20
  - semi-espço, 23
- Teorema de Seleção de Blaschke, 34
- triângulo circular, 51
- vetor normal
  - exterior, 19
  - interior, 19
- Yamanouti
  - conjunto de, 50